КВАНТ
ЖУРНАЛ

1986

1 - 12

НОМЕР
1

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

КВАНТ

1 1986

Основан в 1970 году

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ
МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	Нашим новым читателям	To our new readers
3	Интервью с академиком Ю. А. Осипьяном	Interview with academician Yu. A. Ossipyan
7	*И. Г. Башмакова, А. И. Лапин.* Пифагор	*I. G. Bashmakova, A. I. Lapin.* Pythagoras
13	*Л. Г. Асламазов.* Следы на песке и ... строение вещества	*L. G. Aslamazov.* Footsteps in the sand ... and the structure of matter
	Математический кружок	**Mathematics circle**
19	*Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер.* Комбинаторика — многочлены — вероятность	*N. B. Vasiliev, V. L. Gutenmakher.* Combinatorics — polynomials — probability
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
24	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
28	Избранные школьные задачи	Selected school problems
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
29	Задачи	Problems
30	*Н. Н. Иванова.* Восстанови стертую фигуру!	*N. N. Ivanova.* Recovering erased figures
32	**Калейдоскоп «Кванта»**	**Kvant's kaleidoscope**
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
34	Задачи М961—М965; Ф973—Ф977	Problems M961—M965; P973—P977
36	Решения задач М941—М945; Ф953—Ф957	Solutions M941—M945; P953—P957
42	Из писем читателей	From our mail
	Полупроводниковые элементы вычислительной техники	**Semiconducting elements in computers**
44	V. Элементарные логические операции	V. Elementary logical operations
	Искусство программирования	**The art of programming**
46	*С. А. Абрамов.* Поиск в упорядоченной совокупности и упорядочение	*S. A. Abramov.* Search in an ordered set and ordering
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
49	*И. Г. Габович.* Основные углы в правильной пирамиде	*I. G. Gabovich.* The principal angles of regular pyramids
52	**Варианты вступительных экзаменов**	**Entrance examination problems**
	Информация	**Information**
56	Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу (ВЗМШ)	Entrance requirements to the All-Union mathematics correspondence school
57	Новый прием на заочное отделение Малого мехмата	Entrance requirements to the Maly Mekhmat correspondence school
58	Заочная физико-техническая школа при МИСиСе	The MISIS physico-technical correspondence school
59	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Смесь (*23, 58*)	**Miscellaneous** (*23, 58*)
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Новое в кодексе (3-я с. обложки)	New rules *(3rd cover page)*

Модель кристаллической решетки сплава медь — золото, воспроизведенная на первой странице обложки,— характерный пример наших представлений о строении твердого тела. О том, как развиваются эти представления, каково состояние дел в физике твердого тела сегодня, читайте в интервью с академиком Ю. А. Осипьяном

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1986

Нашим новым читателям

Дорогие читатели! Перед вами научно-популярный физико-математический журнал для школьников. Ежемесячно он будет приносить в ваш дом квант новых знаний. Чтобы вы лучше ориентировались в помещаемых материалах, представляем вам основные рубрики и разделы журнала.

Открывают журнал статьи о достижениях науки и ее практических применениях; о фундаментальных понятиях физики и математики; статьи, посвященные истории науки и замечательным ученым.

Новости науки. В этом разделе помещаются небольшие заметки о новейших научных достижениях.

Лаборатория «Кванта». Опыты, которые описываются в статьях под такой рубрикой, вы можете выполнить самостоятельно. Это поможет вам развить наблюдательность, научиться делать простые приборы.

Математический кружок. В этом разделе публикуются циклы задач, объединенные единой темой или общими методами решения.

Школа в «Кванте». Статьи этого раздела связаны со школьной программой, они разъясняют наиболее трудные для понимания вопросы школьного курса.

Калейдоскоп «Кванта». Мы надеемся, что этот разворот, посвященный, как правило, какому-либо физическому или математическому понятию, может быть использован для оформления школьных кабинетов физики и математики.

«Квант» для младших школьников. Под этой рубрикой публикуются занимательные задачи, требующие не столько конкретных знаний, сколько сообразительности, внимательности, умения мыслить логически. Статьи, помещаемые в этом разделе, интересны, как правило, и старшеклассникам.

Задачник «Кванта». Мы предлагаем читателям задачи, решение которых требует умения мыслить самостоятельно, творчески. Журнал ежегодно проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Победители конкурса получают право участвовать в республиканских турах Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников.

Искусство программирования. Полупроводниковые элементы вычислительной техники. Материалы этих разделов должны помочь вам лучше освоить школьный курс «Основы информатики и вычислительной техники».

Практикум абитуриента. Статьи этого раздела адресованы, в первую очередь, тем, кто готовится к вступительным экзаменам в вузы. Читатели найдут здесь подробное разъяснение многих вопросов школьных курсов математики и физики.

Варианты вступительных экзаменов. Содержание этого раздела — задания по математике и физике, которые предлагали своим абитуриентам университеты, технические и педагогические институты.

Олимпиады. Задачи, предлагавшиеся на различных этапах Всесоюзных олимпиад школьников и учащихся ПТУ, на Международных олимпиадах, рассказы о том, как проходят эти олимпиады,— таково содержание этого раздела.

Информация. Под такой рубрикой помещаются материалы, в которых рассказывается о научных обществах учащихся, о физико-математических турнирах и праздниках; регулярно публикуется информация о заочных и вечерних школах при различных вузах страны.

Ответы, указания, решения. Название этого раздела говорит само за себя.

Мы стараемся, чтобы в каждом номере появлялась страница «Квант» улыбается». Под рубрикой «Наш календарь» мы помещаем небольшие заметки о юбилейных датах в физике и математике. Довольно часто появляются в журнале «Задачи наших читателей», «Задачи для исследования», математические головоломки, кроссворды; эти материалы мы объединяем рубрикой «Смесь».

Интервью с академиком Ю. А. Осипьяном

Главный редактор нашего журнала академик Ю. А. Осипьян — известный ученый-физик, директор Института физики твердого тела АН СССР, профессор Московского физико-технического института. В беседе, проведенной с Ю. А. Осипьяном корреспондентом «Кванта» и предлагаемой сегодня нашим читателям, речь пойдет о становлении молодого ученого, о роли личности в науке, о стремительно развивающемся новом направлении — дислокационной физике, об особенностях работы современного исследователя.

— Юрий Андреевич, каким был ваш путь в науку?

— Я закончил школу в 1949 году. Но уже раньше, в 8—9 классах, мне было ясно, что я буду заниматься физикой. Меня очень интересовала физика металлов. Где же учиться дальше?

Тогда только возникали факультеты, где комбинировалось университетское — широкое — физическое образование с реальными знаниями в конкретных областях. И я узнал, что наукой о металлах смогу заниматься на инженерно-физическом факультете Московского института стали и сплавов (сейчас он называется физико-химическим факультетом). Решил пойти туда, поступил и был очень доволен, поскольку в институте подобралась целая плеяда хороших учителей как в теоретической, так и в экспериментальной областях физики. Мне удалось почерпнуть там довольно много полезных знаний, что сказывается на протяжении всей моей научной жизни.

Когда подошло время дипломной работы, жизнь свела меня с академиком Г. В. Курдюмовым, признанным лидером нашей физики металлов. В Институте металлофизики, который он возглавлял, под руководством профессора Б. Я. Любова я делал диплом.

Поначалу я стал было заниматься экспериментом. Но, анализируя условия опытов, столкнулся с теоретическими задачами. Почувствовал вкус к теории; мне думалось, что и как теоретик смогу кое-что сделать. Те знания физики и математики, что накопились к тому времени, позволили решить интересную, как мне кажется, задачу — о механизме низкотемпературных фазовых превращений в металлах.

— Это была фактически ваша первая научная работа?

— Да. С фазовыми превращениями, связанными с изменениями агрегатного состояния, мы сталкиваемся часто — это плавление, кристаллизация, конденсация. Однако и в уже затвердевших металлах могут происходить фазовые превращения. Проблема состояла в том, как объяснить, что некоторые из них идут при низких температурах очень быстро. По законам, которым подчиняются обычные фазовые переходы, эти превращения должны идти годами — концы с концами не сходились...

Возникла идея: не оказывают ли влияние при таких температурах на эти явления квантовые эффекты? Надо отметить, что применение квантово-механических представлений к фазовым переходам тогда было еще в диковинку. Однако, когда я провел расчеты с учетом этого нового фактора, оказалось, что «все хорошо сходится». Работа, честно говоря, мне очень нравилась, и она стала довольно быстро известной среди металловедов.

И вот, защитив диплом, я получил квалификацию теоретика. Правда, меня к тому времени уже не удовлетворяли мои познания в математике и теоретической физике. Я решил продолжить образование, углубить, увеличить эти знания и — поступил на механико-математический факультет МГУ. На первый курс! Работал в институте Курдюмова, вновь уклонился в экспериментальную физику, но математики не бросал, продолжал учиться по вечерам и прошел весь курс мехмата. И хотя жизнь сложилась так, что занимаюсь я экспериментальной физикой твердого тела, математическая «подкованность» чрезвычайно мне помогает...

— Известно, что организатором нового института — физики твердого тела — вы стали в 30 лет. Не отвлекло ли это вас от непосредственной научной работы?

— Отвлекло, и еще как! Но меня успокаивала и обнадеживала мысль о том, что как только институт будет сформирован, сразу же многократно увеличатся возможности для проведения экспериментов. Есть еще одна сторона дела: при создании института и во время дальнейшей работы в нем мне довелось сотрудничать со многими выдающимися учеными, оказавшими огромное влияние на нашу деятельность. Судите сами.

Конечно же, среди них был мой научный руководитель академик Г. В. Курдюмов, сформулировавший научные направления нового учреждения и поручивший мне возглавить его. Это и тогдашний президент АН СССР М. В. Келдыш. Он тоже не побоялся моей молодости и решительно поддержал мое назначение. Академик Н. Н. Семенов, директор Института химической физики, активно мне помогал и предоставил возможность создать наш институт в недрах своего. И когда еще не было даже здания, мы могли сколачивать научный коллектив.

На научную проблематику сильнейшим образом влияли сотрудники Института физических проблем во главе с академиком П. Л. Капицей. С ним мне тогда приходилось много раз беседовать и пользоваться его советами. Я счастлив, что в то время мне довелось общаться с Л. А. Арцимовичем, академиком-секретарем Отделения общей физики и астрономии...

Отрадно вспомнить, что тогда нам помогали многие физики, работавшие в других институтах,— ныне академики Б. К. Вайнштейн, А. И. Шальников, член-корреспондент АН СССР Ю. В. Шарвин. Ведь долгое время я был единственным штатным сотрудником нового института, ездил по проектным организациям, рисовал, как все будет расположено. Не было абсолютно ничего — лес и болото в Черноголовке под Москвой.

— И вот институт был создан и действует почти четверть века. Оправдались ли ваши надежды?

— Да, сейчас я с удовлетворением могу сказать, что коллектив у нас неплохой, работоспособный, и мы приобрели довольно хорошую репутацию физического института в системе Академии наук, получили интересные и значимые результаты. Но наши успехи обязательно надо поделить с другими институтами, расположенными в Черноголовке, с которыми мы тесно взаимодействуем. Разумеется, это Институт химической физики. Его сотрудники, очень хорошо зная химию, развивают новые методы воздействия на твердое тело, синтезируют новые материалы. Без контакта с ними нам было бы трудно.

Не можем мы обойтись и без каждодневного общения с учеными из Института теоретической физики имени Л. Д. Ландау. Кстати, это научное подразделение возникло за счет части сотрудников теоротдела Института физических проблем, которых я в свое время «вербовал» к нам в институт. Но тогда же родилась более широкая идея — не ограничиваться решением задач теории твердого тела, а заняться также теоретическими проблемами гидродинамики, взрыва, ядерной физики, то есть создать в Черноголовке некий «мозговой центр» теоретической физики. Это и было сделано. И вот рядом с нами стали работать выходцы из школы академика Л. Д. Ландау — ныне академики и члены-корреспонденты АН СССР А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, И. М. Халатников. В этот институт затем пришли крупные ученые — академики А. Б. Мигдал, С. П. Новиков, член-корреспондент АН СССР А. И. Ларкин, профессора В. Л. Покровский, Я. Г. Синай и другие. Конечно, это уникальное собрание физиков-теоретиков и математиков в одном месте.

Я думаю, что такой «концентрации» теоретической мысли, в том числе и по теории твердого тела, нет нигде в мире. Вот видите, говоря о науке, нельзя не сказать о личностях.

А почему я так подробно остановился на теоретиках? Да просто многие проблемы без них вообще невозможно решать. Кроме того, общение с теоретиками специфично, оно носит характер стимуляции. Если вы хотите пойти к теоретику, чтобы что-то спросить, вам надо подрасти до уровня конкретной постановки вопроса, разговаривать с ним на особом языке. Все это требует предварительной работы и осмысливания. Считаю, что контакты с теоретиками повышают квалификацию экспериментаторов.

— Юрий Андреевич, а чем занимались именно вы в новом институте? Как реализовались ваши личные научные планы?

— Пока строительство института продвигалось, я продолжал размышлять о некоторых аспектах физической природы прочности твердых тел.

Известно, что кристаллов идеальной структуры практически нет. Они всегда имеют дефекты, в частности так называемые дислокации — одномерные нарушения кристаллической решетки, линии обрыва атомных плоскостей в кристалле. Так вот, теория дислокаций служила объяснением процессов пластической деформации и прочности, таково было основное назначение этой теории. А хотелось выяснить, влияют ли дислокации не только на механические, но и на физические свойства твердого тела? На его электрические, оптические, магнитные свойства? Я попытался выяснить, взаимодействуют ли дислокации с электронами? И как это взаимодействие выражается в поведении электронов и дислокаций? Оказалось, что здесь кроется ответ на многие вопросы, которые стояли тогда в физике твердого тела.

Например, был открыт фотопластический эффект, перевернувший, в общем, представления о природе прочности кристалла. Считалось, что для того чтобы осуществить пластическую деформацию кристалла, надо что-то «сотворить» с кристаллической решеткой, что изменения в состоянии электронов не могут повлиять на пластические свойства.

Но вот мне вместе с моей сотрудницей И. Б. Савченко удалось наблюдать следующее. При включении света прочность некоторых кристаллов возрастала, их сопротивление пластической деформации увеличивалось на 30—40, а иногда и на 100 процентов. Выключали свет — прочность падала до исходного значения. Это было очень странно, поскольку, как мы знали, тот свет, который мы включали, с решеткой ничего не делает, только — с электронами, а они-то на прочность не должны влиять!

Десять лет кропотливой — и экспериментальной, и теоретической — работы позволили установить природу этого, теперь широко известного, эффекта. Свет возбуждал электроны, их состояние влияло на дислокации, а уж дислокации — на пластичность.

С другой стороны, присутствие в кристалле дислокаций сказывается на его электрическом сопротивлении и других электрических свойствах. И тут мы набрели на множество новых явлений. В общем, возникла довольно обширная область, которую мы называем дислокационной физикой. Это и есть до сих пор предмет моей — и многих моих учеников — научной деятельности. И надо сказать, что работы нашего института в значительной мере определяют состояние этой научной области.

— А каково на сегодня состояние дел в физике твердого тела вообще?

— Сегодняшний день характерен тем, что роль и объем исследований по физике твердого тела заметно растут. Ее, так сказать, удельный вес внутри всей физики увеличивается. Это выражается в том, что ею занимается все больше научных сотрудников, в нее направляется больше ассигнований, больше выделяется оборудования, соответственно и она дает больше «продукции».

В физике твердого тела много фундаментальных проблем. Это только может показаться, что она занята частными вопросами. Ничего подобного! Например, недавно удалось провести такой эксперимент, который дает возможность определить с большой точностью значение мировой константы — отношения заряда электрона к его массе. Такого в твердотельных экспериментах раньше не было. Показателем общественной оценки работ по физике твердого тела служит и то, что каждые пару лет ученым, занимающимся ею, присуждается Нобелевская премия.

Если же коснуться приложений этой научной области к практике, то я осмелюсь сказать, что физика твердого тела дает больше, чем всякая другая область. Ну вот, смотрите, я назову лишь три направления.

Первое: Конструкционные материалы — все, из чего построены здания и машины, все материаловедение. Ученым необходимо «подложить» физические знания под понимание происходящих здесь процессов.

Второе. Регулирование и автоматика. Здесь всякий раз в «сердце» приборов — датчик какого-либо сигнала. Как правило, это твердое тело — кусочек полупроводника, металла. А дальше вся система «занята» усилением или переработкой полученного сигнала.

И третье. В основе научно-технической революции, связанной с вычислительной техникой, компьютеризацией, лежит физика твердого тела. Без ее достижений в принципе не были бы возможны современные ЭВМ, потому что только твердотельные электронные схемы — при разумных габаритах — могут переработать громадный необходимый объем информации.

Так что физика твердого тела — фундамент для решения очень многих прикладных задач, с ней связано немало вопросов интенсификации производства, технической реконструкции народного хозяйства. Этим вопросам сегодня уделяется огромное внимание. В осуществление планов ускорения научно-технического прогресса, которые намечает партия, наша наука призвана внести весомый вклад.

— Зачастую школьники представляют себе, что заниматься физикой можно, лишь будучи «винтиком» в громадном коллективе научных сотрудников. Так ли это?

— И да и нет. Скажем, работы по ядерной физике, физике элементарных частиц требуют одновременных усилий большого числа людей, особенно в эксперименте. Необходимы огромные машины — ускорители, ядерные реакторы. И чтобы создать их, и чтобы обслуживать и ставить опыты, нужны действительно большие коллективы.

В нашем же деле, в физике твердого тела, многие эксперименты проводятся, подчас, как в классической физике — одним-двумя исследователями. Например, те опыты, о которых я рассказал. И поэтому разумная постановка эксперимента нередко играет не менее важную роль, чем уникальные технические возможности его реализации. Еще есть место для остроумных, я бы сказал, индивидуальных опытов.

Вот эта манера работы отразилась на том, что наш институт построен как коллектив в значительной мере самостоятельно работающих сотрудников. Мы всегда, правда, приветствуем взаимодействие, но не иерархическое, а как людей равных, соратников.

Не в первый раз я говорю сегодня о личности в науке. Наверное, потому, что на меня оказали большое влияние два человека — академики Г. В. Курдюмов и П. Л. Капица. Оба известны как люди, сделавшие в науке сами что-то конкретное, хотя, конечно, это и руководители, и организаторы научной работы целых коллективов. Мне хотелось бы воспитать своих сотрудников и учеников так, чтобы они ни в коей мере не забывали этого и всячески старались проявить свою индивидуальность. Говоря же о физике твердого тела, я хочу подчеркнуть, что это такая область физики, где просто необходимы творческие люди.

— Можно ли это рассматривать как приглашение читателям «Кванта»?

— Конечно, но я не хотел, чтобы в данном случае речь шла лишь о физике твердого тела. Вообще заниматься физикой — очень интересно. Я просто сочувствую тем людям, которые не интересуются физикой, они просто не подозревают, как это увлекательно. Способность «переварить» одновременно большое количество информации, построение логических схем, проверка гипотез, определенность получаемых результатов — всем этим богата физика. И сколько еще областей, в которых можно приложить свои силы, сколько романтики в занятиях этой наукой! Только, думаю, не надо ждать, когда знания о том, где учиться и чем заниматься, придут к вам сами. Эти знания надо искать, добывать. А соприкосновение с ними, безусловно, поможет обретению дополнительного интереса к нашей области деятельности, а именно — к науке, конкретно — к физике.

Пифагор

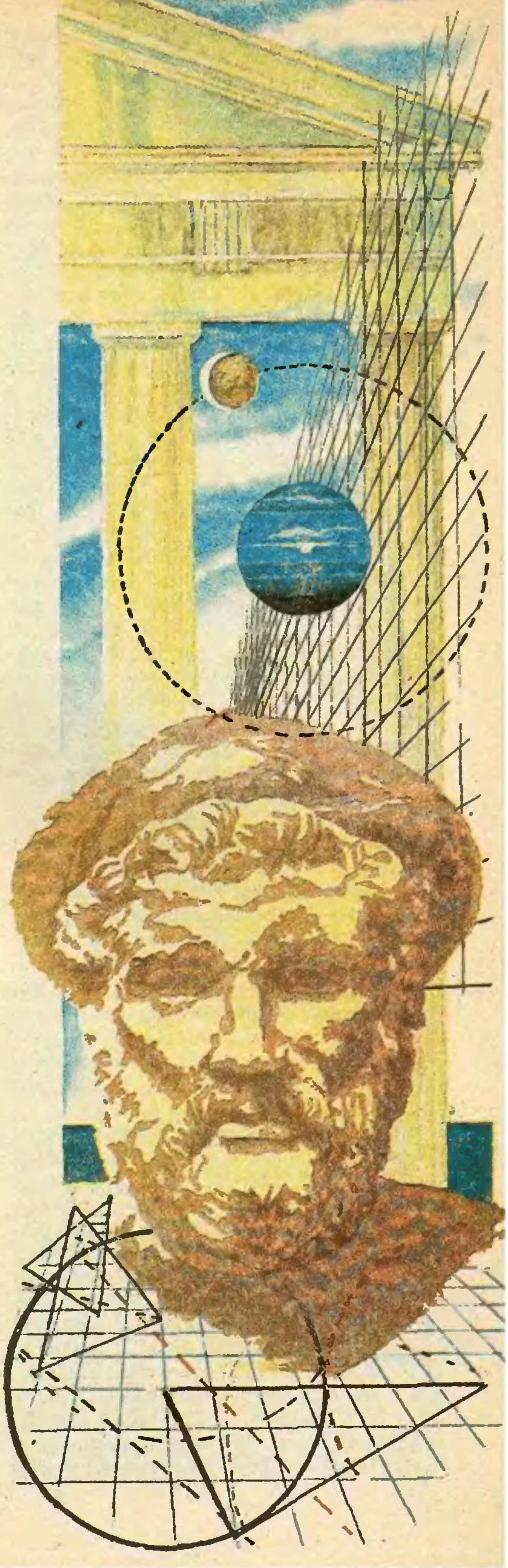
Доктор физико-математических наук
И. Г. БАШМАКОВА,
кандидат физико-математических наук
А. И. ЛАПИН

В списке величайших математиков от древности до наших дней на первом месте, безусловно, должен стоять Пифагор. Не только потому, что он — первый известный нам великий математик. С именем Пифагора и с его эпохой связано возникновение математики как науки, ее превращение из набора полезных правил и рецептов в абстрактную дедуктивную науку.

Абстрактная дедуктивная наука... Что это значит? Прежде чем ответить на этот вопрос, остановимся на жизни Пифагора и его эпохе.

Эпоха. Время, в которое жил этот величайший ученый,— VI век до н. э.,— было особой эпохой не только в Греции, но и почти во всей ойкумене — известном грекам обитаемом мире. Как весной, не сговариваясь, сразу зацветают все яблони, точно так же в это время в различных местах тихой заводи Старого мира поднимаются могучие волны: возникают новые идеи и учения. В Греции того времени появляются первые натурфилософы: Фалес, Анаксимандр, Пифагор, Парменид, Гераклит, Эмпедокл; величайшие лирические поэты: Архилох и Сапфо; первые создатели трагедий: Фриних и Эсхил. Жизнь повсюду бьет ключом, возникают многочисленные научные и философские школы, религиозные секты,— все они стремятся осмыслить и объяснить строение Вселенной и место в ней человека. В это же время в Греции рождается новый государственный строй — демократия,— которого не знало ни одно предшествующее государство.

Жизнь. О жизни Пифагора сохранились самые отрывочные сведения. По наиболее распространенной версии, он родился около 570 года до н. э. на ионийском острове Самосе, славившемся замечательными художественными и техническими сооружениями. Назовем храм Геры и знаменитый водопровод, проходивший через тун-



нель, который строители начали копать с обеих сторон горы, причем расчеты были настолько точными, что оба хода аккуратно сошлись в глубине. Отцом Пифагора называют Мнесарха, известного камнереза. По словам античного биографа, будучи юношей, жаждущим знаний, Пифагор покинул родной остров, чтобы объехать мир, и побывал почти во всех эллинских и во многих чужеземных странах. Пифагор слушал знаменитых греческих ученых и восторгался чудесами Востока. Рассказывали, что он был в сокровенных святилищах Египта, посетил халдейских мудрецов и персидских магов, спускался в таинственную пещеру Крита, с которой был связан миф о сотворении богов.

Вернувшись на Самос, Пифагор нашел свою родину под тиранией Поликрата. Увидев, как говорит античный биограф, что тирания слишком сильна, чтобы «свободный человек мог с достоинством переносить произвол и деспотизм», он решил удалиться в Южную Италию, где тогда находились знаменитые эллинские колонии. Он поселился в италийском городе Кротоне, для граждан которого он составил законы. Рассказывают, что жители Кротона чтили Пифагора как полубога.

Вот и все более или менее достоверные сведения о жизни Пифагора. Кроме того, уже при жизни его окружал ореол легенд. Рассказывали, что, обходя чужеземные города, Пифагор исцелял больных, дикие звери позволяли ему гладить их, реки приветствовали его человеческими голосами, что его одновременно могли видеть в двух различных местах. Этим слухам способствовала как необыкновенная личность философа, так и его религиозно-мистическое учение.

Пифагорейский союз. Вскоре вокруг Пифагора возник многочисленный кружок преданных ему учеников, «ибо он настолько превзошел славой всех остальных, что вся молодежь хотела быть его учениками». Вскоре из них был организован пифагорейский союз или братство, которое было одновременно научным обществом, религиозным союзом и политическим клубом. Доступ в него был открыт не для всех. Испытуемый должен был пройти длительный искус; говорили даже, что ему предписывалось хранить молчание в течение пяти лет. Хотя через столетие после смерти Пифагора союз уже распался, почти все великие математики древности называли себя пифагорейцами.

Математическое доказательство. Мы говорили уже, что Пифагор был создателем математики как науки. Но разве до него люди не умели считать, складывать и умножать дроби, вычислять простейшие площади и объемы? Конечно, умели. Они умели даже решать квадратные уравнения! И все-таки математики как науки тогда еще не было. Математические знания, которые передавались почти без изменения из поколения в поколение на протяжении тысячелетий, не были организованы в систему — они походили скорее на собрание рецептов, в правильности которых можно было убедиться при решении конкретных задач.

Пифагор понял, что основой математики является доказательство. Где нет его — нет и математики. Что же такое доказательство и для чего оно нужно?

Допустим, мы хотим установить, что сумма углов треугольника равна 180°. Как это сделать? Поступим так: аккуратно нарисуем треугольник (тушью в тетради или мелом на доске) и измерим его углы с помощью транспортира. Сложив их, мы получим число, близкое к 180°. Что же мы выяснили? Только то, что нарисованный нами треугольник имеет сумму углов, равную, скажем, 180°01′. Мы можем продолжить наши измерения, рассматривая другие нарисованные треугольники, и будем всякий раз получать результат, близкий к тому, который мы хотим установить. Результаты будут приближенными, во-первых, потому, что линейка, которой мы пользовались, не будет абсолютно прямой (в чем можно убедиться, посмотрев на нее в лупу). Во-вторых, и углы, измеренные транспортиром, будут найдены не вполне точно. Но даже если бы нам удалось достать идеально точную линейку и транспортир, мы бы все-таки не установили наше предложение, потому что треугольников бесконечно много и мы никогда не сможем для всех них найти сумму углов.

Пифагор, видимо, первый пришел к мысли, что математика рассматривает абстрактные объекты (то есть идеально прямые линии без ширины, точки, не имеющие размеров, и т. д.) и что свойства их следует устанавливать не с помощью измерений, а с помощью рассуждений. Например, для доказательства теоремы о сумме углов треугольника нарисуем, как это делал Пифагор, произвольный треугольник (его можно рисовать от руки, не пользуясь линейкой) и проведем через его вершину B прямую LM, параллельную основанию AC (рис. 1). Тогда $\angle LBA = \angle BAC = \alpha$, а $\angle MBC = \angle BCA = \gamma$ (как накрест лежащие углы). Но сумма $\angle LBA + \angle ABC + \angle MBC$ составляет развернутый угол, то есть равна 180°. Значит, сумма углов любого треугольника будет равной 180°.

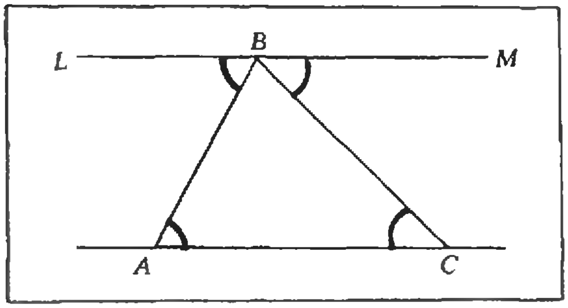


Рис. 1.

Однако при доказательстве мы опирались на свойства параллельных прямых, которые тоже нуждаются в доказательстве. Их доказательство будет опираться на какие-то другие свойства и так далее. Итак, избежав рассмотрения бесконечного числа треугольников, мы «попали в лапы» другой бесконечности — пришли к необходимости провести бесконечно много доказательств. Предложение A мы свели к предложению B, которое сведется к предложению C, то есть $A \Leftarrow B \Leftarrow C \Leftarrow \ldots$

Как же быть? Ясно, что на каком-то месте надо остановиться, какие-то предложения надо принять без доказательства. Но ведь так мы можем получить бесконечно много «недоказуемых» предложений, иными словами, снова «попасть в лапы» бесконечности! И вот следующая гениальная мысль Пифагора (или его современников) состояла в том, что в геометрии можно выбрать конечное число недоказуемых предложений (названных впоследствие аксиомами), из которых уже можно будет вывести все остальные.

Итак, математика, по Пифагору, изучает свойства абстрактных объектов; средством установления истины является доказательство, которое проводится, исходя из конечного числа отобранных предложений, принятых без доказательства.

Не надо думать, что эти идеи были восприняты сразу. На Пифагора и его последователей обрушился поток нападок, насмешек; некоторые ученые называли его неумным многознайкой и шарлатаном, говорили, что никто не видел линий без ширины или кругов, касающихся прямой только в одной точке. Однако Пифагор и его ученики продолжали развивать науку на новом прочном фундаменте.

«Математа». Так пифагорейцы называли свою систему знаний. «Математа» состояла из четырех частей: арифметики, геометрии, астрономии и учении о гармонии (теории музыки). Первые две из них были чисто теоретическими — мы и теперь относим их к математике, другие две были приложением арифметики и геометрии к изучению небесных тел и законов созвучий — мы бы отнесли их к математической физике.

Мы мало знаем об арифметике пифагорейцев. Достоверно известно, что в ней изучались целые числа и их отношения, то есть рациональные числа. Платон в своих диалогах называет арифметику «учением о четных и нечетных числах». Мы можем восстановить это учение по книге IX «Начал» Евклида, в конце которой (предложение 21-34) оно воспроизводится. Пифагор разделил все целые числа на четные (делящиеся на 2) и нечетные (не делящиеся на 2) и доказал фундаментальную теорему: *произведение двух чисел четно тогда и только тогда, когда по крайней мере один из сомножителей четен.* Это была первая теорема теории делимости, послужившая моделью для формулировки и доказательства более общей теоремы: *произведение двух целых чисел делится на простое число p тогда и только тогда, когда на него делится по крайней мере один из сомножителей.* Из этой последней теоремы следует закон однозначности разложения целого числа на простые множители. Аналогично из теоремы Пифагора следует, что каждое целое число однозначно представимо в виде $N=2^k N_1$, где N_1 — нечетное, а k — целое неотрицательное числа. Учение о четных и нечетных позволило пифагорейцам доказать ряд чрезвычайно важных теорем, к которым мы еще вернемся.

В геометрии Пифагора привлекали правильные фигуры и тела. Так, он знал, что плоскость можно «замостить» правильными треугольниками, квадратами и шестиугольниками. Он умел строить правильный пятиугольник — как выпуклый, так и звездчатый. Пятиконечная звезда считалась символом здоровья, а вскоре вообще стала опознавательным знаком для пифагорейцев, разбросанных по всему древнему миру. Венчала геометрию теорема Пифагора, которая имеет фундаментальное значение и в самой математике, и в ее приложениях. Как доказывал ее Пифагор? Нам это, увы, неизвестно.

Пифагор развил также учение о подобии, причем первоначально он, по-видимому, считал, что все отрезки соизмеримы, а значит, их отношение можно выразить рациональным числом, то есть в основе его теории подобия лежала арифметика рациональных чисел.

Открытие несоизмеримости. Обратимся теперь к величайшему открытию Пифагора, которое доставило ему немеркнущую славу и означало триумф математики. Мы говорим об открытии несоизмеримых отрезков, или, иначе — иррациональности.

Но что это такое? Пусть нам дан квадрат со стороной 1. Тогда, по теореме Пифагора, квадрат его диагонали равен

$$c^2=1^2+1^2=2.$$

Чему же равна сама диагональ c? Попробуем узнать это, извлекая корень из 2.

Если вы приметесь за эту работу, то получите сначала $c_1=1$, затем $c_2=1{,}4$, затем $c_3=1{,}41$ и т. д. Наконец, вы дойдете до 10-й цифры, и это занятие вам надоест. Вы скажете: «Хватит! Этот ряд никогда не кончится». Но мы возразим вам: «Продолжайте! А вдруг он закончится на 11-й или 20-й цифре?». Увы, мы снова «попали в лапы» бесконечности!

Но и здесь находит выход Пифагор. Он рассуждал так: пусть c можно выразить рациональной дробью p/q. Предполагаем, что p и q не могут быть оба четными (иначе мы бы сократили дробь на 2). Возводя равенство $\sqrt{2}=p/q$ в квадрат, получим $2p^2/q^2$ или

$$p^2=2q^2 \tag{1}$$

значит, p^2 делится на 2. Отсюда Пифагор на основании основной теоремы о четных и нечетных заключает, что и число p четно. Значит, q нечетно (иначе мы сократили бы дробь p/q на 2). Итак, $p=2p_1$. Подставляя в равенство (1), получим $q^2=2p_1^2$, то есть q^2 делится на 2, тогда по предыдущему и $q=2q_1$, значит, q четно. Мы пришли к противоречию, так как число q должно быть одновременно и четным, и нечетным, что невозможно.

Открытие несоизмеримых величин глубоко поразило всех эллинов. Это было теоретическое предложение, которое, как казалось, противоречило всей измерительной практике! Ведь на практике все величины соизмеримы: мы мерим их с точностью до сантиметра, миллиметра, микрона, но всегда получаем в результате рациональные числа. Открытие несоизмеримости можно сравнить с открытием Коперника, которое также противоречит нашим повседневным наблюдениям восходов и заходов Солнца, или с открытием геометрии Лобачевского. По преданию, пифагорейцы держали это открытие в тайне, желая, по-видимому, найти ему достойное место в своей «математа», а пифагореец Гиппас, который разгласил тайну, был за это покаран богами: он утонул, потерпев кораблекрушение. Знаменитый философ древности Платон (конец V — начало IV в. до н. э.) писал, что поздно узнал о несоизмеримости и что до этого он был подобен неразумному животному. Другой великий философ, ученик Платона, Аристотель, рассуждая о том, как возникла наука, писал: «все начинают с удивления (...), удивляются ли, например, загадочным самодвижущимся игрушкам, или солнцеворотам, или несоизмеримости диагонали, ибо всем, кто еще не усмотрел причину, кажется удивительным, если что-то нельзя измерить самой малой мерой» (Метафизика, книга 1, гл. 2).

Ученики и последователи Пифагора вскоре обнаружили, что кроме $\sqrt{2}$ имеется еще целый ряд иррациональных чисел: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ..., $\sqrt{15}$, или, как они говорили, что стороны квадратов с площадью 3, 5, 6, ..., 15 несоизмеримы со стороной единичного квадрата. В диалоге Платона «Теэтет» рассказывается, что пифагореец Феодор из Кирены прочел афинским юношам лекцию, где провел соответствующие доказательства, причем остановился на $\sqrt{17}$. Случайна ли была эта остановка? Мы приведем сейчас реконструкцию доказательства Феодора, из которой увидим, что «методом четных и нечетных» он и не мог провести доказательство для $\sqrt{17}$.

Будем действовать методом Пифагора: пусть нам надо доказать иррациональность $\sqrt{d}$, где d — целое неквадратное число. Если d четно, то доказательство проводится дословно так же, как и для $\sqrt{2}$. Пусть d нечетно, и предположим, что $\sqrt{d}=p/q$; тогда

$$p^2=dq^2. \tag{2}$$

Можно показать, что в этом случае p и q будут нечетными, то есть будут иметь вид $2n+1$, тогда квадраты их будут вида $4(n^2+n)+1$ или $8\frac{n(n+1)}{2}+1$, где $\frac{n(n+1)}{2}$ — целое. Подставляя эти значения в формулу (2) и группируя члены, получим

$$8\left(\frac{n(n+1)}{2}-d\frac{m(m+1)}{2}\right)=d-1.$$

Левая часть равенства делится на 8, значит, и правая должна иметь вид $8k$, то есть должно быть $d=8k+1$. Если число d не имеет такого вида, как, например, 5, 7, 11, 13, 15, то придем к противоречию, которое и опровергает сделанное предположение. Если же d имеет вид $8k+1$, то этот метод доказательства отказывается служить. Так будет для числа 9, но оно — полный квадрат, и для 17. Вот почему, вероятно, Феодор и остановился на этом числе.

Среди слушателей Феодора был молодой талантливый математик Теэтет.

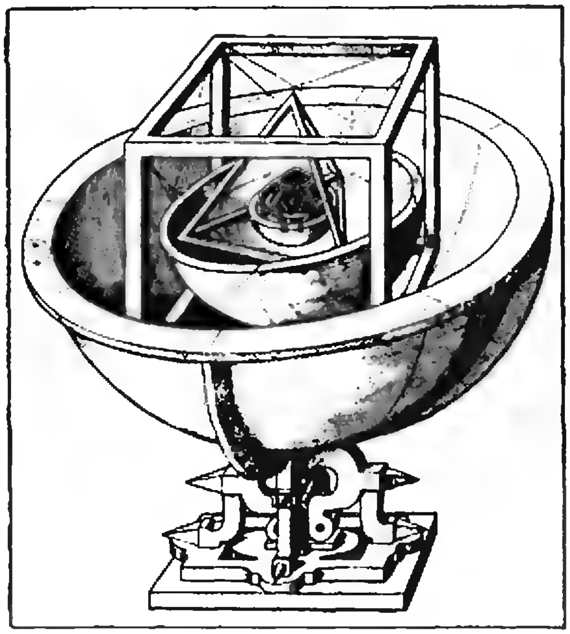


Рис. 2

Он-то и придумал, как можно провести доказательство иррациональности $\sqrt{d}$ для любого неквадратного числа d.

«Пифагоровы тройки». Так называются тройки целых чисел, удовлетворяющие неопределенному уравнению

$$x^2+y^2=z^2. \qquad (3)$$

Уже древние вавилоняне и египтяне умели находить некоторые из этих троек, например: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25). Однако задача состояла в том, чтобы найти все такие тройки. Пифагор (или кто-нибудь из его ближайших учеников) нашел формулы для определения бесконечного множества таких троек (правда, не все!), а именно:

$$x=a,\ y=\frac{a^2-1}{2},\ z=\frac{a^2+1}{2},$$

где a — целое нечетное число. Вышеприведенные тройки отвечают значениям $a=3$, 5, 7.

И все же первый шаг, сделанный пифагорейцами, был настолько значителен, что тройки (x, y, z), удовлетворяющие уравнению (3), до сих пор называются *пифагоровыми*.

Правильные тела. Правильные тела или многогранники — это пространственный аналог правильных многоугольников на плоскости. Но в то время как на плоскости существует бесконечно много правильных многоугольников, в пространстве имеется только пять правильных тел: тетраэдр, куб, додекаэдр, октаэдр и икосаэдр. Первые три из этих многогранников были известны Пифагору, который дал способ вписать их в сферу, последние два открыл уже знакомый нам Теэтет. Он же доказал, что других правильных тел не существует.

Пифагорейцы высоко оценили тот факт, что правильных тел существует только пять, и положили его в основу атомистической теории строения материи: они считали, что атомы четырех «стихий» или «начал», из которых состоит все сущее, а именно, Земли, Воды, Воздуха и Огня имеют соответственно форму куба, октаэдра, икосаэдра и тетраэдра. Оставалось еще одно правильное тело — додекаэдр. Ему отводилась особая роль: он определял форму Вселенной. Эта удивительная концепция математического атомизма оказала огромное влияние на двух великих ученых нового времени: Кеплера и Гейзенберга. Первый из них был одним из создателей научной астрономии, второй — квантовой механики. Еще до открытия трех законов движения планет (а именно в 1595 г.), Кеплер построил остроумную модель Солнечной системы с помощью правильных многогранников: шесть сфер, соответствующих шести планетам — Сатурну, Юпитеру, Марсу, Земле, Венере и Меркурию,— разделяются вписанными в эти сферы кубом, тетраэдром, додекаэдром, октаэдром и икосаэдром (рис. 2). О Плутоне, Нептуне и Уране во времена Кеплера известно не было, поэтому они не могли участвовать в его модели. В современной физике направление, идущее от Гейзенберга и продолжающее активно развиваться, связывает теорию элементарных частиц с изучением различных видов симметрий. В этом смысле можно считать, что элементарные частицы являются неким аналогом правильных тел.

Мы изложили, да и то очень кратко, главнейшие математические работы Пифагора. Но Пифагор, как и Ньютон, был не только великим математиком, но и гениальным физиком и астрономом. Именно он положил начало математической физике. До него астрономия и другие области естествознания носили скорее описательный характер. Так, хотя вавилонские астрономы составляли подробные таблицы, характеризующие движение Солнца, Луны и планет, но до Пифагора никто не пытался построить модель Солнечной системы. Пифагорейцы впервые построили математическую модель мира, они считали, что выразить закономерности природы можно с помощью числа, что «все есть число». Всю Вселенную, как писал Аристотель, он «признал гармонией и числом».

Гармония. Идея о возможности построения числовой модели мира была положена Пифагором в основу его теории музыки. Пифагор обнаружил, что качественные отличия в звучании струн обуславливаются чисто количественными различиями, а именно длиной струн. Одновременное звучание двух срун будет приятно для слуха, если длины их относятся как 1:2, или 2:3, или 3:4, что соответствует музыкальным интервалам в октаву, квинту и кварту. Оценивая открытие Пифагора, крупнейший немецкий физик Зоммерфельд писал, что день, когда оно было сделано, можно назвать днем рождения математической физики. И действительно, гармонически колеблющиеся системы сыграли огромную роль в физике. В 20-х годах нашего века аналогия между колеблющейся струной, издающей тоны определенной частоты, и атомом, испускающим излучения определенной частоты, которые также определялись отношениями целых чисел, послужила ключом для создания квантовой механики. Это обстоятельство было отмечено А. Эйнштейном:

> «Таким образом,— писал он,— мы открыли некоторое подобие между колебанием струны и атомом, испускающим излучение... Атом каждого элемента состоит из элементарных частиц: из тяжелых, составляющих ядро, и из легких — электронов. Такая система частиц ведет себя подобно маленькому акустическому инструменту, в котором производятся стоячие волны» (А. Эйнштейн, Л. Инфельд. *Эволюция физики.* М.: Наука, 1963, с. 224).

Астрономия. Пифагор полагал, что Земля имеет форму шара и что она находится в центре Вселенной. Вокруг нее располагаются восемь концентрических сфер — это сферы Луны, Солнца, пяти планет и неподвижных звезд. Внешняя сфера — сфера неподвижных звезд — делает за сутки полный оборот вокруг Мировой оси, увлекая в своем движении все семь остальных сфер. Однако Луна, Солнце движение, которое происходит в направлении, обратном суточному вращению сфер. Впоследствии пифагорейцы пришли к выводу, что и Земля не остается неподвижной, а вращается вместе с другими планетами вокруг Центрального огня. Эта мысль более чем на 2000 лет предвосхитила идею Коперника о том, что Земля не занимает центрального положения в Солнечной системе.

Замечательно, что Пифагор сразу же попытался соединить свои астрономические воззрения с теорией музыки. Он считал, что каждая планета, двигаясь по своей орбите, издает определенный звук, причем тона́ таковы, что при движении всех семи планет звучит «музыка сфер». Пифагор называл даже Солнечную систему семиструнной лирой. Он уверял, что может слышать эту дивную музыку, которую остальные люди услышат только после смерти.

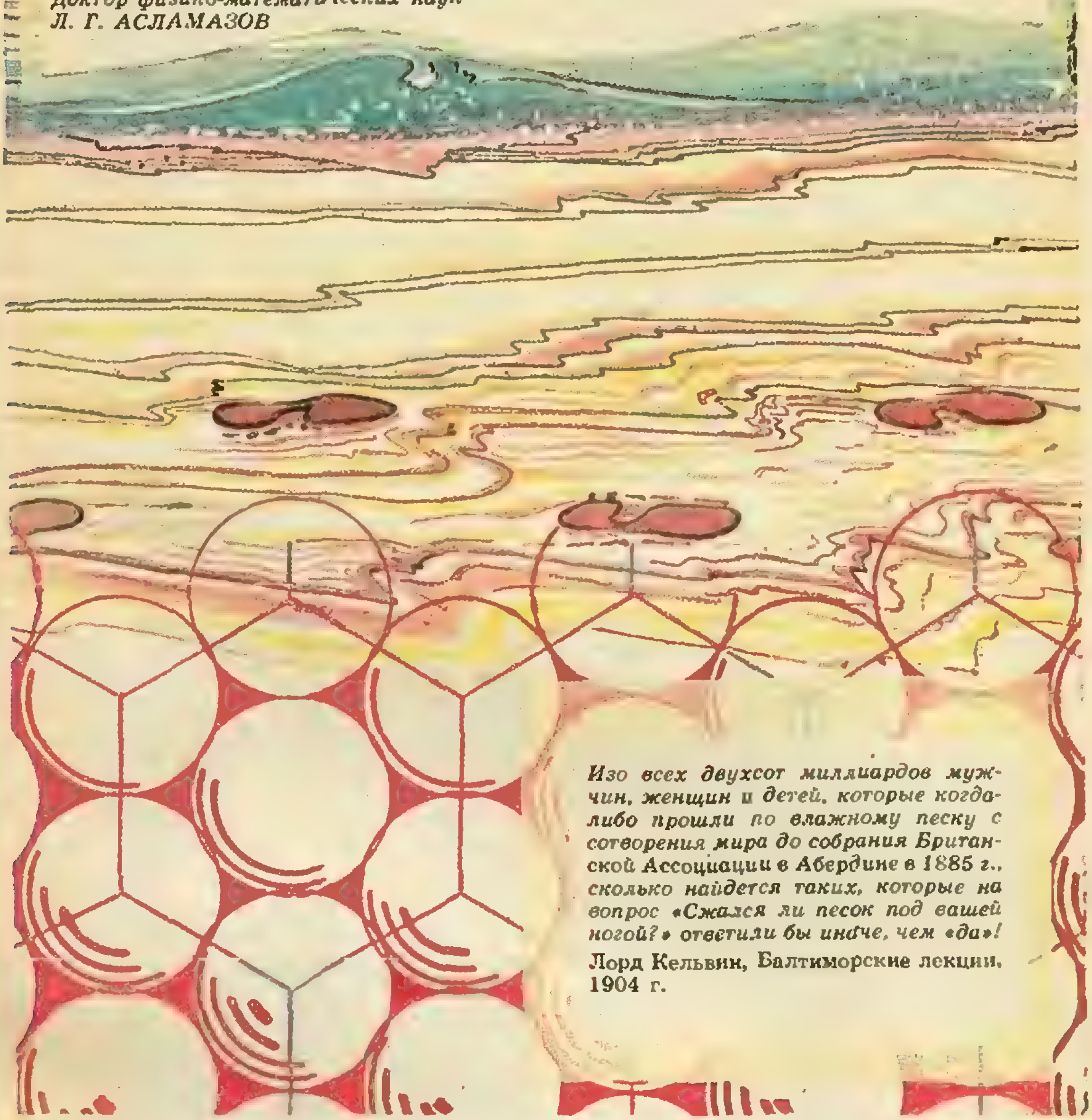
Мы уже говорили, что идеи Пифагора неожиданно получили новую жизнь в нашем веке, но уже в применении к миру атомов. Зоммерфельд, о котором мы уже упоминали, писал:

> «То, что нам сегодня удается понять на языке спектров,— это истинная музыка атомных сфер, созвучие целочисленных отношений, все возрастающие порядок и гармония при всем их многообразии.
>
> ...Все целочисленные закономерности спектральных линий и атомистики в конце концов вытекают из квантовой теории. Она представляет собой тот полный таинства инструмент, на котором природа исполняет спектральную музыку и ритмом которого она управляет строением атома и атомных ядер» (А. Зоммерфельд. *Пути познания в физике.* М., Наука, 1973, с. 255).

Говорят, что наука отличается от искусства тем, что в то время как создания искусства вечны, великие творения науки безнадежно стареют. К счастью, это не так, и творчество Пифагора — лучший тому пример. Он был не только величайшим, но и счастливейшим гением, так как его идеи и теории не сошли со сцены, продолжая до сих пор волновать умы. Ни одна из его научных идей не умерла. С каждым новым этапом науки они меняли свой облик, чтобы вновь будить и волновать ум и сердце ученых.

Следы на песке и...строение вещества

Доктор физико-математических наук
Л. Г. АСЛАМАЗОВ



Изо всех двухсот миллиардов мужчин, женщин и детей, которые когда-либо прошли по влажному песку с сотворения мира до собрания Британской Ассоциации в Абердине в 1885 г., сколько найдется таких, которые на вопрос «Сжался ли песок под вашей ногой?» ответили бы иначе, чем «да»!

Лорд Кельвин, Балтиморские лекции, 1904 г.

А задумывались ли вы над ответом на этот вопрос? На первый взгляд кажется, что, утрамбовывая песок, мы всегда делаем его более плотным, заставляем песчинки теснее прижаться друг к другу. Но в действительности дело может обстоять иначе. И доказательство этому — следы, которые остаются на некоторое время сухими, когда ступаешь по мокрому песку у берега моря или реки. Вот что говорил по этому поводу О. Рейнольдс — ученый, известный своими работами по гидродинамике,— в докладе на собрании Британской Ассоциации в 1885 г.: «Когда нога надавливает на песок, плотный после ушедшего прилива, участок, находящийся вокруг ноги, тотчас же становится сухим... Надавливание ноги разрыхляет песок, и чем сильнее оно, тем больше воды уходит... Оно делает песок сухим до тех пор, пока снизу не прибудет достаточное количество воды».

Так почему же в результате надавливания увеличивается пространство между песчинками, и имеющейся воды уже недостаточно, чтобы заполнить его? Этот вопрос не случайно волновал ученых XIX века. Ответ на него имеет самое прямое отношение к атомному строению вещества. Давайте и мы попробуем разобраться в этом вопросе.

Плотная упаковка шаров

Можно ли заполнить твердыми шарами все пространство? Разумеется, нет — между ними всегда остаются свободные промежутки. Доля пространства, занимаемого шарами, называется плотностью их упаковки. Чем теснее расположены шары, чем меньше свободного места между ними, тем больше плотность упаковки. Когда же достигается максимальная плотность упаковки одинаковых твердых шаров? Ответ на этот вопрос дает ключ к разгадке «тайны» следов на песке.

Исследуем вначале более простой случай — упаковки одинаковых кругов на плоскости. Плотной упаковки кругов можно достичь, вписывая их в мозаики, составленные из правильных многоугольников, заполняющих всю плоскость. Существуют только три способа построения таких мозаик — из правильных треугольников, квадратов и правильных шестиугольников. Упаковки кругов с использованием квадратной и шестиугольной мозаик показаны на рисунке 1. Даже «на глаз» видно, что второй способ более экономичен. Точный расчет (вы вполне сможете провести его сами) показывает, что в этом случае кругами заполнено примерно 90,7 % плоскости, в то время как в первом случае — только около 78 %. Шестиугольный способ упаковки на плоскости — самый плотный. По-видимому, из-за этого его и используют пчелы при построении сот.

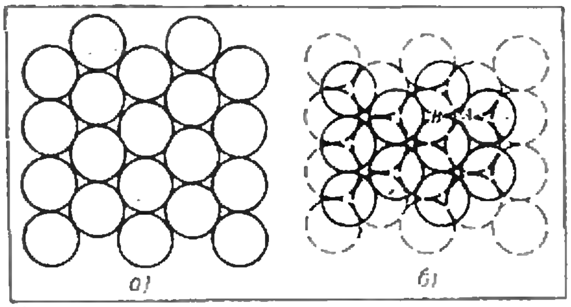


Рис. 2. Плотная упаковка шаров в пространстве (пунктиром показан нижний слой).

Плотную упаковку шаров в пространстве можно осуществить следующим образом. Расположим на плоскости первый слой шаров уже известным нам наиболее плотным способом. Затем можно положить на них второй точно такой же слой. Если располагать каждый шар верхнего слоя в точности над нижним, так что все шары окажутся вписанными в кубические соты, то слишком много пространства окажется неиспользованным. При таком способе укладки шаров заполняется только 52 % пространства.

Ясно, как можно упаковать шары плотнее. Для этого верхний шар надо располагать в лунке, образованной тремя соседними нижними шарами. Но при этом верхние шары не смогут заполнить все лунки — одно из двух соседних углублений всегда остается свободным (рис. 2). Поэтому, когда мы укладываем третий слой шаров, сделать это можно будет двумя способами: либо расположить шары третьего слоя над теми углублениями в первом слое, которые шары второго слоя оставили свободными (центр одного из шаров на рисунке 2, *б* будет находиться в точке *A*), либо — как раз над шарами первого слоя (при этом центр одного из шаров третьего слоя окажется в точке *B*). Для последующих слоев порядок расположения шаров сохраняется. В результате получаем два способа плотной упаковки шаров, показанные в пространстве на рисунке 3. В обоих случаях шарами заполнено около 74 % пространства.

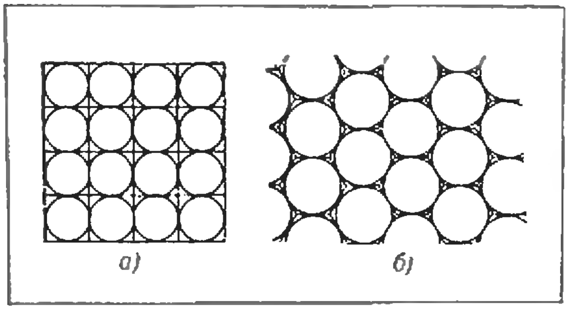


Рис. 1. Упаковка равных кругов на плоскости в ячейки правильных мозаик.

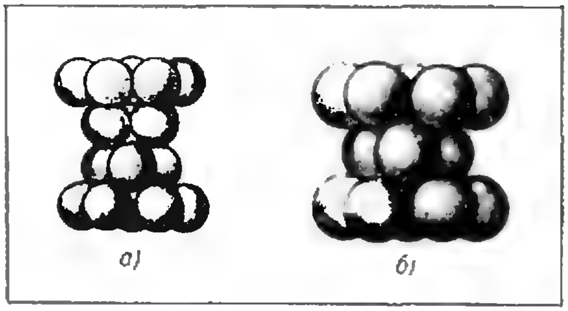


Рис. 3. Пространственная картина, показывающая 2 способа плотной упаковки шаров.

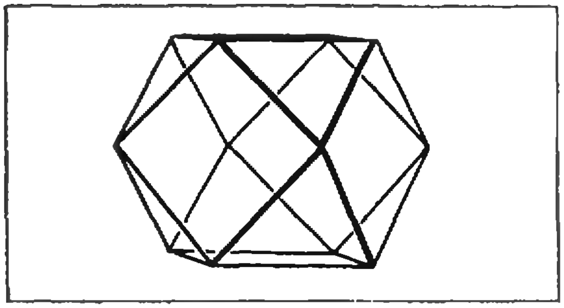


Рис. 4. Кубоктаэдр Кеплера.

Легко подсчитать, что при таком способе упаковки каждый шар соприкасается с 12 соседними шарами. Точки соприкосновения образуют вершины четырнадцатигранника. Его грани — чередующиеся квадраты и равносторонние треугольники. Так, при втором способе плотной упаковки получается кубоктаэдр Кеплера, показанный на рисунке 4.

До сих пор мы рассматривали лишь такие способы упаковки шаров, при которых они вписываются в периодические «соты». А можно ли достичь плотной упаковки, отказавшись от этого условия? Один из способов показан на рисунке 5. Шары в каждой плоскости расположены по сторонам правильных пятиугольников (пентагонов). В каждом пентагоне соседние шары касаются друг друга, но шары, относящиеся к разным пентагонам одной плоскости, разделены в пространстве. Стороны пентагонов чередующихся слоев попеременно содержат четное и нечетное число шаров. Коэффициент заполнения пространства в такой структуре равен 72 % и лишь немного уступает случаю плотной упаковки, показанному на рисунке 2. Можно упаковать шары, не образуя из центров решетку, более плотно, достигнув коэффициента заполнения 74 %, однако существуют ли еще более плотные упаковки — этот вопрос остается открытым до сих пор.

Вернемся к следам на песке. Мы теперь знаем, что существуют особые упаковки шаров, при которых остается очень мало пустого пространства между ними. Если нарушить такое расположение, выведя, например, шары одного слоя из лунок другого слоя, то промежутки между шарами увеличатся. Ясно, однако, что песчинки никто не упаковывает специальным образом. Как же достичь плотной упаковки песчинок?

Вспомним житейский опыт. Вам надо заполнить сосуд крупой так, чтобы в него вместилось максимальное ее количество. Что вы при этом делаете? Потряхиваете сосуд или постукиваете по нему, добиваясь желаемого эффекта. Даже после плотной утрамбовки крупы в сосуде можно с помощью такого приема уместить еще какое-то дополнительное ее количество.

Научное исследование этого вопроса предпринял в 50-х годах английский ученый Г. Скотт. Он заполнял шариками от подшипников сферические бутылки разных размеров. Если заполнять бутылки без потряхивания так, чтобы шарики располагались случайным образом, экспериментально наблюдается следующая зависимость плотности упаковки от числа шариков:

$$\varrho_1 = 0{,}6 - 0{,}37/\sqrt[3]{N},$$

где N — полное число шариков. Если число шариков очень велико (а в опытах N достигало нескольких тысяч), то видно, что плотность упаковки стремится стать постоянной и соответствующей заполнению 60 % пространства. А вот если потряхивать бутылку по мере ее заполнения, плотность упаковки возрастает:

$$\varrho_2 = 0{,}64 - 0{,}33/\sqrt[3]{N}.$$

Правда, и в этом случае она получается гораздо меньшей 74 %, соответствующих регулярному расположению шариков.

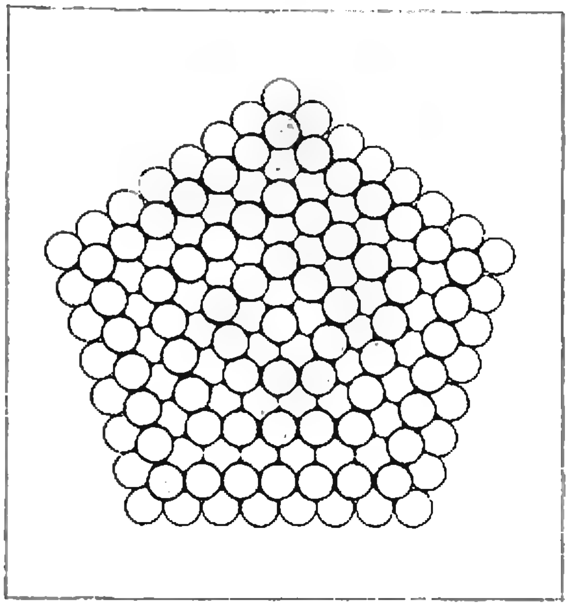


Рис. 5. Пентагональная упаковка шаров.

Стоит задуматься над приведенными здесь зависимостями. Почему поправка обратно пропорциональна $\sqrt[3]{N}$? Шарики, расположенные у стенок сосуда, находятся в особом положении по сравнению с шариками в объеме и влияют на плотность упаковки. Величина их вклада пропорциональна отношению площади поверхности $\sim R^2$ к объему сосуда $\sim R^3$ и убывает обратно пропорционально размеру системы R (под объемом системы мы понимаем полный объем пространства, занимаемого шариками вместе со свободными промежутками). Размер $R \sim \sqrt[3]{N}$, так как объем системы пропорционален полному числу шариков. Такие зависимости часто возникают в физике, когда надо учитывать поверхностные эффекты.

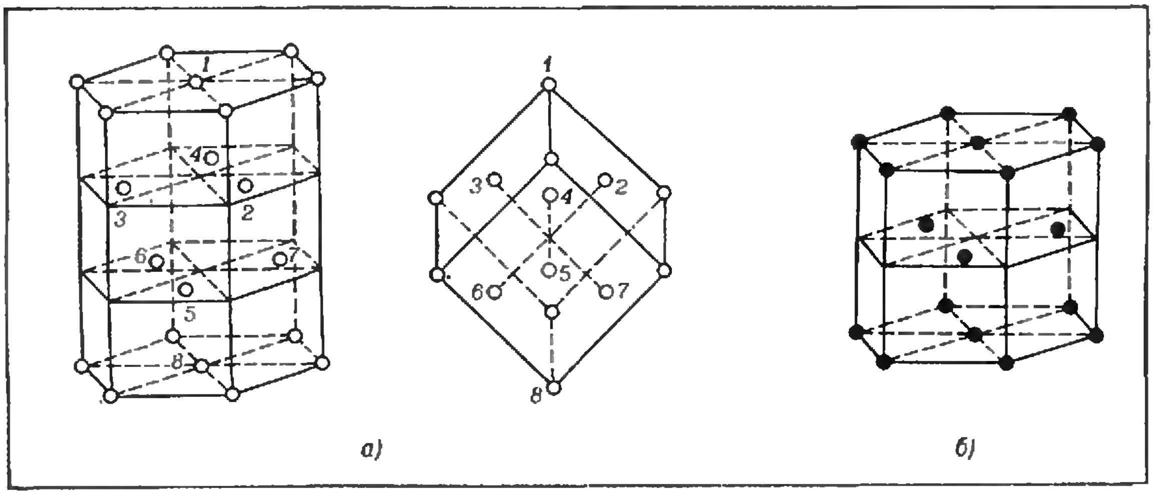
Таким образом, точные эксперименты подтверждают житейский опыт и показывают, что, потряхивая зернистую среду, можно достичь большей плотности упаковки. Но почему же все-таки это происходит? Дело в том, что устойчивому положению равновесия всегда соответствует минимум потенциальной энергии. Шарик может устойчиво лежать в ложбинке, но с вершины горки он обязательно скатится. Нечто подобное происходит и здесь. Шарики при потряхивании скатываются в свободные промежутки, плотность упаковки увеличивается, а общий объем системы уменьшается. В результате понижается уровень заполнения сосуда шариками, а следовательно, опускается центр тяжести и уменьшается потенциальная энергия системы.

Теперь, наконец, можно с достаточной ясностью представить себе, что происходит с песком. Волнение воды встряхивает песок, и в результате достигается плотная упаковка песчинок. Сдавливая песок ногой, мы нарушаем эту упаковку и увеличиваем размер пор. Вода из верхних слоев песка уходит вглубь, заполняя эти увеличившиеся промежутки. В результате песок «высыхает». Когда ногу убирают, деформация исчезает, плотная упаковка восстанавливается, а вытесненная из вновь уменьшившихся промежутков вода заполняет след, оставленный ногой. Может случиться и так, что после сильного нажатия плотная упаковка не восстановится. Тогда след станет снова мокрым, лишь когда вода поднимется из нижних слоев и заполнит увеличившиеся поры.

Любопытно, что это свойство сыпучих сред знали еще индийские факиры. Один из их трюков состоял в том, что в сосуд с узким горлышком, доверху наполненный рисом, многократно втыкали узкий длинный нож. В какой-то момент нож застревал в рисе, а сосуд можно было поднять вместе с ножом. Ясно, что фокус состоял в том, что сосуд при заполнении рисом встряхивали, достигая плотной упаковки. Втыкание ножа нарушало эту упаковку и увеличивало объем пространства между рисинками. Так как объем сосуда не менялся, то возрастали силы, сдавливающие рисинки, а следовательно, и трение между ними и ножом. В какой-то момент оно оказывалось достаточным, чтобы помешать вытянуть нож из сосуда.

Дальний и ближний порядок

Атомы, из которых состоят все тела, конечно, нельзя считать твердыми шарами. И тем не менее простые геометрические соображения помогают разобраться в строении вещества.



а) б)

Рис. 6. Элементы гранецентрированной кубической решетки и гексагональной решетки с плотной упаковкой.

Впервые геометрический подход использовал еще в 1611 году немецкий ученый И. Кеплер, высказавший предположение о связи шестиугольной формы снежинок с плотнейшими способами упаковки шаров. М. В. Ломоносов дал в 1760 году первое изображение плотнейшей кубической шаровой упаковки и объяснил таким образом форму кристаллических многогранников. А французский аббат Р. Ж. Гаюи в 1783 году заметил, что любой кристалл можно составить из множества повторенных частей (рисунок на 2-й странице обложки). Правильную геометрическую форму кристаллов он объяснил тем, что кристаллы построены из одинаковых маленьких «кирпичиков». Наконец, в 1824 году немецкий ученый А. Зибер предложил составлять кристаллы из регулярно расположенных маленьких сфер, взаимодействующих подобно атомам. Плотная упаковка таких сфер соответствует минимуму потенциальной энергии их взаимодействия.

Описанием структуры кристаллов занимается специальная наука — кристаллография. В наше время периодическое расположение атомов в кристаллах — твердо установленный факт. Электронные микроскопы позволяют нам просто увидеть это своими глазами. Тенденция к плотной упаковке несомненно имеется в атомном мире. Около 35 химических элементов кристаллизуются таким образом, что их атомы располагаются в пространстве подобно шарам, показанным на рисунке 3. Центры атомов (а точнее, атомные ядра) образуют в пространстве так называемую кристаллическую решетку, которая состоит из повторяющихся частей.

Например, в случае, показанном на рисунке 3, *а*, всю решетку можно составить повторением куба, у которого атомы-шары расположены не только в вершинах, но и в центрах граней (рис. 6, *а*, точки соответствуют центрам атомов). Поэтому соответствующую решетку называют гранецентрированной кубической. Таким образом устроены многие металлы (Ag, Au, Cu, Al и др.), а также кристаллы инертных газов (всего около 20 элементов).

«Скелет» кристалла, соответствующий расположению атомов, показанному на рисунке 3, *б*, состоит из шестигранных призм (рис. 6, *б*). Понятно, почему такой способ называют гексагональной плотной упаковкой. Этой решеткой обладают около 15 элементов (Mg, Cd, Zn, Ni и др.).

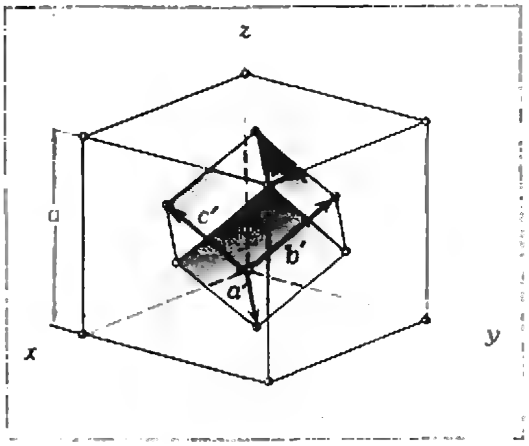


Рис. 7. Гранецентрированную кубическую решетку можно получить, периодически сдвигая в трех направлениях всего один атом.

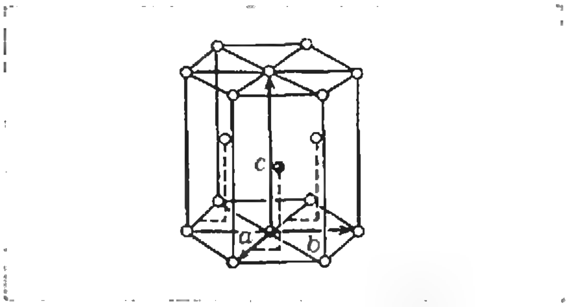


Рис. 8. Гексагональная решетка с плотной упаковкой получается периодическим сдвигом 2 разных атомов.

У решеток, показанных на рисунке 6, *а* и *б*, имеется важное различие. Гранецентрированную кубическую решетку, как видно из рисунка 7, можно получить, периодически сдвигая в пространстве в трех направлениях всего лишь один атом, а для гексагональной плотной упаковки такого сделать нельзя — приходится использовать 2 атома (рис. 8). Ее можно представить как совокупность двух простейших решеток, вставленных одна в другую. Простейшие решетки, которые можно составить периодическим сдвигом в пространстве только одного атома, называются решетками Браве (по имени французского морского офицера О. Браве, впервые построившего в XIX веке теорию пространственных решеток).

Решеток Браве существует не так много — всего 14 разных типов. Это связано с тем, что далеко не все элементы симметрии могут встречаться

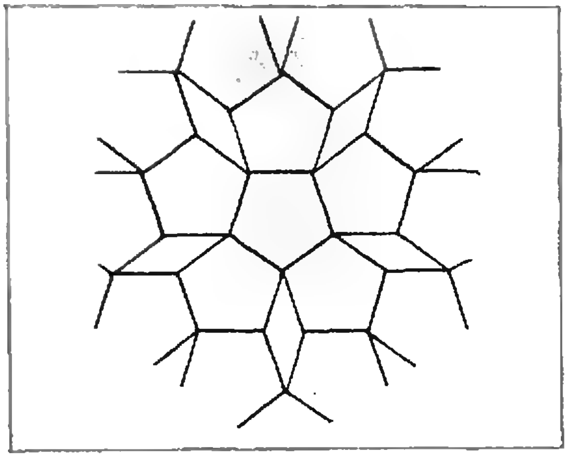
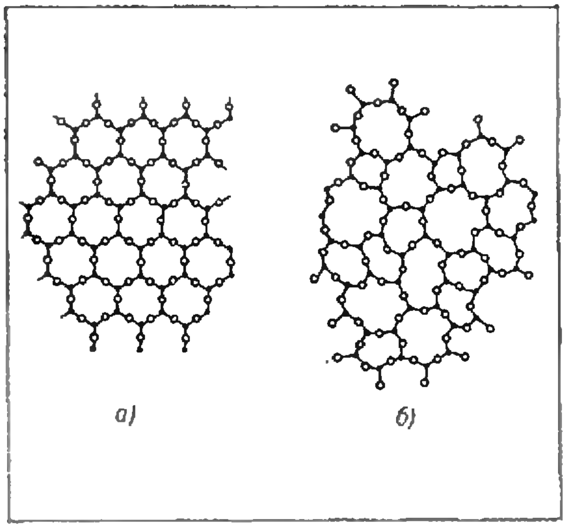


Рис. 9. С помощью правильных пятиугольников невозможно заполнить всю плоскость без просветов.



а)

б)

Рис. 10. Строение кварца (а) и стекла (б).

в периодических решетках. Отдельный правильный пятиугольник можно, например, поворачивать вокруг оси, проходящей через центр, и он при этом 5 раз совместится сам с собой. В таком случае говорят, что имеется ось симметрии 5-го порядка. Но в решетке Браве такой оси быть не может. Это означало бы, что имеется плоскость, усеянная узлами, образующими правильные пятиугольники. А заполнить целиком плоскость правильными пятиугольниками невозможно (рис. 9)!

Однако типы решеток Браве не исчерпывают разнообразия свойств симметрии реальных кристаллов. Ведь, как вы уже убедились на примере гексагональной плотной упаковки, решетки Браве можно вставлять одна в другую! В результате элементы симметрии объединяются в различных комбинациях, образуя так называемые пространственные группы. Всего имеется 230 различных групп. Все они были найдены в 1890 году русским ученым Е. С. Федоровым.

Итак, любой кристалл можно составить из повторяющихся частей. Это свойство кристаллов называют трансляционной симметрией (трансляция — перенос в пространстве). Иначе еще говорят, что в кристаллах имеется дальний порядок. Это, пожалуй, самое характерное свойство кристаллов, которое отличает их от всех других тел.

Есть, однако, не менее важный класс веществ — аморфные тела, в которых дальнего порядка нет. В аморфном состоянии находятся жидкие тела. Но и твердое тело может быть аморфным. Самый простой пример — обычное стекло. На рисунке 10 показано строение стекла и кварца, который имеет тот же химический состав, что и стекло. Кварц — кристалл, а стекло — аморфное тело. Хотя дальнего порядка в стекле явно нет, это, однако, не означает, что в расположении атомов царит полный хаос. Определенная структура в расположении ближайших соседей, как видно из рисунка, сохраняется и в стекле. Говорят, что в аморфных телах имеется ближний порядок.

Аморфные материалы нашли в последнее время важные применения в технике. Уникальными свойствами обладают аморфные металлические сплавы (металлические стекла). Их получают, очень быстро охлаждая жидкий металл — со скоростью порядка нескольких тысяч градусов в секунду. Достичь этого можно, например, разбрызгивая мелкие капли металла на поверхность быстровращающегося холодного диска. Капля «размазывается» по диску очень тонким слоем (толщиной в несколько микрометров), и хороший теплоотвод позволяет металлу остыть столь быстро, что его атомы просто не успевают расположиться правильным образом. Оказалось, что аморфные сплавы обладают повышенной твердостью, высокой коррозийной стойкостью, оптимальным сочетанием электрических и магнитных свойств. Область применений таких материалов быстро расширяется.

(Окончание см. на с. 48)

НЕДОВЖЕНЕ ЧАЙТЕТИ ЛУРАНЖ ВТАНК!

Комбинаторика — многочлены — вероятность

Кандидат физико-математических наук
Н. Б. ВАСИЛЬЕВ,
кандидат физико-математических наук
В. Л. ГУТЕНМАХЕР

Для чтения этой статьи достаточно знания курса математики в объеме первых шести классов, но мы уверены, что и старшеклассники найдут для себя здесь интересное — речь пойдет о комбинаторных формулах и их применениях. Одни и те же комбинаторные рассуждения и формулы пронизывают разные области математики и ее приложений. Цель статьи — показать одну такую связывающую линию: комбинаторика — алгебра многочленов — теория вероятностей.

Факториал

Для вычисления суммы первых n натуральных чисел есть удобная формула

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Для произведения первых n натуральных чисел такой формулы нет, но зато эта часто встречающаяся в комбинаторике и других разделах математики величина имеет специальное обозначение: $n!$ (читается «эн факториал»). Выбор для обозначения восклицательного знака, возможно, связан с тем, что даже для сравнительно небольших значений n число $n!$ очень велико: чтобы продемонстрировать, как быстро растет $n!$ с ростом n, выпишем эти числа для n от 1 до 10:

$$1!=1,\quad 2!=1\cdot2=2,\quad 3!=1\cdot2\cdot3=6,$$
$$4!=3!\cdot4=24,\quad 5!=4!\cdot5=120,$$
$$6!=720,\quad 7!=5040,\quad 8!=40\,320,$$
$$9!=362\,880,\quad 10!=3\,628\,800.$$

Из определения $n!$ видно, что факториалы двух соседних натуральных чисел n и $n+1$ связаны формулой

$$(n+1)!=n!\cdot(n+1), \qquad (*)$$

—чтобы получить произведение чисел от 1 до $n+1$, надо произведение от 1 до n умножить еще на $(n+1)$.

Заметим, что если в это равенство подставить $n=0$, то получится $1!=0!\cdot1$, поэтому полагают $0!=1$; это соглашение часто оказывается удобным в различных общих формулах.

Задачи

1. Найдите число $n!$ для $n=11$, 12.

2. Может ли $n!$ кончаться ровно на пять нулей? (При каком наименьшем n число $n!$ будет кончаться на шесть нулей?).

3. Докажите формулу $(n+1)!-n!=n!\cdot n$.

4. Найдите сумму $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots+9\cdot9!$. (Замените каждый член на разность по формуле из предыдущей задачи.)

5. Проверьте равенство (где $0<k\leqslant n$)

$$\frac{n!}{k!\,(n-k!)}+\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}=\frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!}$$

при $n=7$ и $k=3$ и докажите, что оно верно при любых натуральных числах n и k.

6. Найдите четыре тройки чисел x, y, z, для которых верно равенство $x!\cdot y!=z!$. (Подставьте в формулу $(*)$ $n=k!-1$.)

Перестановки

Факториал возникает самым естественным образом, когда мы подсчитываем количество перестановок из разных предметов.

Возьмем 4 буквы: К, О, Р, Т и посмотрим, сколькими способами их можно расположить в один ряд, то есть сколько существует слов из этих букв. Оказывается, что число этих способов равно $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$. В самом деле, на первое место можно поставить любую из 4 букв, на второе — любую из 3 оставшихся, на третье — любую из 2 неиспользованных на первых двух местах букв, и, наконец, на четвертом месте окажется оставшаяся буква. Все эти перестановки выписаны в алфавитном порядке на рисунке 1. Перестановки букв некоторого слова называют его *анаграммами.*

Еще один пример. Рассмотрим все перестановки 10 цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Их можно рассматривать как десятизначные числа, если они не начинаются с нуля, и как девятизначные числа, если они начинаются с нуля. Количество всех таких чисел равно 10!.

Эти примеры иллюстрируют общее утверждение:

> Количество перестановок из n различных предметов равно $n!$.

Часто требуется среди всех перестановок выбрать все те, которые обладают определенным свойством. Например, из выписанных на рисунке 1 анаграмм слова КОРТ только одна (не считая самого слова корт) имеет смысл в русском языке: крот; а среди 10! указанных чисел мы знаем четыре числа, которые делятся одновременно на все числа от 2 до 18: 2 438 195 760, 3 785 952 160, 4 753 869 120, 4 876 391 520. Для того чтобы найти осмысленные анаграммы или найти указанные числа среди 10! чисел, нужно произвести перебор многих случаев. Подобные задачи постоянно возникают на производстве и в экономике, когда надо найти наилучшие варианты.

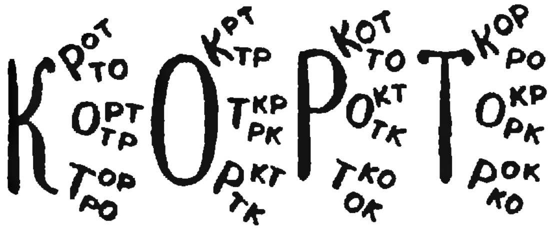


Рис. 1.

Перебор 10! перестановок труден не только для человека, но даже для современной вычислительной машины. По этому поводу автор замечательного многотомного труда «Искусство программирования» Д. Кнут пишет: «Стоит помнить, что 10! — это примерно 3,6 миллиона. В некотором смысле число 10! является приблизительно границей между тем, что можно сосчитать на компьютере, и тем, что нельзя. Если алгоритм требует испытания более чем 10! случаев, то счет может занять слишком много машинного времени, чтобы быть практически осуществимым. С другой стороны, если мы должны проверить 10! случаев, и каждый случай требует, скажем, одной миллисекунды машинного времени, то общее время счета составит примерно один час». Поэтому интересно находить такие соображения, которые позволяют существенно сократить или вообще избежать полный перебор.

Задачи

7. а) Сколько анаграмм у слова НИСЕЛЬАП?

б) Найдите среди них два слова, одно — название фрукта, другое — породы собаки.

8. Найдите два девятизначных числа, составленных из всех цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, чтобы одно из них было больше другого в 8 раз.

9. а) Вершины нарисованного на плоскости правильного шестиугольника нужно обозначить буквами A, B, C, D, E, F. Сколькими способами это можно сделать?

б) Сколько среди этих способов таких, что в результате получится шестиугольник $ABCDEF$? (Буквы могут идти по часовой стрелке, а могут идти и против часовой стрелки.)

10. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске восемь ладей так, чтобы они не били друг друга?

Перестановки с повторениями

Отношения факториалов возникают при подсчете перестановок с повторениями. Например, число анаграмм слова БАОБАБ равно $\frac{6!}{3!2!1!}=60$.

Поясним, почему это так. В этом слове 3 раза повторяется буква Б, 2 раза буква А и один буква О. Представим себе, что все буквы в этом слове разные: три буквы Б и две буквы А можно раскрасить разными цветами. Итак, мы имеем 6 разных знаков, и количество их перестановок равно 6!. Но тогда каждой анаграмме слова БАОБАБ: ОААБББ, БОААББ, ААОББА, ... соответствует 3!2! перестановок (рис. 2), ведь мы можем в ней 3! способами переставить 3 разноцветные буквы Б и 2! способами переставить разноцветные буквы А.

Оказывается, что для числа перестановок с повторениями имеется общая формула.

БАОБАБ
БАОБАБ
БАОБАБ
БАОБАБ
БАОБАБ
БАОБАБ
БАОБАБ
БАОБАБ
БАОБАБ
БАОБАБ
БАОБАБ
БАОБАБ
БАОБАБ

Рис. 2.

Если слово имеет n_1 букв A_1, n_2 букв A_2, ..., n_r букв A_r, то количество его анаграмм равно

$$\frac{(n_1+n_2+\ldots+n_r)!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$$

Конечно, эта формула применима для перестановок с повторениями любых предметов. Например, количество перестановок цифр 0, 0, 0, 0, 1, 1, 3 равно

$$\frac{7!}{4!2!1!}=\frac{4!5\cdot 6\cdot 7}{4!2}=5\cdot 3\cdot 7=105.$$

Задачи

11. Сколько различных анаграмм у слов: а) реестр; б) анаграмма?

12. Сколькими способами мама может в течение недели выдать дочке 3 банана, 2 груши и 2 апельсина, если каждый день будет давать ей по одному фрукту?

13. Расшифруйте приведенную на рисунке на с. 19 фразу, в которой вместо каждого слова стоит его анаграмма.

14. Сколькими способами можно составить ожерелье из одной черной, двух белых, трех красных и пяти голубых бусинок?

Степень суммы

Комбинации букв — анаграммы — естественно возникают при перемножении двух или нескольких многочленов, а комбинаторные коэффициенты — количества анаграмм — при приведении подобных членов.

Хорошо известна формула квадрата суммы двух чисел:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Похожую формулу можно получить и для квадрата суммы трех и большего числа слагаемых. Возведем, например, сумму $a+b+c$ в квадрат:

$$(a+b+c)(a+b+c)=aa+ab+ac+$$
$$ba+bb+bc+ca+cb+cc=$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac.$$

Аналогичная формула верна и для $(a+b+c+d)^2$ (на рисунке 3 каждый одночлен выражает площадь своего прямоугольника): вообще, квадрат суммы n чисел вычисляется так: надо сложить все квадраты этих n чисел и прибавить удвоенную сумму всевозможных попарных произведений этих чисел.

Если аккуратно перемножить $a+b+c$ три раза на себя, получится такая формула:

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+$$
$$+3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+$$
$$+6abc.$$

Объясним, как можно получить возникающие здесь коэффициенты 1, 3 и 6 без утомительного умножения и собирания подобных членов. Это — уже знакомые нам количества анаграмм. Член a^3 может получиться только одним способом — когда из каждой скобки

$$(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$$

берется буква a. Чтобы получить коэффициент при a^2b, нужно из одной скобки взять b, а из двух других a, то есть этому члену соответствуют анаграммы aab, aba, baa из двух букв a и одной буквы b: их количество равно $(2+1)!/(2!1!)=3$. Наконец, коэффициент при abc равен числу $3!/(1!1!1!)=6$ анаграмм (перестановок) слова из трех различных букв a, b, c.

Аналогичная формула получится и для куба суммы большего числа слагаемых, например

$$(a+b+c+d+e)^3=$$
$$=(a^3+\ldots)+3(a^2b+\ldots)+6(abc+\ldots). \qquad (**)$$

Здесь многоточием в каждой скобке обозначены члены, получаемые из первого выписанного члена всевозможными заменами букв.

Укажем теперь общую формулу.

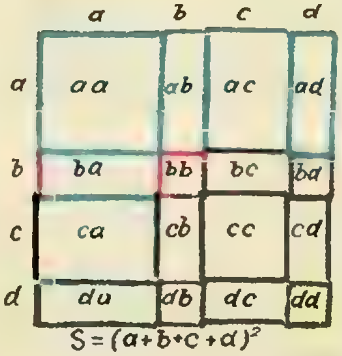


Рис. 3.

	a b c d e
a^2b	2 1 0 0 0
b^2c	0 2 1 0 0
b^2a	1 2 0 0 0
. . .	. . . . .

	a b c d e
a^3	3 0 0 0 0
b^3	0 3 0 0 0
c^3	0 0 3 0 0
. . .	. . . . .

	a b c d e
dbc	1 1 1 0 0
abd	1 1 0 1 0
abe	1 1 0 0 1
. . .	. . . . .

Рис. 4.

> Коэффициент при $a_1^{n_1}a_2^{n_2}\dots a_r^{n_r}$, получающийся при возведении в n-ю степень суммы $a_1+a_2+\dots+a_r$ из r слагаемых (здесь $n=n_1+n_2+\dots+n_r$, $n_1\geqslant 0$, $n_2\geqslant 0$, ..., $n_r\geqslant 0$), равен числу анаграмм слова из n_1 букв A_1, n_2 букв A_2, ..., n_r букв A_r, то есть
>
> $$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_r!}.$$

(Разумеется, если некоторое число n_j равно 0, то $a^{n_j}=1$, значит, буква a_j в таком одночлене отсутствует; напомним, что $0!=1$.)

Вернемся к формуле (**). Интересно, что вопрос: «сколько членов будет в каждой скобке?» также сводится к подсчету перестановок с повторениями. Выпишем в строчку все наши 5 букв и под каждой будем писать показатель, с которым она входит в соответствующий одночлен. (Если буква не входит в одночлен, то пишем показатель 0). Тогда каждому одночлену в скобке $(a^2+\dots)$ соответствует «слово» из 5 чисел: одной двойки, одной единицы и трех нулей, поэтому их общее количество равно $5!(3!1!1!)=20$; в скобке $(a^3+\dots)$ будет столько же членов, сколько анаграмм у «слова» 30000, то есть $5!/(4!1!)=5$; наконец, членов вида $(abc+\dots)$ будет $5!/(3!2!)=10$ (рис. 4).

Можно проверить, что мы не ошиблись, подсчитав общее число всех одночленов до приведения подобных — иными словами, подставив в формулу (**) вместо всех букв число 1; при этом слева получится 5^4, а справа $5+3\cdot 20+6\cdot 10$.

Задачи

15. Сколько членов получится после умножения:

$$(a+b+c+d)(x+y+z)(u+v)?$$

(Указание. Подставьте вместо букв единицы.)

16. Найдите наибольший коэффициент многочлена:

а) $(a+b+c+d+e)^5$; б) $(a+b+c+d)^5$.

17. В формуле $(a+b+c+d+e)^4=K_1(a^4+\dots)+K_2(a^3b+\dots)+K_3(a^2b^2+\dots)+K_4(a^2bc+\dots)+K_5(abcd+\dots)$ найдите коэффициенты K_1, K_2, K_3, K_4, K_5. Сколько членов в каждой круглой скобке?

Один способ подсчета вероятностей

Из повседневного опыта известно, что бутерброд падает маслом вниз с вероятностью 1/2 и маслом вверх — тоже 1/2. Правда, некоторые считают, что вероятность первого исхода 0,9, а второго — 0,1. Но, наверное, никто не сомневается, что вероятность выпадения шестерки при бросании игрального кубика равна 1/6, а двух шестерок подряд — 1/36.

Эти примеры поясняют, что вероятность — это некоторое число между 0 и 1, количественно выражающее шанс наступления того или иного исхода (маслом вниз или вверх) случайного события (падения бутерброда), причем сумма вероятностей всех возможных исходов равна 1.

После того, как каждому исходу приписана некоторая вероятность, интересно находить вероятности более сложных событий. Эта задача заключает в себе большие математические трудности. Один из способов подсчета вероятностей сложных событий связан с таким простым наблюдением: если сумма нескольких положительных чисел равна 1, то степень этой суммы тоже равна 1. Оказывается, что каждому одночлену, возникающему при возведении суммы в степень, можно придать вероятностный смысл. Как это делается — покажем на таком искусственном примере.

В магазине лежит большая куча перцев, причем 1/3 из них — красные, 1/2 — желтые, 1/6 — зеленые. Если продавец, не глядя, выбирает из кучи один перец, то мы полагаем вероятность, что он окажется красным (*к*), равной 1/3, желтым (*ж*) 1/2, зеленым (*з*) 1/6.

Если продавец выбирает, не глядя, два перца, то возможны такие случаи: *кк, кж, кз, жк, жз, жж, зк, зж, зз.* Вероятность каждого из них считается равной произведению вероятностей появления отдельных букв, составляющих пару:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2,\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6},\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3},\ \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6},\ \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3},\ \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{6}\right)^2.$$

Сумма всех 9 чисел равна 1, так как они появляются при возведении в квадрат числа $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=1$.

Чтобы найти вероятность того, что среди двух взятых перцев есть красный и зеленый, надо сложить вероятности случаев *кз* и *зк*:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{9}.$$

Обратим внимание на то, что это действие соответствует следующему: надо возвести $(к+з+с)$ в квадрат и привести подобные члены *кз* и *зк* — в результате получится 2*кз*, а затем подставить вместо букв *к* и *з* их вероятности.

Пользуясь правилом нахождения коэффициента при возведении в степень, можно определять и вероятности более длинных комбинаций. Например, если продавец, не глядя, выбирает один за другим пять перцев, то вероятность, что среди них окажется 3 красных, 1 желтый и 1 зеленый, вычисляется так:

$$\frac{5!}{3!1!1!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{81},$$

ведь $\frac{5!}{3!1!1!}к^3жз$ — это одночлен, который получится в многочлене $(к+ж+з)^5$ после возведения в степень и приведения подобных членов, то есть сумма вероятностей анаграмм слова *ккжжз*.

Интересно, что случаи «2 красных и 3 желтых», а также «2 красных, 2 желтых и 1 зеленый» имеют одинаковую вероятность

$$\frac{5!}{2!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{36}.$$

(Это — наиболее вероятные комбинации 5 перцев при выбранных нами вероятностях.)

Задачи

18. Все три ребра куба $6\times6\times6$, исходящие из вершины A, поделили в отношении 3:2:1, считая от вершины A, и через точки деления провели плоскости, параллельные граням, разрезающие кубик на 21 кусок (рис. 5).

а) Сколько из них будут брусками $3\times2\times1$?

б) Сколько еще и каких будет кусков? Каковы их объемы?

в) Имеется ли связь между этой задачей и задачей про перцы?

19. Автомат составляет ожерелья из 6 бусинок, выбирая их случайно из большой кучи черных, белых, красных и голубых бусинок, смешанных в соотношении 1:2:3:4. С какой вероятностью в таком ожерелье

а) все бусинки голубые;

б) все — одного цвета;

в) не будет ни одной красной бусинки;

г) встретятся бусинки всех четырех цветов?

д) Какие ожерелья будут попадаться чаще всего?

е) Каким нужно взять соотношение бусинок в большой куче, чтобы чаще всего встречались ожерелья с 2 красными, 2 черными, одной белой и одной голубой бусинками?

20. Пусть вероятность падения бутерброда маслом вниз равна 3/4. Произошло случайное событие: поднос с семью бутербродами опрокинулся. Какова вероятность, что ровно k бутербродов упадут маслом вниз (для каждого $k=0, 1, 2, ..., 7$)?

Возведите в степень $(p+q)^7$ и подсчитайте каждый одночлен при $p=3/4$, $q=1/4$. Для вычислений коэффициентов можно воспользоваться микрокалькулятором. (См. Приложение.)

Биномиальные коэффициенты

Выше мы почти не затрагивали самый простой и, пожалуй, самый важный случай двух букв. Коэффициенты многочлена $(a+b)^n$ имеют специальное обозначение C_n^k, а формула

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\\+...+C_n^ka^{n-k}b^k+...+C_n^nb^n$$

называется формулой *бинома Ньютона*. Мы знаем, что C_n^k — количество слов из n букв, среди которых k букв b и $n-k$ букв a — можно найти по формуле

$$C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}.$$

Например,

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

поскольку

$$C_4^0=C_4^4=\frac{4!}{4!0!}=1,$$

$$C_4^1=C_4^3=\frac{4!}{3!1!}=4,\quad C_4^2=\frac{4!}{2!2!}=6.$$

Биномиальные коэффициенты — числа C_n^k — возникают в самых различных задачах комбинаторики, алгебры, геометрии, математического анализа, теории вероятностей. Они связаны многочисленными красивыми тождествами; например, из равенства $C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k$ (см. задачу 5) следует, что при всех натуральных n и k, $0\leqslant k<n$,

$$C_k^k+C_{k+2}^k+...+C_n^k=C_{n+1}^{k+1}$$

(для $k=1$ это — формула, с которой мы начали статью). Более подробно об этих замечательных числах будет рассказано в одном из следующих номеров журнала.

Литература

1. В. А. Успенский. *Треугольник Паскаля.* М.: Наука, 1979.

2. М. И. Башмаков, Б. М. Беккер, В. М. Гольховой. *Задачи по математике: Алгебра и анализ.* М.: Наука, 1982.— (Серия: Библиотечка «Квант», вып. 22)

3. А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров. *Введение в теорию вероятностей.* М.: Наука, 1982.— (Серия: Библиотечка «Квант», вып. 23)

4. Д. Кнут. *Искусство программирования для ЭВМ.* М.: Мир, 1976, т. 1.

5. Ф. Мостеллер. *Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями.* М.: Наука, 1985.

Приложение: Вычисление биномиальных коэффициентов на калькуляторе Б3-34.

При больших n вычисление биномиальных коэффициентов вручную — весьма трудоемкая задача. Ниже приводится программа для калькулятора Б3-34*), позволяющая вычислить коэффициенты C_n^k для любого $n\leqslant334$ и всех $k\leqslant n$ (при этом точные ответы получаются при $n\leqslant28$; при бо́льших n программа дает приближенные ответы**)).

После внесения программы в память следует перейти в автоматический режим (FАВТ), внести число n в регистр X и нажать кнопки В/О, С/П. После остановки высвечивается 1 — первый коэффициент. Затем нажатием кнопки С/П последовательно получаем остальные коэффициенты $n=C_n^1$, C_n^2, ..., C_n^{n-1}, 1.

```
FПРГ       07 —       15 :
00 ПА      08 1       16 ПВ
01 ПО      09 +       17 С/П
02 1       10 П1      18 FL1
03 ПВ      11 ИПВ     19 20
04 С/П     12 ИПО     20 FL0
05 ИПА     13 ×       21 05
06 ИПО     14 ИП1
```

А. И. Тулайков

---

*) Небольшие модификации позволяют приспособить программу к модели МК-54 и МК-61.

**) Верхняя граница 28 для n и точность приближенных значений коэффициентов много лучше, чем для программы из известных справочников В. П. Дьяконова или А. Н. Цветкова и В. А. Епанечникова. (*Прим. ред.*)

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Конус трения» предназначена восьмиклассникам, «Первый источник электрического тока» — девятиклассникам, «Дифракция волн» — десятиклассникам.

Публикацию подготовил И. К. Белкин.

Конус трения

Если рассмотреть условия равновесия тела на наклонной плоскости, угол наклона которой можно изменять, то легко получить (сделайте это самостоятельно), что тело начнет соскальзывать с плоскости при угле φ таком, что

$$\operatorname{tg}\varphi=\mu,$$

где μ — коэффициент трения тела о плоскость. Не кажется ли вам удивительным, что этот угол не зависит от массы тела?

То же самое выражение для угла φ можно получить и другим, пожалуй, более простым способом. Но для этого надо предварительно познакомиться с понятием «конус трения».

Пусть тело, которое можно считать материальной точкой, находится на шероховатой горизонтальной плоскости. Сила тяжести $m\vec{g}$ прижимает тело к поверхности, и поверхность «откликается», действуя на тело силой нормального давления $\vec{N}$. Если же к телу приложена также и некоторая горизонтальная сила, то со стороны поверхности появляется еще одна сила — сила трения. Пока величина горизонтальной силы не превышает максимального значения силы трения покоя $F_{\text{тр.п}\max}=\mu N$, тело покоится. При достижении этого значения тело начинает двигаться, причем поверхность действует на него препятствующей движению силой трения скольжения

$$F_{\text{тр.ск.}}=F_{\text{тр.п.}\max}=\mu N.$$

Как сила нормальной реакции, так и сила трения порождаются поверхностью, поэтому можно говорить о полной силе реакции поверхности. В случае, когда тело под действием внешней силы (конечно, включающей в себя силу тяжести) движется вдоль поверхности (рис. 1), полная сила реакции есть

$$\vec{R}=\vec{N}+\vec{F}_{\text{тр.ск.}}$$

Эта сила направлена под углом φ к нормали, который легко определить:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{F_{\text{тр.ск.}}}{N}=\mu,\quad \varphi=\operatorname{arctg}\mu.$$

Угол φ называют углом трения.

Будем теперь мысленно вращать вектор $\vec{R}$ вокруг нормали к поверхности, не меняя угла φ между ними. При этом вектор опишет конус (с углом 2φ при вершине), называемый *конусом трения*. Он обладает следующим замечательным свойством. Какая бы большая по величине внешняя сила не прикладывалась к телу, если она лежит внутри конуса трения, тело остается в покое. Если же эта сила выходит за пределы конуса трения, то, какой бы малой она не была, тело начинает двигаться.

В справедливости этого утверждения убедиться нетрудно. Действительно, пусть внешняя сила $\vec{F}$ (см. рис. 1) приложена к телу так, что ее линия действия составляет угол α с нормалью к поверхности. Тогда «сдвигающая» тело вдоль поверхности сила равна $F\sin\alpha$, а сила нормальной реакции равна $F\cos\alpha$. Таким образом, предельно возможная сила трения покоя, удерживающая тело на месте, есть

$$F_{\text{тр.п.}\max}=\mu N=\mu F\cos\alpha=F\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha.$$

Пока сила $\vec{F}$ лежит внутри конуса трения, $\alpha<\varphi$ и, следовательно, $F\sin\alpha<$

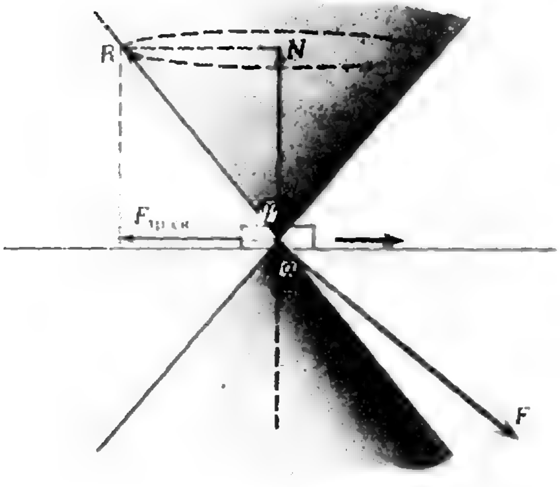


Рис. 1.

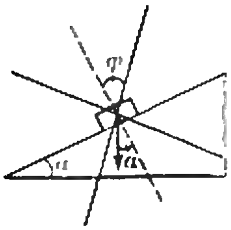


Рис. 2.

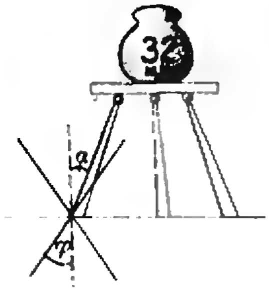


Рис. 3.

$< F\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha$. Тело при этом покоится. Однако как только угол α становится больше угла трения φ, последнее неравенство нарушается. Теперь трение уже не в состоянии удержать тело на месте, и оно начинает скользить.

Вернемся к телу, оставленному в начале статьи на наклонной плоскости, и построим для него конус трения (рис. 2). Внешней силой здесь служит сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Пока $\alpha < \varphi$, согласно сказанному выше, тело будет покоиться. Но как только угол α превысит угол φ — начнется движение. Поэтому мы сразу же получаем условие начала соскальзывания тела с наклонной плоскости:

$$\operatorname{tg}\alpha > \mu, \ \alpha > \operatorname{arctg}\mu.$$

Заметим, что понятием конуса трения пользуются инженеры при расчете той или иной конструкции. Так, например, даже при проектировании табуретки следует помнить о конусе трения.

Представьте себе табуретку, ножки которой соединены с сидением шарнирами (рис. 3). Конечно, в действительности никто не станет так делать, однако такая система крепления позволит нам легче разобраться с ролью конуса трения. Поставим такую табуретку на пол так, чтобы угол α, который ножки составляют с нормалью к полу, был меньше угла трения φ. В этом случае как бы мы не нагружали табуретку, ножки ее не разъедутся — сила, с которой каждая ножка действует на пол, лежит в пределах соответствующего конуса трения. Если же угол α сделать больше угла φ, то сила, с которой ножка действует на пол, выйдет за пределы конуса трения, ножки разъедутся и табуретка упадет.

У реальной табуретки ножки соединены с сидением не с помощью шарниров, а вклеены или вкручены в него. Однако если сделать так, чтобы угол α превысил угол трения φ, то в месте соединения ножек табуретки с сидением могут возникнуть значительные напряжения и табуретка сломается.

Первый источник электрического тока

Электрический ток даже в простейшей электрической цепи может показаться несколько загадочным явлением. В самом деле, ток — это упорядоченное движение электрических зарядов, например электронов в металлическом проводнике. Упорядоченно двигаться их заставляет электрическое поле. Но, как известно, работа электростатического поля по замкнутой траектории равна нулю (а электрические цепи, в которых протекает постоянный электрический ток, всегда замкнуты). Тем не менее в цепи при прохождении тока совершается работа. За счет этой работы, например, нагреваются проводники.

Почему же в цепи существует электрический ток и почему при его прохождении совершается работа?

И то и другое возможно только потому, что где-то в цепи действуют какие-то неэлектростатические силы, которые могут создать и поддерживать в цепи электростатическое поле и работа которых не равна нулю. Силы эти получили название *сторонних* сил. То место в цепи, где они действуют, носит название (не совсем удачное) *источника тока*.

Что это за сторонние силы и как они действуют? В качестве примера рассмотрим первый в истории химический источник постоянного тока. Его придумал в самом конце XVIII века итальянский физик Алессандро Вольта (1745—1827). Теперь этот источник называют элементом Вольта. Он состоит из цинкового и медного электродов, погруженных в раствор серной кислоты.

Заметим, что медь и цинк состоят не из нейтральных атомов, а из положительных ионов соответствующего металла и электронов, оторвавшихся от атомов и ставших, как говорят, свободными. Следует иметь в виду, что и раствор кислоты состоит не из нейтральных молекул воды (H_2O) и серной кислоты (H_2SO_4). Значительная часть молекул H_2SO_4 в воде превращается в три иона — два положительно заряженных иона водорода H^+ и отрицательно заряженный ион SO_4^{2-} с двойным зарядом:

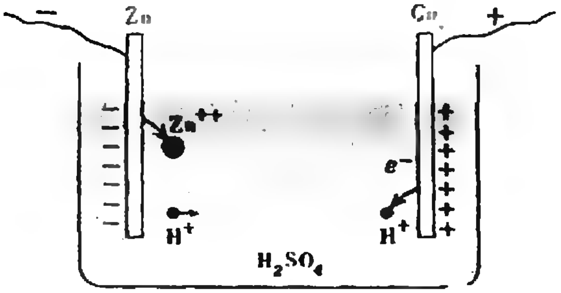
$$H_2SO_4 \rightarrow 2H^+ + SO_4^{2-}.$$

Посмотрим, что происходит, когда в такой раствор погружают электроды (см. рисунок). Начнем с цинка.

При погружении цинка в раствор кислоты начинается химическая реакция взаимодействия ионов SO_4^{2-} и Zn^{2+}, в результате чего ионы цинка отрываются от электрода и переходят в раствор. При этом на электроде оказывается избыток электронов, и он становится отрицательно заряженным. По мере накопления ионов Zn^{2+} в растворе некоторая их часть, притягиваемая электродом, возвращается обратно. В конце концов устанавливается динамическое равновесие: число ионов, покидающих цинк, равно числу ионов, возвращающихся в него. Но электрод остается заряженным отрицательно, а раствор вблизи электрода (за счет ионов цинка) получает положительный заряд.

Появление дополнительных положительных ионов около цинкового электрода вызывает перераспределение уже имеющихся ионов внутри раствора. Часть отрицательных ионов из соседнего слоя перемещается ближе к электроду, а часть положительных ионов оттесняется в более удаленный слой. Подобные перемещения происходят во всех слоях раствора, вплоть до слоя, прилегающего к медному электроду. Здесь происходит следующий процесс.

В отличие от цинка медь почти не растворяется в кислоте, то есть не посылает в раствор своих ионов. Наоборот, положительные ионы водорода из раствора, попадая на медный электрод, отбирают у него свободные электроны и нейтрализуются. Медь становится положительно заряженной, а раствор около нее приобретает отрицательный заряд.



Таким образом, медный электрод в элементе Вольта образует положительный полюс, а цинковый электрод — отрицательный. Разность потенциалов между ними составляет приблизительно 1,1 В.

Посмотрим теперь, что произойдет, если электроды соединить металлическим проводником. Свободные электроны во внешней части цепи (в проводнике) начнут двигаться от цинка, где они имеются в избытке, к меди, где их недостает. Это означает, что во внешней части цепи возникнет электрический ток, направленный от меди к цинку.

А что же в самóм элементе Вольта? Из-за ухода электронов с цинка равновесие между цинковым электродом и раствором нарушается, в результате чего дополнительное число ионов цинка будет переходить в раствор, поддерживая тем самым отрицательный заряд электрода. А из-за прихода электронов на медный электрод большее число положительных ионов водорода из раствора сможет нейтрализоваться на этом электроде. При этом положительный заряд меди тоже будет поддерживаться.

Мы видим, таким образом, что в то время, как во внешней части цепи от цинкового электрода к медному движутся свободные электроны, внутри источника движутся ионы: положительные от цинка к меди и отрицательные от меди к цинку. Так в замкнутой цепи осуществляется непрерывный круговой процесс перемещения электрических зарядов, то есть электрический ток.

Какие же силы совершают работу по поддержанию постоянной разности потенциалов между медным и цинковым электродами? Это так называемые химические силы, действующие внутри элемента Вольта. Другими словами можно сказать, что источником энергии электрического тока служит энергия, выделяющаяся при химических реакциях между электродами и раствором кислоты.

Отсюда получается, что «источник тока» в действительности есть источник энергии, за счет которой и совершается работа по перемещению зарядов по цепи, проявляющаяся, в частности, в нагреве проводников. Энергию, приходящуюся на единицу заряда, обходящего цепь, называют электродвижущей силой источника.

В других источниках происходят другие процессы, действуют другие силы, но роль их всегда такая же как и в рассмотренном нами элементе Вольта.

Дифракция волн

Дифракцией называется огибание волнами препятствия, их проникновение в область геометрической тени. Это одно из характерных явлений для волн любой природы.

Особенно заметно дифракция проявляется тогда, когда размеры препятствия сравнимы с длиной волны. Звуковые волны, например, имеют длину порядка метров, и их дифракцию обнаружить легко — звук можно услышать из-за угла. А вот у света длина волны составляет всего лишь доли микрометра, и в обычных условиях наблюдать дифракцию света трудно. Долгое время считалось даже, что свет *всегда* распространяется прямолинейно.

Качественно явление дифракции волн объясняется с помощью принципа Гюйгенса («Физика 10», § 38). Первую количественную теорию дифракции света построил французский инженер Огюстен Френель. В 1818 году он представил свой «Мемуар о дифракции света» на конкурс, объявленный Парижской академией наук. В следующем году этот мемуар был премирован, а позже напечатан в трудах Академии.

Среди членов комиссии, которой было поручено рассмотреть мемуар Френеля, был известный ученый С. Пуассон. Основываясь на теории Френеля, Пуассон проделал расчет для двух частных случаев дифракции на различных препятствиях, не разобранных Френелем, и получил парадоксальные результаты. В первом случае расчет показывал, что в центре геометрической тени от небольшого шарика, поставленного на пути света, должно наблюдаться светлое пятно. Во втором случае получалось, что после прохождения света через круглое отверстие в центре дифракционной картины может появиться темное пятно. Расчеты Пуассона были представлены как доказательство несостоятельности теории Френеля. Однако соответствующие эксперименты блестяще подтвердили все выводы френелевской теории. Этот факт сыграл немаловажную роль для начала широкого признания волновой природы света.

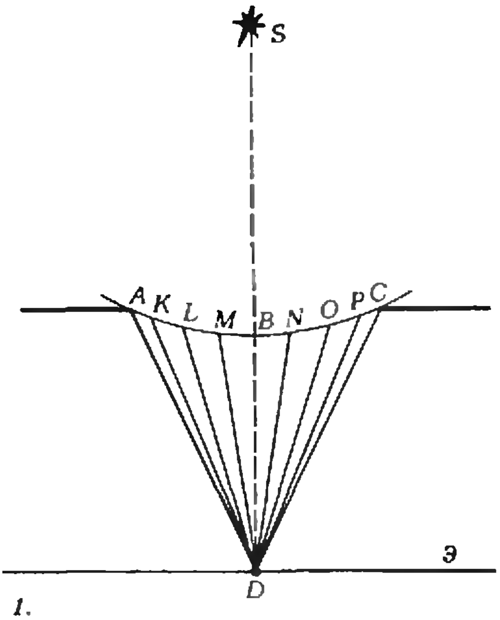


Рис. 1.

Давайте и мы разберемся в явлении дифракции поподробнее. Рассмотрим дифракцию света на круглом отверстии в непрозрачной ширме. На рисунке 1 дуга ABC показывает фронт волны, испущенной точечным источником света S, в момент достижения волной препятствия. Каждая точка фронта является, согласно принципу Гюйгенса, источником вторичных волн, а их интерференция, по теории Френеля, объясняет дифракционную картину на экране $Э$.

Чтобы рассчитать результат интерференции вторичных волн, например, в точке D в центре экрана, применим метод, предложенный Френелем. Разобьем волновой фронт на зоны (зоны Френеля) по такому принципу: разность расстояний от крайних точек каждой зоны до экрана должна отличаться ровно на половину длины волны света:

$$AD-KD=KD-LD=LD-MD=MD-BD=\lambda/2.$$

Для чего так поступают? Это позволяет воспользоваться известным свойством: волны, имеющие разность хо-

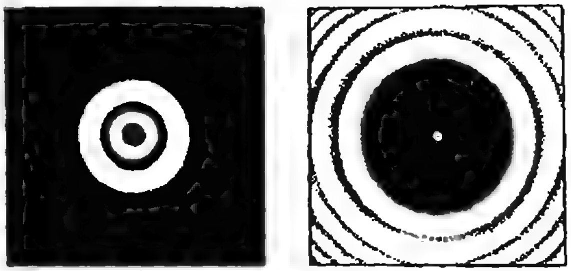


Рис. 2. а) б)

да в половину длины волны (находящиеся в противофазе), при сложении гасят друг друга. Каждой точке одной зоны найдется соответствующая точка в соседней зоне, от которой волны придут в точку D в противофазе, а площади всех зон почти одинаковы. Поэтому действия соседних зон в точке D (например, первой и второй, второй и третьей и т. д.) практически уничтожают друг друга.

Теперь легко понять, при каких условиях можно наблюдать «парадокс Пуассона». Если в отверстии умещается точно четное число зон, то в центре экрана мы увидим темное пятно. За ним располагается светлое кольцо, затем темное и т. д. (рис. 2, *а*). На экране мы будем наблюдать систему чередующихся темных и светлых колец (но центральное пятно будет темным!). Если же в отверстии укладывается нечетное число зон, то результат будет обратным — в центре будет наблюдаться светлое пятно, окруженное чередующимися темными и светлыми кольцами. Дифракционную картину от небольшого шарика (рис. 2, *б*) попробуйте объяснить самостоятельно.

Ясно, что наблюдаемая дифракционная картина будет четкой, если число зон Френеля невелико. Так, для видимого света с длиной волны $5 \cdot 10^{-7}$ м при диаметре препятствия ~ 1 мм и расстояниях от препятствия до источника света и экрана ~ 1 м на препятствии укладывается всего несколько зон. В таком случае на экране хорошо различимы чередующиеся светлые и темные кольца. При бо́льших размерах препятствия (при меньших расстояниях) картина становится менее четкой.

В наше время удается наблюдать дифракцию не только световых волн, но и более коротковолнового рентгеновского излучения, длина волны которого составляет десятки ангстрем (1 ангстрем $= 1$ Å $= 10^{-10}$ м). Создать препятствия такого размера искусственно очень трудно. Но вот если на пути рентгеновских лучей расположить кристалл, в котором межатомные расстояния имеют как раз такой порядок, то возникнет дифракционная картина — лауэграмма (по имени немецкого ученого М. Лауэ, предложившего впервые в 1912 году использовать для наблюдения дифракции рентгеновских лучей кристалл). Лауэграмма состоит из пятен разной интенсивности, расположенных регулярным образом вокруг центрального пятна. Ее вид определяется характером «упаковки» атомов в кристалле. Опыты по дифракции рентгеновских лучей не только доказали волновую природу рентгеновского излучения, но и позволили выяснить геометрическую структуру различных кристаллов.

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Четырехзначное число, записанное последовательно стоящими слева направо цифрами x, y, u, v, будем обозначать символом $\overline{xyuv}$. Докажите, что если A и B — произвольные цифры, отличные от 0, то

$$\overline{ABBA} - \overline{BABA} = \overline{ABAB} - \overline{BAAB}.$$

2. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} 2x + ay = a + 2, \\ (a+1)x + 2ay = 2a + 4 \end{cases}$$

не имеет решений?

3. Найдите все тройки целых чисел x, y, z, удовлетворяющие системе неравенств

$$x^2 \leqslant y,\ y^2 \leqslant z,\ z^2 \leqslant x.$$

4. Докажите, что произвольный треугольник разбивается своими медианами на 6 равновеликих треугольников.

5. Докажите, что в выпуклый четырехугольник тогда и только тогда можно вписать окружность, когда суммы длин противоположных сторон одинаковы.

Девятый класс

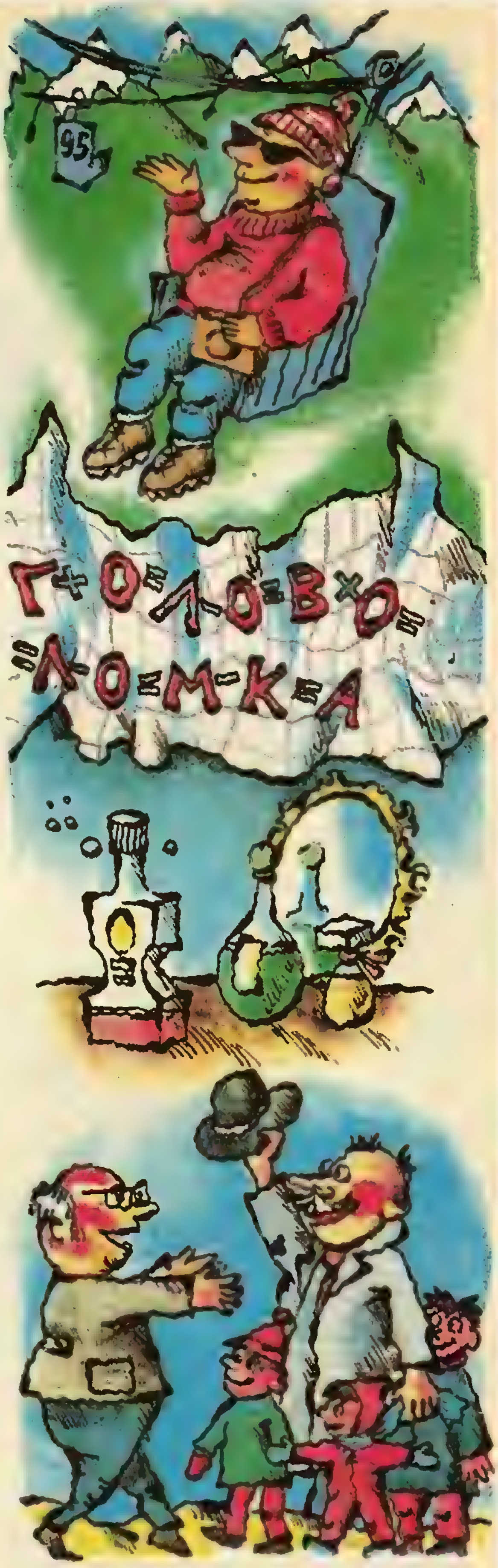
6. Найдите все целые n, при которых модуль трехчлена $n^2 - 7n + 10$ является простым числом.

7. Докажите, что уравнение $\sin x = x^2 + x + 1$ не имеет решений.

8. Положительно или отрицательно число $\sin 10\,000$?

(Окончание см. на с. 55)

Квант для младших школьников



Задачи

1. Однажды я решил проехаться по кресельной канатной дороге. В некоторый момент я обратил внимание, что идущее мне навстречу кресло имеет номер 95, а следующее — номер 0, дальше 1, 2 и т. д. Я взглянул на номер своего кресла. Он оказался равным 66. Проехал ли я половину пути? При встрече с каким креслом я проеду половину пути?

2. Вот очень простая

Г+О=Л—О=В×О=Л—О=М—К=А

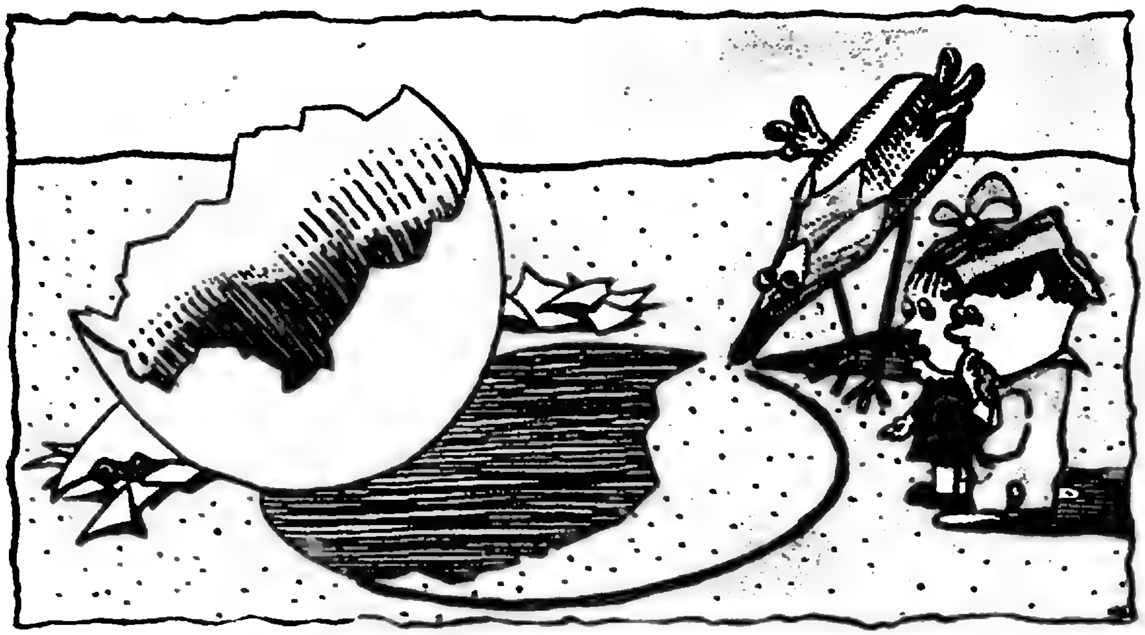
Замените буквы цифрами так, чтобы получились верные равенства; при этом одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, а разным — разные.

3. Во флакон неправильной формы налили некоторое количество жидкости. Как, не имея никаких измерительных инструментов и других сосудов, узнать, занимает ли жидкость больше или меньше половины объема флакона?

4. Как найти центр нарисованной окружности, если в вашем распоряжении лишь карандаш и обычная линейка с параллельными краями (ширина линейки меньше диаметра окружности)?

5. Дедушка с тремя внуками вышел прогуляться в парк. Встретившийся им дедушкин знакомый спросил, сколько каждому из них лет. Ваня сказал: «Я младше Пети и мне больше пяти лет». Петя произнес: «Я младше Саши на 3 года». А Саша сказал: «Нам всем вместе в 3 раза меньше лет, чем дедушке, а вместе с дедушкой нам ровно 100 лет». Сколько лет каждому из внуков?

Эти задачи нам предложили: *А. П. Савин, Л. П. Мочалов, М. И. Лобак, А. И. Демидов, Н. К. Антонович.*



Восстанови стертую фигуру!

Кандидат педагогических наук
Н. Н. ИВАНОВА

«Очередное занятие нашего кружка посвящено решению геометрических задач»,— сказал учитель.— «Эти задачи не совсем обычны — мы будем восстанавливать фигуры по некоторым известным элементам. С подобными задачами люди встречались еще в глубокой древности, когда им приходилось восстанавливать границы участков, смытые в результате разлива Нила».

Учитель показал ребятам осколок разбитой патефонной пластинки и предложил определить радиус этой пластинки (центр пластинки не сохранился, но сохранилась некоторая часть ее края).

Ребята вспомнили, что центр окружности, описанной около треугольника, находится в точке пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника. Зная центр окружности, легко найти ее радиус. Поэтому для решения задачи с пластинкой можно использовать треугольник *ABC*, вершины которого лежат на дуге окружности пластинки (рис. 1).

«Вторая задача более сложная»,— сказал учитель и нарисовал на доске треугольник *ABC*. Он провел в нем медианы и отметил их основания *D*, *E*, *F*, потом стер треугольник, оставив только основания медиан. Ребятам же учитель предложил восстановить треугольник.

Первым поднял руку Петя. Он подошел к доске и соединил данные точки отрезками. Отрезки *DE*, *DF* и *EF* — средние линии в треугольнике *ABC*. А средняя линия параллельна стороне треугольника. Это и даст ключ к решению задачи: через каждую из данных точек нужно провести прямую, параллельную непроходящей через нее средней линии, и в результате пересечения этих прямых мы получим искомый треугольник (рис. 2).

«Хорошо!»,— сказал учитель. «Теперь — третья задача». Учитель нарисовал на доске остроугольный треугольник *ABC*, провел в нем две высоты *AE* и *BF*. Затем снова стер треугольник, оставив точки *E*, *F* и часть основания — отрезок *MN*. «Восстановите стертый треугольник»,— сказал учитель. Ребята задумались. Сережа соединил точки *E* и *F*. Как быть дальше? Если бы определить положение точек *A* и *B* — концов основания треугольника — задача была бы решена. «Что вы можете сказать об углах *AFB* и *BEA*?»,—

обратился учитель к кружковцам. «Эти углы прямые»,— ответили ребята. Сережа догадался, что точки E и F принадлежат геометрическому месту точек, из которых отрезок AB виден под прямым углом. Таким геометрическим местом точек является окружность*), диаметр которой и есть AB. Необходимо найти центр этой окружности. Он лежит на прямой MN и на серединном перпендикуляре, проведенном к отрезку EF, то есть является точкой пересечения MN и этого перпендикуляра (рис. 3). Определив точки A и B, ребята легко нашли точку C. Задача решена!

«Четвертая задача — самая трудная: нужно восстановить треугольник *по основаниям трех его высот*».

К доске снова вышел Петя. Он нарисовал треугольник ABC, провел в нем высоты, отметил их основания: H_1, H_2, H_3. Стер треугольник, соединил точки H_1, H_2, H_3 и задумался. Учитель посоветовал ему сделать от руки набросок, считая, что задача уже решена, и подсказал, что биссектрисы треугольника $H_1H_2H_3$ принадлежат высотам треугольника ABC. Петя подумал и доказал это утверждение. Он построил две окружности: с диаметрами AC и AB — и воспользовался свойством вписанных в окружность углов (рис. 4; как рассуждал Петя?). После этого Петя снова все стер, быстро построил в треугольнике $H_1H_2H_3$ биссектрисы и через вершины H_1, H_2, H_3 провел прямые, перпендикулярные построенным биссектрисам. В пересечении он получил искомый треугольник ABC.

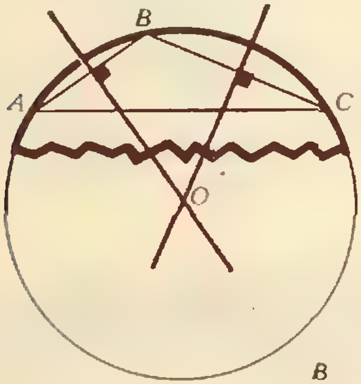


Рис. 1.

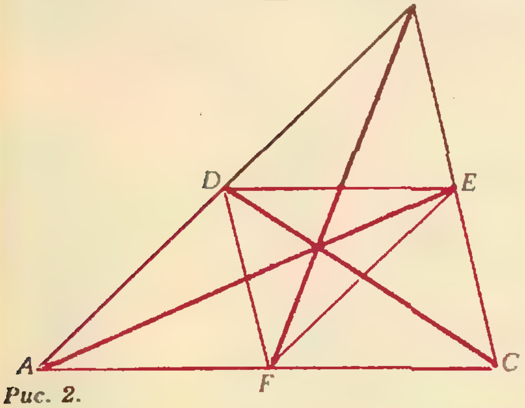


Рис. 2.

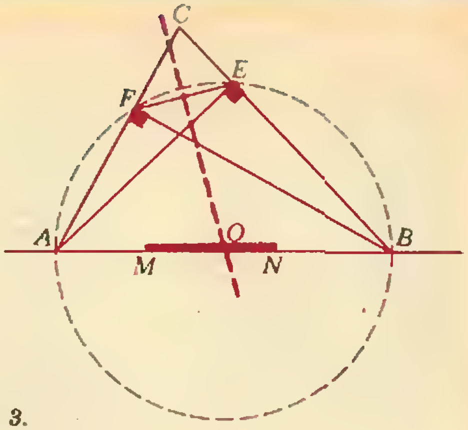


Рис. 3.

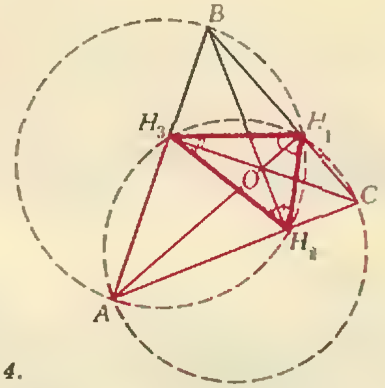


Рис. 4.

В конце занятия учитель предложил еще четыре задачи для домашнего решения.

1. В треугольнике ABC из вершины A были проведены медиана AD и высота AH, а из вершины B — медиана BF. Треугольник стерли, оставив только три точки D, F и H. Восстановите треугольник.

2. Нарисовали параллелограмм. Затем его стерли, оставив середины трех его сторон. Восстановите параллелограмм.

3. Даны точки M, N, K — середины трех равных сторон выпуклого четырехугольника. Восстановите четырехугольник.

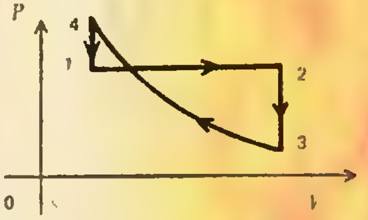
4. Восстановите треугольник, если известны середины двух его сторон и прямая, на которой лежит биссектриса, проведенная к одной из этих сторон.

---

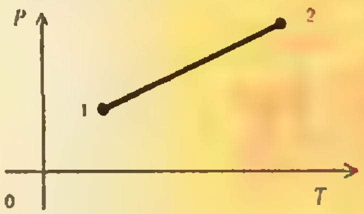
*) Кроме точек A и B.

Давление, объем, температура

1. Дан график изменения состояния газа в координатах p, V. Представить этот процесс графически в координатах V, T и p, T.



2. При нагревании газа была получена зависимость давления от температуры, показанная на графике. Сжимали или расширяли газ?

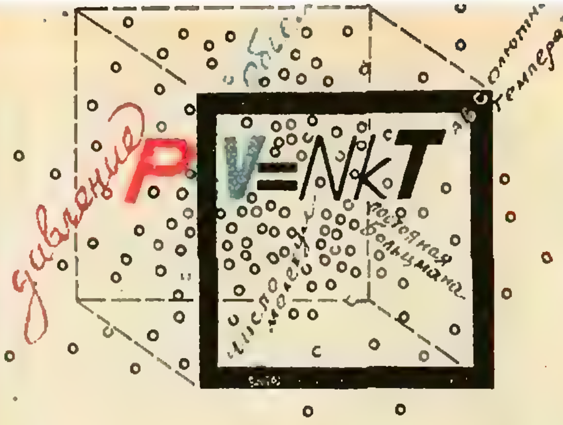


$\frac{P}{P_0}=\frac{T}{T_0}$

3. Два полых стеклянных шарика соединены трубкой, посередине которой находится капелька ртути. Можно ли по положению капельки судить о температуре окружающего воздуха?

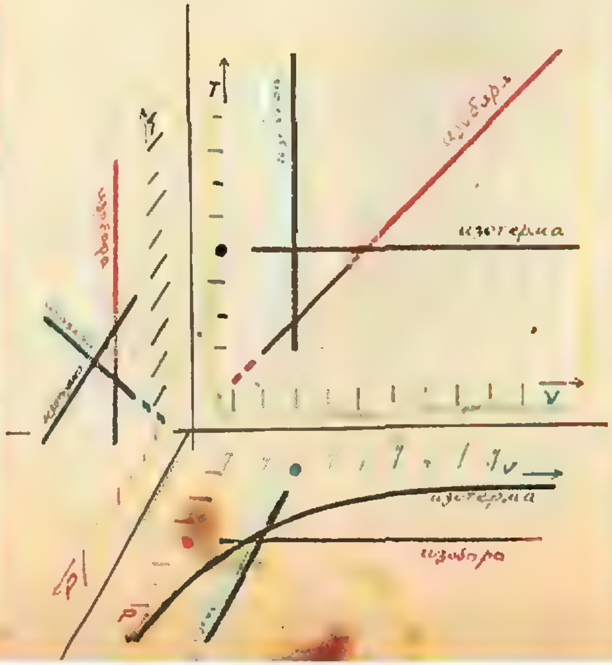
калейдоскоп

Вопросы и задачи


давление
$PV=NkT$
объем
число молекул
постоянная Больцмана
абсолютная температура

«... из законов Ньютона следует, что в равных объемах любых газов при одинаковых температуре и давлении содержится равное число молекул. Вот какой неожиданный вывод!»

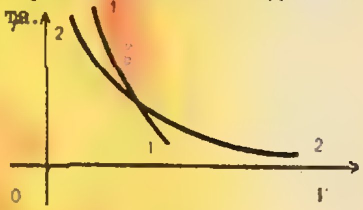
Р. Фейнман


T
V
V
p
p
изобара
изотерма
изохора
изотерма
изобара

калейдоскоп

Вопросы и задачи

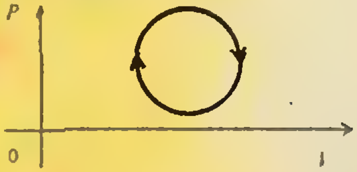
5. Определите по графику, какая из кривых — изотерма, а какая — адиабата.

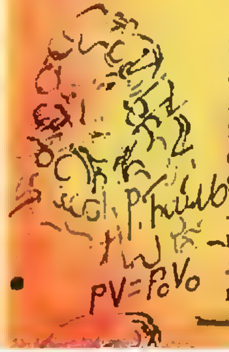


6. Объем газа уменьшили в 2 раза, а температуру увеличили в 1,5 раза. Как изменилось давление?

$\frac{V}{V_0}=\frac{T}{T_0}$

7. Как менялась температура газа при проведении процесса, изображенного на графике?





8. Объем воздушного пузырька удваивается при подъеме со дна озера на поверхность. Какова глубина озера?

9. Почему электрическая лампочка заполняется инертным газом при давлении, значительно меньшем атмосферного?

Давление, объем, температура

4. При значительном повышении температуры газа, состоящего из многоатомных молекул, может начаться их диссоциация. К каким отклонениям от закона Шарля может это привести?

Любопытно, что...

... повышение давления от одной до двух атмосфер при постоянной температуре влечет за собой уменьшение объема газа вдвое, в то время как объем воды меняется при этом лишь на одну двадцатитысячную. Однако сжимаемость воды не так уж и мала: если бы удалось освободить от сжатия во́ды Мирового океана, то его уровень поднялся бы на 35 м и огромные территории оказались бы затопленными.

... Бойль, экспериментируя с газами, не пытался установить новый закон, а хотел лишь доказать, что воздух обладает упругостью. Записи Бойля внимательно просматривал его ученик Тоунли. Он-то и обнаружил, что давление и объем обратно пропорциональны друг другу. 14 лет спустя Мариотт, проведя многочисленные опыты, вывел тот же закон.

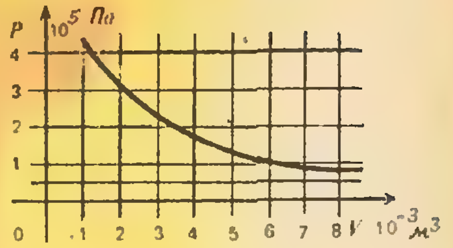
А так ли хорошо знакомы вам понятия

Давление, объем, температура?

Применив законы Ньютона к описанию теплового движения атомов идеального газа, можно вывести уравнение состояния газа, из которого следует сделанное в эпиграфе утверждение. Однако многие свойства вещества можно понять, не вдаваясь в детали его внутреннего строения. Так впервые опытным путем пришли к газовым законам, связывающим давление, объем и температуру газа.

Эти законы «работают» уже более 200 лет, позволяя исследовать поведение газов в различных условиях. Они помогут и вам разобраться в задачах, собранных сегодня в «Калейдоскопе».

10. Повышается или понижается температура в процессе расширения, показанном на графике?



Микроопыт

Налейте в большую тарелку воду, зажгите бумажку и опустите ее горящей внутрь стакана. Быстро переверните стакан и поставьте его на тарелку. Что произойдет с водой? Почему?

Что читать о газовых законах в «Кванте» (публикации последних лет)

1. *«Закон Дальтона» — 1981, № 11.*
2. *«Уравнение газового состояния» — 1983, № 2.*
3. *«Физический смысл универсальной газовой постоянной» — 1983, № 10.*
4. *«Масса и количество вещества...» — 1984, № 10.*
5. *«Газ превращается в жидкость» — 1984, № 11.*

задачник кванта

Задачи

М961—М965; Ф973—Ф977

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 марта 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1 — 86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М961, М962» или «Ф973». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М961. На стороне AB квадрата $ABCD$ взята точка E, а на стороне CD — точка F, причем $AE:EB=1:2$, $CF=FD$. Будут ли голубой и розовый треугольники (рис. 1) подобны?

А. П. Савин, Н. А. Паравян

М962. Докажите, что ни для какого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами не могут найтись такие различные целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 3)$, для которых выполнялись бы равенства $P(x_1)=x_2$, $P(x_2)=x_3, \ldots, P(x_{n-1})=x_n$, $P(x_n)=x_1$.

Думитру Раду (Румыния)

М963. Три пары противоположных сторон шестиугольника параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие их середины, пересекаются в одной точке.

Т. Газарян (уч. 10 класса)

М964. Докажите, что в последовательности (a_n) различных натуральных чисел, удовлетворяющих условию $a_n < 100n$, найдется число, в десятичной записи которого

а) встречается цифра 1;

б) встречается 1986 единиц подряд.

А. А. Столин

М965. Дано шесть чисел $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Чтобы подсчитать «в лоб» сумму их попарных произведений $a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_5a_6$, нужно затратить 15 умножений и 14 сложений. Покажите, как можно найти сразу сумму этих чисел, сумму их произведений по два, по три, по четыре и по пять, затратив всего 15 сложений и 14 умножений.

Н. Б. Васильев

Ф973. Тело начинает двигаться прямолинейно из точки A и через время T попадает в точку B а) с максимально возможной скоростью, б) с минимально возможной скоростью; расстояние $|AB|$ равно l. Найти скорости тела в этих двух случаях, если скорость в точке A $v_0=0$ и ускорение тела $-a_0 < a < a_0$.

Д. А. Акопян

Ф974. Определите период малых колебаний системы, изображенной на рисунке 2; масса груза m, упругость пружины k, $\widehat{AOB}=\alpha$. Стержень и блок считать гладкими, пружину невесомой. Пружина закреплена в точке A. Изменится ли период колебаний, если в точке O также закрепить груз m?

Л. Г. Маркович

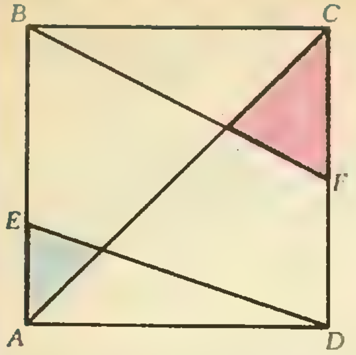


Рис. 1.

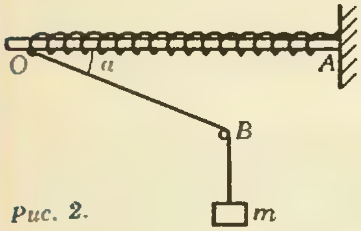


Рис. 2.

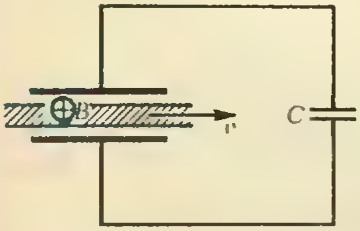


Рис. 3.

Ф975. Между пластинами плоского конденсатора площадью S, расстояние между которыми d, движется со скоростью $\vec{v}$ плоскопараллельная протяженная проводящая пластина толщиной $d/2$. Вдоль пластины перпендикулярно $\vec{v}$ действует постоянное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Определите напряжение на конденсаторе емкостью C, соединенном с пластинами так, как показано на рисунке 3.

Е. А. Ромишевский

Ф976. Моль идеального одноатомного газа переводится из начального состояния в конечное, как показано на рисунке 4. Определите подведенное газу тепло, если разность начальной и конечной температур равна $\Delta t = 100$ °C.

С. М. Коршунов

Ф977. На стене, плоскость которой отклонена от вертикали на 4,87° (рис. 5), укреплено зеркало. С какого максимального расстояния человек, рост которого 170 см, сможет увидеть в зеркале хотя бы часть своего изображения?

К. П. Кузнецов

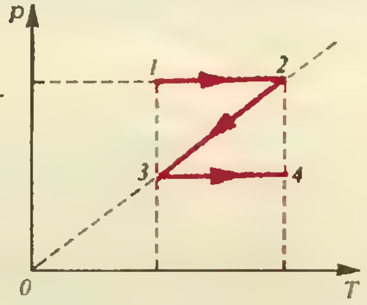


Рис. 4.

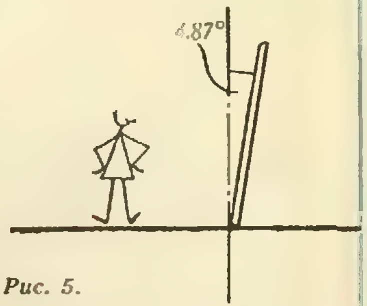


Рис. 5.

Problems

M961—M965; P973—P977

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than March 15th, 1986 to the following address: USSR, Moscow, 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».

M961. Points E and F are chosen on sides AB and CD of the square $ABCD$ respectively so that $AE:EB=1:2$, $CF=FD$. Will the blue and pink triangles on Fig. 1 be similar?

A. P. Savin, N. A. Paravyan

M962. Prove that there is no polynomial $P(x)$ with integer coefficients for which one can find distinct integers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 3)$ satisfying the relation

$$P(x_1)=x_2,\ P(x_2)=x_3,\ \ldots,\ P(x_{n-1})=x_n,\ P(x_n)=x_1.$$

Dumitru Radu (Rumania)

M963. The opposite sides of a hexagon are parallel. Prove that the lines joining their midpoints intersect at one common point.

T. Gazarian (10th form pupil)

M964. Prove that it is possible to find, in any sequence $\{a_n\}$ of distinct natural numbers satisfying the condition $a_n < 100\,n$, a number whose decimal expansion contains

a) the digit 1;
b) 1986 digits 1 in a row.

A. A. Stolia

M965. Six numbers $a_1, a_2, \ldots, a_6$ are given. In order to compute the sum of their pairwise products $a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_5a_6$ in the direct way, 15 multiplications and 14 additions are required. Show

Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the and of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have and original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russianor in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

how it is possible to find the sum of these numbers, the sum of their pairwise products, of all their triple, quadruple, quintuple products, using only 15 additions and 14 multiplications.

N. B. Vasiliev

P973. A solid body begins to move rectilinearly from the point A and after time T reaches point B a) at maximal possible velocity, b) at minimal possible velocity; the distance between A and B is l. Find the velocity of the body in these two cases, if the velocity at the point A is $v_0=0$ and the acceleration a of the body satisfies $-a_0<a<a_0$.

D. A. Akopyan

P974. Determine the period of small oscillations of the system shown on Fig. 2, p. 35; the mass of the body is m, the elasticity of the spring is k, $\angle AOB=\alpha$. The rod and the pulley are assumed smooth, the spring is weightless. The spring is attached to the point A. Will the period of oscillations change if another weight m is fixed at the point O?

L. G. Markovich

P975. A flat conducting plate of thickness $d/2$ moves with velocity v between two plane plates of area S, located at a distance of d from each other. A constant magnetic field of induction B acts along the plates perpendicularly to $\vec{v}$. Determine the voltage on a capacito of capacity C connected to the plates as shown on Fig 3, p. 35.

E. A. Romishevski

P976. One mole of ideal monoatomic gas changes from its initial state to its terminal one as shown on Fig 4. Determine the amoun of heat given to the gas, if the difference between the initial and terminal temperature is $\Delta t=100$ °C.

S. M. Korshunov

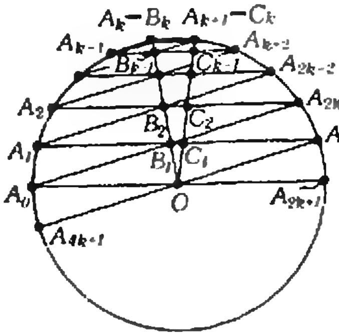
P977. A mirror is fixed on a wall which forms an angle of 4.87° with the vertical (Fig. 5). At what maximal distance from the wall will a person of height 170cm be able to see at least part of his mirror image?

E. P. Kuznetsov

Решения задач

M941 — M945; Ф953 — Ф957

M941. *Дан правильный $(4k+2)$-угольник $A_0A_1\dots A_{4k+1}$ с центром O. Докажите, что сумма отрезков, высекаемых углом A_kOA_{k+1} на прямых A_1A_{2k}, A_2A_{2k-1}, ..., A_kA_{k+1}, равна радиусу OA_0 описанной окружности $(4k+2)$-угольника, если а) $k=2$, б) k — любое натуральное число.*



а, б) Приведем решение сразу для общего случая.

Обозначим рассматриваемые в задаче отрезки хорд через B_iC_i, $i=1, 2, \dots, k$ ($B_k=A_k$, $C_k=A_{k+1}$; см. рисунок). Поскольку точки A_{k-i} и A_{k+i}, $i=1, 2, \dots, k$, а также A_{4k+1} и A_{2k+1} симметричны относительно прямой OA_k, хорды $A_{4k+1}A_{2k}$, A_0A_{2k-1}, A_1A_{2k-2}, ..., $A_{k-1}A_k$ соответственно симметричны данным хордам A_0A_{2k+1}, A_1A_{2k}, ..., A_kA_{k+1} относительно прямой OA_k и поэтому пересекают ее в точках O, B_1, B_2, ..., B_k и параллельны между собой. Следовательно, четырехугольники $OA_0B_1A_{2k}$, $B_1A_1B_2A_{2k-1}$, ..., $B_{k-1}A_{k-1}B_kA_{k+1}$ — параллелограммы и радиус данной окружности равен

$$OA_0=B_1A_{2k}=B_1C_1+C_1A_{2k}=B_1C_1+A_1B_1=$$
$$=B_1C_1+B_2A_{2k-1}=B_1C_1+B_2C_2+A_2B_2=\dots$$
$$\dots=B_1C_1+B_2C_2+\dots+B_{k-1}A_{k+2}=$$
$$=B_1C_1+B_2C_2+\dots+B_{k-1}C_{k-1}+B_kC_k,$$

что и требовалось доказать.

И. Ф. Шарыгин,
В. Н. Дубровский

М942. *Числа 1, 2, ..., 2n—1, 2n разбиты на две группы по n чисел в каждой. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ — числа первой группы в порядке возрастания, $b_1 > b_2 > \ldots > b_n$ — числа второй группы в порядке убывания. Докажите, что*

$$|a_1 - b_1| + |a_2 + b_2| + \ldots + |a_n - b_n| = n^2 .$$

Заметим, что из двух чисел a_k и b_k одно всегда не превосходит n, а другое — больше n. Действительно, если, например, $a_k \leqslant n$ и $b_k \leqslant n$, то и все числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и $b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n$ не превосходят n. Всего мы получаем $k+(n-k+1)=n+1$ различных натуральных чисел, не превосходящих n, что невозможно. Аналогично доказывается, что оба числа a_k и b_k не могут быть больше n.

Таким образом, каждое из слагаемых $|a_k - b_k|$ в нашей сумме равно разности числа, большего n, и числа, не превосходящего n. Раскрывая модули и переставив слагаемые, получим

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n| = \\ = (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+n) - (1+2+\ldots+n) = n^2.$$

В. В. Произволов

◆

М943. *Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ задается правилами: $a_{2n}=a_n$ при $n \geqslant 1$ и $a_{4n+1}=1$, $a_{4n+3}=0$ при $n \geqslant 0$. Докажите, что эта последовательность не имеет периода.*

Доказательство проведем от противного. Пусть последовательность имеет период $T=2^p \cdot q$, где q нечетно. Если $q=4m+3$, то при $k \geqslant p+2$

$$a_{2^k}=a_{2^k+T}=a_{2^p(2^{k-p}+q)}=a_{2^{p-1}(2^{k-p}+q)}=\ldots \\ \ldots=a_{2^{k-p}+4m+3}=a_{4(2^{k-p-2}+m)+3}=0,$$

но в то же время

$$a_{2^k}=a_{2^{k-1}}=\ldots=a_1=1.$$

Противоречие.

Если же $q=4m+1$, то в проведенном рассуждении число T надо заменить на число $3T=2^p(4\cdot 3m+3)$, которое также должно быть периодом нашей последовательности.

С последовательностью (a_n) связана замечательная бесконечная ломаная $A_0A_1A_2\ldots$ с равными звеньями, каждое из которых (начиная с A_1A_2) составляет угол 90° с предыдущим, причем в вершине A_n $(n \geqslant 1)$ ломаная поворачивает налево, если $a_n=1$, и направо, если $a_n=0$. Эта ломаная называется «главной ломаной дракона» (см. статью Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Кривые дракона» в «Кванте» № 2 за 1970 г.).

Ю. В. Нестеренко

◆

М944. *Правильный шестиугольник разбит на 24 равных треугольника, как на рисунке 1. Во всех 19 узлах образовавшейся фигуры записаны различные числа. Докажите, что среди 24 треугольников разбиения имеется по крайней мере 7 таких, в вершинах которых тройки чисел записаны в порядке возрастания против часовой стрелки.*

От каждой из сторон треугольников проведем стрелку, направленную влево от стороны, если двигаться по ней от вершины с меньшим числом к вершине с бо́льшим числом (рис. 2). Если числа, записанные в вершинах некоторого треугольника, возрастают при обходе вершин против часовой стрелки, то внутри этого треугольника находятся ровно две стрелки; если по часовой — то ровно одна (рис. 3). Пусть треугольников первого типа — n, второго — m $(n+m=24)$. Поскольку общее число N стрелок внутри шестиугольника равно $2n+m$, нам достаточно доказать, что $N \geqslant 31$ (тогда $n=N-(n+m) \geqslant 31-24=7$).

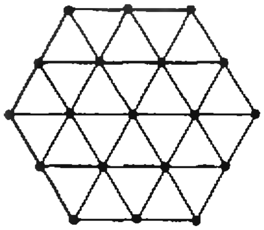


Рис. 1.

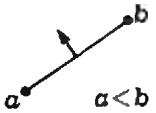


Рис. 2.

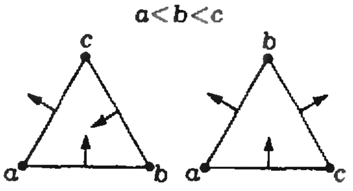


Рис. 3

Стрелки, отвечающие 30 внутренним отрезкам разбиения, заведомо лежат внутри шестиугольника. Из 12 остальных стрелок, расположенных по контуру шестиугольника, хотя бы одна должна быть направлена внутрь. (В противном случае, обходя границу шестиугольника по часовой стрелке, мы каждый раз встречали бы все большее число.) Итак, $N \geqslant 30+1=31$.

А. А. Берзиньш

◆

М945. *Дана строго возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел $a_1, a_2, \ldots$ Докажите, что для всех достаточно больших k справедливо неравенство*

а) $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1$;

б) $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1985$.

а), б) Положим

$$s_k=\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_k}{a_{k+1}}.$$

и докажем, что *при любом достаточно большом* k

$$s_k<k-1/2.$$

Поскольку последовательность $a_1, a_2, \ldots$ неограниченно возрастает, найдется такое K, что $a_1/a_K<1/2$, тогда при всех $k \geqslant K$

$$k-s_k=\left(1-\frac{a_1}{a_2}\right)+\left(1-\frac{a_2}{a_3}\right)+\ldots+\left(1-\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)>$$

$$>\frac{a_2-a_1}{a_{k+1}}+\frac{a_3-a_2}{a_{k+1}}+\ldots+\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}}=1-\frac{a_1}{a_{k+1}}>1-\frac{a_1}{a_K}>\frac{1}{2}$$

Применяя это утверждение к последовательности $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$, получим, что при всех достаточно больших k, $k>m$,

$$s_k-s_m=\frac{a_{m+1}}{a_{m+2}}+\ldots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-m-\frac{1}{2}.$$

Выберем теперь такое k_1, что $s_{k_1}<k_1-1/2$, затем $k_2>k_1$ так, что $s_{k_2}-s_{k_1}<k_2-k_1-1/2$, затем $k_3>k_2$ так, что $s_{k_3}-s_{k_2}<k_3-k_2-1/2$, и т. д. Тогда при любом $k \geqslant k_n$

$$s_k=(s_k-s_{k_n})+(s_{k_n}-s_{k_{n-1}})+\ldots+(s_{k_2}-s_{k_1})<$$

$$<(k-k_n)+\left(k_n-k_{n-1}-\frac{1}{2}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(k_2-k_1-\frac{1}{2}\right)+k_1-\frac{1}{2}=k-n/2.$$

Отсюда вытекают оба утверждения задачи: а) — при $n=2$, б) — при $n=2\cdot 1985$.

Л. Д. Курляндчик

◆

Ф953. *Для точной подстройки частоты вращения диска электропроигрывателя ($33\frac{1}{3}$ оборота в минуту) на его боковую поверхность наносят метки, которые освещают неоновой лампочкой с частотой 100 вспышек в секунду. Каким должно быть число меток, чтобы при номинальной скорости они казались неподвижными? После отключения двигателя силы сухого трения начинают тормозить диск, и метки «побегут». За*

За время $\frac{1}{100}$ с $=\frac{1}{6000}$ мин диск успевает повернуться на $\frac{1}{6000}\cdot 33\frac{1}{3}=\frac{1}{180}$ оборота. Для того чтобы картина казалась неподвижной, нужно, чтобы за время между вспышками одна метка успевала встать на место другой. Значит, в нашем случае нужно взять $n=180$ меток. (Строго говоря, можно было бы взять и 360 меток, и 540, и т. д., однако этого делать не нужно. Подумайте сами — почему. Подсказка: точность определения номинальной скорости диска $\sim 0{,}5\div 1$ %. И еще вопрос: как бы выглядела картина, если бы мы нанесли 90, 60 или 45 меток?)

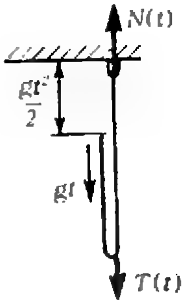
первые 4 с мимо точки наблюдения «пробегают» 10 меток. Через какое время диск остановится? Через какой промежуток времени метки «побегут» в другую сторону?

После отключения двигателя диск начинает равномерно тормозиться (при сухом трении силы при торможении не изменяются по величине). За 4 секунды при номинальной скорости должно пройти 400 меток, а диск «отстал» на 10 — значит, за это время скорость диска упала на $2\cdot\frac{10}{400}=\frac{1}{20}$ от номинальной величины. Следовательно, диск остановится через $4\cdot 20=80$ секунд, а через 40 секунд метки «побегут» в первый раз в другую сторону.

А. Р. Зильберман

◆

Ф954. *Декоративная квадратная штора размером 1,5 × × 1,5 м висит на карнизе вдоль вертикальной стены. Нижний край шторы поднимают вровень с верхним, так что штора оказывается сложенной вдвое, и отпускают. Найдите зависимость силы, действующей на карниз, от времени. Штора тонкая, гладкая и имеет массу 3 кг.*



Рассмотрим положение шторы спустя время t после начала ее падения. Так как штора мягкая, то левая ее часть свободно падает, а правая неподвижна (см. рисунок). При этом в момент времени t левая часть движется со скоростью gt. Так как штора мягкая и тонкая, пренебрежем размером области перегиба и ее импульсом. Спустя небольшой интервал времени Δt затормозится еще часть шторы массой

$$\Delta m=\frac{m}{d^2}\,gt\frac{d\cdot\Delta t}{2}$$

(d — сторона шторы), которая до торможения имела импульс

$$\Delta p=\Delta m\cdot gt=\frac{m}{d}(gt)^2\frac{\Delta t}{2}.$$

Применим к этому куску шторы закон изменения импульса, чтобы определить силу $T(t)$, действующую на него со стороны висящей части шторы (по третьему закону Ньютона точно такая же по величине сила будет действовать вниз на висящую часть шторы). Итак,

$$T(t)-\Delta m\cdot g=\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{m}{2d}(gt)^2,$$

откуда

$$T(t)\Big|_{\substack{\Delta t\to 0\\(\Delta m\to 0)}}=\frac{m}{2d}(gt)^2.$$

Поскольку правая часть шторы неподвижна, сумма сил, действующих на нее, в любой момент времени равна нулю. Следовательно, в момент времени t получим

$$T(t)+\frac{m}{2}g+\frac{m}{2d^2}d\frac{gt^2}{2}g-N(t)=0,$$

где $N(t)$ — сила, действующая со стороны карниза на штору в момент времени t.

Таким образом,

$$N(t)=\frac{m}{2d}(gt)^2+\frac{m}{2}g+\frac{m(gt)^2}{4d}=$$

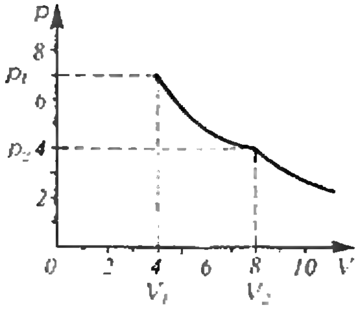
$$=\frac{mg}{2}\left(1+\frac{3}{2}\frac{gt^2}{d}\right)=15(1+10t^2)\ \text{Н}$$

$$\left(t\leqslant\sqrt{\frac{2d}{g}}\approx\sqrt{0{,}3}\ \text{с}\right).$$

С. С. Кротов

Ф955. *Смесь газов, состоящую из $m_1 = 100$ г азота и неизвестного количества кислорода, подвергают изотермическому сжатию при температуре $T = 74{,}4$ К. График зависимости давления смеси газов от ее объема приведен на рисунке (в условных единицах). Определите массу кислорода. Рассчитайте давление насыщенных паров кислорода при этой температуре.*

Примечание. $T = 74{,}4$ К — это температура кипения жидкого азота при нормальном давлении; кислород кипит при более высокой температуре.



Обозначим характерные точки на графике, как показано на рисунке. При $V < V_1$ давление смеси газов не меняется — это означает, что и кислород, и азот конденсируются, и давление равно сумме давлений насыщенных паров кислорода $p_{нас,к}$ и азота $p_{нас,а}$ при $T = 74{,}4$ К. Так как данная температура является температурой кипения жидкого азота, то $p_{нас,а} = p_0$ — атмосферному давлению (10^5 Па). Изломы на графике в точках (V_1, p_1) и (V_2, p_2) свидетельствуют о фазовых переходах — конденсации газов: если при $V < V_1$ сконденсировались оба газа, то при $V_1 < V < V_2$ лишь один, а при $V > V_2$ конденсации нет. Предположим, что в точке (p_1, V_1) конденсируется азот. Тогда кислород сконденсировался в точке (V_2, p_2), и мы можем записать систему уравнений

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{нас,к} + p_0, \\ p_2 &= p_{нас,к} + p_а, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $p_а$ — парциальное давление азота в точке (V_2, p_2). Поскольку на участке $V_1 - V_2$ азот находится лишь в газообразном состоянии, то из закона Бойля — Мариотта следует, что $p_а = p_0 \frac{V_2}{V_1}$. Подставляя это значение в (1) и поделив уравнения друг на друга (используя соотношения $p_1/p_2 = 7/4$, а $V_1/V_2 = 1/2$), находим

$$p_{нас,к} = \frac{1}{6} p_0 \approx 17 \text{ кПа}.$$

Предположив, что в точке (V_1, p_1) конденсируется кислород, мы получили бы, как нетрудно проверить, $p_{нас,к} = 6p_0$. Это противоречит тому, что кислород кипит при более высокой температуре — давление насыщенных паров кислорода при $T = 74$ К должно быть меньше p_0.

Найдем теперь массу кислорода m_2. Точка (p_2, V_2) соответствует началу конденсации кислорода, то есть его давление равно $p_{нас,к}$ и весь кислород при этом находится в газообразном состоянии. В соответствии с законом Менделеева — Клапейрона,

$$p_{нас,к} V_2 = \frac{m_2}{\mu_к} RT, \qquad (2)$$

где $\mu_к$ — молярная масса кислорода. Для азота конденсация начинается в точке (p_1, V_1), значит,

$$p_0 V_1 = \frac{m_1}{\mu_а} RT, \qquad (3)$$

где $\mu_а$ — молярная масса азота. Поделив уравнение (2) на (3) и учитывая, что $\mu_1/\mu_2 = \frac{7}{8}$ и $p_{нас,к} = \frac{1}{6} p_0$, определим массу кислорода

$$m_2 = (8/21)m_1 \approx 38 \text{ г}.$$

А. И. Буздин

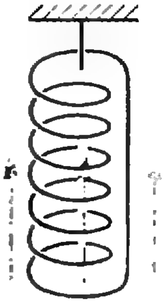
◆

Ф956. *В одном из вариантов классического опыта, поставленного академиком И. К. Кикоиным, однослойная короткозамкнутая катушка индук-*

Ток I в катушке в момент разрушения сверхпроводимости найдем из условия сохранения магнитного потока:

$$\Phi + \Phi_{вн} = 0,$$

тивности $L=3\cdot10$ [illegible] Гн из тонкой сверхпроводящей проволоки подвешивалась на упругой нити в магнитном поле, направленном вертикально вверх вдоль оси катушки (см. рисунок). Нить подвеса в исходном состоянии не закручена, сила тока в катушке равна нулю. Индукция B магнитного поля медленно увеличивалась от нулевого значения до значения $B_0=0.1$ Тл, при котором сверхпроводимость скачком исчезала и проволока переходила в нормальное состояние. Катушка при этом закручивалась. Определите максимальный угол закручивания катушки, считая, что упругий момент нити пропорционален углу закручивания (в радианах); коэффициент пропорциональности $G=10^{-7}$ Н·м. Число витков катушки $n=100$, радиус витков $R=1$ см, масса катушки $M=10$ г. Отношение заряда электрона к его массе равно $e/m=1.76\cdot10^{11}$ Кл/кг.



Ф957. *Распространение коротких радиоволн в верхних слоях атмосферы Земли (ионосфере) можно описывать законами геометрической оптики, если принять, что показатель преломления n для радиоволн меньше единицы и изменяется с высотой H от поверхности Земли так, как показано на рисунке 1 (для некоторой частоты ν). На спутнике, летящем на высоте $h=200$ км, установлен радиопередатчик, излучающий радиоволны частоты ν равномерно по всем направлениям. Пренебрегая поглощением радиоволн в ионосфере, оцените долю излучаемой передатчиком мощности, которая уносится радиоволнами за пределы земной атмосферы. При оценках поверхность Земли считать плоской, а отражение радиоволн от нее — зеркальным и без потерь. Примеча-*

где $\Phi=LI$ — собственный магнитный поток, $\Phi_{\text{вн}}$ — поток, созданный внешним полем. Отсюда

$$I=\frac{|\Phi_{\text{вн}}|}{L}=\frac{SnB_0}{L}=\frac{\pi R^2nB_0}{L}.$$

Пусть этот ток создан движением N электронов по виткам катушки. Тогда

$$I=\frac{N}{2\pi Rn}ev,$$

где e — заряд электрона, v — скорость упорядоченного движения электронов.

Суммарный импульс всех электронов

$$p=Nmv=2\pi RnI\,\frac{m}{e}.$$

Этот импульс при исчезновении тока передается катушке. Обратим внимание на то, что в данном случае задача о передаче вращательного импульса сводится к задаче о передаче линейного импульса. В приведенной формуле под p нужно понимать арифметическую сумму импульсов всех электронов, равную (после исчезновения тока) арифметической сумме импульсов всех элементов катушки. Катушка приобретает после исчезновения тока кинетическую энергию

$$E_{\text{к}}=p^2/2M.$$

Угол закручивания нити найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{p^2}{2M}=\frac{G\varphi_{\max}^2}{2},$$

откуда

$$\varphi_{\max}=\frac{p}{\sqrt{MG}}=\frac{2\pi^2R^3n^2B_0}{L\,\frac{e}{m}}\cdot\frac{1}{\sqrt{MG}}\approx 1{,}2\cdot10^{-1}\ \text{рад}.$$

С. М. Козел

◆

Среду, в которой показатель преломления зависит только от высоты, можно разбить на тонкие плоские слои, в пределах каждого из которых показатель преломления можно считать постоянным. Рассмотрим ход луча в двух соседних слоях с показателями преломления n_i и n_{i+1}. Пусть в одном слое угол падения луча на границу раздела слоев равен α_i, а в другом — α_{i+1} (рис. 2). По закону преломления

$$\frac{n_{i+1}}{n_i}=\frac{\sin\alpha_i}{\sin\alpha_{i+1}},$$

откуда

$$n_{i+1}\sin\alpha_{i+1}=n_i\sin\alpha_i.$$

Таким образом, произведение показателя преломления на синус угла падения при переходе от слоя к слою не меняется и остается постоянным для всех слоев, через которые идет луч.

На рисунке 3 сплошными линиями показан ход лучей, уходящих за пределы атмосферы, а пунктирными — отражающихся от ионосферы.

Рассмотрим сначала луч, испущенный со спутника вверх под углом α к вертикали. Обозначим *ние. Телесный угол конуса с углом при вершине β равен* $\Omega=2\pi\left(1-\cos\frac{\beta}{2}\right)$.

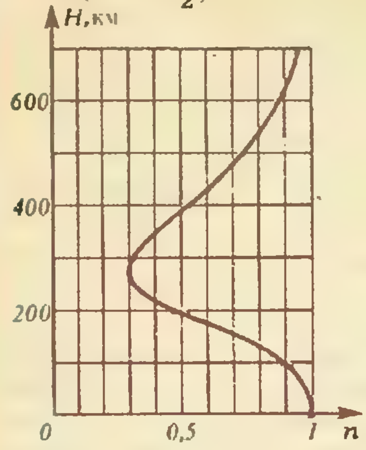


Рис. 1.

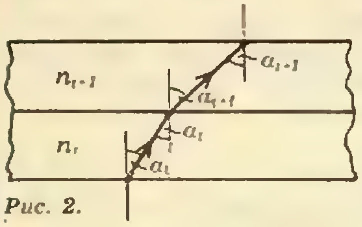


Рис. 2.

через $n(H)$ и $\alpha(H)$ показатель преломления и угол падения для произвольной точки траектории луча. Этот луч уйдет за пределы атмосферы, если во всех точках его траектории угол падения будет меньше 90°, то есть

$$\sin\alpha(H)<\sin 90^\circ=1.$$

Так как $n_0\sin\alpha=n(H)\cdot\sin\alpha(H)$, то

$$\frac{n_0\cdot\sin\alpha}{n(H)}<1$$

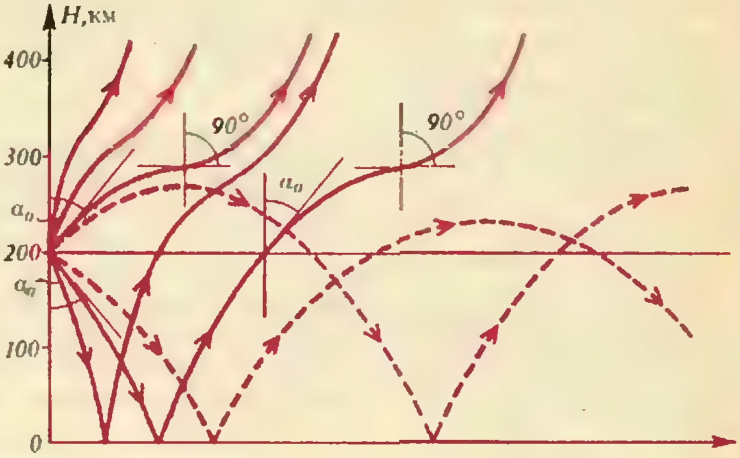


Рис. 3.

($n_0\approx0{,}5$ — показатель преломления на высоте 200 км (см. рис. 1)).

Поскольку минимальное значение $n(H)$ равно $n_{\min}\approx0{,}3$ (см. рис. 1), то луч выйдет за пределы атмосферы, если

$$\sin\alpha<\frac{n_{\min}}{n_0}=0{,}6.$$

Итак, при углах, меньших $\alpha_0=\arcsin 0{,}6$, лучи выйдут за пределы атмосферы. Углу α_0 соответствует телесный угол

$$\Omega=2\pi\,(1-\cos\alpha_0).$$

С учетом отражения от Земли за пределы атмосферы уходит излучение в телесном угле 2Ω. Доля излучаемой мощности, которая уносится за пределы атмосферы,

$$\eta=\frac{2\Omega}{4\pi}=1-\cos\alpha_0.$$

Так как $\cos\alpha_0=0{,}8$, то $\eta=0{,}2$.

В. И. Чивилёв

Из писем читателей

«Задачник Кванта» по математике получает много писем от читателей журнала с решениями задач, комментариями и дополнениями к опубликованным решениям, новыми задачами. Мы стараемся отвечать всем нашим корреспондентам, прежде всего школьникам; с большим интересом мы изучаем также письма учителей, руководителей математических кружков, преподавателей вузов, студентов, научных сотрудников, всех любителей математики, увлекающихся решением математических задач и их созданием. К сожалению, далеко не все интересное в этих письмах может уместиться в публикациях «Задачника»; ниже мы упомянем лишь несколько писем, пришедших за последний год,— а всего их было несколько тысяч.

* * *

Пожалуй, первая задача 1984 года М841 — в ней требовалось доказать, что *произведение длин отрезков, на которые гипотенуза прямоугольного треугольника делится точкой касания вписанной в него окружности, равно площади этого треугольника*,— оказалась не только одной из самых простых, но и получила наибольшее число различных решений. Кроме опубликованного в «Кванте» № 4 за 1984 г., приведем еще одно, присланное Л. А. **Штейнгарцем** (руководителем математического кружка Тбилисского дворца пионеров),— по принципу древних «смотри!» (рис. 1); площадь треугольника ABD равна площади прямоугольника $OEDF$, поскольку треугольники одинакового цвета равны, то есть $AT \cdot TB = OE \cdot OF = S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABC}$.

* * *

В связи с поставленными в решении задачи М810 (Квант, 1983, № 9, с. 46) вопросом об *оценке площади наибольшего прямоугольника, вписанного в произвольную выпуклую фигуру площади* S, Е. М. **Гольберг** (Ленинград) заметил, что сравнительно нетрудно поместить в такую фигуру два прямоугольника, сумма площадей которых не меньше $S/2$ (рис. 2); для этого достаточно описать вокруг данной фигуры прямоугольник $KLMN$, стороны KL и MN которого касаются ее в наиболее удаленных друг от друга точках A и B фигуры (отрезок AB называется «диаметром» фигуры), и провести параллельные AB отрезки L_1M_1 и K_1N_1 так, что $AL_1 = L_1L$, $AK_1 = K_1A$ (докажите, что площадь каждого из розовых прямоугольников не меньше половины соответствующей части фигуры, разделенной диаметром AB). А. Б. **Ходулев** (Москва) доказал, что *в любую выпуклую фигуру площади S можно вписать прямоугольник площади не меньше $S/2$*, но его доказательство не вполне элементарно и слишком длинно, чтобы привести его здесь,— мы предлагаем любителям геометрических неравенств поискать простое доказательство этой теоремы и возможных ее вариантов или обобщений, прежде чем публиковать заметку на эту тему.

* * *

В связи с задачей М839 (Квант, 1983, № 12, с. 35) десятиклассник (теперь уже студент) Л. **Вертгейм** из Новосибирска прислал нам ряд интересных результатов о последовательности a, определяемой условиями: $a_1=1$, $a_2=2$, a_k — наименьшее из натуральных чисел, не образующих тройку членов арифметической прогрессии с предыдущими и большее a_{k-1} (при $k>2$): 1, 2, 4, 5, 10, 11, 13, 14, 28, 29, ... В частности: $a_{2^m+1} = 2a_{2^m} = 3^m+1$; $a_{2k} = a_{2k-1}+1$; если n нечетно, то чтобы найти a_n, достаточно записать n в двоичной системе, а прочитать — в троичной (например, $11_{10}=1011_2$, $a_{11}=1011_3=31$); любое натуральное число можно получить как сумму двух (не обязательно различных) чисел a_n.

Правда, все это не решает более трудный вопрос: каково наименьшее (для данного n) число b_n такое, что из отрезка натурального ряда от 1 до b_n можно выбрать n чисел, не содержащих тройки членов арифметической прогрессии,— получается лишь оценка сверху: $b_n \leqslant a_n \leqslant c \cdot n^{\log_2 3}$.

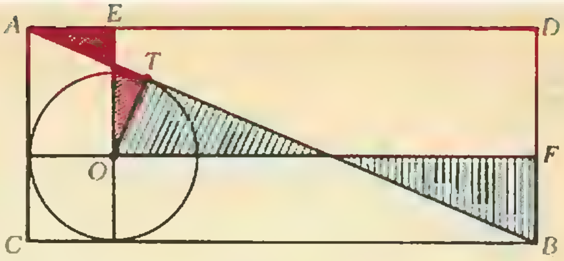


Рис. 1.

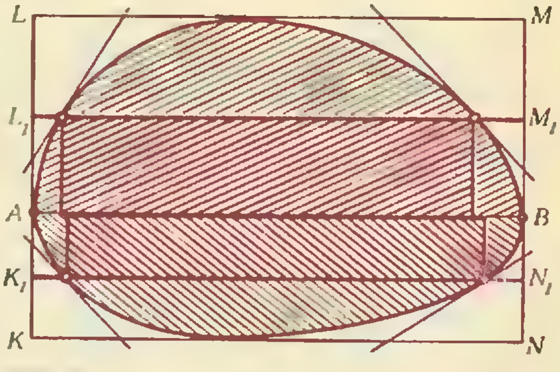


Рис. 2.

* * *

Новый результат в похожей на М839 задаче «о разновесах» (Квант, 1981, № 12, с. 34) сообщил нам В. Д. **Яковлев** из Сыктывкара: ему удалось построить пример, улучшающий известный (считавшийся кандидатом в «абсолютные чемпионы»), приведенный в «Кванте». Вот этот пример: последовательность β_n задается для $n \geqslant 0$ так: 0, 2, 3, 4, 8, 14, 25, 47, 86, 164, 314, 603, 1159: тогда числа $\beta_{12} - \beta_n$, $n = 0, 1, \ldots, 11$, образуют «систему разновесов» — любые две подсуммы этих 12 чисел различны. Так что и в этой задаче окончательного результата пока нет.

* * *

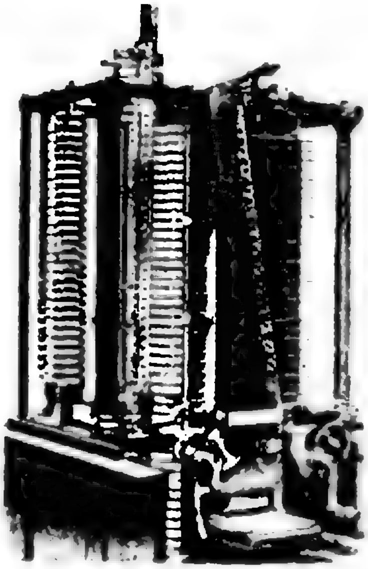
Пожалуй, наиболее интересным из писем, связанных со старыми задачами, разобранными в «Кванте», было в этом году письмо В. В. **Произволова** (Москва), которому удалось найти значительно более короткое, чем опубликованное в статье «Задача о числах в таблице» (Квант, 1971, № 12, с. 24), доказательство следующей теоремы: *в таблице $n \times n$ клеток, где расставлены числа 1, 2, ..., n^2, найдутся две соседние (граничащие по стороне) клетки, разность чисел в которых не меньше n.* Вот это доказательство.

Пусть k — наибольшее из n наименьших чисел в строках таблицы, m — наибольшее из n наименьших чисел в ее столбцах; будем считать, что $k \leqslant m$. В каждой строке найдется число, не превосходящее k, и число, большее k (иначе нашлась бы строка, в которой все числа не больше k, самого k в ней быть не может, и тогда было бы $m > k$). Возьмем в i-й строке пару соседних чисел a_i и b_i такую, что $a_i \leqslant k < b_i$. Среди них мы найдем нужную, поскольку хоть одно из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ не меньше $n+k$.

Н. Б. Васильев

V. Элементарные логические операции

Доктор физико-математических наук М. Е. ЛЕВИНШТЕЙН,
кандидат физико-математических наук Г. С. СИМИН



Самые первые идеи создания программируемой автоматической цифровой вычислительной машины выдвинуты более 150 лет назад. Они принадлежат англичанину Ч. Бэббиджу, человеку феноменальных способностей, чьи идеи на сто лет опередили время. Более 30 лет, начиная с 1812 года, Бэббидж работал над изготовлением такой машины. «Элементной базой» машины Бэббиджа служили «цифровые» колеса с различным числом зубьев. Часть машины Бэббиджа хранится в научном музее в Лондоне. (Подробно о Ч. Бэббидже можно прочесть в «Кванте», 1985, № 10 в статье «История рождения компьютера».)

Английский философ и математик Дж. Буль разработал в 1854 году алгебру логики, которая впоследствии стала теоретическим фундаментом современных ЭВМ.

В предыдущих заметках этой рубрики (см. «Квант», 1985, № 9—12) мы рассмотрели устройство, принципы действия и способы изготовления транзисторов — основы современных ЭВМ. Для того чтобы понять, как с помощью транзисторов в ЭВМ осуществляются простейшие действия, нам потребуется сегодня разговор об элементарных логических операциях.

...Вы входите в вестибюль современного 16-этажного дома. Перед вами двери двух лифтов и одна-единственная кнопка в стене. Вы ее нажимаете и по световому табло над дверью видите, как один из лифтов начинает к вам спускаться. По дороге кабина останавливается — слышен шум открывающихся и закрывающихся дверей — в лифт кто-то вошел. Кабина возобновляет движение. Наконец, двери лифта открываются. Кто-то выходит... Все это так привычно, что практически не задерживает внимания.

А теперь представьте себя на месте инженера, который должен спроектировать электронную схему, управляющую движением лифта. Эта схема должна уметь решать множество задач.

«Если кабины не заняты и нажата только одна кнопка — послать к данному этажу ту кабину, которая ближе. Если обе кабины на одном этаже — послать ту, которая потребляет меньше энергии.»

«Если в кабине пассажир и он нажал кнопку данного этажа, а на другом этаже также нажата кнопка, причем лифт едет не вверх, а вниз, а второй лифт не занят, или, если во втором лифте также пассажир...»

Попробуйте представить себе всю совокупность логических задач, которые могут быть поставлены перед электронной схемой при наличии 16 этажей и двух лифтов, и вы убедитесь, что даже такой простенький «процессор» должен уметь справляться с очень непростыми проблемами.

Попытавшись такой процессор спроектировать, вы рано или поздно убедитесь в следующем. Составляя логическую схему, удобно на время забыть о свойствах того прибора, который служит элементной базой вашего процессора, и считать, что в вашем распоряжении имеются элементарные логические ячейки — элементарные схемки, умеющие реализовывать логические функции «И», «НЕ», «ИЛИ».

Чем сложнее функция процессора, который должен быть спроектирован, тем более эффективен такой подход. Для ЭВМ, которая должна решать задачи в тысячи раз более сложные, чем устройство управления лифтом, только он является оправданным.

Разумеется, совсем забыть о свойствах элементной базы не удается. Рано или поздно встанет множество вопросов, решение которых определяется именно параметрами того конкретного элемента,— электромагнитного реле, транзистора, выключателя и т. д.,— на котором построены логические схемы. Как быстро срабатывают логические ячейки? Какую мощность они

Основой этой алгебры, которая теперь называется «булевой», являются любые величины, принимающие только два значения: «да» — «нет», «0» — «1», «включено» — «выключено» и т. д.

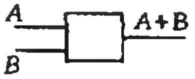
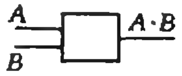
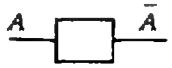
Операции булевой алгебры	Соответствующие логические схемы	
Логическое сложение $C = A + B$ (A или B)		Схема „ИЛИ"
Логическое умножение $C = A \cdot B$ (A и B)		Схема „И"
Логическое отрицание $B = \bar{A}$ (не A)		Схема „НЕ"

Таблица логических операций.

Глубокую и принципиальную взаимосвязь булевой алгебры и двоичного характера ключевых электронных элементов установил известный американский математик Дж. фон Нейман. Идеи Неймана заложили основы однородных ЭВМ, состоящих из большого числа идентичных элементарных логических схем, действующих по двоичному принципу. Нейман доказал, что, используя схемы «НЕ», «ИЛИ», «И», можно создать все основные узлы ЭВМ.

Крупный вклад в алгебраическую теорию автоматов внес известный советский математик академик В. М. Глушков. Важные результаты получены им в теории цифровых автоматов, в области приложений вычислительной техники, в разработке новых принципов построения малых ЭВМ.

потребляют? Сколько стоит логическая схема? Насколько надежно она защищена от помех? И т. д.

Но пока вы проектируете логику процессора, обо всех этих вопросах можно не думать. Логическая схема, построенная с использованием логических ячеек типа «И», «ИЛИ», «НЕ», является универсальной; она не зависит от того, на каких элементах реализованы логические ячейки.

Что же представляют собой логические ячейки?

Это электронные схемы, на входах и выходах которых напряжения могут принимать только два вполне определенных значения. Одно из этих значений называется логическим нулем, второе — логической единицей. Эти два значения напряжения обозначают, соответственно, U^0 и U^1 («0» и «1»).

Логические ячейки типа «ИЛИ» (схемы логического сложения) имеют два или более входов и один выход. Если хотя бы на один из входов поступает сигнал «1», на выходе также появляется «1». Условное обозначение схемы «ИЛИ» показано в первой строке таблицы логических операций. Входы схемы обозначены буквами A и B. Сигнал на выходе обозначается ($A+B$).

Логические ячейки типа «И» (схемы логического умножения) также имеют один выход и два или более входов. Сигнал «1» на выходе ячейки появляется в том и только в том случае, если на всех входах ячейки также действуют сигналы «1». Если хотя бы на одном из входов действует сигнал «0», то на выходе устанавливается сигнал «0».

Логические ячейки типа «НЕ» (их называют также инверторами или схемами «логического отрицания») имеют один вход и один выход. Если на вход поступает сигнал «1», на выходе появляется «0», и наоборот, если на входе действует «0», на выходе устанавливается «1».

Логические операции сложения, умножения и отрицания подчиняются определенным правилам, устанавливаемым так называемой алгеброй логики или булевой алгеброй.

Манипулируя только логическими операциями «И», «ИЛИ», «НЕ» (иногда в очень сложных сочетаниях), можно, оказывается, осуществить любые действия, позволяющие ЭВМ принимать решения, управлять, перерабатывать информацию и т. п.

Примеры простейших логических схем, построенных на транзисторах, мы рассмотрим в следующей заметке нашей рубрики.

Поиск в упорядоченной совокупности и упорядочение

Доктор физико-математических наук
С. А. АБРАМОВ

Выигравшие номера упорядочены в лотерейных таблицах по возрастанию. Упорядоченность облегчает проверку билетов: если бы номера не были упорядочены, то проверка могла бы потребовать сравнения номера вашего билета со всеми номерами, содержащимися в таблице. Точно так же словарный порядок облегчает поиск слова в словаре или в справочнике.

Нас будет интересовать *алгоритм наиболее быстрого поиска элемента b в упорядоченной совокупности* $a_1, \ldots, a_n$. Прежде чем заниматься этим алгоритмом, примем три соглашения. Во-первых, мы предположим, что $a_1, \ldots, a_n, b$ — это целые числа. Работая со словарем, мы имеем дело не с числами, а со словами, но это не играет принципиальной роли: меняется только техника каждого сравнения, а не число сравнений. Во-вторых, мы считаем, что найти элемент совокупности $a_1, \ldots, a_n$, обладающий некоторым свойством, — значит определить индекс $1, \ldots, n$ этого элемента. В-третьих, мы не будем использовать никакие другие исследования значений $a_1, \ldots, a_n, b$, кроме проверок справедливости неравенств вида

$$x < y \qquad (x, y \in \{a_1, \ldots, a_n, b\}). \qquad (1)$$

Эти проверки будем называть *сравнениями*.

Пусть $a_1 < \ldots < a_n$. Для b имеется $n+1$ возможность: $b \leqslant a_1$, $a_1 < b \leqslant a_2, \ldots, a_{n-1} < b \leqslant a_n$, $a_n < b$. *Решением* задачи поиска места числа b среди $a_1, \ldots, a_n$ будем соответственно считать одно из чисел $1, 2, \ldots, n, n+1$. Заметим, что по результату любого сравнения $a_s < b$ $(1 \leqslant s \leqslant n+1)$ мы сразу определяем, лежит ли решение в диапазоне от 1 до s или же в диапазоне от $s+1$ до $n+1$. Если само s находится примерно посередине между 1 и $n+1$, то сравнение $a_s < b$ сужает диапазон поиска примерно вдвое. Этот прием можно применять многократно. Получается следующий алгоритм A_1, который иногда называют *алгоритмом деления пополам*:

Алгоритм A_1: взять первоначально 1 и $n+1$ в качестве границ поиска; далее, до тех пор, пока границы не совпадут, шаг за шагом сдвигать эти границы следующим образом: сравнить b с a_s, где s — целая часть среднего арифметического границ; если $a_s < b$, то заменить прежнюю нижнюю границу на $s+1$, оставив верхнюю без изменения, иначе, оставить без изменения нижнюю границу, а верхнюю заменить на s. Когда границы совпадут, став равными некоторому числу t, выполнение алгоритма закончится с результатом t.

Смысл результата t можно выразить так: если среди чисел $a_1, \ldots, a_n$ есть равное b, то выполняется равенство $a_t = b$; если равного b нет, то t указывает, на какое место следует поставить b, коль скоро мы хотим включить его в упорядоченную совокупность $a_1, \ldots, a_n$.

Пусть $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 9$, $a_5 = 17$, $a_6 = 23$, $a_7 = 28$. При поиске с помощью A_1 места числа 16 границы поиска будут меняться следующим образом: 1,8; 5,8; 5,6; 5,5. Решением задачи поиска места будет число 5.

Задача 1. Предположим, что среди чисел $a_1, \ldots, a_n$ могут быть равные между собой, то есть $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Каков смысл результата применения алгоритма A_1 к $a_1, \ldots, a_n$ и b?

Теорема 1. *Число сравнений, требуемое алгоритмом A_1 для поиска места числа b среди $a_1, \ldots, a_n$, есть* $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ *— наименьшее целое число, большее или равное* $\log_2(n+1)$.

Доказательство. В ходе выполнения алгоритма A_1 каждое сравнение влечет изменение верхней или нижней границы. Рассмотрим изменение количества целых чисел, лежащих в пределах этих границ. Если до изменения границ это количество было равно N и для некоторого $m > 0$ выполнялось $2^m < N \leqslant 2^{m+1}$, то после изменения границ оно при четном N станет равным $N/2$, а при нечетном — $(N-1)/2$ или $(N+1)/2$. Легко проверить, что для нового количества будет иметь место $2^{m-1} < N' \leqslant 2^m$. Это показывает, что $\lceil \log_2 N' \rceil = \lceil \log_2 N \rceil - 1$. Если $\lceil \log_2 N' \rceil > 0$, то границы еще не совпадают и выполнение алгоритма продолжится; если же $\lceil \log_2 N' \rceil = 0$, то выполнение закончится. В пределах первоначальных границ 1 и $n+1$ лежит $n+1$ целое число. Следовательно, общее число сравнений есть $\lceil \log_2(n+1) \rceil$.

Теорема 2. *Для произвольного алгоритма A_1 поиска места элемента* *можно подобрать такие начальные данные* $a_1, \ldots, a_n, b$, *что применение к ним алгоритма А потребует не менее* $\lceil \log_2 (n+1) \rceil$ *сравнений.*

Доказательство. В качестве $a_1, \ldots, a_n$ возьмем любые целые числа такие, что $a_1 < \ldots < a_n$, в качестве b будем поочередно брать $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Применение A_1 к этим вариантам начальных данных должно давать соответственно числа $1, \ldots, n+1$. Результаты сравнений, выполненных в ходе применения A_1 к любому из этих вариантов, могут быть записаны в виде последовательности слов «да» и «нет». Для исследования значений $a_1, \ldots, a_n$ и различных b используются только сравнения вида (1). Поэтому, если применение A_1 к начальным данным $a_1, \ldots, a_n, b$ потребовало ровно k сравнений, притом k первых сравнений в ходе применения A_1 к другим начальным данным $a_1, \ldots, a_n, b'$ дали те же самые результаты, то дальнейшее применение A_1 к $a_1, \ldots, a_n, b'$ уже не потребует сравнений, и итог будет тем же самым, что и для начальных данных $a_1, \ldots, a_n, b$. Следовательно, среди получившихся последовательностей слов «да» и «нет» нет совпадающих и ни одна не является началом другой. Пусть l — число элементов в самой длинной из этих последовательностей. Общее число последовательностей, то есть $n+1$, не превосходит числа всех последовательностей длины l, то есть 2^l. Итак, $n+1 \leqslant 2^l$ и $l \geqslant \log_2 (n+1)$. Так как l — целое число, то $l \geqslant \lceil \log_2 (n+1) \rceil$.

Сопоставление двух доказанных теорем показывает, что не существует такого алгоритма поиска места элемента, который для любых начальных данных требовал бы меньше сравнений, чем алгоритм A_1. В этом смысле A_1 *является оптимальным (наилучшим) алгоритмом.*

Задача 2. Пусть $a_1 < \ldots < a_n$ и среди чисел $a_1, \ldots, a_n$ есть число, равное b. Требуется найти i, для которого $a_i = b$. Приведите такой алгоритм решения задачи, который требует $\lceil \log_2 n \rceil$ сравнений. Докажите, что этот алгоритм оптимален.

Задача 3. Рассмотрим два алгоритма выбора наименьшего из неравных чисел. Первый алгоритм: найти меньшее из первых двух чисел и, сравнив его с третьим, опять взять меньшее, сравнить с четвертым и т. д. Второй алгоритм («кубковая» или «олимпийская» система): разбить числа на пары, меньшее из каждой пары пропустить в следующий тур. Если одному числу не нашлось парного, то это число тоже проходит в следующий тур. В следующем туре повторить то же самое и т. д., пока не останется одно число. Какой из этих алгоритмов требует меньше сравнений?

Задача 4. Докажите, что не существует алгоритма выбора наименьшего из n неравных чисел, который требовал бы менее $(n-1)$-го сравнения. (Прием, использованный в доказательстве теоремы 2, позволяет доказать лишь то, что число сравнений в худшем случае не меньше $\lceil \log_2 n \rceil$.)

* * *

Перейдем теперь к задаче упорядочения, то есть к *задаче расположения в ряд по возрастанию неравных чисел* $a_1, \ldots, a_n$. Ответ важен, в частности, для решения на ЭВМ задач, связанных с поиском информации (мы уже видели, что упорядоченность обеспечивает быстрый поиск). Эту задачу решает

> **Алгоритм A_2:** упорядочивать по очереди начальные группы чисел данной совокупности: a_1; a_1, a_2; a_1, a_2, a_3; ...; $a_1, \ldots, a_n$ — последняя группа совпадает со всей совокупностью; для перехода от упорядоченной группы из i чисел к упорядоченной группе из $(i+1)$-го числа надо поместить a_{i+1} на его место в имеющейся упорядоченной группе из i чисел — это место определяется при помощи алгоритма A_1.

Обозначим через $B(n)$ число сравнений, требуемое A_2. Имеем

$$B(n) = \lceil \log_2 2 \rceil + \ldots + \lceil \log_2 n \rceil \leqslant \leqslant \log_2 2 + \ldots + \log_2 n + (n-2) = \log_2 n! + (n-2) \leqslant n(\log_2 n + 1) - 2. \quad (2)$$

Задача 5. Определите число сравнений, требуемое следующим алгоритмом упорядочения $a_1, \ldots, a_n$: найти наименьшее число и поместить его на первое место, затем найти наименьшее среди оставшихся и поместить его на второе место и т. д. (см. задачи 3, 4).

Задача 6. Допускается, что в неупорядоченной совокупности $a_1, \ldots, a_n$ могут быть равные числа. Покажите, что в этом случае алгоритм A_2 обеспечивает расположение данных чисел в порядке неубывания.

Прием, использованный при доказательстве теоремы 2, позволяет установить, что для любого алгоритма упорядочения можно подобрать совокупность $a_1, \ldots, a_n$, применение к которой этого алгоритма потребует не менее $\lceil \log_2 n! \rceil$ сравнений (такой совокупностью будет одна из $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ перестановок n произвольных чисел). Вместе с (2) это показывает, что, во всяком случае, A_2 не далек по числу сравнений от оптимального (чего нельзя сказать об алгоритме из задачи 5): так, например, $\lim_{n \to \infty} (B(n)/\lceil \log_2 n! \rceil) = 1$. Различными авторами предпринимались попытки доказать оптимальность A_2 и даже печатно сообщалось о якобы найденном доказательстве. Позднее выяснилось, что A_2 не оптимален: этот алгоритм требует восемь сравнений для упорядочения пяти чисел, а на самом деле достаточно семи сравнений. Это непростой факт, хотя он допускает формулировку в виде задачи на взвешивания.

Задача 7*. Имеются весы без гирь и пять различных грузов. На каждую из двух чашек весов можно класть по одному грузу. Расположите грузы по убыванию веса, использовав семь взвешиваний.

Вопрос о том, чему в общем случае равно $S(n)$ — минимальное число сравнений, достаточное для упорядочения любой совокупности из n неравных чисел (или число взвешиваний для сортировки n грузов), открыт до сих пор. Выяснено, что для некоторых n имеет место $S(n) > \lceil \log_2 n! \rceil$ и что наименьшее такое n равно 12. Привлечение ЭВМ для разбора вариантов при различных конкретных n позволило вычислить $S(n)$ лишь для небольшого числа значений n. До сих пор, видимо, не известно значение S (13).

* * *

С практической точки зрения небольшое отклонение числа сравнений, требуемых алгоритмом A_2, от $S(n)$ не является существенным и этот алгоритм довольно часто применяется в решении задач на ЭВМ. Но заметим, что у этого алгоритма есть ощутимый недостаток: он требует слишком много перемещений чисел. Эти перемещения скрываются в приведенном выше описании A_2 за словами «поместить a_{i+1} на его место в имеющейся упорядоченной группе из i чисел». Если a_{i+1} должно занять первое место, то потребуется $i+1$ перемещение чисел. В целом алгоритм A_2 может потребовать $2+3+\ldots+n=(n+2)\times(n-1)/2$ перемещений. Последнее число значительно превышает число сравнений, требуемых этим же алгоритмом. Известны алгоритмы упорядочения, для которых число сравнений и число перемещений примерно равны $n \log_2 n$. Эти алгоритмы, однако, описываются не столь просто, как алгоритм A_2.

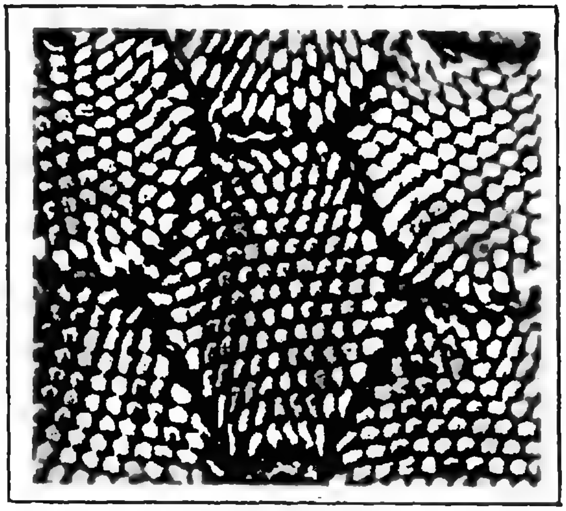
Задача 8. Опишите A_1, A_2 и алгоритм из задачи 5, используя для этого алгоритмический язык, который изложен в статьях А. П. Ершова в «Кванте», 1985, № 10, 11 и в вашем учебнике.

Следы на песке и... строение вещества

(Начало см. на с. 13)

Интересные опыты по выяснению структуры аморфных тел проделал в 1959 году английский ученый Дж. Бернал. Одинаковые шарики из пластилина были беспорядочно сложены и спрессованы в сплошной ком. Когда их потом разобрали, оказалось, что многогранники, в которые превратились шарики, обладают преимущественно пятиугольными гранями. Такие же опыты проделывали и с круглыми свинцовыми пулями. Если пули до сжатия укладывались наиболее плотным образом, то после деформации образовывались почти точные ромбододекаэдры, а если их насыпали случайно, получались неправильные 14-гранные тела. При этом встречались четырехугольные, пятиугольные и шестиугольные грани, но преобладали пятиугольные.

Симметрия 5-го порядка очень распространена в биологических объектах. На 2-й странице обложки представлена электронно-микроскопическая фотография колонии вирусных частиц. Не правда ли, имеется полное сходство с пентагональной упаковкой шаров, показанной на рисунке 5? Палеонтологи даже используют наличие осей 5-го порядка в ископаемых объектах для доказательства их биологического (а не геологического) происхождения... Видите, как далеко увели нас следы на песке.



Здесь представлена фотография сечения сверхпроводящего кабеля — одного из последних достижений современной технологии. Он состоит из множества сверхпроводящих жил, расположенных в медной оболочке. Первоначально жилы имели цилиндрическую форму, но после обжатия превратились в шестигранные призмы. Чем плотнее, регулярнее упакованы жилы, тем более правильные шестиугольники видны в сечении. Это — свидетельство высокого качества изготовления кабеля.

Основные углы в правильной пирамиде

И. Г. ГАБОВИЧ

Среди углов, которые можно рассматривать в правильной пирамиде, наиболее часто в задачах встречаются следующие четыре: угол наклона бокового ребра к плоскости основания пирамиды; угол наклона боковой грани к плоскости основания; плоский угол при вершине пирамиды; двугранный угол при боковом ребре пирамиды. Условимся обозначать величины названных углов буквами α, β, γ и δ соответственно. Все эти углы, называемые иногда основными, лежат в разных плоскостях. В этой статье мы объясним, как, зная величину любого из основных углов, можно определить величины всех остальных основных углов. Мы отдельно рассмотрим случаи правильных четырехугольной, треугольной и n-угольной пирамид.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (рис. 1) $\angle SCO = \angle SDO = \alpha$, $\angle CSD = \gamma$, $\angle SFO = \beta$. В грани SCD проводим $[DE] \perp [SC]$ и соединяем точку E с вершиной основания B. Нетрудно доказать, что $\triangle BEC$ конгруэнтен $\triangle DEC$. Из этого следует, что $|BE| = |ED|$ и $\angle BEC = \angle DEC = \pi/2$. Таким образом, $\angle BED$ — линейный угол двугранного угла при ребре SC, то есть $\angle BED = \delta$. Отрезок OE — медиана равнобедренного треугольника BED, следовательно, и биссектриса, высота этого треугольника. Поэтому $\angle OED = \delta/2$.

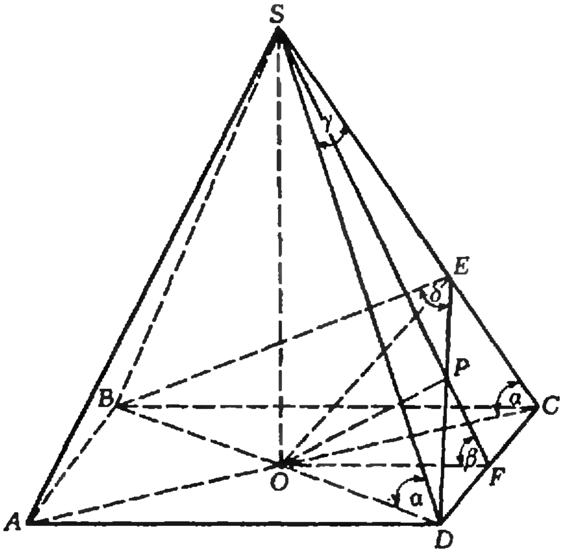


Рис. 1.

Отрезок OP принадлежит линии пересечения плоскостей линейных углов: $\angle BED$ и $\angle SFO$. Плоскость линейного угла перпендикулярна граням двугранного угла, поэтому каждая из плоскостей BED и SFO перпендикулярна плоскости SCD. Линия пересечения двух плоскостей, каждая из которых перпендикулярна третьей плоскости, перпендикулярна этой третьей плоскости (докажите это самостоятельно). Поэтому $[OP] \perp (SCD)$. Таким образом треугольники OPF и OPD — прямоугольные и $\angle DOP = \delta/2$.

Перейдем теперь к выводу формул.

Мы будем пользоваться следующим общим приемом. Обозначим через x длину отрезка в правильной пирамиде, который входит как в прямоугольный треугольник, содержащий данный угол, так и в треугольник, содержащий искомый угол; выразим, далее, через x и функции данного угла одну из двух других сторон в том треугольнике, который содержит искомый угол, затем найдем функцию искомого угла.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \beta. \tag{1}$$

Доказательство. Положим $|SO| = x$. Из $\triangle SOF$ имеем $|OF| = x \operatorname{ctg} \beta$; из $\triangle OFD$ имеем $|OD| = x\sqrt{2} \operatorname{ctg} \beta$; из $\triangle SOD$ имеем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{x\sqrt{2} \operatorname{ctg} \beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \beta$.

$$\cos \alpha = \sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \tag{2}$$

Доказательство. Положим $|SD| = x$. Из $\triangle SDF$ имеем $|DF| = x \sin \frac{\gamma}{2}$; из $\triangle OFD$ имеем $|OD| = x\sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2}$; из $\triangle SOD$ имеем $\cos \alpha =$

$$= \frac{x\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{x} = \sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

$$\sin\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}. \qquad (3)$$

Доказательство. Положим $|OE| = x$. Из $\triangle OED$ имеем $|OD| = x\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$; поскольку $|OC| = |OD| = x\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$, из $\triangle EOC$ имеем $\sin\alpha = \frac{x}{x\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}$.

Вывод трех следующих формул мы предоставляем читателю.

$$\cos\beta = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}. \qquad (4)$$

$$\sin\beta = \sqrt{2}\cos\frac{\delta}{2}. \qquad (5)$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (6)$$

Для правильной треугольной пирамиды мы выпишем аналогичные формулы, опустив их доказательства.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta. \qquad (7)$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\gamma}{2}. \qquad (8)$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}. \qquad (9)$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}. \qquad (10)$$

$$\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\delta}{2}. \qquad (11)$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2} = \frac{1}{2}. \qquad (12)$$

Формулы для правильной n-угольной пирамиды требуются реже, но мы приведем и их, снова опустив доказательства.

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta\cos\frac{\pi}{n}. \qquad (13)$$

$$\cos\alpha = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}. \qquad (14)$$

$$\sin\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}. \qquad (15)$$

$$\cos\beta = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}. \qquad (16)$$

$$\sin\beta = \frac{\cos\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}. \qquad (17)$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2} = \cos\frac{\pi}{n}. \qquad (18)$$

Нетрудно убедиться в том, что формулы (1)—(12) получаются из формул (13)—(18), если в последние подставить вместо n соответственно 4 и 3.

Покажем, как полученные формулы применяются к решению задач.

Задача 1 (КГУ, 1980). *Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна H, и двугранный угол при боковом ребре в 3 раза больше двугранного угла при ребре основания.*

Решение. Согласно условию $|SO| = H$ (см. рис. 1). Из $\triangle SFO$ получаем $|OF| = H\operatorname{ctg}\beta$. Следовательно, $|AD| = 2H\operatorname{ctg}\beta$. Находим объем пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}(2H\operatorname{ctg}\beta)^2 H = \frac{4}{3}H^3\operatorname{ctg}^2\beta.$$

Заменив в формуле (5) угол δ углом 3β, получаем уравнение

$$\sin\beta = \sqrt{2}\cos\frac{3\beta}{2} \Leftrightarrow 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{2}\left(4\cos^3\frac{\beta}{2} - 3\cos\frac{\beta}{2}\right) \Leftrightarrow 2\sin\frac{\beta}{2} = 4\sqrt{2}\cos^2\frac{\beta}{2} - 3\sqrt{2} \Leftrightarrow 4\sin^2\frac{\beta}{2} + \sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2} - 1 = 0,$$

откуда $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (отрицательный корень не годится), так что $\operatorname{ctg}\beta = \frac{3}{\sqrt{7}}$ и, наконец,

$$V = \frac{4}{3}H^3\cdot\frac{9}{7} = \frac{12}{7}H^3.$$

Задача 2 (МИСиС, 1980). *Плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды равен углу между боковым ребром и плоскостью основания. Найти этот угол.*

Решение. Положив в формуле (14) $n = 6$ и $\gamma = \alpha$, получаем тригонометрическое уравнение, из которого находим искомый угол:

$$\cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2} - 1 = 0; \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

(отрицательный корень, разумеется, посторонний). Следовательно,

$$\alpha = 2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Задача 3 (МИФИ, 1979). *В правильной треугольной пирамиде радиус окружности, вписанной в основание, равен r, а угол между плоскостями боковых граней равен φ. Опреде-*

лить длину ребра куба, объем которого в $\sqrt{3}$ раза больше объема данной пирамиды.

Решение. Если a — сторона основания, то $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, то есть $a=2r\sqrt{3}$. Тогда площадь основания пирамиды

$$S_{\text{осн}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=3r^2\sqrt{3}.$$

Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, в 2 раза больше радиуса окружности, вписанной в этот треугольник, так что $|OB|=2r$. Из $\triangle SBO$ получаем $|SO|=2r\operatorname{tg}\alpha$ (рис. 2). Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{3}\cdot 3r^2\sqrt{3}\cdot 2r\operatorname{tg}\alpha=2r^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha.$$

Обозначив искомую длину ребра куба через x, составляем уравнение

$$x^3=\sqrt{3}\cdot 2r^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha,$$

откуда

$$x=r\sqrt[3]{6\operatorname{tg}\alpha}.$$

Выразим теперь $\operatorname{tg}\alpha$ через функции угла φ с помощью формулы (9):

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2},$$

так что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sqrt{\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}.$$

Поэтому

$$x=r\sqrt[3]{6\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sqrt{\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}}=$$

$$=r\frac{\sqrt{3\cos\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt[6]{\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}.$$

Упражнения

1 (ЛГУ, 1979). Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, угол между смежными боковыми гранями равен α. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

2 (Киевск. политехн. ин-т, 1980). Найти объем правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и плоским углом при вершине, равным углу наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания.

3 (КГУ, 1980). Найти величину двугранного угла между смежными боковыми гранями правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в сферу, зная, что она равна величине угла, под которым видно из центра сферы боковое ребро пирамиды.

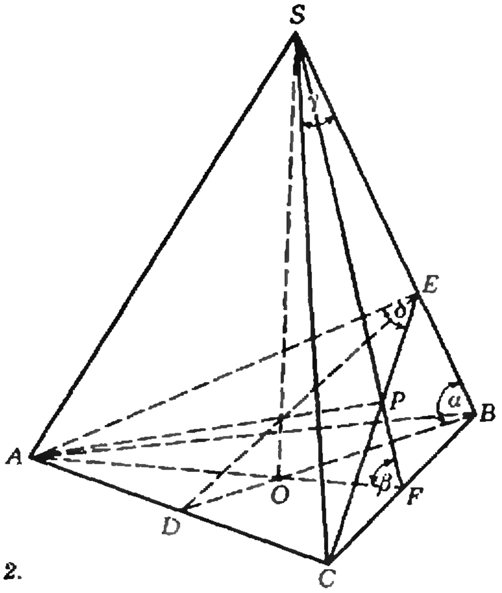


Рис. 2.

4 (МАИ, 1980). В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ угол между перпендикулярами AL и AM, опущенными из точки A на боковые грани SBC и SCD, равен α. Найти объем пирамиды, если объем куба, ребро которого равно стороне основания пирамиды, равен v.

5 (Киевск. политехн. ин-т, 1980). Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно l, а угол наклона боковых граней к плоскости основания равен α.

6 (ТашГУ, 1981). Объем конуса, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, равен Q. Двугранный угол, образованный смежными боковыми гранями, равен α. Найти длину стороны основания пирамиды.

7 (КГУ, 1981). Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, двугранный угол между боковыми гранями равен α. Вычислить объем и боковую поверхность пирамиды.

8 (Киевск. ин-т инж. гражд. авиации, 1981). Полная поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна S, а плоский угол при вершине боковой грани равен α. Найти высоту пирамиды.

9 (КГУ, 1983). В правильной четырехугольной пирамиде сумма величин двугранных углов между смежными и противоположными боковыми гранями равна 180°. Найти эти углы.

10. В правильной n-угольной пирамиде сторона основания равна a и двугранный угол при боковом ребре равен α. Найти объем пирамиды.

Московский физико-технический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$10\cdot 4^{\frac{1}{\sin^2 x}}-16=4^{2\,\mathrm{ctg}^2 x+2}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{4}-3x}(1+25x^2)>0.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^4+19=20(x+y), \\ \sqrt{x}+\sqrt{x+2y}=\sqrt{2}. \end{cases}$$

4. Основание AD трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $|AD|>|BC|$) является диаметром окружности, которая касается прямой CD в точке D и пересекает сторону AB в точке L так, что $|AB|=4/\sqrt{3}\cdot|AL|$ Радиус окружности равен R, угол $\widehat{CAD}=45^\circ$. Найдите площадь трапеции.

5. Точка D лежит на ребре BC правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина), $|BD|:|DC|=2:3$. Цилиндр касается боковой поверхностью плоскостей SAB и SBC, одно из оснований цилиндра проходит через точку D, второе основание имеет общую точку с ребром SC. Боковая поверхность цилиндра имеет единственную общую точку с ребром AC. Найдите отношение объемов цилиндра и пирамиды.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}.$$

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x-\frac{x^2}{2}}>3^{|3x-12|+2x}.$$

3. Решите уравнение

$$9\log_{\sin 2x}4\cos^2 x+8\log_{2\cos x}\sin x=16.$$

4. В окружности проведены хорды AB и AC, причем $|AB|=2$ см, $|AC|=1$ см, угол $\widehat{CAB}=120^\circ$. Найдите длину той хорды окружности, которая делит угол $\widehat{CAB}$ пополам.

5. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ (S — вершина) вписана сфера. Длина ребра основания пирамиды равна 8, а длина высоты пирамиды равна 3. Точка M — середина ребра SD, точка K является ортогональной проекцией точки M на плоскость $ABCD$. Через точку M проведена касательная к сфере, пересекающая плоскость ASC в точке N так, что $NMK=\arccos(-1/3)$. Найдите $|NM|$.

Вариант 3

1. Решите уравнение

$$(\log_4(2x+9)+1)\log_{x+2}2=1.$$

2. Решите уравнение

$$1-12\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)-12\cos\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)=\sqrt{2\cos^2 x+\mathrm{tg}\,\frac{7\pi}{4}}.$$

3. Найдите все значения параметра a, при которых вершины двух парабол $y=4x^2+8ax-a$ и $y=4ax^2-8x+a-2$ лежат по одну сторону от прямой $y=-5$.

4. В трапеции $MNPQ$ ($MQ \parallel NP$) угол $\widehat{NPM}$ в 2 раза больше угла NQM. $|NP|=|MP|=13/2$, $|MQ|=12$. Найдите площадь трапеции.

5. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S — вершина). Точки K и L выбраны на ребрах ES и AF соответственно так, что $|EK|=1/5|ES|$, $|FL|=1/2|FA|$. Точки R и T расположены на прямых DK и SL так, что прямая RT перпендикулярна плоскости SAD. Длина высоты пирамиды равна 18, $|RT|=4$.

Найдите объем пирамиды.

Физика

Письменный экзамен

На решение задач каждого варианта отводилось пять часов. Для получения удовлетворительной оценки было достаточно сделать любые две задачи.

Вариант 1

1. На гладкую неподвижную наклонную плоскость с углом наклона α налетает стальной шарик под углом β (рис. 1). При каких β шарик сможет вернуться в точку его первого удара о плоскость? Все соударения считать упругими.

2. При изотермическом сжатии $m=9$ г водяного пара при температуре $T=373$ К его объем уменьшился в 3 раза, а давление возросло вдвое. Найдите начальный объем пара.

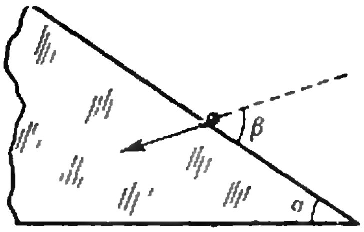


Рис. 1.

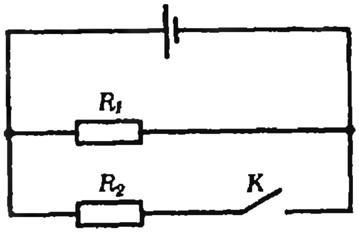


Рис. 2.

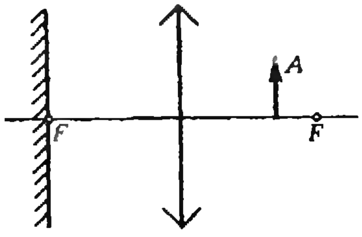


Рис. 3.

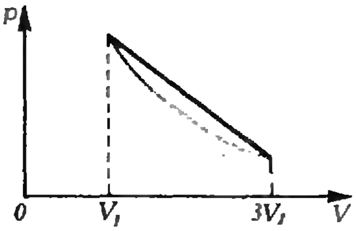


Рис. 4.

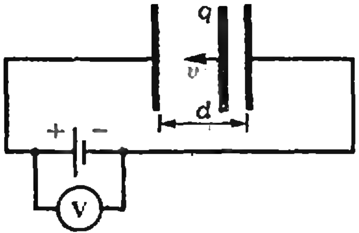


Рис. 5.

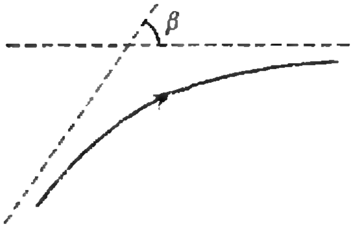


Рис. 6.

3. В цепи, изображенной на рисунке 2, тепловая мощность, выделяемая во внешней цепи, одинакова при замкнутом и разомкнутом ключе K. Определите внутреннее сопротивление батареи r, если $R_1=12$ Ом, $R_2=4$ Ом.

4. В фокальную плоскость тонкой собирающей линзы помещено плоское зеркало (рис. 3). Предмет A расположен между фокусом и линзой. Оптическая система создает действительное изображение предмета. Как изменится увеличение, с которым изображается предмет, если расстояние между линзой и предметом уменьшить вдвое?

Вариант 2

1. Вблизи дороги образовалась ледяная горка с выездом на проезжую часть. Поверхность горки составляет угол α с горизонтальной плоскостью. Проезжающей мимо дорожной машине удалось до половины высоты посыпать горку снизу песком. Коэффициент трения скольжения полозьев санок о лед с песком $\mu=0{,}5$. Пренебрегая трением санок о лед без песка, найдите максимальное значение угла α, при котором санки не смогут достичь основания горки, съехав с ее вершины без начальной скорости.

2. Моль идеального одноатомного газа с начальной температурой $T_1=600$ К адиабатически увеличивает свой объем в 3 раза. Какую работу совершает при этом газ, если в тепловом процессе, при котором давление линейно изменяется с температурой (рис. 4), газу при расширении из того же начального в то же конечное состояние было подведено количество теплоты $Q=1{,}9$ кДж? ($R=8{,}3$ Дж/(моль · К.)

3. В плоский конденсатор, подключенный к источнику с постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r, помещена плоская пластина, имеющая заряд q (рис. 5). Что будет показывать идеальный вольтметр, подключенный к клеммам источника, если двигать пластину с постоянной скоростью v? Расстояние между обкладками конденсатора d.

4. Широкий пучок параллельных лучей падает перпендикулярно на экран. На пути света параллельно экрану установили отрицательную (рассеивающую) линзу. Расстояние между линзой и экраном втрое больше фокусного расстояния линзы. Площадь области на экране, где после установки линзы возросла освещенность, оказалась равной $S=15\pi$ см^2. Определите диаметр линзы.

Вариант 3

1. α-частица, пролетая мимо первоначально покоившегося ядра химического элемента с массовым числом, равным 12, потеряла 20 % своей скорости. На какой угол β отклонилась α-частица (рис. 6)?

2. В тепловом процессе объем идеального газа изменяется с давлением по закону $V=\beta p$, где β — некоторая постоянная. Во сколько раз изменяется давление газа при уменьшении температуры от $T_1=450$ К до $T_2=200$ К?

3. Два удаленных проводящих шара радиусом R соединены участком цепи, содержащим конденсатор емкостью C, катушку с индуктивностью L и ключ K (рис. 7). В начальный момент времени конденсатор заряжен до напряжения U_0, заряды на шарах отсутствуют. Определите максимальную величину силы тока в цепи после замыкания ключа K. Активным сопротивлением катушки пренебречь.

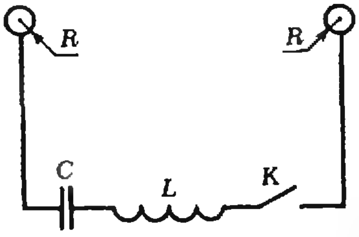


Рис. 7.

4. Линза с фокусным расстоянием 3 см создает перевернутое изображение предмета. Расстояния от предмета до линзы и от линзы до изображения отличаются на 8 см. С каким увеличением изображается предмет?

Публикацию подготовили
К. Л. Самаров, А. В. Шелагин

Московский институт электронного машиностроения

Математика
Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sin x+\cos x=\sqrt{1+\operatorname{tg} x}.$$

2. Вычислите сумму корней уравнения

$$x^2-2(a^2-4a)x-(8a^3-26a^2+9)=0$$

и найдите значения a, при которых она принимает наименьшее значение.

3. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Верно ли, что плоскости ABC' и CDA' перпендикулярны? Дайте обоснование ответу.

4. Найдите расстояние между точкой A (5; 2) и точкой B с абсциссой 1, лежащей на параболе $y=x^2+2x$. Является ли точка B ближайшей к A точкой параболы?

5. Какие из следующих функций

$$3+\cos^2 x;\ 2\cos 2x-3\sin x;\ \sin\frac{x}{2};\ \sin 2x$$

могут быть представлены в виде многочлена от $\sin x$ (то есть в виде $a_0\sin^n x+a_1\sin^{n-1}x+\ldots+a_n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — действительные числа)?

Вариант 2

1. Решите неравенство

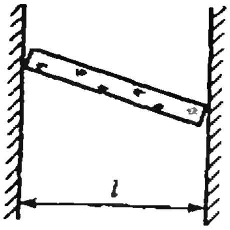


Рис. 1.

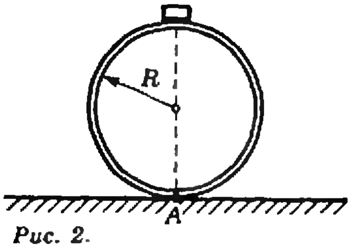


Рис. 2.

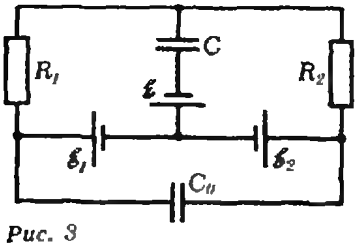


Рис. 3

$$a^2-2\cdot 4^{x+1}-a\cdot 2^{x+1}>0.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{5\sin 2x-2}=\sin x-\cos x.$$

3. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с ребром a точка K — центр грани $A'B'C'D'$, точка L — центр грани $ADD'A'$. Найдите периметр треугольника CKL. Какая из двух частей, на которые разбивается куб плоскостью CKL, имеет большой объем?

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=\frac{|x-1|-1}{x^2-4}$$

на каждом из промежутков $[-1;\ 1]$ и $[1;\ 2[$.

5. Найдите расстояние между ближайшими точками графиков функций:

$$y=-3x^2+8x-9,\ y=x^2+8x+13.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Доска какой наибольшей длины может быть забита между двумя вертикальными стенками, расположенными на расстоянии $l=2$ м друг от друга (рис. 1), если коэффициент трения между доской и стенками $\mu=0{,}2$? Доску считать недеформирующейся и массой ее пренебречь.

2. Тело начинает соскальзывать без начальной скорости с вершины установленного в вертикальной плоскости обруча радиуса R (рис. 2). Пренебрегая трением, определите, на каком расстоянии от точки A тело упадет на землю. Во время движения тела обруч неподвижен.

3. Рабочий забивает гвоздь массой $m=50$ г в доску и ударяет $n=20$ раз молотком, масса которого $M=0{,}5$ кг. Импульс молотка непосредственно перед ударом $P=6$ Н · с. На сколько градусов нагреется гвоздь, если все выделившееся количество теплоты при ударах пошло на его нагревание? Удельная теплоемкость железа $c=0{,}45$ кДж/(кг · К).

4. Определите подъемную силу воздушного шара объемом $V=100$ м^3, наполненного горячим воздухом при температуре $t_1=147$ °C. Шар сообщается с атмосферой. Температура наружного воздуха $t_2=27$ °C, его давление $p=0{,}9\cdot 10^5$ Па.

5. В цилиндре под невесомым поршнем площадью $S=100$ см^2 находится $M=1$ кг воды при температуре $t_0=0$ °C. В цилиндре включают нагреватель мощностью $W=500$ Вт. На сколько поднимется поршень за $\tau=15$ мин работы нагревателя, если атмосферное давление $p=10^5$ Па, а удельная теплота парообразования воды $L=2{,}3$ МДж/кг? Считать, что все джоулево тепло идет на нагревание воды.

6. Определите заряды конденсаторов емкостью $C=4$ мкФ и $C_0=2$ мкФ (рис. 3), если $R_1=100$ Ом, $R_2=300$ Ом, $\mathscr{E}_1=10$ В, $\mathscr{E}_2=15$ В, $\mathscr{E}=5$ В. Внутренние сопротивления источников равны нулю.

7. Электромотор питается от батареи с ЭДС $\mathscr{E}=12$ В. Какую механическую работу совершает мотор за $\tau=1$ с при протекании по его обмотке тока $I=2$ А, если при полном затормаживании якоря в цепи течет ток $I_0=3$ А?

8. Электроэнергия передается от генератора к потребителю по проводам, общее сопротивление которых $R_{пр}=400$ Ом. Коэффициент полезного действия линии передачи $\eta=0{,}95$. Определите сопротивление нагрузки, если внутреннее сопротивление генератора $r=100$ Ом.

9. Найдите соотношение между расстоянием x от источника до переднего фокуса линзы, расстоянием x' от изображения до заднего фокуса линзы и фокусным расстоянием линзы F (выведите формулу Ньютона). Найдите увеличение, даваемое линзой с фокусным расстоянием $F=10$ см, если $x=2$ см.

10. Некоторый металл освещается светом с длиной волны $\lambda=0{,}25$ мкм. Пренебрегая импульсом фотона, найдите максимальный импульс, передаваемый поверхности металла при вылете каждого электрона, если красная граница фотоэффекта для этого металла $\lambda_{кр}=0{,}28$ мкм. Масса электрона $m=9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг.

Публикацию подготовили
Г. В. Ефашкин, В. А. Тонян

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математический факультет)

1. Из пункта А в пункт B вышел пешеход. Одновременно с ним из пункта B в пункт A выехал велосипедист, который встретил пешехода через 50 мин после своего выезда из B. Сколько времени потребовалось бы пешеходу для того, чтобы пройти весь путь из A в B, если известно, что велосипедист проделал бы тот же путь на 4 часа быстрее пешехода.

2. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3,5 см, а диагональ боковой грани равна 2,5 см. Найдите объем призмы.

3. Решите уравнение

$$1+\cos x+\cos 2x=0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_x 9<2.$$

5. Определите промежутки возрастания и убывания функции

$$y=2x^3+3x^2-1.$$

Вариант 2
(физический факультет)

1. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой ребро равно l и соствляет угол α с плоскостью основания.

2. Решите уравнение

$$\cos x+\frac{1}{\cos x}=2.$$

3. Решите неравенство

$$|x^2-4x|<5.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\log_2(9-2^x)}{3-x}=1.$$

5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y=x^3-3x^2+5$ на отрезке $[0;\ 3]$.

Вариант 3
(географический факультет)

1. Теплоход проплыл 9 км по озеру и 20 км по течению реки за 1 ч. Найдите скорость теплохода при движении по озеру, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

2. Основанием призмы служит правильный треугольник, вписанный в круг радиуса 2 м, боковые грани ее — квадраты. Определите объем этой призмы.

3. Решите уравнение

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=0.$$

4. Решите неравенство

$$3^{\frac{x}{2}}>9.$$

5. Найдите промежутки возрастания функции $y=4+x-3x^3$.

Вариант 4
(индустриально-педагогический факультет)

1. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой площадь основания равна S, а ребро составляет угол α с плоскостью основания.

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}(2x+4)=1.$$

3. Решите уравнение

$$x-3=(5+x)\cdot 4.$$

4. Решите неравенство

$$x^2-14x-15>0.$$

5. Постройте график функции, задаваемой уравнением $y-3x+3=0$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. На невесомом стержне висит груз массой M. Груз отклоняют на угол $\alpha=90°$ и отпускают. Найдите натяжение стержня в момент прохождения им положения равновесия.

2. Пуля, летящая с определенной скоростью, углубляется в дощатый барьер на $l=10$ см. На сколько углубится в тот же барьер пуля, имеющая вдвое большую скорость?

3. Какую работу нужно совершить, чтобы поднять груз массой $m=30$ кг на высоту $h=10$ м с ускорением $a=0{,}5$ м/с^2?

4. Определите наименьшую площадь плоской льдины толщиной $d=40$ см, способной удержать на воде человека массой $m=75$ кг. Плотность льда $\rho_л=900$ кг/м^3.

5. Баллон емкостью $V=50$ л содержит $m=2{,}2$ кг углекислого газа. Баллон выдерживает давление не выше $p=4\cdot 10^6$ Па. При какой температуре баллон может разорваться? Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К).

6. На шелковой нити подвешен маленький шарик массой $m=300$ мг. Шарику сообщен заряд $q=3\cdot 10^{-8}$ Кл. Как близко надо поднести к нему равный ему заряд, чтобы сила натяжения нити уменьшилась втрое?

7. Напряжение на участке цепи $U_1=5$ В, сила тока $I_1=3$ А. После изменения сопротивления этого участка напряжение стало $U_2=8$ В, а сила тока $I_2=2$ А. Каковы ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока?

8. Под каким углом должен упасть луч на стекло, чтобы преломленный луч оказался перпендикулярным к отраженному? ($n_{ст}=1{,}6$.)

9. Проекционный аппарат дает на экране увеличенное в $\Gamma=20$ раз изображение диапозитива. Найдите расстояние между объективом проекционного фонаря и изображением, если фокусное расстояние объектива $F=20$ см.

10. Человеческий глаз может воспринимать световой поток мощностью $P=2\cdot 10^{-17}$ Вт. Какому это соответствует числу фотонов света с длиной волны $\lambda=0{,}5$ мкм, попадающих в глаз в 1 секунду? Постоянная Планка $h=6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Публикацию подготовили
О. Ю. Овчинников, В. А. Смирнов

Избранные школьные задачи

(Начало см. на с. 28)

9. а) Найдите уравнения прямых, касающихся одновременно двух парабол

$$y=x^2+x-2 \text{ и } y=-x^2+7x-11.$$

б) Сколько общих касательных имеют две параболы

$$y=a_1x^2+b_1x+c_1 \text{ и } y=a_2x^2+b_2x+c_2?$$

10. В пространстве дано $n\geqslant 4$ точек, причем известно, что для каждых четырех из них найдется плоскость, в которой эти четыре точки лежат. Верно ли, что и все n точек лежат в одной плоскости?

Десятый класс

11. Нарисуйте график функции $y=e^{\ln [x]}$.

12. Решите уравнение $3\sin x-4\cos x=\cos 5x-7$.

13. Из таблиц известно, что $\lg\pi=0{,}4972$. Сколькими знаками записывается число $[\pi^{100}]$?

14. Дан двугранный угол величиной φ, $0<\varphi<\pi/2$. На одной его грани лежит прямая, составляющая угол α, $0<\alpha<\pi/2$, с ребром двугранного угла. Вычислите угол, который эта прямая составляет с другой гранью двугранного угла.

15. Может ли в сечении параллелепипеда плоскостью получиться пятиугольник? А может ли пятиугольник, получающийся в сечении параллелепипеда плоскостью, быть правильным?

Публикацию подготовил Н. Х. Розов

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу (ВЗМШ)

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете им. М. В. Ломоносова принимаются на индивидуальное обучение учащиеся седьмых классов общеобразовательных школ и СПТУ, за исключением проживающих в Москве и в Ленинграде.

Для поступления в ВЗМШ надо выполнить первое задание.

Задание 1. Изучите статью Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Комбинаторика — многочлены — вероятность» в этом номере журнала (см. с. 19) и постарайтесь решить задачи № 1—16. Решить все задачи вовсе не обязательно; при этом отдельные пункты засчитываются как самостоятельные задачи.

Решения задач должны быть выполнены на русском языке в ученической тетради в клетку. Эта тетрадь высылается простой бандеролью, не надо сворачивать ее в трубку. На обложку тетради надо наклеить листок бумаги, разграфив его и заполнив по следующему образцу:

Область	*Московская*
Фамилия, имя ученика	*Иванов Петр*
Год рождения	*1972*
Класс и школа	*7 класс «Б» школы № 2*
Фамилия, и. о. учителя математики	*Орлов Борис Петрович*
Место работы и должность родителей	*Отец — шофер автобазы № 3; мать — медсестра.*
Полный почтовый адрес (с указанием почтового индекса)	*123456, г. Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1*

Задачи в решениях должны идти в том же порядке, как они даны в статье, сначала условие, затем — решение.

Срок отправки задания № 1 — не позднее 5 апреля 1986 г. (по почтовому штемпелю).

Для того чтобы задание было зачтено, нужно решить бо́льшую часть задач. Если вы успешно выполните это задание, то, начиная с сентября 1986 г., вы будете получать все дальнейшие задания, содержащие теоретический материал и задачи для самостоятельного решения, а также контрольные задачи. Все контрольные работы проверяются и подробно рецензируются преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами и преподавателями Московского университета и других вузов, в которых имеются филиалы ВЗМШ.

Предполагается, что часть заданий будет даваться по статьям журнала «Квант», поэтому рекомендуем на него подписаться (это можно сделать с любого месяца без ограничений в любом отделении связи; подписной индекс 70465; журнал распространяется только по подписке).

Первое задание надо выслать по адресу: «119823, Москва, ГСП, МГУ, ВЗМШ. На прием» или по адресу соответствующего филиала. Филиалы ВЗМШ при университетах имеются в следующих городах: Воронеж, Гомель, Донецк, Душанбе, Иваново, Казань, Краснодар, Красноярск, Куйбышев, Махачкала, Одесса, Ростов-на-Дону, Свердловск, Устинов, Чебоксары, Челябинск, Черновцы, Элиста, Ярославль; филиалы при педагогических институтах в городах: Абакан, Бирск, Благовещенск, Брянск, Витебск, Киров, Ленинабад, Луцк, Магадан, Орел, Павлодар, Смоленск, Тернополь, Ульяновск, Уральск, Целиноград, Череповец, Чита, Южно-Сахалинск; работают также филиалы в Дубне при Объединенном институте ядерных исследований, в Могилеве при областном дворце пионеров и школьников и Заочная физико-техническая школа при Московском институте стали и сплавов (см. с. 58 этого номера «Кванта»).

Учащиеся, проживающие на северо-западе РСФСР (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областях, Карельской и Коми АССР), в прибалтийских республиках и в Белоруссии (кроме Витебской, Гомельской и Могилевской областей), должны присылать работы по адресу: «193130, Ленинград, 8-ая Советская ул., 3. С—З ЗМШ. На прием».

Школьники и учащиеся СПТУ, не успевшие или не сумевшие поступить в ВЗМШ на индивидуальное обучение, имеют возможность заниматься в группах «Коллективный ученик ВЗМШ». Каждая такая группа — это математический кружок, работающий под руководством учителя математики по программе ВЗМШ и по ее пособиям. Прием в эти группы проводится до 1 октября 1986 г. на два потока: для тех, кто с сентября 1986 г. начнет учиться в 8 классе, и для тех, кто начнет учиться в 9 классе (соответственно — для учащихся I и II курса СПТУ). Прием в группы проводится без конкурса. Для зачисления достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся и класса, в котором они будут учиться с сентября 1986 г. Заявление должно быть заверено директором школы (СПТУ) и печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявления следует направлять в адрес ВЗМШ.

Вне конкурса принимаются на индивидуальное обучение участники Всесоюзных олимпиад по математике для школьников и учащихся СПТУ.

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием на заочное отделение учащихся седьмых классов общеобразовательных школ. Зачисление на Малый механико-математический факультет (МММФ) производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованной ниже.

Основной задачей Малого мехмата является приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, а также расширение математического кругозора учащихся средних школ.

Занятия на заочном отделении начинаются в сентябре. Обучение на Малом мехмате бесплатное. Срок обучения три года. Учащиеся заочного отделения, особо успешно закончившие 8-й или 9-й классы, рекомендуются для поступления в физико-математическую школу-интернат № 18 при МГУ. Учащиеся, успешно выполнившие все задания, получают удостоверения об окончании МММФ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают аспиранты и студенты механико-математического факультета. Разработку тематических брошюр осуществляет методический Совет МММФ, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета.

Желающие поступить на Малый мехмат должны не позднее 15 апреля выслать в адрес МММФ решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте тетрадный лист бумаги со следующими данными:

1) республика, край, область;
2) фамилия, имя учащегося;
3) школа и класс (полное название);
4) полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения);
5) фамилия, имя и отчество родителей, место их работы и должность.

В работу вложите листок бумаги 4×6 см, на котором напишите полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения) и пришлите по адресу: 119899 Москва, МГУ, Малый мехмат.

Примечания:

1. Для школьников 7—10 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по телефону: 139-39-43.

2. Для школьников Казахстана и Молдавии действуют филиалы МММФ МГУ: при математическом факультете Казахского государственного университета и при факультете математики и кибернетики Кишиневского государственного университета. Их адреса:

480012 Алма-Ата, ул. Кирова-Масанчи, 47/39, Каз.ГУ, математический факультет, филиал МММФ МГУ;

277003 Кишинев, ул. Садовая, 60, КГУ, факультет математики и кибернетики, филиал МММФ МГУ.

Задачи вступительной работы на Малый механико-математический факультет в 1986 году

1. Какое из чисел больше: $\sqrt{5}$ или $\sqrt[3]{11}$?

2. Докажите числовое равенство

$$\underbrace{2\ 2 \ldots 2}_{n\ \text{цифр}} + (\underbrace{3\ 3 \ldots 3}_{n\ \text{цифр}})^2 = \underbrace{1\ 1 \ldots 1}_{2n\ \text{цифр}}.$$

3. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям и пересекающая боковые стороны в точках M и N. Найдите длину отрезка MN, если известно, что длины оснований трапеции равны соответственно a и b.

4. На продолжении наибольшей стороны AC треугольника ABC отложен отрезок CM так, что $CM = BC$. Докажите, что угол ABM не является острым.

5. Середины соседних сторон выпуклого пятиугольника соединены отрезками. Докажите, что периметр пятиугольника, образованного этими отрезками, больше половины периметра исходного пятиугольника.

6. Найдите все целые положительные решения уравнения $xy = 2x + 3y$.

7. Пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ — положительные числа. Докажите, что сумма

$$\frac{x_1}{x_1+1} + \frac{x_2}{(x_1+1)(x_2+1)} + \frac{x_3}{(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{(x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_{n-1}+1)} + \frac{x_n}{(x_1+1)(x_2+1)\ldots(x_{n-1}+1)(x_n+1)}$$

меньше 1.

8. На столе лежат 100 спичек. Каждый из двух играющих при своем ходе может взять от 1 до 5 спичек. Ходят по очереди. Проигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Как должен действовать начинающий игру, чтобы выиграть при любых ходах противника?

9. На доске написаны все натуральные числа от 1 до 1986. Разрешается стереть любые два числа и вместо одного из них написать их разность, а вместо другого — нуль. Можно ли, совершив достаточно много таких операций, получить набор, состоящий из одних нулей?

10. На каждой из 7 планет находится астроном, который наблюдает ближайшую к ней планету. Докажите, что если расстояния между планетами попарно различны, то имеется планета, которую не наблюдает ни один из астрономов.

Заочная физико-техническая школа при МИСиСЕ

Филиал Всесоюзной заочной математической школы — Заочная физико-техническая школа при Московском ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени институте стали и сплавов — объявляет набор учащихся в восьмые, девятые и десятые классы на 1986/1987 учебный год.

Цель работы школы — оказание помощи учащимся в углубленном изучении программного материала средней школы по физике и математике.

Программа обучения по математике полностью соответствует курсу ВЗМШ. Курс физики разработан преподавателями кафедры общей физики и кафедры теоретической физики Московского института стали и сплавов и соответствует требованиям на вступительных экзаменах в вузы, прежде всего — в МИСиС.

Работа школы организована следующим образом. Четыре-пять раз в год учащимся рассылаются контрольные задания по физике и математике вместе с краткими сведениями по теории и примерами решения задач. Присланные учащимися контрольные работы проверяются и вместе с оценками и комментариями отправляются учащимся. В качестве годового задания учащимся десятых классов посылаются материалы вступительных экзаменов в МИСиС за прошлые годы. Учащиеся, успешно окончившие ЗФТШ, пользуются преимуществом при поступлении в МИСиС.

Занятия в ЗФТШ (МИСиСа) начнутся с 1 октября 1986 года. Для зачисления в школу необходимо прислать заявление с указанием фамилии, имени, отчества, полного домашнего адреса, профессии и занимаемой должности родителей, а также приложить справку из школы с указанием класса и годовых оценок по физике и математике. Заявление и справку вместе с решением первого задания по математике, о котором написано в статье «Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу» в этом номере журнала, нужно выслать не позднее 5 мая по адресу: 117049 Москва, Ленинский пр., 4, МИСиС, ЗФТШ.

Заочная олимпиада по программированию

В «Кванте» № 6 за прошлый год были опубликованы задачи Заочной олимпиады по программированию для немосковских школьников. (Москвичи могли решать те же задачи, участвуя в Московской городской олимпиаде по программированию.) В заочной олимпиаде приняли участие 150 школьников, приславших 900 решений предложенных задач. В некоторых городах университеты, учебные институты и учебные центры профессионального обучения провели эту олимпиаду среди руководимых ими учащихся и прислали в «Квант» лучшие работы. Комсомольцы ИНЭУМа*) взяли на себя труд по проверке поступивших работ и написали всем участникам письма с разбором их решений.

Жюри Олимпиады присудило следующие премии:

I премию получили: В. Казначеев (Ленинград), Е. Финк (Ленинград);

II премию — Ю. Васильев (Ленинград), Г. Глущенко (Запорожье), О. Матюшкина (Ленинград), К. Стыркас (п. Черноголовка Московской обл.);

III премию — А. Асташкевич (Томск), В. Гладков (Пермь), Б. Каюров (Одинцово), М. Ногоновский (Ленинград), Рахлин (Мончегорск), Федоренко (Таганрог), А. Черных (Краснодар).

Кроме того, еще 14 участников получили похвальные отзывы.

Подведем общие итоги. Почти все участники старательно выполнили большую работу. Средний участник решал все 7 или 6 задач, зная, что в зачет пойдут только три. Как правило, программы написаны аккуратно, без синтаксических ошибок программирования. Некоторые участники пропустили свои программы на машинах и приложили листинги. Многие участники описали алгоритмы решений кратко и ясно.

Выяснились и два недостатка, присущие большому числу работ. Некоторые участники не были изобретательны в поисках эффективных алгоритмов: они заводили массивы чисел, без которых можно обойтись, и тратили больше действий, чем нужно, и это несмотря на то, что нужное число действий было указано в условиях задач. Некоторые участники плохо графически оформили свои программы, не позаботились о том, чтобы программа легко читалась.

В целом итоги олимпиады нас порадовали. Решено ее проводить ежегодно.

А. Л. Брудно,
председатель Жюри
олимпиады

---

*) Институт электронных управляющих машин Минприбора СССР.

Избранные школьные задачи

1. **Указание.** Используйте представление $\overline{xyuv}=1000x+100y+10u+v$.

2. $a=0$. **Решение.** Вычтем из второго уравнения удвоенное первое; получим $(a-3)x=0$. Таким образом, если $a\neq 3$, то $x=0$ и для y получается уравнение $ay=a+2$, которое имеет решение в том и только в том случае, если $a\neq 0$. Если же $a=3$, то наша система превращается в пару равносильных уравнений $2x+3y=5$, $4x+6y=10$, которая, очевидно, имеет бесчисленное множество решений.

3. $\{0, 0, 0\}$ и $\{1, 1, 1\}$. **Указание.** Из неравенств видно, что числа x, y, z неотрицательны. Используя это, выводим из наших неравенств неравенства $x^8\leqslant x$, $y^8\leqslant y$, $z^8\leqslant z$. Из них вытекает, что каждое из чисел x, y, z равно 0 или 1. Но тогда $x^2=x$, $y^2=y$, $z^2=z$, и, следовательно, $x\leqslant y$, $y\leqslant z$, $z\leqslant x$, то есть $x=y=z$.

4. **Указание.** Обозначим площади наших 6 треугольников через $s_1,\dots,s_6$ в соответствии с рисунком 1. Поскольку медиана всегда разбивает треугольник на две равновеликие части, имеют место равенства $s_1=s_2$, $s_3=s_4$, $s_5=s_6$, $s_1+s_2+s_3=s_4+s_5+s_6$, $s_2+s_3+s_4=s_5+s_6+s_1$, $s_3+s_4+s_5=s_6+s_1+s_2$. Из этих равенств следует, что $s_1=s_2=s_3=s_4=s_5=s_6$.

5. **Указание.** Воспользуйтесь тем, что отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, заключенные между этой точкой и точками касания, имеют одинаковую длину.

6. $n=3$, $n=4$. **Указание.** Произведение $|n-2|\,|n-5|$ является простым числом тогда и только тогда, когда один из сомножителей равен единице, а другой является простым числом.

7. **Указание.** Если x не принадлежит отрезку $[-1, 0]$, то $x^2+x+1>1$, а если x принадлежит этому отрезку, то $\sin x\leqslant 0$, а $x^2+x+1>0$. Таким образом, правая часть всегда больше левой.

8. Отрицательно. **Решение.** Так как $3{,}1415<\pi<3{,}1416$, то $10\,000/3{,}1416<10\,000/\pi<10\,000/3{,}1415$. Но $10\,000/3{,}1416=3183{,}0\ldots$ и $10\,000/3{,}1415=3183{,}1\ldots$; значит, $3183<10\,000/\pi<3184$, то есть $3183\pi<10\,000<3184\pi$. (**Неправильное решение:** $\pi\approx 3{,}14$, следовательно, $10\,000/\pi\approx 10\,000/3{,}14=3184{,}7\ldots$, следовательно, $3184\pi<10\,000<3185\pi$ и $\sin 10\,000$ положительно.)

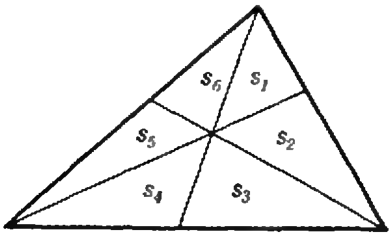


Рис. 1.

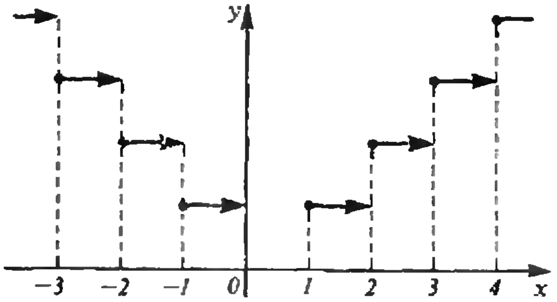


Рис. 2.

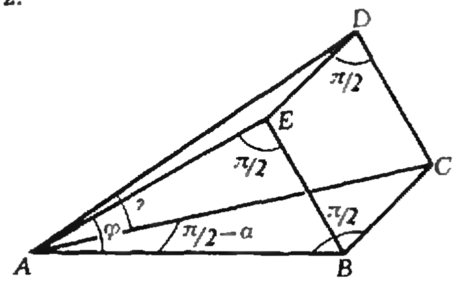


Рис. 3.

9. а) $y=x-2$ и $y=7x-11$. **Указание.** Пусть прямая $y=kx+b$ касается первой параболы в точке $(x_1;\ y_1)$ и второй параболы в точке $(x_2;\ y_2)$; всего имеется, таким образом, 6 неизвестных.

Запишите: условия принадлежности точек $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$ соответствующим параболам (два соотношения); условия прохождения прямой через эти точки (два соотношения); условия равенства углового коэффициента прямой значению производной первой параболы при $x=x_1$ и значению производной второй параболы при $x=x_2$ (два соотношения).

б) Две. **Указание.** Если a_1 и a_2 — числа одного знака, то параболы $y=a_1x^2+b_1x+c_1$ и $y=a_2x^2+b_2x+c_2$ имеют две общие касательные тогда и только тогда, когда они пересекаются; если же a_1 и a_2 — числа разных знаков, то эти параболы имеют общую касательную тогда и только тогда, когда они не пересекаются (докажите!). У нас $a_1=1$ и $a_2=-1$ имеют разные знаки и уравнение $x^2+x-2=-x^2+7x-11$ решений не имеет.

10. Верно. **Указание.** Раздельно рассмотрите случаи, когда среди наших точек найдутся три, не лежащие на одной прямой, и когда таких трех точек нет.

11. См. рисунок 2. **Указание.** Если $[x]\neq 0$, то $e^{\ln|[x]|}=|[x]|$, а если $[x]=0$, то функция $e^{\ln|[x]|}$ не определена.

12. Уравнение решений не имеет. **Указание.** Рассмотрите функцию $3\sin x-4\cos x$ и убедитесь в том, что ее наибольшее значение равно $+5$, а наименьшее значение равно -5. (Покажите, что точками экстремума являются те значения x, в которых $\operatorname{tg} x=-\frac{3}{4}$; выведите отсюда, что в точках экстремума либо $\sin x=\frac{3}{5}$, $\cos x=-\frac{4}{5}$, либо $\sin x=-\frac{3}{5}$, $\cos x=\frac{4}{5}$.

Другой способ — введение вспомогательного угла:

$$3\sin x-4\cos x=5\left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\sin x-\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\cos x\right)=5(\cos\varphi\sin x-\sin\varphi\cos x)=5\sin(x-\varphi),$$

где $\cos\varphi=\frac{3}{5}$, $\sin\varphi=\frac{4}{5}$.) Далее исследуйте множество значений функции $\cos 5x-7$.

13. 50. Указание: $49<\lg(\pi^{100})<50$.

14. $\arcsin[(\sin\alpha)(\sin\varphi)]$. Решение (см. рисунок 3). Пусть AC — наша прямая, причем точка A лежит на ребре двугранного угла. Пусть, далее, AB — отрезок, перпендикулярный ребру и лежащий в той же грани, в которой лежит AC, причем $BC\perp BA$. Пусть, наконец, D и E — проекции точек C и B на другую грань угла. Нам дано, что $\angle EAB=\varphi$ и $\angle CAB=\frac{\pi}{2}-\alpha$, и мы должны найти $\angle DAC$. Имеем:

$$\sin\angle DAC=\frac{|DC|}{|AC|}=\frac{|EB|}{|AC|}=\frac{|AB|\sin\varphi}{|AB|/\sin\alpha}=(\sin\alpha)(\sin\varphi).$$

15. Пятиугольник получиться может, правильный пятиугольник получиться не может. Указание. У пятиугольника, являющегося сечением параллелепипеда плоскостью, всегда существует по крайней мере одна пара параллельных между собой сторон (почему?), тогда как в правильном пятиугольнике никакие две стороны между собой не параллельны.

Восстанови стертую фигуру!

1. В точке H восстановите перпендикуляр к прямой DH, затем постройте отрезок AC так, чтобы один его конец лежал на перпендикуляре HP, другой — на прямой DH, а серединой была бы точка F. Длина стороны AB равна $2DF$ (рис. 4).

3. Постройте серединные перпендикуляры для отрезков MN и NK. Постройте отрезок, концы которого принадлежат серединным перпендикулярам, а середина находится в точке N (рис. 5).

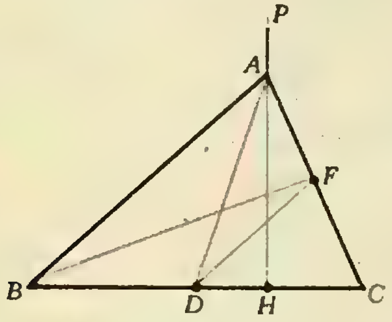


Рис. 4.

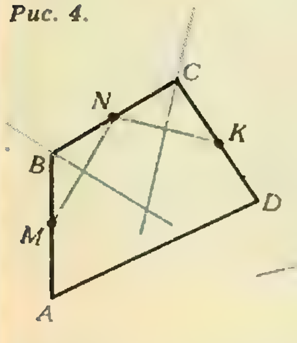


Рис. 5.

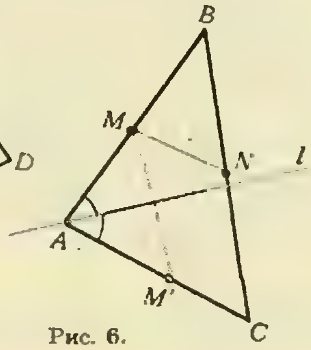


Рис. 6.

4. Для точки M постройте симметричную ей точку M' относительно прямой l, на которой лежит биссектриса, и через M' проведите прямую, параллельную MN (рис. 6).

Калейдоскоп «Кванта»

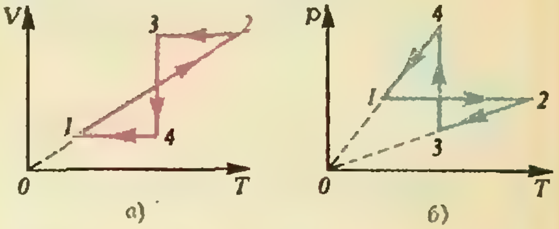
Вопросы и задачи

1. См. рисунок 7 (а, б).

2. Расширяли.

3. При горизонтальном положении трубки давления справа и слева на капельку будут уравновешены; устройство не может служить термометром.

При вертикальном положении трубки давление в нижнем шарике больше давления в верхнем на постоянную величину. При неизменном объеме давление с ростом температуры увеличивается тем быстрее, чем выше начальное давление (см. рис. 8). Для поддержания постоянной разности давлений в шариках капелька стает перемещаться вверх; устройство может служить термометром.



а) б)

Рис. 7.

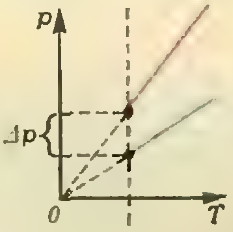


Рис. 8.

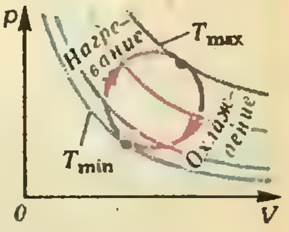


Рис. 9.

4. Рост давления по мере повышения температуры ускорится по сравнению с ростом, предсказываемым законом Шарля.

5. При адиабатическом расширении давление падает быстрее, чем при изотермическом. Кривая 1—1 — адиабата.

6. Увеличилось в 3 раза.

7. См. рисунок 9.

8. Если считать, что температура пузырька не менялась при подъеме, то $h\approx 10{,}3$ м.

9. В рабочем режиме, когда газ в баллоне нагрет, его давление не должно превышать атмосферное.

10. Повышается.

Микроопыт

Часть нагретого воздуха в стакане, расширяясь, вышла наружу. Когда бумажка погасла, воздух остыл, давление его упало, и под стакан вошла вода под действием атмосферного давления.

Основные углы в правильной пирамиде

1. $\frac{a^2}{\sqrt{-\cos\alpha}}$.

2. $\frac{a^3}{24}\sqrt{4+2\sqrt{7}}$.

3. $\pi-\arccos(\sqrt{21}\ \ 4)$.

4. $\frac{v\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{6\sqrt{\cos\alpha}}$.

5. $\frac{4l^3\,\mathrm{tg}\,\alpha}{3(2+\mathrm{tg}^2\alpha)^{3/2}}$.

6. $\sqrt[3]{\frac{12Q}{\pi\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{-2\cos\alpha}}$.

7. $\frac{a^3\cos\frac{\alpha}{2}}{24\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}$.

$\frac{3a^2}{8\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}$.

8. $\sqrt{\frac{S\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}}$.

9. $2\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{2}$, $\mathrm{arctg}\,2\sqrt{2}$.

10. $\frac{na^3\ \cos\alpha\,\mathrm{ctg}^2\frac{\pi}{n}}{\sqrt[3]{-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{n}\right)}}$.

Московский физико-технический институт

Математика

Вариант 1

1. $x=\pm\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+k\pi\ (k\in Z)$.

2. $]-1/5;\ 0[\cup]0;\ 1/12]$.

3. $\{(0;\ 1);\ (2;\ -1)\}$. Указание. Из второго уравнения следует, что $x=\left(\frac{1-y}{2}\right)^2$.

4. $2R^2\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)$. Указание. Пусть $BE\perp AD$ и $\widehat{ABE}=\alpha$. Из условия задачи следует, что (см. рис. 10), $|AB|=\frac{2R}{\cos\alpha}$, $|AL|=2R\sin\alpha$. Поэтому $\frac{2R}{\cos\alpha}=\frac{4}{\sqrt{3}}\times$ $\times 2R\sin\alpha$, то есть $\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\alpha=30°$.

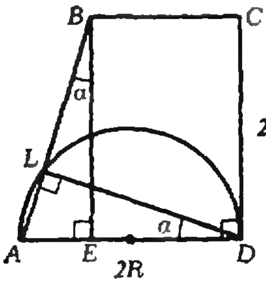


Рис. 10.

5. $27\pi/80$. Указание. Ось цилиндра параллельна ребру SB. Пусть $|BC|=1$. Проведем через ребро AC сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной SB. В сечении получится $\triangle ANC$ (N SB). В $\triangle ANC$ $|AN|=|NC|=5/6$, $|AC|=1$. Из симметрии конфигурации тел вытекает, что точка касания цилиндра с ребром AC — середина AC. В $\triangle ANC$ вписана окружность с радиусом $1/4$. Поэтому $\widehat{SBC}=\arcsin\frac{5}{6}$, высота цилиндра — $\frac{9}{5\sqrt{11}}$, $|SB|=\frac{3}{\sqrt{11}}$, высота пирамиды — $\frac{4}{\sqrt{33}}$. Окончательно, объем цилиндра равен $\frac{9\pi}{80\sqrt{11}}$, объем пирамиды — $\frac{1}{3\sqrt{11}}$.

Вариант 2

1. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Указание. Выполните замену $t=\sqrt{1-x}$.

2. $]-\infty;\ -3]\cup[4;\ +\infty[$.

3. $x=\arccos(\sqrt{2}-1)+2k\pi\ (k\in Z)$.

4. 3. Указание. Пусть x — длина искомой хорды. По теореме косинусов, $x^2+4-2\cdot2\cdot x\times$ $\times1/2=x^2+1-2\cdot x\cdot1\cdot1/2$.

5. $72/23$. Указание. Пусть L — точка касания прямой MN со сферой, O — центр сферы. N_1, L_1, O_1 — ортогональные проекции точек N, L, O на плоскость ABC соответственно. Воспользовавшись тем, что длины отрезков касательных, проведенных из какой либо точки к сфере равны, получим, что $|LM|=5/2$. Далее имеем: $|L_1K|=\frac{5\sqrt{2}}{3}$, $|L_1L|=\frac{7}{3}$, $|O_1O|=\frac{4}{3}$, $|L_1O_1|=\frac{\sqrt{7}}{3}$, $|O_1K|=2\sqrt{2}$, $\widehat{L_1KO_1}=\arccos\frac{23}{24}$, $|N_1K|=\frac{48\sqrt{2}}{23}$.

Вариант 3

1. $\{8\}$.

2. $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{16}+k\pi\ (k\in Z)$.

3. $a\in]-\infty;\ -4[\cup]-\frac{5}{4};\ 0[$. Указание. Вершина первой параболы — точка $M_1(-a,\ -4a^2-a)$, вершина второй — точка $M_2\left(\frac{1}{a};\ -\frac{4}{a}+a-2\right)$.

Эти точки лежат по одну сторону от прямой $y=-5$ тогда и только тогда, когда

$$(-4a^2-a+5)\left(-\frac{4}{a}+a-2+5\right)>0.$$

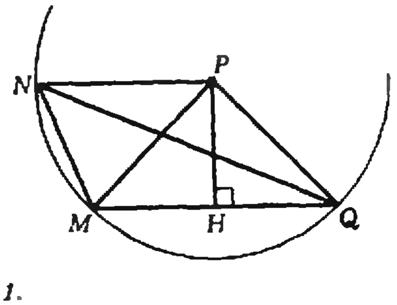


Рис. 11.

4. 185/8. Указание. Проведем окружность с центром в точке P и радиусом, равным $|NP|$ (см. рис. 11). Поскольку $\widehat{NPM}=2\widehat{NQM}$, точка Q лежит на этой окружности. Значит, $|PQ|=\frac{13}{2}$. Отсюда следует, что $|PH|=5/2$.

5. $75\sqrt{3}$. Указание. Пусть O — центр шестиугольника $ABCDEF$, а B_1 — середина отрезка $[AO]$. Положим $\vec{BC}=\vec{a}$, $\vec{BB_1}=\vec{b}$, $\vec{OS}=\vec{c}$. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны. Поэтому всякий вектор $\vec{x}$ однозначно раскладывается по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{x}=x_1\vec{a}+x_2\vec{b}+x_3\vec{c}$, где x_1, x_2, x_3 — числа. Поставим в соответствие вектору $\vec{x}$ — тройку чисел $(x_1; x_2; x_3)$ и будем писать $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$. Тогда проводя необходимые вычисления, получим:

$$\vec{DE}=\left(-\frac{1}{2}; 1; 0\right),\ \vec{EO}=\left(-\frac{1}{2}; -1; 0\right),$$

$$\vec{ES}=\left(-\frac{1}{2}; -1; 1\right),\quad \vec{EK}=\left(-\frac{1}{10}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right),$$

$$\vec{DK}=\left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; \frac{1}{5}\right),\ \vec{DR}=\left(-\frac{7}{5}; \frac{28}{15}; \frac{7}{15}\right),$$

$$\vec{DS}=(-1; 0; 1),\ \vec{OF}=\left(-\frac{1}{2}; 1; 0\right),$$

$$\vec{SF}=\left(-\frac{1}{2}; 1; -1\right),\ \vec{FA}=\left(-\frac{1}{2}; -1; 0\right),$$

$$\vec{FL}=\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; 0\right),\quad \vec{SL}=\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right),$$

$$\vec{ST}=\left(-\frac{2}{5}; \frac{4}{15}; -\frac{8}{15}\right),\quad \vec{DT}=\left(-\frac{7}{5}; \frac{4}{15}; \frac{7}{15}\right),$$

$$\vec{RT}=\left(0; -\frac{8}{5}; 0\right),\ |B_1B|=\frac{5}{2},\ |BC|=\frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Физика

Вариант 1

1. Удобнее всего систему отсчета связать с наклонной плоскостью и направить оси координат так, как показано на рисунке 12. Рассмотрим движение шарика между двумя последовательными ударами о плоскость.

Поскольку проекция ускорения шарика на ось OY величина постоянная: $a_y=g\cos\alpha=\text{const}$, проекции скорости на эту же ось сразу после первого удара и непосредственно перед вторым ударом по модулю равны. Из-за того что удары упругие, проекции скоростей до ударов такие же, как и после. Таким образом, для всех ударов $|v_y|=v_0\sin\beta$, где v_0 — скорость шарика в момент первого соударения с плоскостью.

Время τ между двумя последовательными ударами находим из уравнения движения шарика по оси OY — $y=|v_y|t-g\cos\alpha\cdot t^2/2$, полагая $y=0$ при $t=\tau$:

$$\tau=\frac{2|v_y|}{g\cos\alpha}=\frac{2v_0\sin\beta}{g\cos\alpha}.$$

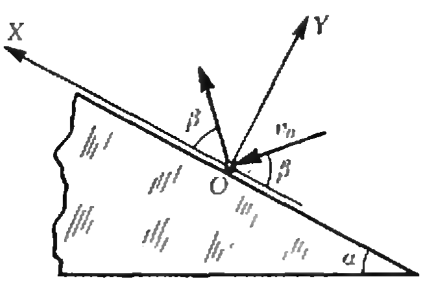


Рис. 12.

Движение по оси OX описывается уравнением $x=|v_x|t-a_xt^2/2$ (где $|v_x|=v_0\cos\beta$, $a_x=g\sin\alpha$), а условие возврата есть $x=0$ при $t=n\tau$ ($n=1, 2, 3,\ldots$). Отсюда для угла β получаем

$$\beta=\operatorname{arctg}(n\operatorname{tg}\alpha),\ n=1, 2, 3,\ldots$$

2. То, что давление пара возросло не втрое, а вдвое, означает, что в результате сжатия пар стал насыщенным и его давление $p=10^5$ Па. Тогда для параметров пара в начальном состоянии имеем уравнение

$$\frac{p}{2}V=\frac{m}{M}RT,$$

откуда для начального объема получаем

$$V=2\frac{m}{M}\frac{RT}{p}\approx31\cdot10^{-3}\text{м}^3=31\text{ л}.$$

3. Обозначим через $\mathcal{E}$ электродвижущую силу батареи и через $R=R_1R_2/(R_1+R_2)$ сопротивление внешней цепи при замкнутом ключе. Из условия задачи $\mathcal{E}^2R_1/(R_1+r)^2=\mathcal{E}^2R/(R+r)^2$ получаем

$$r=\sqrt{R_1R}=\sqrt{\frac{R_1^2R_2}{R_1+R_2}}=6\text{ Ом}.$$

4. Действие оптической системы линза — зеркало в данном случае заключается в следующем. Линза создает мнимое изображение предмета A на расстоянии $f_1=d_1F/(F-d_1)$ (d_1 — расстояние предмета от линзы) с увеличением

$$\Gamma_1=\frac{f_1}{d_1}=\frac{F}{(F-d_1)}.$$

Это изображение отражается в зеркале (без изменения размеров), а полученное отражение является новым предметом для линзы, находящимся от нее на расстоянии $d_2=2F+f_1$. Линза создает изображение этого предмета на расстоянии $f_2=Fd_2/(d_2-F)$ с увеличением

$$\Gamma_2=\frac{f_2}{d_2}=\frac{F}{d_2-F}=\frac{F-d_1}{F}.$$

Общее увеличение системы

$$\Gamma=\Gamma_1\Gamma_2=1$$

— оно не зависит от начального расстояния между предметом и линзой.

В этом можно убедиться также построением хода лучей в данной оптической системе.

Вариант 2

1. $\alpha_{\max}=\operatorname{arctg}(\mu/2)\approx14°$.
2. $A=3/11\,(4RT_1-3Q)\approx3{,}9$ кДж.
3. $U=\mathcal{E}+qvr/d$.
4. $d_л=\sqrt{4S/(15\pi)}=2$ см.

Вариант 3

1. $\beta=\arccos(7/20)\approx69°$.
2. $p_2/p_1=\sqrt{T_1/T_2}=1{,}5$.
3. $I_m=\sqrt{\frac{2\pi\nu_0RC}{(2\pi\nu_0R+C)L}}U_m$
4. $\Gamma=3$, если расстояние от предмета до линзы меньше расстояния от линзы до изображения; $\Gamma=1/3$ в противном случае.

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант 1

1. $x_1=2\pi k;\ x_2=\frac{\pi}{4}+2\pi l;\ x_3=-\frac{\pi}{4}+\pi m$ ($k, l, m\in Z$).

2. $a=1$, $a=3$. **Указание.** Корни существуют при $\frac{D}{4}=a^4-10a^2+9\geqslant 0$. Сумма их при $D/4>0$ равна $2(a^2-4a)$. Если при $D/4=0$ считать, что уравнение имеет два совпадающих корня ($x_1=x_2$), то и в этом случае сумма корней равна $2(a^2-4a)$.

3. Верно. Плоскость (ABC') содержит $(BC')\perp\perp(CDA')$.

4. $\sqrt{17}$; является. **Указание.** Квадрат расстояния от точки $(5, 2)$ до точки (x, x^2+2x) равен $d^2=(x-5)^2+(x^2+2x-2)^2$. Вычисляя производную, получим, разложив на множители $(d^2)'=(x-1)(4x^2+16x+18)$. Из этого следует, что ближайшей к точке $(5, 2)$ точкой параболы является точка $(1, 3)$.

5. Две первые. **Указание.** $\sin\frac{x}{2}\neq p(\sin x)$, где p — многочлен, так период функции $p(\sin x)$ равен 2π, а период $\sin\frac{x}{2}$ — 4π. Предположим, что $\sin 2x=a_0\sin^n x+a_1\sin^{n-1}x+ +\ldots+a_n$ при всех $x\in R$. Подставляя $x=0$, получаем $a_n=0$. Поэтому $2\sin x\cdot\cos x=\sin x$ $(a_0\sin^{n-1}x+\ldots+a_{n-1})$. Отсюда следует, что

$$2\cos x=a_0\sin^{n-1}x+\ldots+a_{n-1} \qquad (*)$$

при всех $x\in$ R. (При $\sin x\in 0$ это равенство очевидно, а при $\sin x=0$ получается из непрерывности левой и правой частей.)

Подставляя в $(*)$ $x=0$ и $x=\pi$, получим $a_{n-1}=2$ и $a_{n-1}=-2$. Противоречие.

Вариант 2

1. $]-\infty;\ \log_2(a/4)[$ при $a>0$, $\varnothing$ при $a=0$, $]-\infty;\ \log_2(-a/2)[$ при $a<0$. **Указание.** После замены $y=2^x$ задача сводится к решению системы

$$\begin{cases}(y+a/2)(y-a/4)<0,\\ y>0.\end{cases}$$

2. $x_1=\frac{13\pi}{12}+2n\pi$; $x_2=\frac{5\pi}{12}+2l\pi$ $(k,\ l\in Z)$.

Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}5\sin 2x-2=(\sin x-\cos x)^2,\\ \sin x\geqslant\cos x.\end{cases}$$

3. $a(\sqrt{2}+2\sqrt{6})/2$; больший объем имеет часть куба, содержащая точку B. **Указание.** Пусть M — точка пересечения прямой KL с плоскостью $ABCD$, N — точка пересечения прямых AD и CM, P — точка пересечения NL и A', D', Q — точка пересечения прямых PK и $B'C'$ (рис. 13). Тогда $CNPQ$ есть сечение куба плоскостью CKL. Это сечение делит куб на две части — «ближнюю» и «дальнюю». Проекция точки K на плоскость $ABCD$ лежит в «ближней» части, поскольку отрезок DN является четвертью ребра куба. Поэтому весь отрезок RK (исключая точку K) лежит в «ближней» части куба. Но тогда, перенеся плоскость CKL параллельно самой себе так, чтобы новая плоскость прошла через центр куба, мы уменьшим объем «ближней» части и увеличим объем «дальней» части. Однако после переноса объемы частей сравняются, и, следовательно, до переноса объем «ближней» части был больше объема «дальней» части.

4. При $x\in[-1;\ 1]$: $f_{\min}=f(-1)=-1/3$; $f_{\max}= =f(1)=1/3$. При $x\in[1;\ 2[$: $f_{\max}=f(1)=1/3$; наименьшего значения нет.

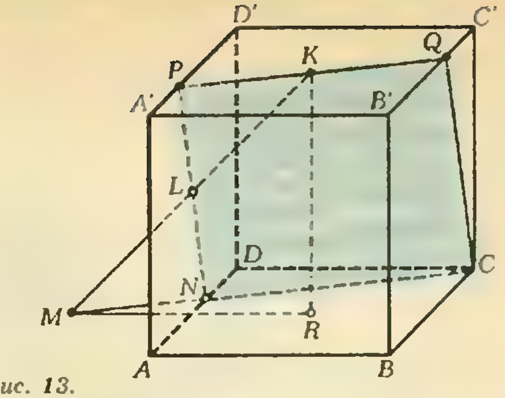


Рис. 13.

5. $2\sqrt{5}$. **Указание.** Пусть $y=f(x)=ax^2+ +bx+c$ и $y=g(x)=a_1x^2+b_1x+c_1$ — две непересекающиеся параболы и $t\in R$ произвольно. Рассмотрим параллельный перенос (на вектор (k, l)), переводящий вторую параболу в параболу, проходящую через точку $(t, f(t))$ первой параболы и имеющую с ней в этой точке общую касательную. Искомое расстояние будет равно наименьшей длине вектора (k, l).

Выясним, каковы условия на вектор (k, l) в нашем случае. Параллельный перенос переводит параболу $y=(x+4)^2-3$ в параболу $y-l= =(x-k+4)^2-3$. Потому для данной точки должны выполняться соотношения:

$$\begin{cases}(t-k+4)^2-3+l=-3t^2+8t-9,\\ 2(t+4-k)=-6t+8,\end{cases}$$

откуда $k=4t$, $l=-12t^2+32t-22$. Осталось найти наименьшее значение функции

$$d^2=(4t)^2+(12t^2-32t+22)^2.$$

Физика

1. $L_{\max}=l\sqrt{1+\mu^2}\approx 2{,}02$ м.

2. $x=5(\sqrt{5}+4\sqrt{2})R/27$.

3. $\Delta t=nP^2/(2cmM)=32$ К.

4. $F=\frac{MpVg}{R}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)\approx 300$ Н, где $\text{M}= =29\cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воздуха.

5. $h=\frac{(W\tau-cM(t_к-t_0))RT_п}{LMpS}\approx 2{,}5$ м, где $t_к=100$ °C — температура кипения воды, равная температуре насыщенного пара ($T_п= =373$ К), $\text{M}=18\cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воды.

6. $q=C\left(\frac{\mathscr{E}_1R_2+\mathscr{E}_2R_1}{R_1+R_2}+\mathscr{E}\right)=6.5\cdot 10^{-6}$ Кл;

$$q_0=C_0(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)=10^{-5}\ \text{Кл}.$$

7. $A_{мех}=\mathscr{E}I(I_0-I)\tau/I_0=8$ Дж.

8. $R=\eta(R_{пр}+r)/(1-\eta)=9{,}5$ кОм.

9. $xx'=F^2$; $\Gamma=F/x=5$.

10. $P=\sqrt{\frac{2mhc(\lambda_к-\lambda)}{\lambda_к\lambda}}\approx 4\cdot 10^{-25}$ кг · м/с, где $h=6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, $c=3\cdot 10^8$ м/с — скорость света.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Вариант 1

1. 5. 2. $\sqrt{3}$ см^3. 3. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2=$

$=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi l$ ($k,\ l\in\mathbf{Z}$).

4. $]0;\ 1[\,\bigcup\,]3;\ +\infty[$. 5. Промежутки возрастания $]-\infty;\ -1]$ и $[0;\ +\infty[$. Промежуток убывания $[-1;\ 0]$.

Вариант 2

1. $\frac{2}{3}\,l^3\sin\alpha\cos^2\alpha$. 2. $x=2\pi k$ ($k\in\mathbf{Z}$). 3. $]-1;\ 5[$.
4. $\{0\}$. 5. $y_{\max}=y(0)=y(3)=5$; $y_{\min}=y(2)=1$.

Вариант 3

1. 27 км/ч. 2. 18 м^3. 3. $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$ ($k\in\mathbf{Z}$).

4. $]4;\ +\infty[$. 5. $\left[\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right]$.

Вариант 4

1. $\frac{S\sqrt{S}}{6}\,\mathrm{tg}\,\alpha$. 2. $x=\frac{\pi}{8}(4k+1)-2$, ($k\in\mathbf{Z}$).
3. $\{-23/3\}$. 4. $]-\infty;\ -1[\,\bigcup\,]15;\ +\infty[$.

Физика

1. $T=3Mg$.
2. $l'=4\,l=40$ см.
3. $A=m(g+a)h\approx3150$ Дж.
4. $S=m/(d(\varrho_в-\varrho_л))\approx1{,}9$ м^2 (здесь $\varrho_в=10^3$ кг/м^3 — плотность воды).
5. $T=pVM/(mR)\approx480$ К.
6. $l=\sqrt{3q^2/(8\pi\varepsilon_0 mg)}\approx6{,}4\cdot10^{-2}$ м$=6{,}4$ см (здесь $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная).
7. $\mathcal{E}=(U_2I_1-U_1I_2)/(I_1-I_2)=14$ В; $r=(U_2-U_1)/(I_1-I_2)=3$ Ом.
8. $\alpha=\mathrm{arctg}\,n\approx58^\circ$.
9. $f=(1+\Gamma)F=4{,}2$ м.
10. $n=P\lambda/(hc)\approx50$ (здесь $c=3\cdot10^8$ м/с — скорость света).

Шахматная страничка

(см. «Квант», 1985, № 10)

Задание 19 (А. Хильдебранд, 1958 г.). **1. Кd8+ Крf6** (1... Крf8 2. Кe6+ и 3. Кg5+) **2. Фh4+ Крe5 3. Кf7+ Крd5 4. Фd8+ Крc5 5. Фa5+ Крd4 6. Фa7+**, и следующим ходом белые выигрывают ферзя.

Задание 20 (Г. Ринк, 1926 г.). **1. Лc7+ Лd7 2. Фc5+ Крd8 3. Крh6!** Л:c7 (Фa8) 4. Фf8+; 3... Ф:c7 4. Фf8×.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, А. А. Варламов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Е. В. Винодарова, М. Е. Дубах, М. Н. Ермолов, С. Г. Захаров, С. В. Иванов, В. Ф. Лактионов, П. П. Лахтунов, Ю. П. Мартыненко, Ю. Н. Сарафанов, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, В. П. Храмов, В. Б. Юдин, Н. А. Ящук
Фото представили:
Л. Д. Шварц

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор М. Л. Медведская

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32/1. «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 22.11.85. Подписано к печати 23.11.85.
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,36. Т-22389
Тираж 197 601 экз.
Цена 40 коп. Заказ 3087

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

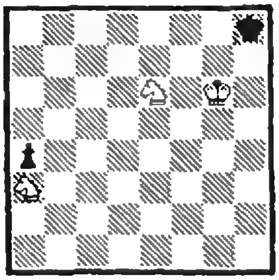
НОВОЕ В КОДЕКСЕ

Забавный случай произошел в 52-м чемпионате страны в Риге. В партии Чернин — Эйнгорн после **1. d4 Кf6 2. Кf3 e6 3. c4 b6 4. g3 Сa6 5. b3 Сb4+ 6. Сd2 Сe7 7. Сg2 0—0** белые сделали совершенно немыслимый ход **8. Лg1??** Такой ход, наверное, не придет в голову и начинающему шахматисту, а что говорить о Чернине, участнике турнира претендентов!?

Разгадка проста. По новым правилам ФИДЕ, принятым в прошлом году, рокировку теперь надо обязательно начинать с перемещения короля и лишь затем через него переносить ладью. Если же сначала взята ладья — ходи ладьей.

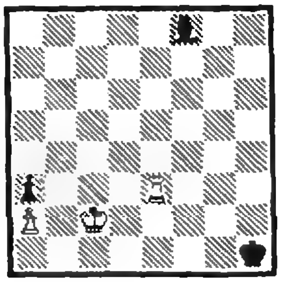
Важные поправки к шахматному кодексу касаются «правила 50 ходов»: если в течение 50 ходов на доске не произошло ни одного размена, и ни одна из пешек не сдвинулась с места, партия заканчивается вничью. Это правило, кстати, ограничивает продолжительность шахматной партии, не дает играть до бесконечности. Правило верное, но оно имеет исключения. Ведь существуют позиции, в которых для выигрыша требуется более 50 ходов. Для них число 50 в кодексе увеличивается до 100. Вопрос в том, на какие позиции должно распространяться это исключение. До сих пор в кодексе упоминалось лишь два вида окончаний: «король и два коня против короля и пешки» и «король, ладья и пешка a2 против короля, чернопольного слона и пешки a3». Теперь правило ста ходов касается и окончания: король, ладья и слон против короля и ладьи.

Все три упомянутых окончания относятся к числу наиболее сложных в теории. Как известно, два коня не могут дать мат одинокому королю противника: если тот будет играть правильно, он неизбежно будет запатован. Но если у слабейшей стороны (обычно черных) имеется пешка, то в некоторых случаях она может быть использована с выгодой для противника. Предположим, что пешка заблокирована конем. Тогда, оттеснив короля противника в угол с помощью своего короля и второго коня, белые могут в подходящий момент распатовать пешку. Далее, подводя второго коня к черному королю, удается, в отдельных случаях, пока пешка движется в ферзи, заматовать его.



На этой диаграмме черный король лишен свободы и попадает в матовую сеть: **1. Кc4! a3 2. Кe5 a2 3. Кf7+ Крg8 4. Кh6+ Крh8 5. Кg5 a1Ф 6. Кgf7×**. Но попробуйте загнать черного короля в угол доски! Для этого может не хватить и ста ходов! Рассмотренный эндшпиль в начале века фундаментально проанализировал выдающийся советский этюдист А. Троицкий. Он создал поистине математическую теорию окончаний «два коня против пешки», определил, на каких полях наличие пешки ведет к безусловному проигрышу — ведь степень ее продвижения имеет решающее значение. Он установил также, при каком положении королей и «свободного» коня выигрыш достигается против любой пешки и даже нескольких пешек.

Рассмотрим пример второго окончания, упомянутого в кодексе.



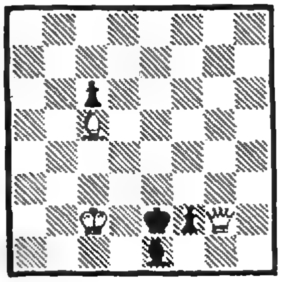
В этой позиции белые выигрывают: **1. Крb3 Крg2 2. Крa4 Крf2 3. Л:a3 С:a3 4. Кр:a3 Крe3 5. Крb4 Крd4 6. a4 Крd5 7. Крb5**, и пешка проскакивает в ферзи. Все просто? Попытайтесь во время игры достичь подобной позиции. Сначала нужно оттеснить неприятельского короля в угол доски (или на край), после чего быстро устремиться к пешке, чтобы король противника не успел подтянуться к центру.

Возникает другой вопрос, почему этот эндшпиль нельзя играть, не обращая внимания на пешки? Но эндшпиль «король и ладья против короля и слона» теоретически ничейный. Даже в тех случаях, когда выигрыш есть, он совсем не прост. С помощью ЭВМ найдены рекордные позиции, в которых при наилучшей игре обеих сторон цель достигается за 18 ходов. Одна из них приведена в «Кванте», 1981, № 11 (задание № 2, решение — в «Кванте», 1982, № 1).

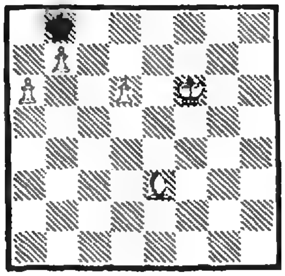
Эндшпиль «ладья со слоном против ладьи» мы рассмотрим в следующий раз.

Конкурсные задания

Сегодня мы начинаем новый шахматный конкурс. Его победители будут награждены шахматной литературой с автографом А. Карпова и дипломом журнала «Квант». Решившим 20 заданий из 24 присваивается I разряд, 16 заданий — II разряд.

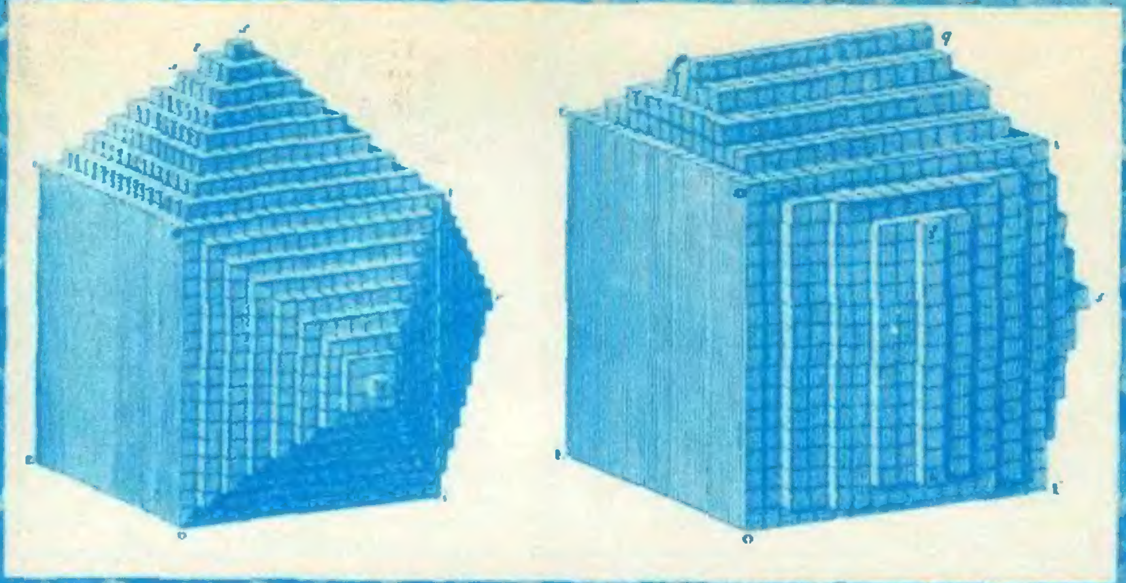


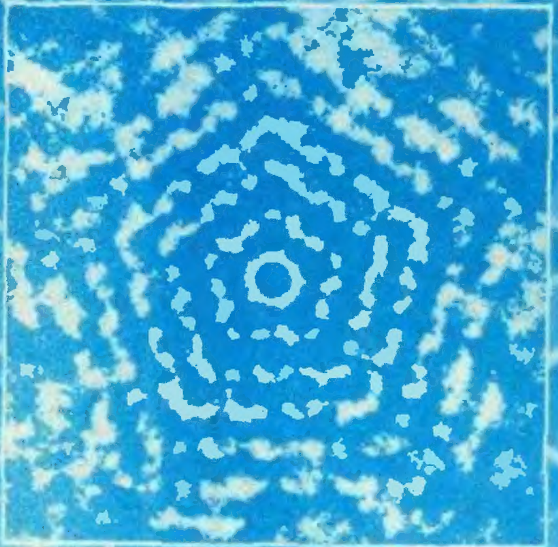
1. Мат в 2 хода.



2. Мат в 3 хода.

Срок отправки решений — 20 марта 1986 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 1, 2».





В природе часто встречаются симметричные объекты. Свойством симметрии обладают и пчелиные соты, и колонии вирусов (фотография слева, сделанная с помощью электронного микроскопа), и кристаллы (вверху приведены рисунки из атласа к трактату Р. Ж. Гаюи, изданного в начале XIX века).

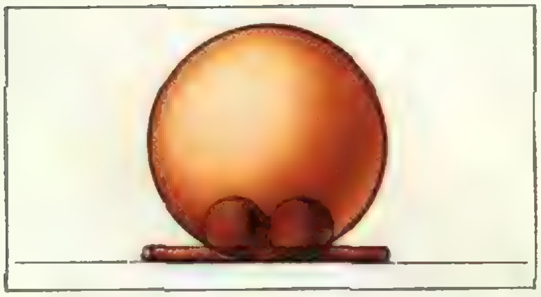
Но почему пчелы строят шестиугольные соты, а вирусы предпочитают пятиугольники? Из каких повторяющихся частей можно составить кристалл? Эти вопросы обсуждаются в статье «Следы на песке и... строение вещества».

Цена 40 коп.

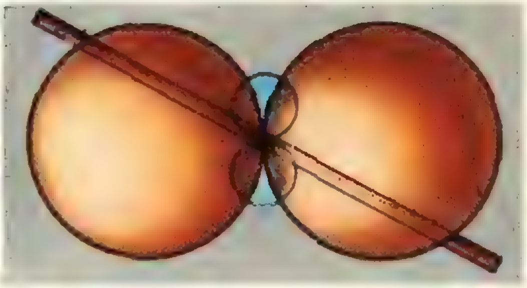
Индекс 70465

На этой странице обложки помещены условие одной стереометрической задачи и чертеж к ней (общий вид и четыре проекции по разным направлениям). Очень советуем читателям, которые еще не рассмотрели чертеж как следует, сначала порешать задачу самостоятельно, не глядя на нашу картинку (возможно, кое-кто уже успел это сделать — условие задачи печаталось в «Кванте» № 10 за прошлый год). Мы надеемся, что публикация таких «многофигурных» задач с чертежами, начатая в прошлом году (см. «Квант», №№ 2, 3, 5, 6, 11) поможет читателям развить пространственное воображение — качество, которого, увы, так не хватает некоторым абитуриентам на конкурсных экзаменах. Решение приводимой задачи вы найдете в следующем номере журнала.

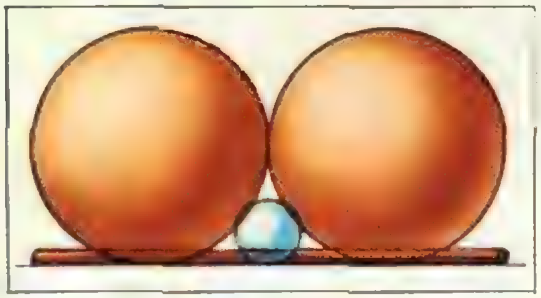
Задача. Имеется шесть предметов: два одинаковых шара радиуса R_1, еще два одинаковых шара радиуса R_2, очень длинный цилиндр с радиусом основания r и плоскость. Они расположены в пространстве так, что каждый из них касается пяти остальных (цилиндр касается остальных предметов боковой поверхностью). Выразить R_1 и R_2 через r.



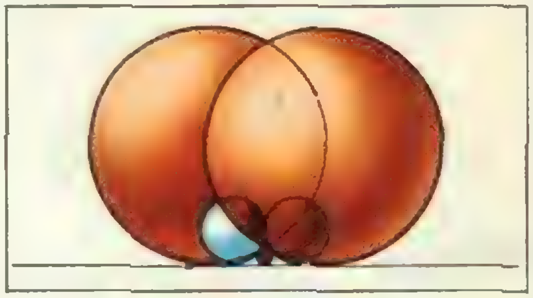
1



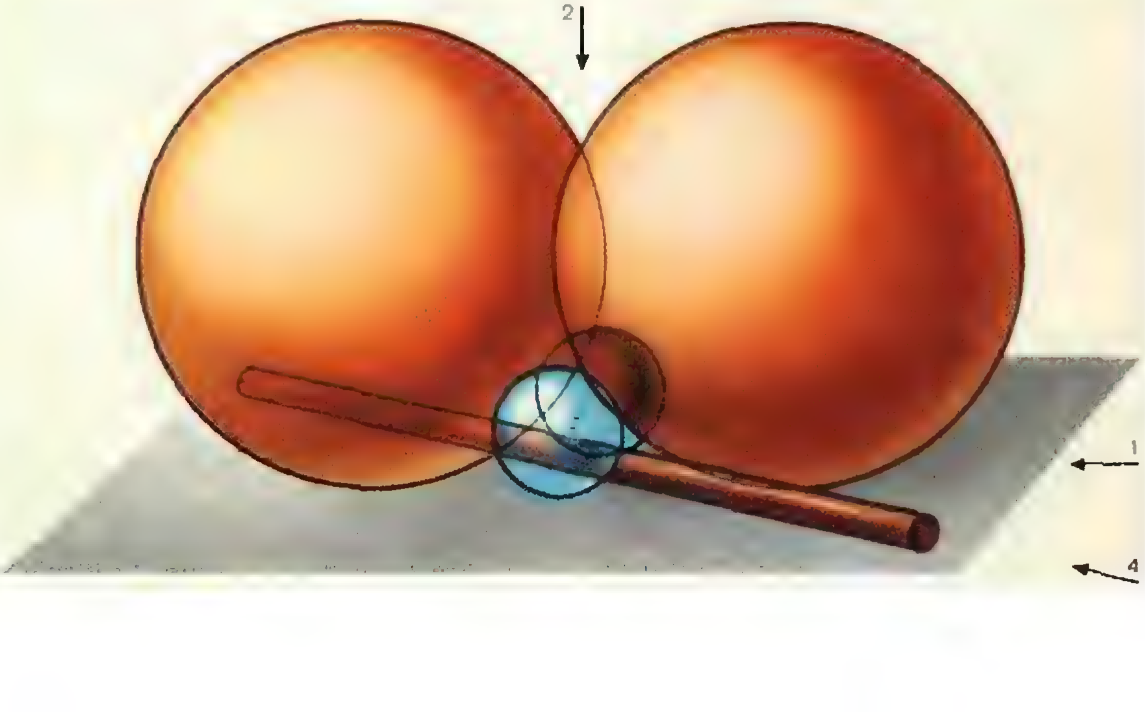
2



3



4



НОМЕР
2

*Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР*

Квант **2** 1986

Основан в 1970 году

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

В НОМЕРЕ: | **IN THIS ISSUE:**

2	**Навстречу XXVII съезду КПСС**	**Awaiting the 27th CPSU Congress**
6	*Д. Г. Крутогин.* Города для электронов	*D. G. Krutogin.* Cities for electrons
13	*В. И. Арнольд.* Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения	*V. I. Arnold.* Evolutionary processes and ordinary differential equations
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
21	*Я. Е. Гегузин.* Кардиограмма ртутного сердца	*Ya. E. Geguzin.* Cardiogramms of mercury hearts
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
24	Математика 9, 10	Mathematics 9, 10
	Новости науки	**Science news**
28	Новый метр	The new meter
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
29	Задачи	Problems
30	*А. С. Александров.* Загадка этрусков	*A. S. Alexandrov.* The Etruscan mystery
32	**Калейдоскоп «Кванта»**	**Kvant's kaleidoscope**
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
35	Задачи М966 — М970; Ф978 — Ф982	Problems M966 — M970; P978 — P982
38	Решения задач М946 — М950; Ф958 — Ф962	Solutions M946—M950; P958 — P962
	Полупроводниковые элементы вычислительной техники	**Semiconducting elements in computers**
44	VI. Логические схемы на транзисторах	VI. Logical transistor networks
	Искусство программирования	**The art of programming**
46	*Л. Ф. Штернберг.* Программирование на микрокалькуляторе: простейшие программы	*L. F. Shternberg.* Programming your pocket calculator: simplest programs
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
49	*В. Е. Белонучкин.* Законы Кеплера и школьная физика	*V. E. Belonuchkin.* Kepler's laws and school physics
52	**Варианты вступительных экзаменов**	**Entrance examination problems**
	Наша обложка *(27)*	**Our cover page** *(27)*
57	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Шахматная страничка	**The chess page**
	ЭВМ и шахматный кодекс *(3-я с. обложки)*	Computers and chess rules *(3rd cover page)*

© Издательство «Наука» Главная редакция физико математической литературы, «Квант», 1986

Навстречу XXVII съезду КПСС

Развивать теоретическую и прикладную математику, информатику и кибернетику, физику элементарных частиц, атомного ядра и твердого тела, микро- и квантовую электронику и оптику, радиофизику, а также исследования в области атомной и термоядерной энергетики, преобразования и передачи электроэнергии, освоения нетрадиционных источников энергии.

Из проекта Основных направлений
экономического и социального развития
СССР на 1986—1990 годы
и на период до 2000 года

КПСС будет продолжать совершенствовать систему народного образования с учетом потребностей ускорения социально-экономического развития, перспектив коммунистического строительства, требований, выдвигаемых прогрессом науки и техники.

Из проекта новой редакции
Программы КПСС

Наша страна живет в ожидании выдающегося события — очередного XXVII съезда Коммунистической партии Советского Союза. Съезд рассмотрит и утвердит важнейшие документы — новую редакцию Программы КПСС, Устав КПСС с предлагаемыми изменениями и Основные направления экономического и социального развития на 1986—1990 годы и на период до 2000 года,— которые были представлены для всенародного обсуждения.

Грандиозные задачи поставлены в этих документах. За пятнадцать лет предстоит практически удвоить все основные показатели нашей экономики, увеличить производительность труда в 2,3—2,5 раза; выйти на самые передовые позиции в мировом хозяйстве. Такое ускоренное развитие невозможно без активной помощи науки. Проделанный анализ показал, что все необходимое для этого уже родилось в ходе величайшей научно-технической революции, которой ознаменована вторая половина XX века. Атомная энергетика, большая химия, информатика и вычислительная техника, новые методы обработки материалов, комплексная механизация и автоматизация производства, биотехнология, «зеленая революция» в сельском хозяйстве — вот путь, по которому мы будем идти в эти годы.

Физика и математика играют решающую роль в научно-технической революции. Они должны внести огромный вклад в интенсификацию народного хозяйства и создание материально-технической базы будущего коммунистического общества. Советские ученые успешно работают над обширным комплексом физико-математических проблем, занимая по ряду направлений ведущие позиции. Они внесли крупный вклад в исследования космоса, изучение природы элементарных частиц и управляемых термоядерных реакций, в лазерную технику, физику твердого тела, физику высоких давлений и низких температур. Успешно развивается информатика. Выполнены выдающиеся исследования по многим разделам современной математики.

Ускоренное развитие экономики тесно связано с совершенствованием подготовки научных и производственных кадров. А это накладывает немалые требования на среднюю школу и систему профессионально-технического образования. Второй год в нашей стране успешно осуществляется реформа среднего образования. Одна из ее задач — приблизить молодежь к научно-технической революции, обеспечить активное участие молодежи в коренной перестройке производительных сил нашей страны.

Задачи, сформулированные в подготовленных к съезду документах, долговременные. Трудиться над их решением придется и вам, наши юные читатели. И мы хотим помочь вам лучше подготовиться к этим сложным и интересным делам.

На этой и следующих страницах помещены фотографии, иллюстрирующие некоторые достижения науки и техники в нашей стране

1↑ 2↑ 3↓

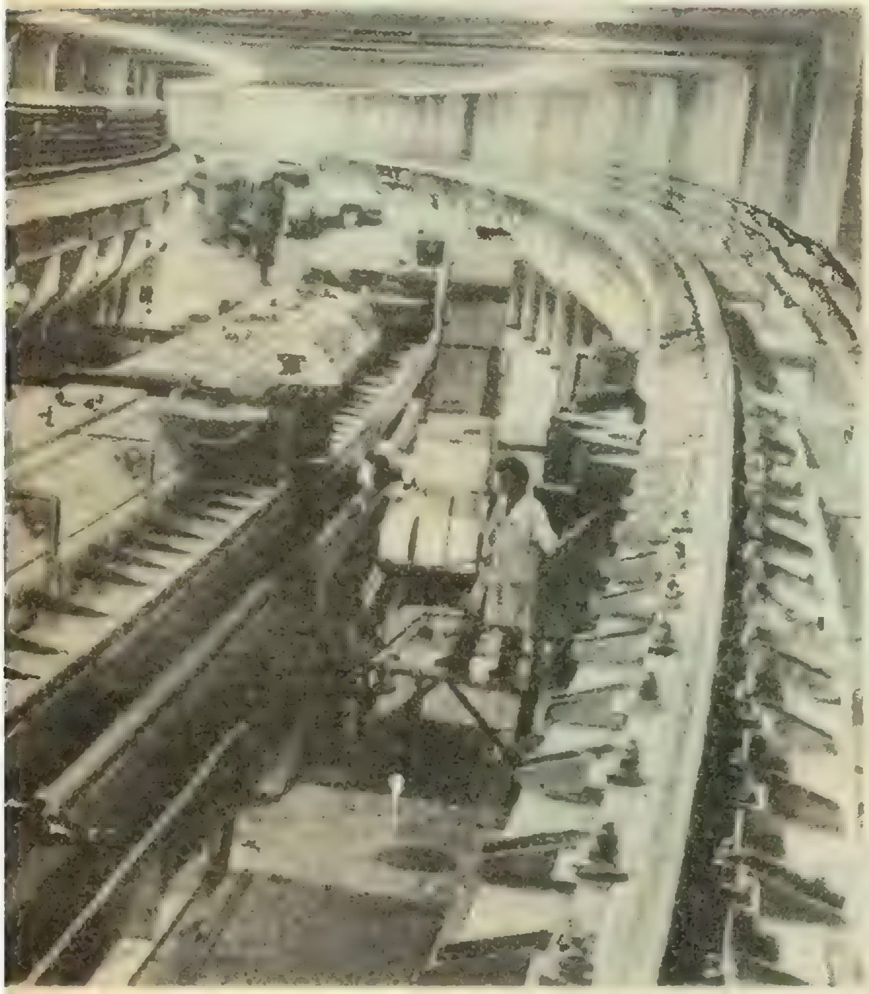
1. Чертежи будущего трактора создаются графопостроителем, входящим в комплекс ЕС-7054. ЭВМ позволяет за несколько секунд рассчитать и изобразить объект в любом ракурсе.

2. Мощный гидравлический пресс, используемый для создания высоких давлений при получении промышленных алмазов.

3. В этой установке протекает процесс, с помощью которого ученые моделируют фотосинтез: под действием света в растворе должны образоваться соединения с большим запасом химической энергии.

4↑

5↓



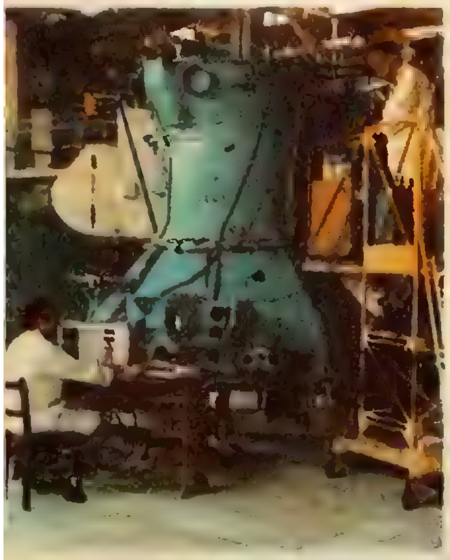
4. Так производят плазменное напыление на детали сельскохозяйственных машин. Вырывающаяся из сопла плазма содержит тончайший порошок. Он с силой «нашлепывается» на деталь, устраняя поверхностные дефекты и придавая детали твердость и жаростойкость.

5. Внутренний вид Серпуховского ускорителя на 76 ГэВ. Недавно здесь была открыта новая частица — глюбол, с помощью которой физики надеются «заглянуть» вглубь частиц, еще вчера казавшихся элементарными.

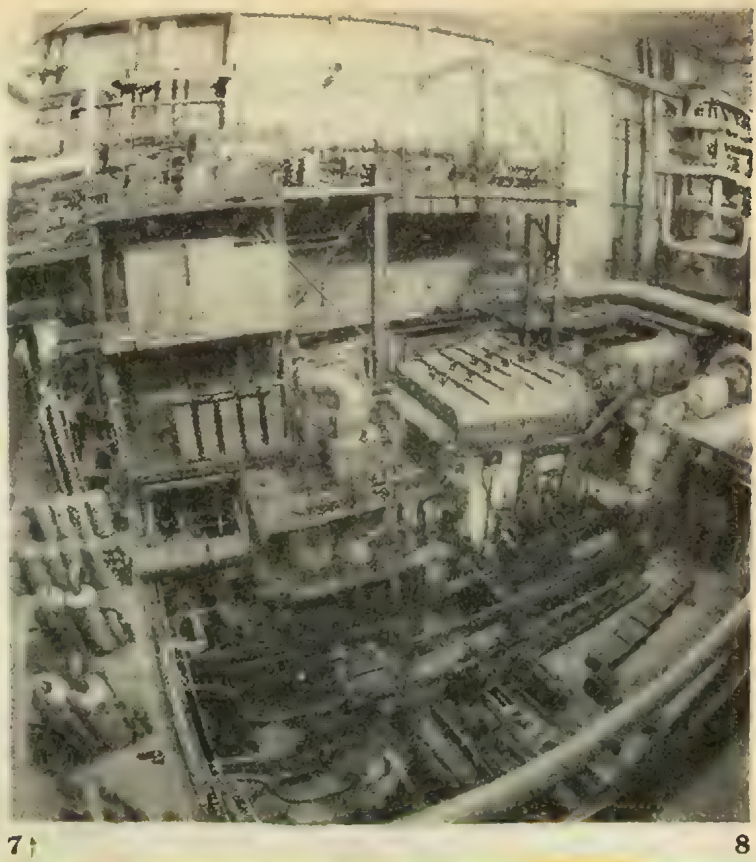
6. Космическая станция «Вега» на испытательном стенде. В июне прошлого года две такие станции, направляющиеся к комете Галлея, передали на Землю ценную научную информацию о Венере.

7. Первая в мире опытно-промышленная установка У-25 с магнитогидродинамическим генератором проектной мощностью 20 мегаватт. На таких установках происходит прямое преобразование тепловой энергии в электрическую.

8. Одна из профессий лазерного луча — разделение изотопов. Различные изотопы *данного химического элемента поглощают оптическое излучение избирательно (в определенных интервалах частот). Для создания подходящего излучения служат лазеры с плавной перестройкой частоты.*

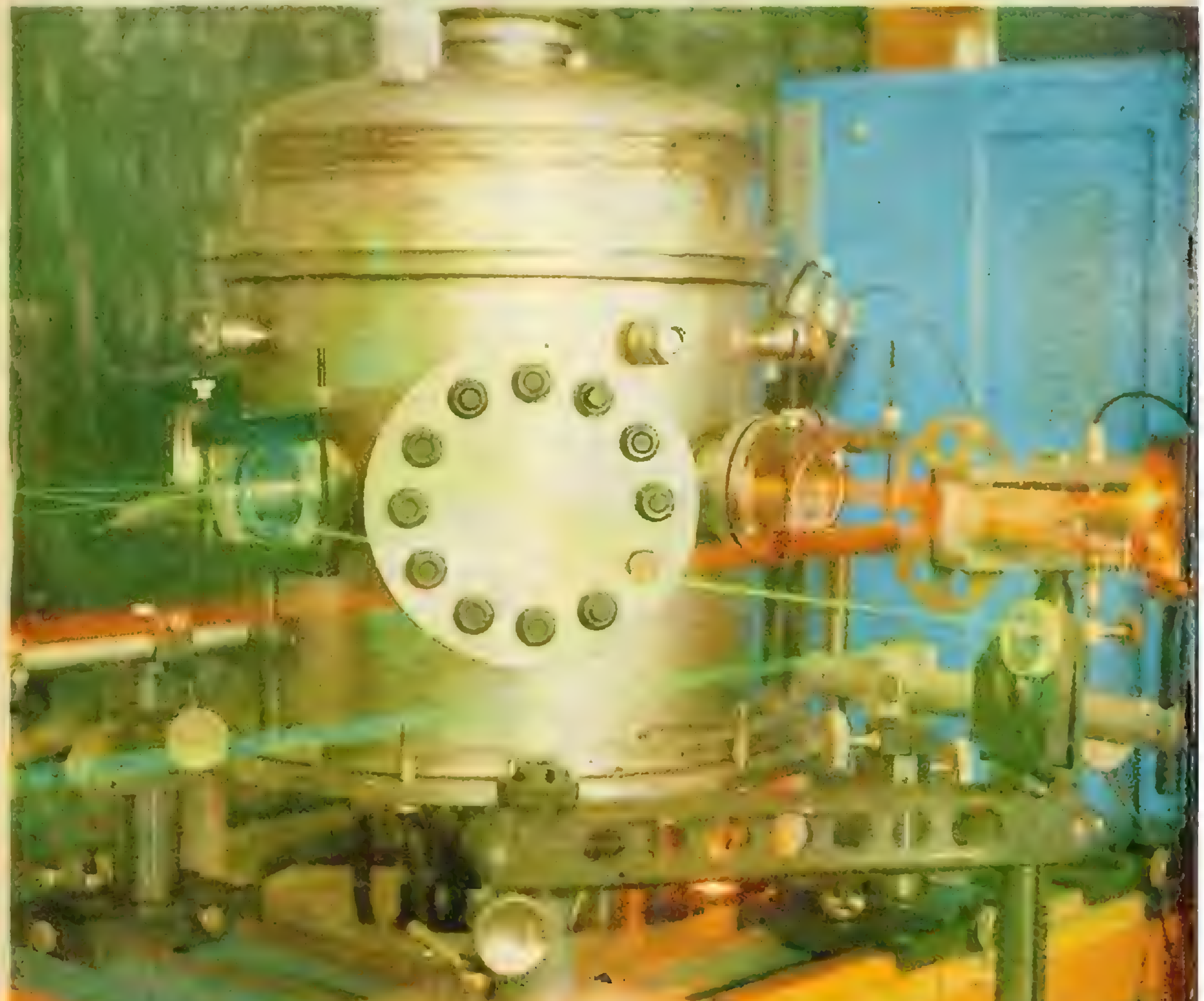


6↑



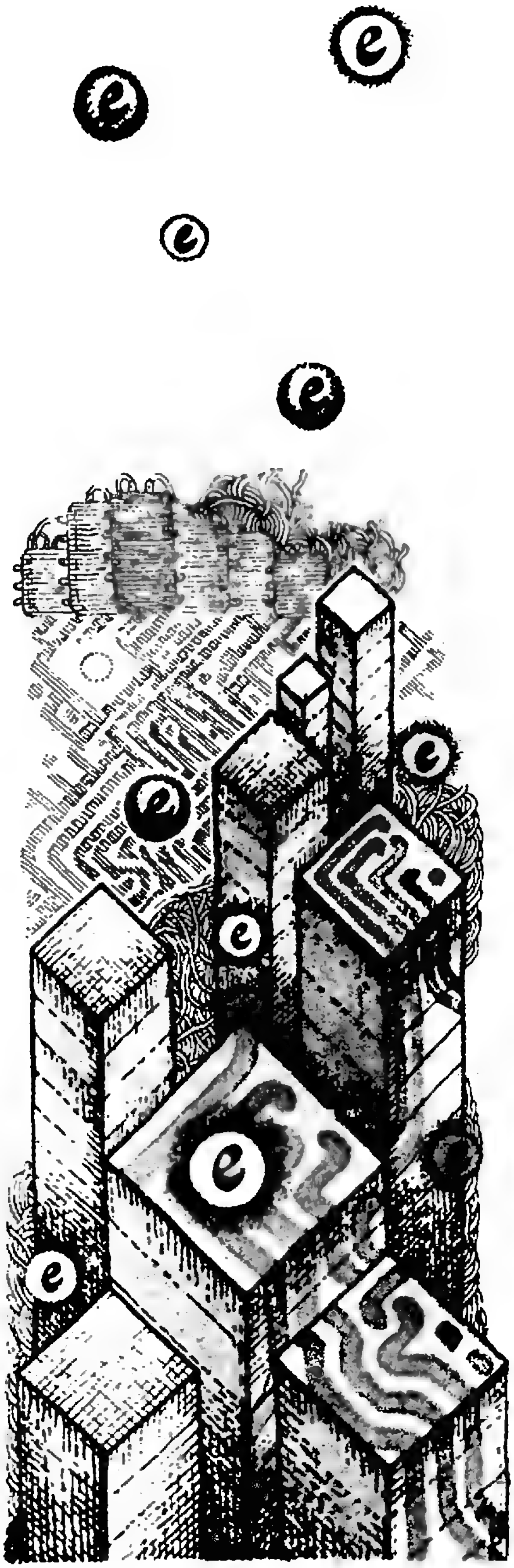
7↑

8↓



Осуществить комплекс мероприятий по совершенствованию технологии производства. Расширить в двенадцатой пятилетке в 1,5—2 раза применение прогрессивных базовых технологий...
Организовать массовый выпуск персональных компьютеров. Обеспечить рост объема производства вычислительной техники в 2—2,3 раза. Высокими темпами наращивать масштабы применения современных высокопроизводительных электронно-вычислительных машин всех классов.

Из проекта Основных направлений экономического и социального развития СССР на 1986—1990 годы и на период до 2000 года



Города для электронов

Кандидат технических наук
Д. Г. КРУТОГИН

Интегральные полупроводниковые схемы стали в последние годы основным структурным элементом твердотельной электроники. Даже опытный радиолюбитель теперь вместо сборки усилителя из деталей предпочитает использовать готовую микросхему. Тем более так поступают профессиональные конструкторы. В бытовой радиоаппаратуре, например в телевизоре, число микросхем достигает десятков, в специальной — сотен и тысяч штук на изделие. Многоэлементные интегральные схемы называются большими — сокращенно БИС. Применение таких схем оказывается особенно эффективным в вычислительной технике.*)

Как делаются микросхемы? Давайте проследим за основными этапами изготовления БИС, постараемся оценить и трудности, и достижения в их технологии.

БИС под микроскопом напоминает своей четкой планировкой карту большого города. Вот и сравним построение БИС с возведением города, города для электронов.

---

*) От редакции. Этим вопросам посвящен цикл статей под рубрикой «Полупроводниковые элементы вычислительной техники», который публикуется в «Кванте», начиная с 9-го номера 1985 года.

Что нам стоит город построить?

Сначала мы его нарисуем. Любое строительство начинается с общей идеи, с плана. И план, и детальные рабочие чертежи должен подготовить архитектор. Архитекторами БИС являются инженеры-схемотехники. Они создают и план всего «города» — электрическую схему БИС, и проект «типового квартала» — схему отдельного узла, и чертеж конкретного «дома» — основного элемента схемы — транзистора.

Электрическая схема БИС может содержать сотни, тысячи и даже сотни тысяч отдельных элементов — диодов, триодов, резисторов, конденсаторов. Чем больше разнотипных элементов, тем больше сложностей при последующем изготовлении схемы. Поэтому уже на этапе проектирования схему стоит упростить. Существенное упрощение достигается благодаря уникальным свойствам полупроводникового триода — транзистора. Оказывается, при различных способах включения его можно использовать или как диод, или как сопротивление (резистор), или как конденсатор с постоянной или регулируемой емкостью, или как собственно транзистор.

За счет такой универсальности транзистора можно всю электрическую схему представить как схему из транзисторов, работающих в том или ином режиме. На вид схема усложняется (да и какой радиолюбитель поставит вместо резистора триод?), но таковы законы микроэлектроники — при технической реализации большой микросхемы это усложнение обернется упрощением технологического процесса: делать придется в общем однотипные элементы — транзисторы, соединяя их в схему токопроводящими дорожками (проводами).

Однако только по плану микросхему не сделаешь, хотя и без плана не обойтись. Для начала работы нужен точный чертеж микросхемы — топологическая схема. «Топология» дословно — «описание места». На топологической схеме каждый элемент микросхемы, каждая часть транзистора или проводника обретает форму, размеры, положение. Топологическая схема — то же самое, что проект строительства; в отличие от плана, проект — уже руководство к действию. Но между планом и проектом в архитектуре и строительстве стоят две науки о земле — география и геология; иначе говоря, проект, опять же в отличие от плана, должен быть «привязан» к месту строительства. Нельзя построить ни дом, ни квартал, не зная, на что будут опираться эти дома, куда потекут дождевые воды или подуют ветры. Архитектор большой микросхемы тоже должен подумать о фундаменте, об опорной площадке БИС. От выбора фундамента во многом зависит и последующая технология строительства.

На чем стоит БИС?

Чаще всего в качестве строительной площадки для БИС используется пластина из монокристаллического особо чистого кремния. Чтобы ее получить, кремниевый монокристалл диаметром 100—150 мм и длиной 200—300 мм алмазной пилой нарезают на пластины толщиной 0,4—0,5 мм.

Полученные диски тщательно шлифуют и полируют алмазными же пастами до подлинно зеркального блеска. Но и блеск не радует технологов, ибо, несмотря на отсутствие царапин, поверхностные слои атомов кремния в пластине искажены, изуродованы контактом с частицами алмазного абразива. Как ни малы эти частицы (~0,1 мкм), они все-таки в сотни раз больше межатомных расстояний. Созданные ими в кристаллической решетке дефекты (вмятины, микроскопические трещины, сдвиги) неглубоки (по сравнению с толщиной пластины); но расположены они как раз там, где в готовой микросхеме должны двигаться электроны. Для них эти дефекты — то же, что ямы и горы строительного мусора на городских магистралях. Говорить об интенсивном движении в таких условиях не приходится.

Поэтому последняя обработка поверхности пластины — химическая полировка — «нежно» удаляет нарушенные слои кристалла полупроводника, растворяя их. После этого отполированную пластину тщательно моют в специально подготовленной деионизованной воде, сушат — и вот, наконец, стройплощадка для БИС готова.

За время обработки пластина похудела — теперь ее толщина 250—

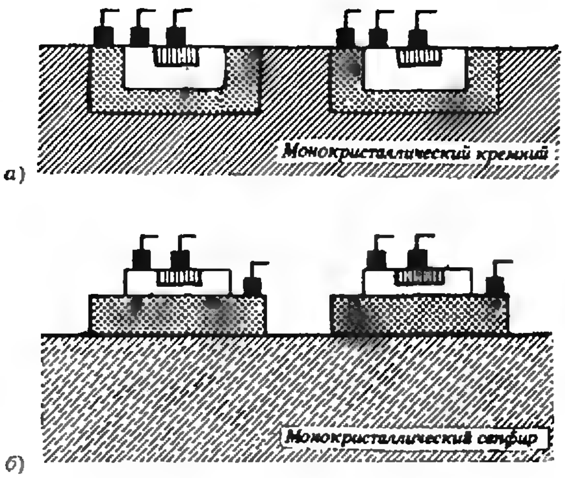


Рис. 1. Таков основной элемент интегральной схемы — транзистор — при «строительстве» на кремниевой пластине (а) и на фундаменте из сапфира (б).

300 мкм. Способ получения пластин не очень экономичен: алмазная пила толщиной 300 мкм, а затем шлифовка переводят в опилки более 60 % объема монокристаллического кремниевого слитка, полученного ценой немалых усилий и энергетических затрат. Да и толщина готовой пластины будет использована плохо. Полезная глубина, то есть толщина тех слоев, в которых потекут нужные нам токи, не превысит 1 мкм. Но сделать пластины более тонкими, к сожалению, нельзя — они будут разрушаться при обработке.

В качестве стройплощадки для БИС можно использовать пластинку диэлектрика — оксида алюминия (Al_2O_3), называемого в обиходе сапфиром. Пластинку сапфира полируют так же тщательно, как кремниевую, а затем на нее наносят монокристаллический слой кремния нужной толщины. Сапфир выбран в качестве подложки потому, что расположение атомов на поверхности кристалла сапфира при определенном направлении среза очень близко к структуре кристаллической решетки кремния. Это обстоятельство позволяет вырастить на поверхности сапфира тонкий кристаллический слой кремния — рабочую область будущего транзистора. Комбинация слоев «кремний на сапфире» — ее обозначают КНС — широко используется в технологии изготовления БИС. Она обладает важным преимуществом: сапфир — прекрасный диэлектрик, он обеспечивает полную электрическую изоляцию отдельных элементов схемы. С точки зрения топологии микросхемы эти элементы в кремниевой схеме подобны блиндажам, врытым в землю, а в КНС-структуре они подобны домикам (рис. 1).

В рамках нашей аналогии современная БИС эквивалентна городу из 100—150 тысяч домов-транзисторов с развитыми системами коммуникаций (дороги, электроснабжение и т. п.). Размеры этого города — от 2×3 мм до 6×8 мм. И на такой стройплощадке мы будем возводить все дома одновременно. Более того, на одной кремниевой пластине мы будем одновременно строить 100—150 БИС-городов (в зависимости от размеров пластины и площади микросхемы). Наша «громадная» стройплощадка в натуральную величину выглядит примерно так, как на рисунке 2.

Возможно, у читателя возник вопрос: а почему бы не делать микросхему на кристалле размером, скажем, 15×15 мм — это ведь тоже немного для пластины диаметром 150 мм, а емкость БИС возрастет на порядок. Оказывается, на кристалле увеличенного размера почти наверняка найдется дефект атомной решетки, способный полностью вывести из строя БИС. На поверхности площадью 1—2 см^2 даже у самой лучшей на сегодня пластины встречается хотя бы один дефект. Так что приходится довольствоваться «малым».

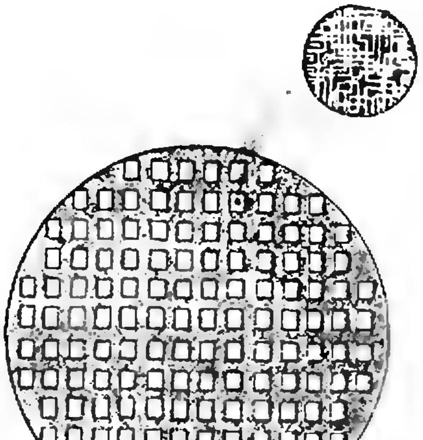


Рис. 2. Примерно так выглядит в натуральную величину «стройплощадка», на которой одновременно возводится до сотни «городов»-БИС. А чтобы разглядеть план отдельного «квартала», необходимо увеличить его в сотни раз.

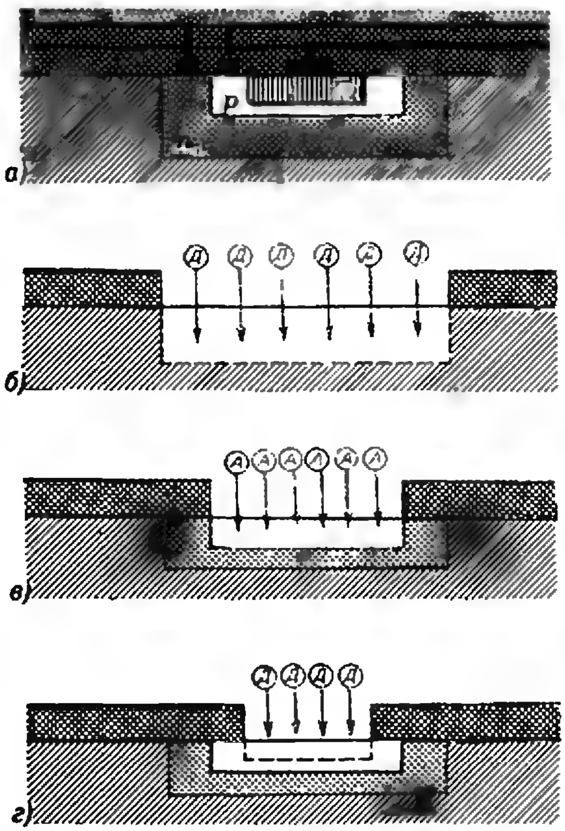


Рис. 3. Постепенно возводятся этажи дома-транзистора (а): сначала коллектор (б), потом база (в), потом эмиттер (г)...

Строить начинаем с ... окон

Итак, мы приступаем к строительству. Дома в нашем городе не низенькие. Посмотрите на рисунок 3,*а*: три «этажа» в рабочей области транзистора, два этажа металлической разводки да плюс несколько этажей межслойной изоляции; так что в доме-транзисторе по крайней мере 5—7 этажей.

Общее число операций, совершаемых при строительстве интегральной микросхемы, достигает сотни, но при этом некоторые операции повторяются многократно. Мы рассмотрим важнейшие моменты в процессе изготовления БИС.

Рабочие области транзистора — коллектор, база, эмиттер — образуются при легировании кремния соответствующими примесями элементов III и V групп периодической системы. Ввести в твердое тело чужеродные атомы можно, используя явление диффузии. Если пластину кремния нагревать в парах летучего соединения легирующего элемента — например, в парах BH_3 или AsH_3,— то часть атомов B или As проникнет в кремний. (Такой процесс называют диффузионным легированием.) Чтобы примеси проникали не всюду, а лишь в места, предусмотренные топологией БИС, надо защитить поверхность пластины экраном, непроницаемым для примесных атомов. В экране надо оставить «окна»: через них на очередной этаж будут поступать «стройматериалы» — атомы примесей (доноры и акцепторы) будут проникать в кремний, формируя рабочие области транзистора (см. рисунок 3, *б—г*).

Таким экраном для кремния оказался его собственный оксид SiO_2. Достаточно «толстый» слой оксида легко образуется на поверхности кремния при температуре около 1000 °С; он непроницаем для примесных атомов; устойчив при температуре диффузии; прочно держится на кремнии. Растворение SiO_2 в кислоте (травление) позволяет проделать в нем окна для последующей диффузии. (Далеко не всегда технологам так везет. Например, прекрасный полупроводниковый материал — арсенид галлия GaAs — не образует такого защитного слоя при окислении, и его экранирование превращается в отдельную проблему.)

Легко ли «прорубить окно»?

Прежде чем протравливать окна в SiO_2, надо защитить от растворения остальную часть оксидной пленки (на этом этапе защитный слой сам нуждается в защите). Здесь включается важнейшая в технологии микроэлектроники процедура — фотолитография. Цель ее — «раскроить» защитный слой SiO_2 в соответствии с топологической схемой БИС.

Фотолитография — это совокупность операций, связанных с применением светочувствительных составов, подобных тем, которые наносят на фотопленку или фотобумагу. Составы эти называют фоторезистами. Глагол «to resist» в английском языке означает «сопротивляться». Засвеченный фоторезист легко растворяется в травящих растворах, незасвеченный — «сопротивляется» травлению. (Можно подобрать и такой состав, который, наоборот, становится устойчивым после засвечивания.)

На специальной центрифуге жидкий резист тонким ровным слоем размазывается по поверхности окисленной пластины кремния и подсушивается. Затем на пластину, так же как при обычной контактной фотопечати, накладывается стеклянная пластинка, в которой прозрачны лишь отдельные участки — на месте будущих окон. Эта пластинка называется фотошаблоном и заслуживает отдельного рассказа. Но сначала закончим разговор о кремниевой пластине. После наложения фотошаблона производят экспонирование (засвечивание). Экспонированные (через прозрачные окна) участки фоторезиста, растворяясь при травлении, открывают доступ травителю к пленке SiO_2; в ней образуются необходимые нам окна, то есть незащищенные участки поверхности чистого кремния, через которые будет идти диффузия. Фоторезист сделал свое дело, и теперь остатки его удаляют. Фотолитографирование, включающее нанесение, экспонирование, травление и удаление фоторезиста, на этом закончилось. Но после диффузии все надо будет начинать сначала.

Портрет будущей БИС

Кто вбивает первый колышек на будущей стройплощадке? Геодезист. Без геодезистов с их нивелирами и теодолитами не осуществить ни один строительный проект. Изготовление фотошаблона — это своего рода «геодезические работы» на микросхемной стройке.

Такова готовая БИС — город из множества домов-транзисторов, спрятанный в небольшую коробочку. Ее компактность и элегантность особенно бросается в глаза на фоне схем, построенных на основе прежних технологий.

Фотошаблоны — это «поэтажные» планы, причем во всем БИС-городе нет двух одинаковых этажей. Размеры плана — приблизительно 5×5 мм. И на такой площадке надо «уложить» до 10^6 элементов. Выполнить подобную задачу без ошибок даже на чертеже удобных размеров, «увязать» чертежи соседних этажей БИС не в состоянии ни один самый аккуратный и старательный конструктор. Даже если бы такой человек нашелся, то слишком долго пришлось бы ему эту работу делать. Рабочие чертежи БИС проектируются на ЭВМ по специальным программам, а потом проверяются по не менее сложным контрольным программам. Готовый чертеж несколько раз переснимают с уменьшением на фотопластинки, доводя его размеры до «натуральной величины» — до размера микросхемы, и многократно размножают, с тем чтобы готовый фотошаблон соответствовал площади кремниевой пластины и позволял экспонировать на нее сразу несколько десятков, а то и сотен «изображений» микросхемы.

Таким образом, фотошаблон — это микротрафарет для разметки этажей. И сколько этажей — столько и фотошаблонов.

Когда белый свет не мил

Если на площадке размером 5×5 мм нужно разместить 10^6 транзисторов, то каждому из них отводится менее 25 мкм^2. Область эмиттера — самая маленькая рабочая область в транзисторе — должна иметь размеры около 2×3 мкм; ширина металлических проводников — порядка 1 мкм. Возникает вопрос: с какой точностью можно выдержать эти размеры при «строительстве»?

Прежде всего они должны быть соблюдены при изготовлении фотошаблонов. Точность, которую обеспечивает метод фотолитографии, ограничена длиной волны света, используемого при экспонировании. При падении света на край щели в шаблоне происходит дифракция. Как известно, из-за дифракции границы геометрической тени всегда несколько размыты. Четкость изображения зависит от длины волны света — чем меньше длина волны, тем лучше качество изображения. В этом плане синий и фиолетовый свет предпочтительнее, чем

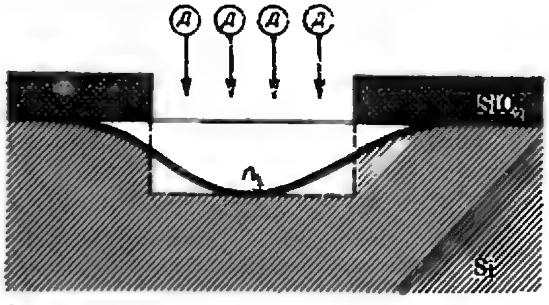


Рис. 4. Вот к чему приводит боковая диффузия: за пределами рабочей области (коллектор, база, эмиттер) концентрация примеси не сразу спадает до нуля, а постепенно.

красный. А чтобы нарисовать полоску шириной 1 мкм с точностью хотя бы ±0,1 мкм, видимый свет (длина волны от $8 \cdot 10^{-7}$ м до $4 \cdot 10^{-7}$ м, то есть от 0,8 мкм до 0,4 мкм) вообще не годится. Можно использовать более короткие электромагнитные волны, например, рентгеновские; но этот метод, называемый рентгенолитографией, имеет свои неудобства.

Обнадеживающие перспективы сулит «засвечивание» резиста электронным лучом — так называемая электронная литография. Электронный пучок движется по шаблону примерно так же, как по экрану телевизора или осциллографа. Отклоняющие системы могут переместить его в любую точку шаблона, а управляя «яркостью» пучка, можно регулировать засветку резиста. Конечно, здесь используются уже не фотоэмульсия, а специальные вещества, разрушаемые электронным пучком.

Оказалось, что электронная засветка слоя оксида кремния ускоряет его травление в кислоте в несколько раз. Это позволяет отказаться от резистных масок и формировать окна прямо в оксидном защитном слое. Пучок электронов нужно сделать необычайно узким и перемещать с точностью до 0,1—0,2 мкм, постоянно регулируя яркость. Какой оператор, даже работая с микроскопом, выполнит эту задачу одинаково успешно миллионы раз по всей площади подложки? Никакой. Эту работу можно доверить только ЭВМ, сопряженной с электронно-лучевым прожектором. (Вот, кстати, пример сращивания ЭВМ с исполнительным агрегатом!) Заложенный в ее памяти проект шаблона, ранее ею же и рассчитанный, ЭВМ превращает в трафарет для разметки БИС. При этом повышается точность изготовления окон.

Шаблоны — главный планировочный инструмент микросхемной технологии; благодаря им БИС-строительство из индивидуального становится массовым, или, как говорят специалисты, групповым.

Будем считать, что шаблоны изготовлены, с их помощью на пластине кремния в защитном слое оксида проделаны окна, и мы можем приступать к формированию рабочих областей.

Атомы отпускаются поштучно

Диффузионное легирование, о котором говорилось выше, широко применяется в микроэлектронике. Основное достоинство этого метода — его простота. Но есть у него и недостатки. Вот один из них: атомы примесного элемента, попадающие через окна в решетку кремния, движутся в общем хаотически и, значит, не обязательно перпендикулярно плоскости пластины. В результате вместо ожидаемой четкой формы области коллектора, такой, как на рисунке 3, *б*, мы получим нечто иное (рис. 4). Искаженные боковые области *p*—*n*-перехода ухудшают параметры схемы. Другой недостаток диффузионного легирования: концентрация вводимых примесей ограничена. При определенном значении концентрации наступает насыщение; предел растворимости некоторых примесей в кремнии очень мал.

Распределение примеси по глубине кристалла при диффузионном легировании всегда оказывается таким, как показано на рисунке 5, и изменить его так, чтобы за пределами рабочей области концентрация примеси резко падала, не удается. Вот поэтому на смену диффузионному легированию пришел процесс, называемый ионной имплантацией, или ионным внедрением. Суть его в том, что легирующие примесные ионы разгоняются в вакууме электрическим полем и, имея значительную скорость, обрушиваются на мишень — пластину кремния. Чем выше энергия ионов, тем глубже проникают они внутрь мишени («глубже» — на доли микрона). Число примесных ионов легко контролировать по величине тока, создаваемого ими в полете. Изменяя направление ионного пучка электрическим или магнитным полем, можно добиться равномерного распределения примеси по нужной площадке. При

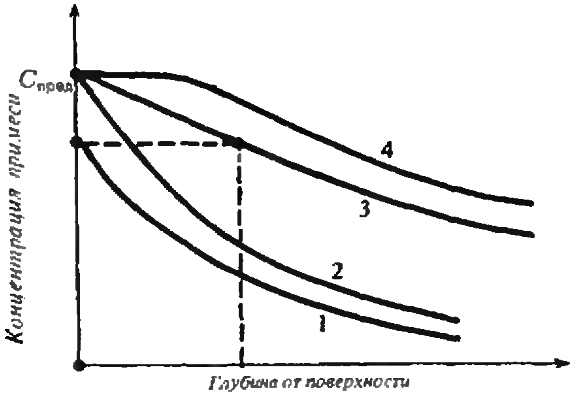


Рис. 5. Распределение концентрации примеси по глубине при диффузионном легировании. Красными линиями обозначен желательный профиль концентрации. Изменяя начальную концентрацию примеси на поверхности (сравните кривые 1 и 2), температуру (для кривой 2 она меньше, чем для 3) или продолжительность процесса диффузии (для кривой 3 в несколько раз меньше, чем для 4), можно получить необходимую концентрацию на заданной глубине.

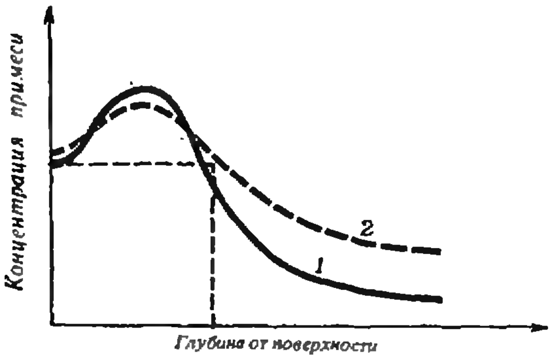


Рис. 6. При ионной имплантации распределение концентрации по глубине зависит от энергии и дозы ионов (кривая 1). Максимальная концентрация может превышать предельное значение, характерное для процесса диффузии. Пунктирная кривая 2 показывает распределение примеси после обработки, устраняющей поверхностные дефекты ионной бомбардировки.

ионной имплантации практически нет бокового проникновения, и профиль распределения примеси по глубине (рис. 6) получается более выгодным, чем при диффузионном легировании.

У метода ионной имплантации есть и свои неприятные стороны. Ионы примеси обычно входят в решетку с энергиями в сотни тысяч электронвольт, и за каждым ионом остается след причиненных им разрушений — сдвинутых или выбитых со своих равновесных положений атомов кристалла. При больших дозах имплантации приповерхностные слои материала так искажаются, что теряют подобие кристаллической структуры, становятся аморфными. Чтобы отчасти восстановить порядок, пластину приходится подвергать дополнительной обработке.

Легирование полупроводников методом ионной имплантации позволяет существенно повысить плотность упаковки транзисторов в микросхеме (за счет точного выполнения заданных размеров рабочих областей).

Транзистор у телефона

Итак, последовательным повторением операций защиты поверхности, нанесения масок и легирования мы создали плотную упаковку транзисторов на пластине БИС. Однако самой схемы у нас пока нет. Мы построили много отдельных домов, но это еще не город. Необходима система коммуникаций; к домам-транзисторам надо подвести энергопитание и линии связи. Делают это опять-таки с помощью фотолитографии. На поверхность кристалла наносят металлическую разводку и контактные площадки. Разводка сложных микросхем бывает и неоднослойной; тогда «этажность» растет за счет слоев разводки и слоев изоляции.

Сечение «проводка» металлической разводки — порядка 1×2 мкм. Представляете, какой бедой обернется для БИС попадание под слой металла ничтожной микронной пылинки, заметить которую можно только в микроскоп!? Обрыв цепи выведет из строя участок схемы, а может быть, и всю схему целиком. Не менее опасно попадание пылинки в рабочую область при легировании. Чтобы этого не случилось, в цехах, где «собирают» микросхемы, день и ночь борются за чистоту. Мощнейшие фильтры отлавливают пылинки, каждый работник прежде, чем попасть в цех, проходит под воздушным «обеспыливающим» душем, несколько раз в день проводится влажная уборка. Внутри такого чистого цеха есть особо чистая комната, в которой установлены герметичные боксы — в них и рождаются микросхемы.

Главным источником возможного загрязнения и вообще самым ненадежным звеном в технологическом процессе является человек. Даже при максимальной добросовестности он может ошибиться, допустить неточность. К чему это приведет? Пусть каждую из сотни операций по сборке БИС человек выполняет с надежностью 99 %. Какая часть готовой продукции будет гарантировано надежна? Микросхема калькулятора дает ответ за секунды: $0{,}99^{100} \approx 0{,}36$ — чуть больше трети.

Поэтому очень нужно отстранить человека от непосредственного участия в изготовлении микросхемы. Решение этой задачи — еще один шаг на пути усовершенствования технологии БИС.

(Окончание см. на с. 20)

Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения

В. И. АРНОЛЬД

> *«Уравнение было очень сложное, но профессор с присущей ему скромностью назвал его обыкновенным».*
>
> Из газетного интервью с математиком.

Дифференциальные уравнения — одно из основных орудий математического естествознания. Изобрел их Исаак Ньютон (1642—1727). Задачи по существу приводящие к дифференциальным уравнениям появлялись и до Ньютона. Однако решать их умели лишь такие гении, как президент французской Академии наук Х. Гюйгенс (1629—1695) и учитель Ньютона, математик и богослов, проповедник английского короля И. Барроу (1630—1677). После Ньютона их решают любые студенты и даже школьники.

Ньютон считал свое изобретение настолько важным, что зашифровал его в виде анаграммы*), смысл которой в современных терминах можно вольно передать так: «полезно» решать дифференциальные уравнения (так как ими выражаются законы природы).

В другой, более длинной анаграмме Ньютон зашифровал также и придуманный им рецепт решения всех уравнений, в том числе и дифференциальных.

Теория дифференциальных уравнений перерабатывает вопросы естествознания в геометрические задачи о кривых, определенных векторными полями (см. ниже) подобно тому, как декартов метод координат превращает вопросы об алгебраических уравнениях в задачи о линиях и поверхностях.

Состояния процесса

Чтобы изучить какой-либо процесс, нужно прежде всего уметь описывать множество всевозможных состояний этого процесса. Посмотрим, как это делается, на примерах.

1. Движение точки по прямой. Опыт показывает, что для определения движения материальной точки по прямой в отсутствие внешних сил достаточно задать в начальный момент ее скорость и положение на прямой. Поэтому множество всех ее состояний математик отождествляет с координатной плоскостью $(s; v)$: каждой точке на этой плоскости отвечает материальная точка, движущаяся со скоростью v и занимающая положение с координатой s, и обратно — каждому состоянию отвечает своя точка плоскости (рис. 1).

2. Колебания маятника. Состояние плоского маятника тоже описывается двумя параметрами, например углом отклонения θ от вертикали и угловой скоростью ω маятника (рис. 2). Стало быть, множеством состояний маятника снова будет плоскость? Не совсем. Дело в том, что при изменении угла θ на 2π маятник возвращается в прежнее положение. Поэтому множество состояний здесь — цилиндрическая поверхность (рис. 2).

3. Положение возов на двух дорогах. Города A и B соединены двумя непересекающимися дорогами, на каждой из которых находится воз; нас интересует их взаимное расположение. Положение воза на первой дороге (рис. 3) можно определить числом — долей расстояния от A до B (по первой дороге), заключенной между A и возом; аналогично, воз на второй дороге определяется такой же долей по второй дороге. Поэтому интересующее нас множество состояний описывается точками $(x; y)$ единичного квадрата $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$.

Множества состояний процесса в теории дифференциальных уравнений называют *фазовыми пространствами.*

---

*) *6accdae13eff7i3l9n4o4qrr4s9t12vx* Расшифровка: *Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa*, то есть «по данному уравнению, содержащему сколько-нибудь функций, найти производную и обратно». Эта анаграмма содержится в знаменитом «втором письме» Ньютона секретарю Королевского общества (английской академии наук) Ольденбергу от 24 октября 1676 г. Письмо предназначалось Лейбницу (1646—1716) и содержало сообщение об изобретении математического анализа. Переписку с Лейбницем, жившим в Германии, Ньютон вел через Ольденбурга (которого впоследствии заключили в Тауэр за связь с иностранцами).

Итак, каждая точка фазового пространства (*фазовая точка*) изображает состояние процесса. А само течение конкретного процесса изображается линией в фазовом пространстве; эти линии называются *фазовыми траекториями*.

Введение фазового пространства процесса геометризует теорию — вопросы о ходе процесса превращаются в вопросы о поведении фазовых траекторий. Получающиеся геометрические задачи могут быть трудными. Однако бывает и так, что уже одно введение фазового пространства позволяет решить трудную задачу.

Задача (*Н. Н. Константинов*). *Из города A в город B ведут две непересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из A в B и связанные веревкой некоторой длины, меньшей $2l$, смогли проехать из A в B, не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза с сеном радиуса l, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?*

Фазовым пространством здесь служит единичный квадрат. Начальное положение машин (в городе A) соответствует левому нижнему углу квадрата, а движение машин из A в B изображается кривой, ведущей в противоположный угол (см. рис. 3). Точно так же начальное положение возов соответствует правому нижнему углу квадрата, а движение возов изображается кривой, ведущей в противоположный угол квадрата (левый верхний). Но всякие две кривые в квадрате, соединяющие разные пары противоположных вершин, пересекаются. Поэтому, как бы ни двигались возы, наступит момент, когда пара возов займет положение, в котором была в некоторый момент времени пара машин. В этот момент расстояние между центрами возов будет меньше $2l$. Итак, разминуться не удается.

В рассмотренной задаче не участвовали дифференциальные уравнения, но ход рассуждений близок к тому, чем мы будем заниматься дальше: описание хода процесса как линии подходящего фазового пространства часто оказывается чрезвычайно полезным.

Общая схема теории дифференциальных уравнений такова. Поскольку начальное состояние рассматриваемых нами процессов определяет их будущий ход, оно определяет и скорость изменения состояния, то есть скорость движения фазовой точки. Зависимость скорости движения фазовой точки от ее положения (или *локальный закон эволюции* процесса) как раз и выражается, по Ньютону, дифференциальным уравнением. Геометрически это уравнение изображается векторами, приложенными к каждой фазовой точке и указывающими, куда и с какой скоростью из этой точки выходить. Вместе все эти векторы составляют *векторное поле фазовой скорости* (см. например, рисунки 5,11 ниже). Теория дифференциальных уравнений должна по векторному полю описывать ход процесса, то есть находить траектории движения фазовых точек, отвечать на вопросы о характере их движения (например, на такие вопросы: будут ли траектории ограничены? возвращаются ли они к исходной точке?). Значение этих вопросов для изучения процесса очевидно.

Уравнение математического маятника

Согласно законам механики угловое ускорение маятника пропорционально моменту силы тяжести (рис. 4)

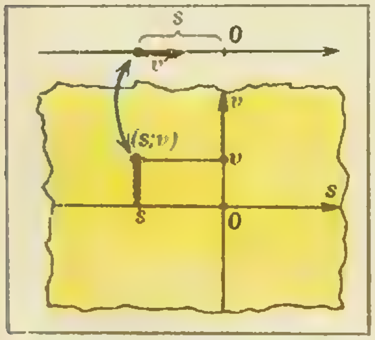


Рис. 1. Движение по прямой.

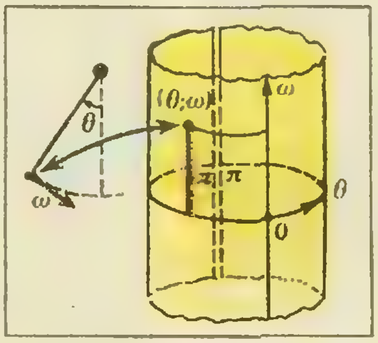


Рис. 2. Колебания маятника.

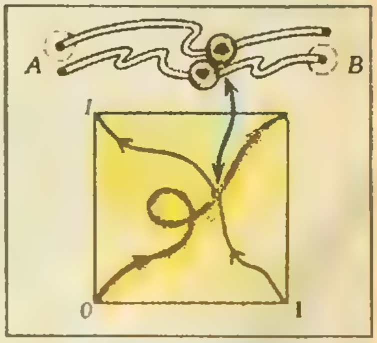


Рис. 3. Задача о двух возах на двух дорогах.

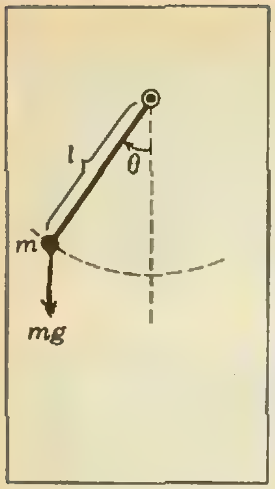


Рис. 4. Математический маятник.

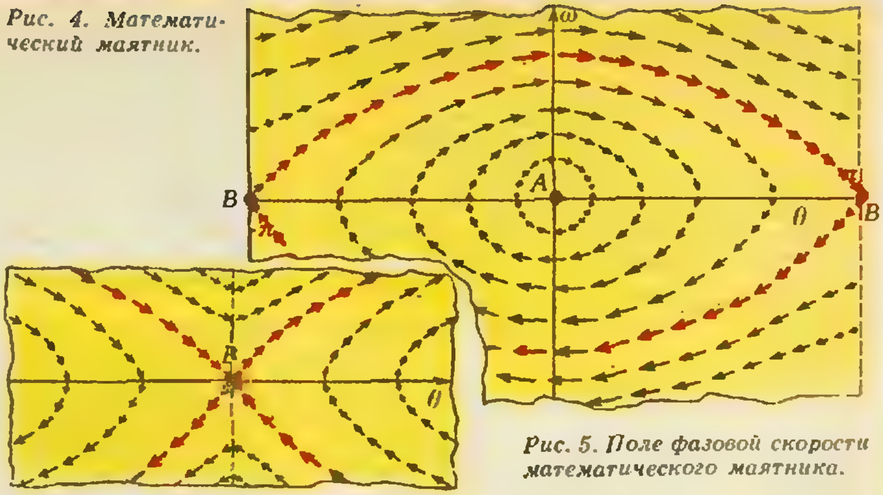


Рис. 5. Поле фазовой скорости математического маятника.

$$I\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta,$$

где m — масса, l — длина, θ — угол отклонения; точка сверху означает производную по времени t (здесь и всюду ниже), две точки — вторую производную*), $I = ml^2$ — момент инерции. Знак минус в уравнении объясняется тем, что момент стремится уменьшить отклонение. После сокращений получим $\ddot{\theta} = -k\sin\theta$, где $k = g/l$. Коэффициент k можно сделать равным 1 подходящим выбором масштаба времени (поделив t на $\sqrt{k}$). Тогда уравнение математического маятника примет вид

$$\ddot{\theta} = -\sin\theta. \qquad (1)$$

Фазовым пространством маятника является цилиндр $(\theta; \omega)$, где $\omega = \dot{\theta}$ — угловая скорость. Мы можем записать уравнение (1) в виде системы

$$\dot{\theta} = \omega, \quad \dot{\omega} = -\sin\theta, \qquad (2)$$

в которую входят только первые производные неизвестных θ и ω. Эта система выражает локальный закон эволюции состояния маятника: скорость изменения выражена через само состояние.

Решить уравнение (1) (или систему (2)), оказывается, не так легко. Если ограничиться небольшими углами θ (*малые колебания*), то $\sin\theta \approx \theta$. Поэтому при малых θ пользуются вместо (1) приближенным уравнением $\ddot{\theta} = -\theta$. Оно называется *уравнением малых колебаний маятника*. Его решения $\theta = C\sin(t + \varphi)$ вам известны из курса физики: *при малых углах отклонения плоский математический маятник совершает гармонические (синусоидальные) периодические колебания*. Вопрос о том, насколько меняется этот вывод при переходе к «истинному» уравнению маятника (1), нуждается в специальном исследовании.

Воспользуемся фазовым пространством системы (2) — цилиндром $(\theta; \omega)$. В каждой точке фазового пространства построим *вектор фазовой скорости*, то есть вектор с координатами $(\dot{\theta}; \dot{\omega}) = (\omega; -\sin\theta)$ — геометрический эквивалент закона природы (1). Полученная картина — *поле фазовой скорости* — изображена на рисунке 5 (для наглядности мы разрезали цилиндр по образующей и развернули его).

На этой картине можно разглядеть следующее. В двух точках фазовая скорость равна нулю. Точке A отвечает нижнее (устойчивое) положение равновесия, точке B — верхнее (неустойчивое) положение равновесия. При малых значениях θ, $\dot{\theta}$ видно, что точки фазового пространства перемещаются по замкнутым кривым, похожим на окружности (малые колебания), при увеличении θ замкнутые кривые увеличиваются и растягиваются в подобие эллипсов (колебания большой амплитуды)*). Особую роль играют траектории, помеченные крас-

---

*) Замкнутость фазовых траекторий означает периодичность колебаний (трение мы не учитываем). Замкнутость вытекает из следующей теоремы Гюйгенса («закон сохранения энергии»): $E = \dot{\theta}^2/2 - \cos\theta$ *при движении не меняется*. Доказательство: $\dot{E} = \dot{\theta}\ddot{\theta} + \dot{\theta}\sin\theta = 0$. Доказательство самого Гюйгенса было, конечно, иным: он не знал анализа. Однако не следует недооценивать силу методов предшественников Ньютона. Гюйгенс или Барроу нашли бы, скажем, значение предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\sin x}{\arcsin \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}\arcsin x}$$

мгновенно из геометрических соображений (редко кто из современных математиков справляется с вычислением этого предела за час).

ными стрелками: упавший из положения неустойчивого равновесия маятник совершает полный оборот и вновь замирает в верхнем положении. Эта траектория отделяет колебания от (неравномерных) вращений, которые совершает маятник, если его скорость при $\theta=0$ превышает в наших безразмерных единицах число 2.

Караси (нормальное размножение)

В большом пруду разводят карасей. Караси не мешают друг другу, корма им хватает. Как будет меняться число карасей $x(t)$ с течением времени t? Скорость прироста карасей при этих условиях оказывается пропорциональной количеству особей; поэтому можно написать

$$\dot{x}=kx,\ k>0. \qquad (3)$$

Это уравнение называется *дифференциальным уравнением нормального или мальтузианского размножения**). (Напомним, что $\dot{x}$ обозначает производную по времени.)

Теорема существования. *Любая функция вида $x=Ce^{kt}$, где C — постоянная, является решением уравнения* (3).

Доказательство: подставьте в уравнение.

Из доказанной теоремы следует

Теорема единственности. *Других решений у уравнения* (3) *нет.*

Доказательство. Любую функцию можно записать в виде $x(t)=C(t)e^{kt}$. Тогда $\dot{x}=\dot{C}e^{kt}+kx$. Поэтому для выполнения равенства $\dot{x}=kx$ необходимо и достаточно, чтобы $\dot{C}=0$, то есть чтобы C было константой.

Графики решений уравнения называются *интегральными кривыми*. Эти кривые лежат в *пространстве — времени*, то есть на плоскости с координатами $(t;\ x)$. Для вычерчивания интегральных кривых полезна заготовка, которая называется *полем направлений* уравнения и состоит из маленьких отрезочков, приложенных в каждой точке пространства — времени под углом к оси времени, тангенс которого равен правой части уравнения (kx для уравнения (3), см. рис. 6). Интегральная кривая в каждой своей точке касается соответствующего отрезка и, обратно, кривая, всюду касающаяся наших отрезков, будет графиком решения (в этом и состоит геометрический смысл дифференциального уравнения).

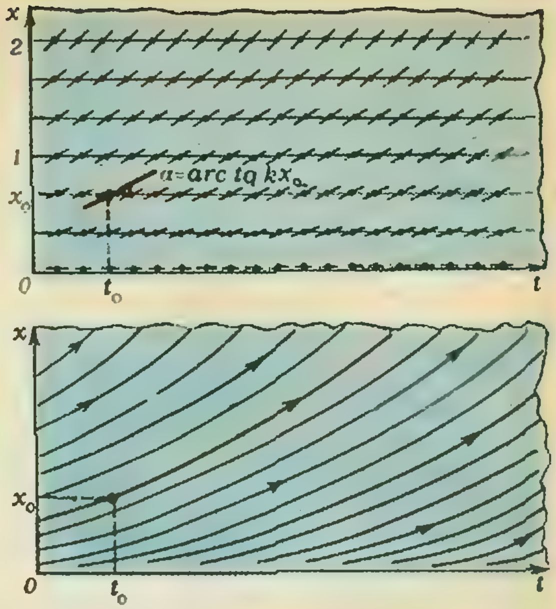


Рис. 6. Поле направлений уравнения нормального размножения $\dot{x}=kx$ и решение, проходящее через начальную точку $(t_0,\ x_0)$.

Мы только что доказали, что *через каждую точку пространства — времени проходит ровно одна интегральная кривая $x=Ce^{kt}$ уравнения* (3). Эта формула выражает закон нормального размножения: для удвоения количества карасей всегда требуется одно и то же время независимо от их количества. Период удвоения населения Земли в настоящее время около 40 лет. Следовательно, число живущих сейчас людей больше числа умерших за 1000 лет и было бы больше числа всех когда-либо умерших людей, если бы скорость прироста не менялась. Время существования человечества получается тогда порядка 2000 лет; следовательно, скорость прироста населения раньше была меньше.

Замечания 1. Наши рассуждения основывались на угадывании решений $x=Ce^{kt}$. Найти эти решения можно следующим более систематическим образом. Тангенс угла наклона интегральной кривой уравнения $\dot{x}=v(x)$ к оси t равен $v(x)$. Значит, тангенс угла наклона к оси x равен $1/v(x)$. Вдоль интегральной кривой (если она нигде не параллельна оси t) можно выразить t в виде функции от x. Обозначая производную по x штрихом, получим $t'=1/v(x)$. Значит, t есть первообразная от

---

*) В некоторых случаях скорость размножения оказывается пропорциональной не числу особей, а числу пар. Такое аномальное размножение гораздо медленнее обычного при малой плотности населения (например, китам некоторых видов трудно найти пару). Напротив, при больших x размножение со скоростью, пропорциональной x^2, приводит к «взрыву» за конечное время: график $x(t)$ имеет вертикальную асимптоту (почему?). Эта ситуация реализуется в уравнениях химической кинетики, где скорость реакции пропорциональна количеству каждого из реагентов.

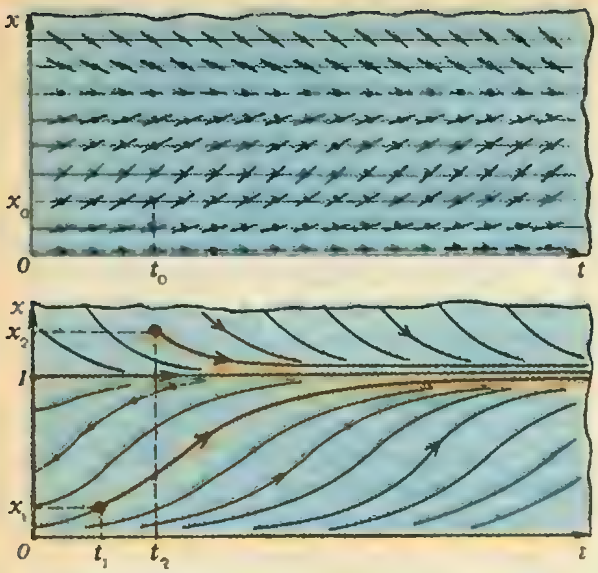


Рис. 7. Поле направлений и графики решений логистического уравнения $\dot{x}=(1-x)x$. Решения $x=1$ и $x=0$ отвечают положениям устойчивого и неустойчивого равновесия.

$1/v$. Это позволяет выразить t через x, а затем и x через t. (Разумеется, прямые пространства — времени, где $v(x)=0$, приходится выкидывать, чтобы не делить на нуль.) При $v(x)=kx$ получаем $t'=1/kx$, $kt=\ln|x|+\text{const}$, $x=Ce^{kt}$.

2. Теорема единственности, утверждающая, что не совпадающие интегральные кривые не пересекаются,— чрезвычайно удивительный факт, противоречащий наглядной очевидности и физическому опыту. Например, интегральные кривые уравнения (3) при $k=1$, проходящие через точки (0; 0) и (0; 1) при $t=-5$ на глаз неразличимы, а при $t=-30$ между ними не умещаются и атомы. Тем не менее математики считают их непересекающимися и при $t=-10^{10}$.

3. В физической литературе последнего времени подвергается сомнению данный Ньютоном в 1684 году вывод законов Кеплера из (указанного ему Гуком в письме от 6 января 1680 г.) закона всемирного тяготения: этот вывод неявно использует не доказываемую Ньютоном теорему единственности для уравнения движения. В действительности, однако, единственность следует из существования решения, зависимость которого от начальной точки выражается дифференцируемой функцией. Доказательство единственности в этом случае аналогично приведенному выше для уравнения размножения, нужное же решение Ньютон предъявил. В письме Галлею о своей дискуссии с Гуком Ньютон дал описание разницы между подходами математиков (Ньютона) и физиков (Гука) к естествознанию, остающееся актуальным и сегодня: «Математики, которые все открывают и устанавливают и проделывают всю работу, должны довольствоваться ролью сухих вычислителей и чернорабочих; другой, который всего лишь все схватывает и на все претендует, присваивает себе все изобретения как своих последователей, так и своих предшественников». В обязанности Гука как куратора Королевского общества входило доказывать опытами на еженедельных заседаниях общества по 2 или 3 новых закона природы, что он и делал в течении 40 лет. Доказываемые законы могли быть открыты и другими, но Гук насчитывал до 500 законов, открытых лично им. Естественно, он не все успевал обосновывать математически.

Вернемся, однако, к нашим карасям. Через некоторое время карасей станет столь много, что им не будет хватать корма и им станет тесно; дальнейший прирост уже не будет удовлетворять уравнению (3).

Караси при нехватке пищи (логистическая кривая)

Если наш пруд с карасями невелик, или если число карасей в большом пруду сильно возросло, конкуренция из-за пищи приводит к уменьшению скорости прироста. Простейшее предположение состоит в том, что коэффициент k зависит от числа карасей линейно, то есть $k=a-bx$ (при не слишком больших x всякую гладкую функцию можно аппроксимировать линейной). Мы приходим, таким образом, к уравнению размножения с учетом конкуренции: $\dot{x}=(a-bx)x$. Коэффициенты a и b можно превратить в единицы выбором масштабов t и x. Мы получаем так называемое *логистическое уравнение*

$$\dot{x}=(1-x)x. \qquad (4)$$

Поле направлений уравнения (4) в пространстве — времени показано на рисунке 7, *а*, а рядом, на рисунке 7, *б*, показаны графики решений. S-образные интегральные кривые в полосе $0<x<1$ называются *логистическими кривыми*. Мы видим, что

1) процесс имеет два положения равновесия: $x=0$ и $x=1$;

2) между прямыми $x=0$ и $x=1$ поле направлено вверх от 0 к 1, а при $x>1$ — вниз к 1.

Таким образом, положение равновесия 0 неустойчиво (раз появившееся население карасей начинает расти), а положение равновесия 1 устойчиво (меньшее население растет, большее — убывает). Каким бы ни было начальное число карасей $x>0$, с течением времени процесс выходит к устойчивому состоянию равновесия $x=1$. У каждого пруда, таким образом (при неизменных прочих условиях), имеется свое «правильное» число карасей, и любая популяция карасей будет к этому числу стремиться.

Ловля карасей

До сих пор мы рассматривали свободную популяцию карасей, развивающуюся по своим внутренним законам. Предположим теперь, что мы карасей вылавливаем (скажем, колхозный пруд регулярно снабжает местный рыбный магазин живой рыбой). Предположим, что скорость отлова постоянна. Мы приходим к *дифференциальному уравнению отлова*

$$\dot{x} = (1 - x)x - c. \qquad (5)$$

Величина c характеризует разрешаемую скорость отлова и называется *квотой*.

На рисунке 8 показаны три разновидности графиков решений уравнения (5) при трех разных c.

Мы видим (рис. 8, *a*), что при не слишком большой скорости отлова ($0 < c < {}^1/_4$) существует два положения равновесия ($x = A$ и $x = B$ на рисунке). Нижнее положение равновесия A неустойчиво. Если по каким-либо причинам (перелов, болезни) в некоторый момент величина популяции x опустится ниже A, то в дальнейшем вся популяция за конечное время исчезнет. Верхнее положение равновесия B устойчивое — это стационарный режим, на который выходит популяция при постоянном отлове c. Естественно, равновесное население пруда, в котором производится отлов меньше, чем в пруду, в котором лов не ведется.

Если $c > {}^1/_4$ (рис. 8, *b*), то равновесий нет и все караси будут отловлены за конечное время (завышенный план по продаже живой рыбы в магазине приведет к ее гибели; исторический пример такого рода — истребление стеллеровой коровы).

При $c = {}^1/_4$ (рис. 8, *б*) имеется одно неустойчивое состояние равновесия ($A = B = {}^1/_2$). Отлов с такой скоростью при достаточно большой начальной популяции математически возможен в течение сколь угодно длительного времени, однако сколь угодно малое колебание численности установившейся равновесной популяции вниз (см. точку F) приводит к полному отлову карасей за конечное время (план отлова $c = {}^1/_4$ для магазина «Рыба» тоже не годится).

Таким образом, хотя теоретически допустимы любые квоты вплоть до максимальной ($c \leqslant {}^1/_4$), максимальная квота $c = {}^1/_4$ приводит к неустойчивости и недопустима*). Более того, практически недопустимы и близкие к ${}^1/_4$ квоты, так как при них опасный порог A близок к установившемуся режиму B (небольшие случайные отклонения отбрасывают популяцию ниже порога A, после чего она погибает).

Оказывается, что все же можно так организовать отлов, чтобы устойчиво получать улов со скоростью $c = {}^1/_4$. Посмотрим, как это делается.

Введение обратной связи

Фиксируем вместо абсолютной скорости отлова относительную, то есть фиксируем отлавливаемую за единицу времени долю наличной популяции:

$$\dot{x} = (1 - x)x - px. \qquad (6)$$

На рисунке 9 показано пространство — время для уравнения (6) (при $p < 1$) и графики некоторых решений. Видно, что нижнее, неустойчивое положение равновесия теперь в точке $x = 0$, второе положение равновесия B

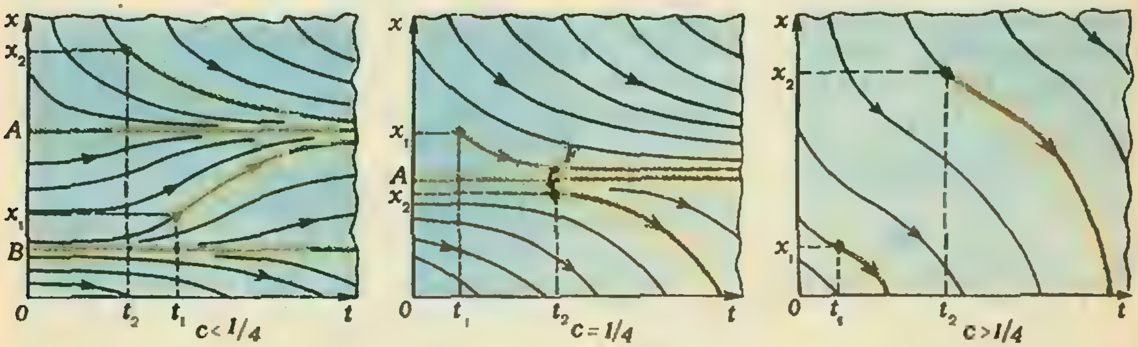


Рис. 8. Решения уравнения отлова $\dot{x} = (1 - x)x - c$ при разных значениях квоты отлова c. При $c < 1/4$ любая популяция стремится к устойчивому равновесию $x = A$, при $c = 1/4$ положение равновесия неустойчиво. при $c > 1/4$ любая популяция вымирает.

---

*) Важный для экономики вывод математической экологии: стремление максимизировать прибыль, доход или количество продукции чревато возникновением неустойчивости системы.

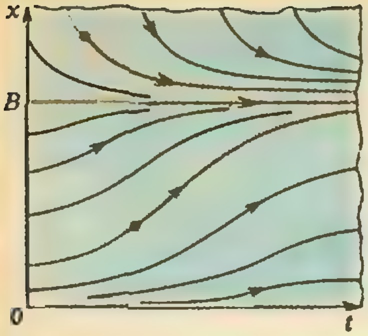


Рис. 9. Решения уравнения отлова с относительной квотой $\dot{x}=(1-x)x-px$ при $p<1$. Любая популяция стремится к устойчивому значению $x=B$.

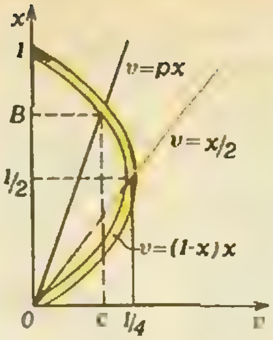


Рис. 10. Нахождение оптимального устойчивого режима отлова с относительной квотой.

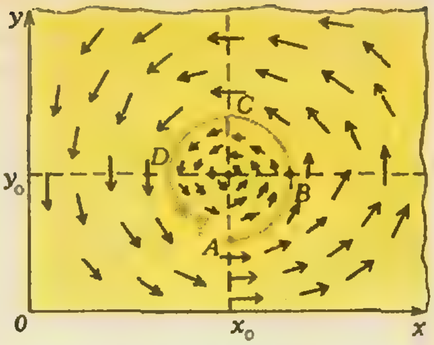


Рис. 11. Поле фазовой скорости в модели «хищник — жертва».

устойчиво при любом p (если только $0<p<1$).

После некоторого периода установления популяция карасей выходит на стационарный режим $x=B$. Абсолютная скорость улова устанавливается при этом равной $c=pB$. (Это — ордината точки пересечения графиков функций $v=(1-x)x$ и $v=px$.) Исследуем поведение этой величины при изменении p. При малых относительных выловах (малых p) установившаяся скорость отлова тоже мала; при $p\to 1$ она тоже стремится к нулю (перелов). Наибольшее значение абсолютной скорости c равно наибольшей ординате графика функции $v=(1-x)x$. Она достигается, когда прямая $v=px$ проходит через вершину параболы (то есть при $p={}^1/_2$) и равно $c={}^1/_4$ (рис. 10).

Выберем $p={}^1/_2$ (то есть назначим относительную квоту так, чтобы установившаяся популяция составляла половину необлавливаемой). Мы достигли, как и было обещано, максимально возможной стационарной скорости отлавливания $c={}^1/_4$, причем система остается устойчивой (возвращается к установившемуся состоянию при малых отклонениях популяции от установившейся)*).

Караси и щуки

В нашем пруду с карасями завелись щуки. Если бы щук не было, караси размножались бы по экспоненте, со скоростью $\dot{x}=kx$ (пруд большой). Но теперь следует учесть карасей, съеденных щуками, и мы предположим, что число встреч карасей со щуками пропорционально как числу карасей x, так и числу щук y; тогда для скорости изменения числа карасей получим уравнение $\dot{x}=kx-axy$. Что касается щук, то без карасей они вымирают: $\dot{y}=-ly$, в присутствии же карасей начинают размножаться со скоростью, пропорциональной числу съеденных карасей: $\dot{y}=-ly+bxy$. Мы приходим, таким образом, к системе дифференциальных уравнений простейшей модели системы «хищник — жертва»:

$$\begin{cases} \dot{x}=kx-axy, \\ \dot{y}=-ly+bxy. \end{cases} \tag{7}$$

Эта модель называется *моделью Лотка — Вольтерра.*

Фазовым пространством этой системы служит угол $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$. Нарисуем на нем поле фазовой скорости системы (рис. 11), то есть к каждой точке $(x;\ y)$ приложим вектор

$$(kx-axy;\ -ly+bxy).$$

У этого поля есть *особая точка* (к ней приложен нулевой вектор), *а именно* точка $(l/b;\ k/a)$; она отвечает равновесному количеству карасей и щук, когда прирост карасей уравновешивается деятельностью щук, а прирост щук — их естественной смертностью.

Если начальное число щук меньше $y_0=k/a$ (точка A на рисунке), то количество карасей и щук растет, пока размножившиеся щуки не начнут съедать больше карасей, чем их рождается (точка B), затем число карасей начнет убывать, а число щук продолжает расти, пока нехватка пищи не приведет и щук к вымиранию (точка C); затем число щук уменьшится настолько, что караси снова начнут размножаться (точка D); начавшееся размножение карасей приведет к тому, что со временем и щуки начнут размножаться.

---

*) Но для этого планирование должно быть гибким: план уменьшается при неурожае и увеличивается при благоприятных условиях.

Но вернемся ли мы к точке A? Иными словами, будет ли процесс колебания повторяться периодически? Ответ на этот вопрос может зависеть от выбора начальной точки A (а также от значения параметров системы). К этому вопросу мы вернемся в одном из следующих номеров журнала.

Задачи

1. Найдите уравнение логистической кривой.

2. Являются ли интегральные кривые уравнений (5) и (6) растянутыми логистическими кривыми?

3. Докажите, что интегральные кривые уравнений (5) и (6), расположенные вне полосы между A и B, имеют вертикальные асимптоты.

4. Могут ли пересекаться не совпадающие интегральные кривые логистического уравнения?

5. Докажите, что период T колебания маятника (1) растет с амплитудой.

6. Приближенно сосчитайте период колебания маятника малой амплитуды a.

7. Найдите предел периода колебаний маятника при стремлении амплитуды к π.

8. Докажите, что период колебания маятника равен производной площади, ограниченной фазовой траекторией $\dot{\theta}^2/2-\cos\theta=E$ по энергии E.

9. Частицы массы 1 начинают двигаться с нулевой скоростью одновременно изо всех точек оси x под действием силового поля $F=\sin x$. Через какое время частицы начнут сталкиваться?

Ответы даны на с. 57. Решения можно найти в следующих книгах:

1. В. И. Арнольд. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Наука, 1984.
2. В. И. Арнольд. *Математические методы классической механики.* М.: Наука, 1974.

Города для электронов

(Начало см. на с. 6)

После формирования разводки и контактов БИС готовы. Каждую из них тщательно проверяют на работоспособность прямо на пластине. Контрольный автомат, управляемый компьютером, опускает на БИС тончайшие иглы-контакты и посылает в схему серию тестовых импульсов тока (как говорят, «прозванивает» схему). Если схема содержит миллион элементов, то число тестовых импульсов — до десятков тысяч. Ответ экзаменуемой схемы принимает ЭВМ. Если БИС отзывается не так, как надо, или молчит, контрольный автомат помечает ее капелькой магнитной краски. После того как кремниевую пластину разделят на сотни готовых микросхем (это делают алмазным резцом или лазерным лучом), электромагнит выберет меченые забракованные схемы.

А исправные готовые БИС теперь осталось поместить в корпус. Небольшая коробочка из керамики, металла или пластмассы должна оградить микросхему от внешних повреждений, воздействия атмосферы, случайных электрических полей, обеспечить охлаждение работающей микросхемы. Поэтому, несмотря на внешнюю простоту, конструкция корпуса тщательно продумывается и просчитывается. В некоторых типах микросхем стоимость корпуса и работ по «упаковке» достигает трети всей стоимости готовой БИС.

Теперь, когда процесс изготовления микросхемы закончился, кончается и аналогия с градостроительством. Никакой город-новостройка не подвергается испытаниям на устойчивость к стоградусной жаре и к морозу в —60 °С, к землетрясению в 9 баллов, к удару при падении с трехметровой высоты; добавьте проверку на герметичность в морском тумане, на выдерживание предельного рабочего режима и т. п. Если БИС все это выдерживает, ее можно передать потребителю.

* * *

Микроэлектроника — это союз многих наук: материаловедения, точной механики, квантовой оптики, электрофизики, фотохимии, кибернетики,... Нельзя сказать, что́ здесь главное, что́ второстепенное. Лучшее, чем располагают сегодня наука и техника, создает технологию производства микросхем. Мы рассмотрели лишь самые типичные и сравнительно простые для понимания элементы технологии. Но и они, и другие варианты технологии БИС полны и явных, и скрытых сложностей. Однако достигнутые успехи и близкие перспективы технологии БИС вселяют надежды на то, что вершины микроэлектронной технологии еще далеко впереди.

Кардиограмма ртутного сердца

Доктор физико-математических наук
Я. Е. ГЕГУЗИН

Из множества особенностей и свойств истинного сердца ртутное обладает лишь одним — способностью пульсировать, периодически меняя свою форму. Ртутному сердцу неведомы ни боль, ни перебои, ни волнения; перед настоящим сердцем оно имеет безусловное и завидное преимущество — может остановиться, сколь угодно долго просуществовать бездействуя, а затем снова ожить.

У нас в лаборатории в шкафу, где хранятся химические реактивы, живет ртутное сердце. Конструкция его совсем проста: фарфоровая чашка с вогнутым дном, на дне чашки — ртуть в виде расплющенной капли-лужицы (диаметром ≈ 4 см). Она залита толстым слоем слабого (5-и процентного) водного раствора соляной кислоты (≈ 50 мл), в котором растворена соль двухромовокислого калия ($K_2Cr_2O_7$; ≈ 60 мг). Фарфоровая чашка прикрыта плексигласовой пластинкой, в пластинке укреплена гайка, а в ней — винт, заканчивающийся железной проволокой-иглой. Вращая винт, проволоку можно опустить до соприкосновения с поверхностью ртути, и ртутное сердце начнет работать, то есть ритмически пульсировать.*)

Чтобы такое сердце работало надежно, проволока должна коснуться поверхности капли-лужицы либо в центре, либо в одной из точек на контуре.

Пульсация ртутного сердца — зрелище впечатляющее: на чистой поверхности капли возникают переливающиеся блики причудливой формы, и контур капли приобретает быстро меняющиеся очертания, которые повторяются в каждом очередном цикле пульсаций. Сердце работает без устали: мы оставляли его на час, на два, а однажды оставили на ночь — и утром нашли пульсирующим.

Теперь о механизме пульсаций ртутного сердца — лужицы ртути, которая непрерывно вздрагивает от соприкосновения с железной проволокой.

Вначале о двух эффектах, с которыми необходимо ознакомиться, чтобы понять причину периодических сокращений и расширений ртутной капли.

Первый эффект заключается в уменьшении поверхностного натяжения металла, если на его поверхности имеется электрический заряд. Проще всего это понять на примере свободной сферической жидкой металлической капли, скажем капли ртути. Пусть радиус капли R. Если она не заряжена, вещество, находящееся в ее объеме, будет испытывать сжимающее давление $p_{сж}=2\sigma/R$. Оно связано с искривленностью поверхности (R) и поверхностным натяжением (σ). Допустим теперь, что по поверхности капли распределен заряд, величина которого q. Очевидно, что носители заряда будут отталкиваться друг от друга с силой, величина которой (в соответствии с законом Кулона) пропорциональна квадрату заряда. Это означает, что при неизменном объеме сферической капли (и, следовательно, при постоянном радиусе) наличие на ее поверхности электрического заряда приведет к понижению сжимающего давления. Это обстоятельство может быть представлено как следствие понижения поверхностного натяжения на величину $\Delta\sigma\sim q^2$.

Мы не стремились к тому, чтобы расчет был точен; важно лишь иметь основание утверждать, что величина понижения поверхностного натяжения не зависит от знака заряда, находящегося на поверхности. Порукой тому — квадратичная зависимость $\Delta\sigma$ от величины заряда q.

Все это нам необходимо знать, так как ртуть в растворе соляной кислоты получает заряд, и поэтому поверхностное натяжение на границе ртуть — раствор как бы понижается. (Мы не будем подробно интересоваться процессами на этой границе, так как они достаточно сложны.)

---

*) Ртуть — очень ядовитое вещество, поэтому опыты с ней можно проводить только в физическом кабинете под руководством учителя. *(Примеч. ред.)*

Описанный эффект влияния заряда на поверхности на величину поверхностного натяжения, который именуется «электрокапиллярный эффект», был открыт и изучен французским физиком Габриэлем Липпманом (1845—1921) и нашел множество практических приложений.

Второй эффект состоит в том, что в момент, когда металлическая игла соприкасается с поверхностью ртути, величина имеющегося на ртути заряда изменяется, следовательно, эффективное поверхностное натяжение также должно измениться. С помощью простого опыта легко убедиться в том, что в момент соприкосновения величина заряда на ртути уменьшается, а вместе с тем уменьшается и то понижение поверхностной энергии, которое наступило, когда капля ртути была залита раствором соляной кислоты. Два последовательных отрицания равносильны одному утверждению: уменьшение понижения означает повышение. В момент прикосновения железной иглы к поверхности ртути ее поверхностное натяжение немного увеличивается. Следствием этого увеличения должно быть некоторое сжатие капли-лужицы, которая на дне чашки под собственной тяжестью расплющилась, и частичное приближение ее формы к сферической. Это отчетливо наблюдается, если в центре капли в ее тело погрузить металлическую иглу: капля-лужица вздрогнет, и ее горизонтальный диаметр явно уменьшится.

Вот теперь можно понять механизм пульсаций. Начнем со случая, когда железная игла касается ртути в точке на контуре лужицы (рис. 1). В момент соприкосновения иглы с поверхностью ртути — соприкосновения, а не внедрения! — поверхностное натяжение несколько повысится, ртутная лужица уменьшит диаметр, контакт между нею и иглой нарушится. После этого поверхностное натяжение должно возвратиться к значению, которое было до соприкосновения иглы с каплей, то есть понизиться, и радиус ртутной лужицы должен возрасти. Это значит, что лужица соприкоснется с иглой и все начнется снова: сокращение лужицы — нарушение контакта, расширение лужицы — восстановление контакта и т. д.

Интересен механизм возникновения пульсаций в том случае, когда игла прикасается к поверхности ртути не на контуре ртути, а в ее центре, в макушке (рис. 2). Казалось бы, наступающее при этом повышение поверхностного натяжения должно сопровождаться поднятием макушки и образованием ненарушающегося контакта с иглой. В действительности, однако, происходит иное. Макушка лужицы чуть наползает на иглу, а затем под действием силы тяжести отрывается от нее. Этот первый импульс дает толчок колебаниям, капля раскачивается, сердце начинает пульсировать.

Любопытная деталь: при переносе иглы с контура лужицы на ее макушку частота пульсаций уве-

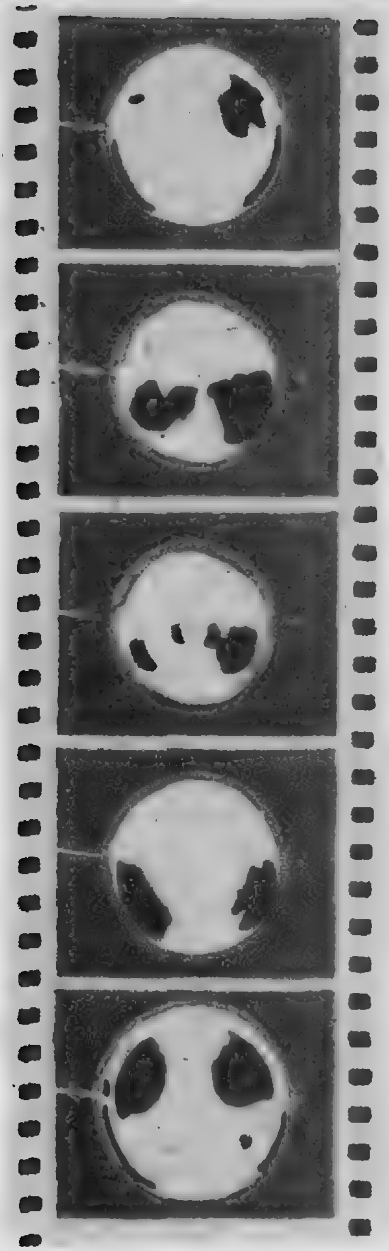


Рис. 1. Пульсации ртутного сердца, когда металлическая проволока-игла касается контура ртутной капли-лужицы.

личивается. Это совершенно аналогично повышению частоты колебаний гитарной струны, если пальцем прижать ее к грифу посередине между точками закрепления.

Необходимо подчеркнуть, что ртутное сердце отнюдь не вечный двигатель. Во время его работы расходуется энергия, выделяющаяся при химическом взаимодействии между ртутью, железом, соляной кислотой и двухромовокислым калием. В этой реакции расходуются исходные компоненты, и она прекратится, когда, скажем, будет «съедена» железная игла. В «невечности» ртутного сердца можно легко убедиться, взяв более тонкую проволочку. Довольно скоро контакт между каплей и проволочкой перестанет воспроизводиться, так как кончик проволоки будет «съеден». Чтобы сердце опять заработало, надо проволочку придвинуть к лужице: явно не вечный двигатель!

Задумали мы снять кардиограмму ртутного сердца. Много сведений из нее не извлечешь, разве только определишь число пульсаций в секунду (а их можно просто посчитать, наблюдая за лужицей, или для верности воспользоваться кадрами кинофильма). То, что ртутное сердце здорово, просто отчетливо видно глазами: оно пульсирует ритмично, без перебоев, явно не уставая (частота пульсаций нашего лабораторного сердца — около 120 ударов в минуту). И все-таки снять кардиограмму любопытно.

Вначале решили воспользоваться работающим сердцем как прерывателем электрической цепи, регистрируя моменты включения и выключения с помощью самопишущего прибора. От этой мысли, однако, отказались, так как любое электрическое вмешательство в ртутное сердце неизбежно исказит его пульсации. Поступили по-иному. Тоненький луч света направлялся на зеркальную поверхность пульсирующей лужицы, а отраженный от нее мечущийся луч подавал сигнал на самописец, который и записал кардиограмму (рис. 3). На кардиограмме видна последовательность чередующихся максимумов и минимумов — четких, строгих, периодических, без перебоев, на зависть любому человеческому сердцу.

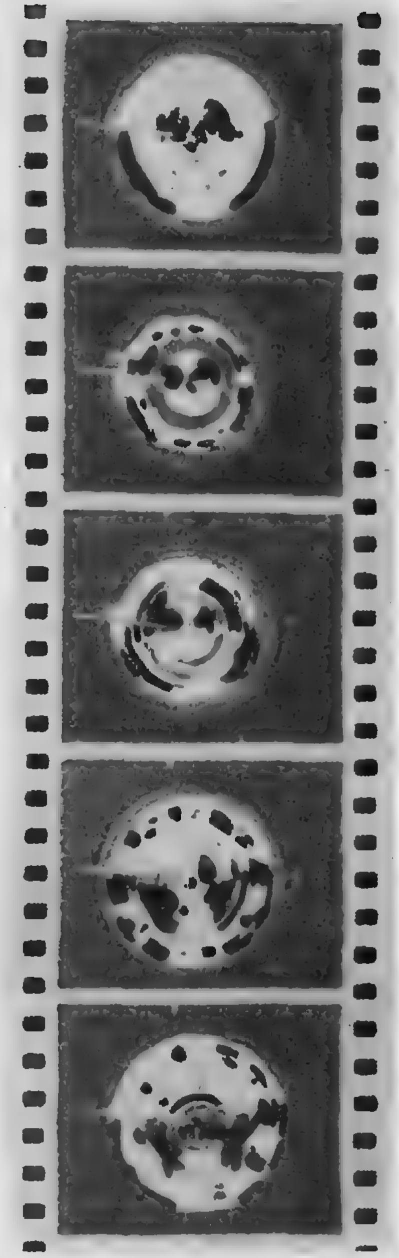


Рис. 2. Пульсация ртутного сердца, когда металлическая проволока-игла касается макушки ртутной капли-лужицы.

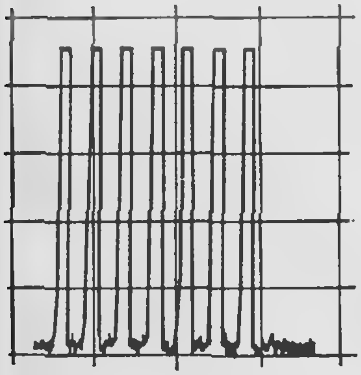


Рис. 3. Кардиограмма ртутного сердца.

Математика 9, 10

Мы публикуем две заметки, адресованные девятиклассникам. Они также могут быть полезны десятиклассникам, готовящимся к вступительным экзаменам в вузы.

Задачи на сравнение чисел

— *Какое из двух чисел больше:* $\frac{22}{7}$ *или* 3,14?
— *Они равны.*
— *Почему?!*
— *Каждое из них равно* π.
Разговор на устном экзамене

В этой заметке разбираются некоторые основные методы установления отношения «больше» или «меньше» между числами, записанными «в неявном виде» — с помощью логарифмов, радикалов и т. п. Подобные задачи часто возникают в ходе выполнения экзаменационных заданий, — и далеко не всегда школьники могут успешно с ними справиться. Широко распространена и та точка зрения, что для решения такой задачи нужно «вычислить» исследуемые числа; и нынешние школьники, «испорченные» прогрессом микроэлектроники, встречая задачу, в которой требуется сравнить два числа, хватаются за микрокалькулятор. Однако, с одной стороны, ясно, что здесь не требуется находить значения чисел с точностью до определенного десятичного знака после запятой. С другой стороны, вычислительный подход может иметь доказательную силу лишь в том случае, когда имеется оценка точности, — без нее легко впасть в ошибку. Верность того или иного знака после запятой нужно обосновывать, а это уже совсем непростая задача. Поэтому предпочтительнее избрать другой способ решения.

Весьма общий метод определения знака неравенства между числами (или выражениями) α и β заключается в следующем: *пытаются подобрать такое число (выражение)* γ, *для которого, например,* $\alpha<\gamma$ *и одновременно* $\gamma<\beta$. Проиллюстрируем этот метод следующей задачей.

Задача 1. *Выясните (не пользуясь таблицами), что больше:* $\log_2 3$ *или* $\log_5 8$?*)

Решение. Легко проверить, что $1<\log_2 3<2$ и $1<\log_5 8<2$, но отсюда не видно, какой из знаков: «$>$», «$<$» «$=$» следует поставить между числами $\log_2 3$ и $\log_5 8$. Обозначим этот неизвестный пока нам знак «галочкой»: «$\vee$» (знак $\vee$ называют *знаком сравнения*) и сравним два логарифма: $\log_2 3 \vee \log_5 8$. Умножим обе части этого неравенства на 2, получим $2\log_2 3 \vee 2\log_5 8$. Поскольку $3<2\log_2 3<4$, а $2<2\log_5 8<3$, получаем, что $2\log_2 3>2\log_5 8$, откуда и $\log_2 3>\log_5 8$ (мы воспользовались одним из основных свойств неравенств: *если* $a>b$, *то* $ac>bc$, *где* c — *любое положительное число* — см. «Алгебра и начала анализа 9—10», с. 257).

Теперь ясно, какое число нужно выбрать в качестве «промежуточного» — это число 3/2: оно больше одного из данных чисел и меньше другого:

$$\log_5 8<3/2<\log_2 3.$$

Конечно, в этой задаче мы все время неявно пользовались тем обстоятельством, что *на промежутке* $]0;\infty[$ *логарифмическая функция* $\log_a x$ *при* $a>1$ *возрастает.*

Задача 2. *Что больше:*

$$\sqrt{9978}+\sqrt{9981}$$

или

$$\sqrt{9979}+\sqrt{9980}?$$

Решение. Вычтем из одного числа другое:

$$(\sqrt{9981}-\sqrt{9980})-(\sqrt{9979}-\sqrt{9978}). \quad (*)$$

Каждую разность радикалов умножим и одновременно разделим на их сумму:

$$\frac{(\sqrt{9981}-\sqrt{9980})(\sqrt{9981}+\sqrt{9980})}{\sqrt{9981}+\sqrt{9980}}-$$

$$-\frac{(\sqrt{9979}-\sqrt{9978})(\sqrt{9979}+\sqrt{9978})}{\sqrt{9979}+\sqrt{9978}}.$$

---

*) Более подробно вопросы, относящиеся к задаче 1, см. в «Кванте», 1974, № 3, с. 48—49.

Поскольку $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$, разность (*) равна

$$\frac{1}{\sqrt{9981}+\sqrt{9980}}-\frac{1}{\sqrt{9979}+\sqrt{9978}}.$$

Знаменатель первой дроби больше знаменателя второй дроби, откуда следует, что первое число меньше второго:

$$\sqrt{9978}+\sqrt{9981}<\sqrt{9979}+\sqrt{9978}\text{*)}.$$

Задача 3. *Что больше:* 1986^{1985} *или* 1985^{1986}*?*

Решение. Сравним числа, полученные после извлечения корня $(1985\cdot1986)$-й степени из данных чисел: $\sqrt[1986]{1986}\vee\sqrt[1985]{1985}$. Заметим, что это — значения функции $y=x^{1/x}$ при $x=1985$ и $x=1986$. Производная этой функции $y'=x^{\frac{1}{x}-2}\cdot(1-\ln x)$ отрицательна при $x>e$, так что на промежутке $]e;\infty[$ функция $y=x^{1/x}$ убывает. Поэтому $\sqrt[1986]{1986}<\sqrt[1985]{1985}$, а значит, $1986^{1985}<1985^{1986}$.

Оценим количество десятичных цифр числа 1986^{1985}: $1+\lg 1986^{1985}=1+1985\cdot\lg 1986\approx1985\cdot(\lg 2+3)\approx1985(0{,}3+3)\approx6550$ цифр! Такое огромное число, большее «гугола» (см. «Квант», 1983, № 7, с. 41), не может вычислить ни одна ЭВМ в мире!

Задачи на сравнение чисел очень часто возникают при решении неравенств. Мы разберем сейчас два примера, после чего предложим несколько неравенств для самостоятельного решения.

Задача 4. *Решите неравенство*

$$(2-5^x)(7x^2-10x+3)<0.$$

Решение. Будем решать это неравенство методом интервалов (см. «Квант», 1985, № 12, с. 18). Отметим на числовой оси корни сомножителей: $x_1=\log_5 2$, $x_2=3/7$, $x_3=1$. Очевидно, $x_3=1$ — самый большой корень, и при $x>1$ данное произведение отрицательно. Чередование знаков левой части неравенства показано на рисунке 1 (красными точками отмечены корни x_1 и x_2). Мы видим, что ответ существенно зависит от того, что больше: $3/7$ или $\log_5 2$. Сравним

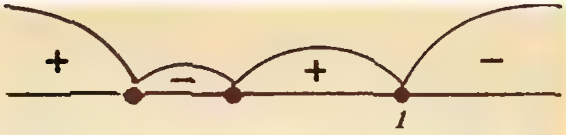


Рис. 1.

их: $3/7\vee\log_5 2$. Умножим обе части неравенства на 7:

$$3\vee7\log_5 2$$

или

$$3\log_5 5^3\vee7\log_5 2^7,$$
$$\log_5 5\vee\log_5 2,$$
$$5^3\vee2^7$$

Поскольку $5^3<2^7$, и каждая наша операция не меняет знака неравенства, мы, произведя все описанные действия в обратном прядке, получим, что $3/7<\log_5 2$, так что **ответ** в задаче 4 такой:

$$]3/7;\ \log_5 2[\ \cup\ ]1;\ \infty[.$$

Задача 5. *Решите систему неравенств*

$$\begin{cases}2x^2-10x+5<0,\\x^2+3x-2<0.\end{cases}$$

Решение. Разложим квадратные трехчлены на линейные множители:

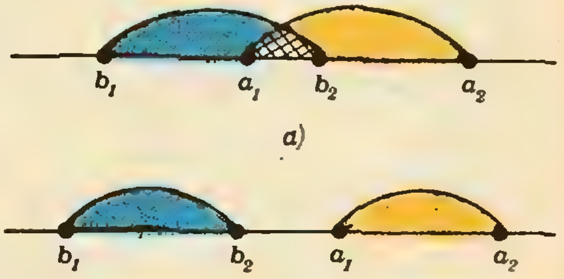
$$\begin{cases}2(x-a_1)(x-a_2)<0,\\(x-b_1)(x-b_2)<0,\end{cases}$$

где

$a_1=(5-\sqrt{15})/2$, $a_2=(5+\sqrt{15})/2$,
$b_1=-(3+\sqrt{17})/2$, $b_2=(-3+\sqrt{17})/2$.

Решением этой системы служит пересечение интервалов $]a_1;a_2[$ и $]b_1;b_2[$. Таким образом, ответ зависит от взаимного расположения этих интервалов на числовой оси. Очевидно, что $b_1<a_1$ и $b_2<a_2$, но числа a_1 и b_2 близки (каждое из них немного больше 0,5). Поэтому реализуется одни из двух изображенных на рисунке 2 вариантов в зависимости от того, какое из иррациональных чисел, a_1 или b_2 — больше (разумеется, сравнивать числа надо без применения калькулятора).

Итак, сравним числа a_1 и b_2, пользуясь основными свойствами неравенств*):



а)

б)

Рис. 2.

---

*) Разность (*) равна примерно $0.5\cdot10^{-6}$, *поэтому ее вычисление на микрокалькуляторе*, который воспроизводит 8 значащих цифр на индикаторе (например, на калькуляторе БЭ-36) не дает ответа на поставленный вопрос; — мы получим, что эти числа равны, то есть придем к неверному ответу.

*) «Алгебра и начала анализа 9—10», с. 257.

	$(5-\sqrt{15})/2 \vee (-3+\sqrt{17})/2;$
Умножим на 2 оба числа:	$5-\sqrt{15} \vee -3+\sqrt{17};$
Прибавим по 3 к обоим числам:	$8-\sqrt{15} \vee \sqrt{17};$
Возведем положительные числа в квадрат:	$64-16\sqrt{15}+15 \vee 17;$
Прибавим к обоим числам по $(16\sqrt{15}-17)$ *и поделим их на 2:*	$31 \vee 8\sqrt{15}$
Возведем положительные числа в квадрат:	$961 \vee 960$

Поскольку $961>960$, получаем, что $(5-\sqrt{15})/2>(-3+\sqrt{17})/2$. Мы видим, что реализуется случай, изображенный на рисунке 2, *б*) — интервалы $]a_1; a_2[$ и $]b_1; b_2[$ не пересекаются. Значит, исходная система неравенств решений не имеет.

Упражнения

1. Решите неравенство $|3+5x-2x^2|<\frac{1-x}{2}$.

2. (МИЭМ — 77). Решите неравенство
$$4^x-2^{x+1}-3<0;$$
Верно ли, что $\sqrt{2}$ является его решением?

3. (МИЭМ — 77). Решите неравенство
$$\frac{2^{x+1}-5\cdot 3^x}{2^x-3^{x+1}}<1.$$
Верно ли, что $\lg\frac{1}{32}$ является его решением?

4. (МГУ — 75). Решите неравенство
$$\frac{2x^2-11x+15}{2^x-6}<0.$$

5. (МГУ — 79). Найдите все решения неравенства $\cos\frac{3}{2}-4x-x^2\geqslant 0$, лежащие в интервале $]-\frac{21}{5}; 0[$.

6. (МГУ — 79). Найдите все решения неравенства $\operatorname{tg}\frac{5}{2}+6x-x^2>0$, лежащие в промежутке $[\frac{1}{4}; 6]$.

7. (МГУ — 79). Решите неравенство
$$\frac{\log_5(x^2-4x-11)^2-\log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2}\geqslant 0.$$

8. (МГУ — 79). Решите неравенство
$$\frac{\log_2(x^2-2x-7)^5-\log_3(x^2-2x-7)^8}{3x^2-13x+4}\leqslant 0.$$

А. А. Власов

Какой же ответ?

Поводом для написания этой заметки послужила следующая задача:

При каких p уравнение
$$\lg(x^2+2px)-\lg(8x-6p-3)=0$$
имеет один корень?

Эта задача, предлагавшаяся на вступительном экзамене по математике в Белорусском технологическом институте им. С. М. Кирова, была в свое время включена в сборник задач, вышедший в 1983 году вторым изданием *). В этом сборнике приведено неполное решение — рассмотрен только один возможный случай.

Чтобы понять, в чем здесь дело, мы сначала разберем более простой пример с точно такой же формулировкой, в котором, нарисовав картинку, можно сразу все увидеть.

Вот этот **пример**:

При каких p уравнение
$$\frac{\lg px}{\lg(x+1)}=2$$
имеет один корень?

Решение. Данное уравнение эквивалентно системе
$$\begin{cases} px>0, \\ x>-1, \\ px=(x+1)^2, \end{cases} \quad \text{то есть} \quad \begin{cases} x>-1, \\ x^2+(2-p)x+1=0. \end{cases}$$

Первый случай. *Квадратное уравнение имеет единственный корень* (рис. 1).

В этом случае дискриминант уравнения равен нулю, то есть $(2-p)^2=4$, откуда $p=0$ и $p=4$. Поскольку значение $p=0$ нам не годится, остается $p=4$. При $p=4$ находим единственный корень $x=1$.

Второй случай. *Квадратное уравнение имеет два корня, больший из которых попадает в ОДЗ, а меньший — не попадает.*

Таким образом, если x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$ — корни квадратного уравнения, то должно быть $x_2>-1$, а $x_1\leqslant -1$ (см. рисунки 2, *а*, *б*). Это условие эквивалентно тому, что для функции $f(x)=x^2+(2-p)x+1$ должно быть $f(-1)\leqslant 0$. Отсюда находим $p\leqslant 0$. Поскольку $px>0$, значение $p=0$ не годится. Таким образом, **ответ** в на-

---

*) Е. А. Островский, И. М. Ангилейко, П. В. Атрашонок, Р. В. Козлова. *Задачи по математике на вступительных экзаменах в вузах.* Минск: Вышэйшая школа, с. 15.

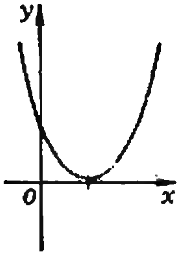
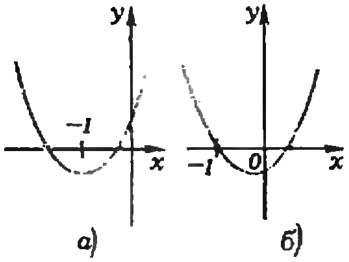


Рис. 1.



а) б)

Рис. 2.

шем примере:

$$]-\infty;\ 0[\,\cup\{4\}.$$

По этой же схеме решается и первая задача, приведенная в начале заметки.

Снова выписываем эквивалентную систему:

$$\begin{cases} 8x-6p-3>0, \\ \dfrac{x^2+2px}{8x-6p-3}=1 \end{cases}$$

(ясно, что при выполнении этих условий неравенство $x^2+2px>0$ также выполняется), то есть

$$\begin{cases} 8x-6p-3>0, \\ x^2+2x(p-4)+6p+3=0. \end{cases}$$

Снова возможны два случая:

Первый случай. *Квадратное уравнение имеет единственный корень*, то есть дискриминант уравнения равен нулю. Запишем это условие:

$$p^2-14p+13=0,$$

откуда $p=1$ и $p=13$.

При $p=1$ получаем $x=3$; при $p=13$ получаем $x=-9$. Подставляя найденные значения x и p в неравенство $8x-6p-3>0$, убеждаемся, что значения $p=13$, $x=-9$ не годятся. И наоборот, значения $p=1$, $x=3$ этому неравенству удовлетворяют. Таким образом, исходное уравнение при $p=1$ имеет единственный корень $x=3$ *).

Второй случай. *Квадратное уравнение имеет два корня, больший из которых попадает в ОДЗ, а меньший — не попадает.*

Из неравенства $8x-6p-3>0$ следует, что $x>\frac{6p-3}{8}$, так что если x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$ — корни квадратного уравнения $x^2+2x(p-4)+6p+3=0$, то должно быть $x_2>\frac{6p+3}{8}$, а $x_1\leqslant\frac{6p+3}{8}$. Снова, как и в примере $\frac{\lg px}{\lg(x+1)}=2$ (см. рис. 2) получаем, что все условия будут выполнены тогда и только тогда, когда для функции $f(x)=x^2+2x(p-4)+6p+3$ будет $f\left(\frac{6p+3}{8}\right)\leqslant 0$. Записав это условие

$$\left(\frac{6p+3}{8}\right)^2+2\cdot\frac{6p+3}{8}(p-4)+6p+ \\ +3\leqslant 0,$$

получим после преобразований

$$(6p+3)(22p+3)\leqslant 0,$$

откуда $-\frac{1}{2}\leqslant p\leqslant-\frac{3}{22}$.

Итак, ответ в этой задаче:

$$\left[-\frac{1}{2};\quad -\frac{3}{22}\right]\cup\{1\}.$$

И. Г. Габович
П. И. Горнштейн

---

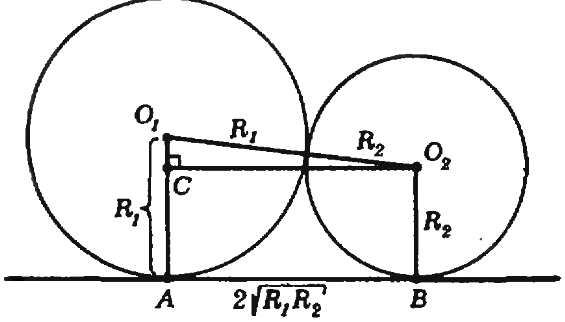
*) Такой ответ приведен в вышеупомянутом сборнике задач.

Наша обложка

Обычно решение стереометрической задачи начинается с того, что мы в общих чертах воспроизводим рассматриваемую в ней конфигурацию. В задаче с обложки предыдущего номера представить конфигурацию легче всего прямо по ходу решения. Более того, общий чертеж (приведенный на обложке) нам по сути дела и не понадобится.

Решение основано на следующем полезном утверждении: *две окружности радиусов R_1 и R_2 касаются друг друга внешним образом тогда и только тогда, когда отрезок их общей внешней касательной между точками касания равен $2\sqrt{R_1R_2}$* (рис. 1). Доказательство этого утверждения очевидно из рисунка 1. Рассматривая окружности в этом утверждении как сечения двух шаров плоскостью, проходящей через их центры, или как сечения шара и цилиндра плоскостью, проходящей через центр шара перпендикулярно оси цилиндра, мы получим условия внешнего касания шаров или цилиндра; например, в последнем случае надо, чтобы расстояние от точки касания шара с плоскостью до прямой, по которой цилиндр

(Окончание см. на с. 34)



$$AB^2=O_2C^2=(R_1+R_2)^2-(R_1-R_2)^2$$

Рис. 1.

Новый метр

То, о чем здесь будет рассказано, не новое открытие в какой-то конкретной области науки. Тем не менее речь пойдет о событии, о котором, безусловно, будет написано во всех учебниках и которое отразится на всей жизни и деятельности человечества.

Более двух лет назад, в октябре 1983 года, Интернациональный комитет мер и весов (его официальное название CIPM — la Comité Internationale des Poids et Mesures) опубликовал рекомендацию ввести новый эталон метра. Приведем начало этого документа:

«Интернациональный комитет мер и весов рекомендует, чтобы метр задавался одним из двух методов —

а) длиной пути l, проходимого в вакууме плоской электромагнитной волной за время t; длина пути вычисляется по измеренному времени t, используя соотношение $l=ct$ и значение скорости света в вакууме $c=299\,792\,458$ м/с;

б) длиной волны в вакууме λ плоской электромагнитной волны частоты ν; длина волны вычисляется по измеренной частоте ν, используя формулу $\lambda=c/\nu$ и значение скорости света $c=299\,792\,458$ м/с...».

Вспомним, как определяется метр сейчас. Также официальный документ, принятый в 1960 году 11-й Генеральной конференцией по мерам и весам, гласит: «Метр — длина, равная 1 650 763,73 длины волны в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86».

А каким был метр до 1960 года?

Согласно первому определению, принятому во Франции во время Великой французской революции, метр был равен десятимиллионной доле четверти длины парижского меридиана. В 1799 году был изготовлен и утвержден первый прототип метра в виде платиновой линейки — так называемый архивный метр. Затем в 1872 году Международная метрическая комиссия приняла решение об отказе от «естественного» эталона длины и о принятии архивного метра в качестве эталонной меры длины. Прототип этого метра в виде бруса из сплава платины и иридия с нанесенными на одной из его плоскостей штрихами хранится в Севре (близ Парижа) в Международном бюро мер и весов. Относительная погрешность воспроизведения такого метра составляет около 10^{-7}.

Такое определение метра продержалось почти 80 лет. Лишь к 1960 году оптические методы измерений достигли такого совершенства, что могли конкурировать с простым прикладыванием измеряемого образца к парижскому эталону. Они позволяют воспроизводить метр с точностью порядка 10^{-8}.

Почему же теперь настало время вводить новое определение метра? Одна причина — принципиальная. Новый метод основан на величине скорости света в вакууме — фундаментальной постоянной величине, не зависящей от движения наблюдателя и всегда одинаковой. В новом определении метра скорость света считается заданной, она *в точности* равна 299 792 458 м/с (подобно тому как до 1960 года метр был *точно* равен расстоянию между двумя соответствующими штрихами).

Другая причина, техническая, связана с расширением точных методов измерения частоты вплоть до видимой части спектра, в которой оптики умеют измерять длину волны с большей степенью точности (методом интерференции). Начиная с 1982 года, стало возможным измерять частоту и длину волны одной и той же спектральной линии с ошибкой, не превышающей 1—2 единиц в десятом знаке (!). Можно в шутку сказать, что только в последние годы проверили соотношение $c=\lambda\nu$ для видимого света.

Итак, когда рекомендация Интернационального комитета мер и весов будет принята, в физических таблицах будет стоять точное значение скорости света, а длины можно будет измерять с ошибкой, не большей чем две единицы в десятом знаке.

Я. С.

Квант для младших школьников

Задачи

1. В этом году я отпраздновал свой день рождения. Число исполнившихся мне лет во многом примечательно.

Если от этого числа отнять 2, то оно разделится на 3, а если от него отнять 3, то оно разделится на 2.

Если к нему прибавить 4, то оно разделится на 5, а если от него отнять 5, то оно разделится на 4.

Если от него отнять 5, то оно разделится на 6, а если от него отнять 6, то оно разделится на 5.

Если к нему прибавить 7, то оно разделится на 8, а если к нему прибавить 8, то оно разделится на 7.

Сколько же лет мне исполнилось?

2. Замените буквы цифрами так, чтобы выполнялись оба равенства:

$$(\text{ОН})^3=\text{ВАНЯ},\quad \text{В}+\text{А}+\text{Н}+\text{Я}=\text{ОН}$$

(одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, а разным — разные).

3. Дым, который мы видим,— это мелкие частицы несгоревшего топлива. Их плотность во много раз больше плотности воздуха.

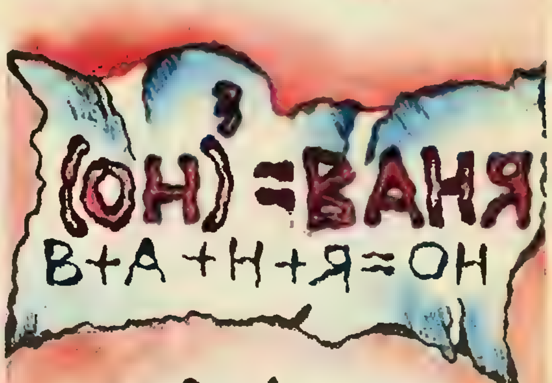
Почему же эти частицы поднимаются вверх?

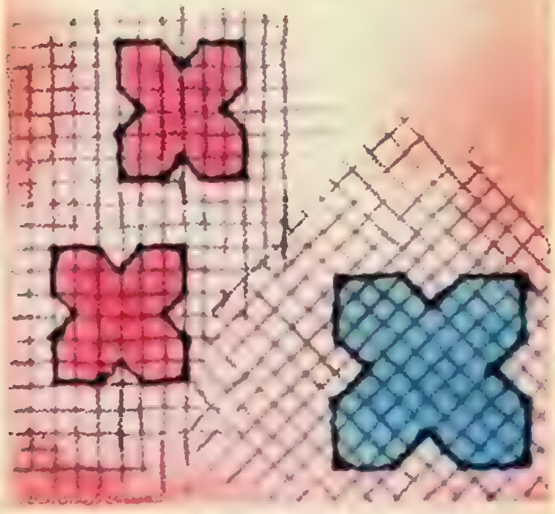
4. На днях я жарил оладьи. Когда я начал переворачивать одну из них, она никак не входила на старое место. Оладьи удалось вновь разместить на сковороде, лишь перевернув их все.

Докажите, что всегда можно уложить перевернутые оладьи на круглой сковороде, на которой они лежали раньше, и приведите пример, в котором нельзя одну из оладий, перевернув, уложить на старое место.

5. Разрежьте каждую из двух маленьких фигур одинаковым образом на четыре части так, чтобы из полученных восьми частей можно было сложить вдвое большую (по площади) подобную фигуру.

Эти задачи предложили В. Д. Вьюн, ученик 10 кл. пос. Славяносербский Ворошиловградской обл. Сергей Ревков, А. П. Савин, А. М. Абрамов, Л. П. Мочалов.





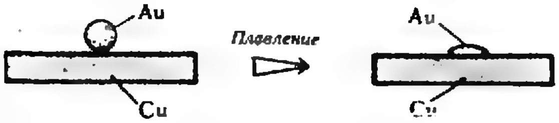
Загадка этрусков

Кандидат физико-математических наук
А. С. АЛЕКСАНДРОВ

По крупицам собирают археологи и историки сведения об этрусках, таинственном древнем народе, некогда заселявшем большую часть современной Италии. Примерно к середине I тысячелетия до н. э. их цивилизация достигла культурного и экономического расцвета. Грозную силу представляли собой этрусские города и в военном отношении. Но после изгнания в 510 году до н. э. этрусских царей из Рима, у этрусков в Италии появились в лице римлян опасные соперники. Длительные войны закончились через несколько столетий покорением этрусков, и в начале нашей эры они полностью растворились в пестрой массе народов Римской империи. От них остались лишь немногочисленные надписи на до сих пор не расшифрованном окончательно языке, отдельные памятники выдающегося развития ремесел и искусств и скупые сообщения римских авторов...

При раскопках городов Этрурии археологам удалось найти самые разнообразные свидетельства высокого уровня развития угасшей цивилизации. Всеобщее восхищение вызвали ювелирные изделия этрусков и среди них в первую очередь так называемые гранулированные украшения — подлинные шедевры безымянных мастеров. Они представляют собой медные пластинки со сложными узорами, выложенными тысячами мельчайших (диаметром около 0,2 мм) золотых шариков. Ни у одного другого народа гранулированные изделия не достигали такой высокой степени совершенства.

К концу I тысячелетия н. э. искусство изготовления подобных украшений было окончательно забыто. Только в XIX веке исследователи предприняли попытки восстановить секреты техники, но — безрезультатно. Долгое время никто не мог объяснить, как можно прикрепить золотую крупинку к медному основанию, не расплавляя ее при этом. Если бы крупинка расплавилась, капля жидкого золота растеклась бы по меди. При охлаждении растекшаяся капля приварилась бы «намертво», но был бы утрачен изысканный внешний вид изделия.



Секрет был раскрыт только в 1933 году. Технология оказалась совсем не простой, и чтобы ее понять, надо предварительно вспомнить явление диффузии.

Диффузией называется проникновение атомов (или молекул) одного вещества в другое. В жидкостях этот процесс можно наблюдать непосредственно. Капнем в воду каплю чернил. В первый момент капля будет иметь четко очерченные контуры. С течением времени они будут все больше и больше расплываться, пока обе жидкости полностью не перемешаются, а капля, как таковая, не исчезнет. Почему это происходит?

Прежде чем ответить, вспомним один очень известный эксперимент. В 1827 году ботаник Броун наблюдал беспорядочное движение частичек цветочной пыльцы в воде. Частички были достаточно малы (их характерный размер около 0,005 мм), и для наблюдений использовался микроскоп. «Маршруты» частичек не подчинялись никакой системе и были столь причудливы, что Броун вначале принял это движение за какое-то особое проявление жизни.

Правильно броуновское движение было объяснено полвека спустя. Молекулы воды постоянно находятся в хаотическом движении. Это они «бомбардируют» с разных сторон огромную (по сравнению с самими молекулами) частицу пыльцы, заставляя ее двигаться случайным образом. Поэтому броуновское движение может служить наблюдаемым доказательством невидимого даже под микроскопом движения молекул.

А теперь вернемся к капле чернил стакане воды. И молекулы воды, и молекулы чернил беспорядочно перемещаются. Некоторые из молекул воды проникают в чернила, а некоторые молекулы чернил — в воду. То есть происходит взаимная диффузия обеих жидкостей, в результате которой и расплывается капля.

Мы также регулярно наблюд диффузию в газах. Именно ей мы « заны тем, что чувствуем запахи веществ, находящихся от нас на расстоянии. Диффузионные процессы могут протекать и в твердых телах, но там они происходят слишком медленно, чтобы быть заметными при комнатной температуре. Однако с ростом температуры движение молекул (или атомов) становится более интенсивным. В частности, капля чернил в горячей воде расплывается быстрее, чем в холодной. Поэтому при длительном выдерживании твердых тел при высоких температурах можно воочию убедиться, что диффузия протекает и в них.

Впервые это удалось сделать в 1896 году английскому металлургу Робертсу-Аустену. Он прижал друг к другу золотой диск и свинцовый цилиндр и поместил их на 10 дней в печь, где поддерживалась температура 200 °С. Когда печь открыли, разъединить диск и цилиндр оказалось невозможно. За счет диффузии золото и свинец буквально «проросли» друг в друга. Сегодня такая технология соединения деталей хорошо известна и носит название диффузионной сварки. Так может быть именно этим способом этруски крепили золотые шарики к меди?

От этого предположения приходится сразу отказаться. Прежде всего, процесс диффузионной сварки следует производить в вакууме (иначе содержащийся в воздухе кислород успеет окислить медь и изделие покроется слоем черной окалины); кроме того, диффузионная сварка требует довольно долгой выдержки при высоких температурах*). Обеспечить выполнение этих условий этруски не могли.

Наиболее правдоподобной представляется иная версия этрусской технологии. Сначала узор из золотых шариков приклеивали к листу папируса, который затем накладывался на медную основу шариками вниз. Затем драгоценный «бутерброд» постепенно нагревали. Во время нагрева успевала произойти незначительная диффузия золота в медь и наоборот.

(Окончание см. на с. 34)

---

*) Робертсу-Аустену повезло, что объектами его опытов были свинец и золото. Эта пара металлов является одним из «рекордсменов» по темпам
ых случаях (другие металлические
ль низкой температуре как 200 °С
ной сварки не хватило бы и месяч-

Одной из древнейших математических дисциплин является теория чисел, многие задачи которой обладают тем свойством, что они допускают очень простую, понятную всем формулировку, но доказательство задач представляет необычайные трудности.

И. М. Виноградов

Выдающийся советский математик — академик Иван Матвеевич Виноградов (1891—1983) известен замечательными результатами в теории чисел. В своих исследованиях он создал мощный метод аналитической теории чисел — метод *тригонометрических сумм*. Этим методом удалось решить многие задачи, столетиями не поддававшиеся решению.

Иван Матвеевич Виноградов более пятидесяти лет возглавлял Математический институт им. *В. А. Стеклова Академии* Наук СССР — главный штаб советской математической науки. Он — дважды Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственной премий.

Числа простые и...

Давайте оглянемся вокруг: сколько чисел окружает нас! Номер нашего дома, квартиры; номера автобусов, трамваев, на которых мы ездим; температура воздуха, атмосферное давление; уровень наших знаний по математике и по литературе... Я думаю, что вы можете многократно увеличить этот список.

Каждое число мы воспринимаем как степень *проявления чего-либо или* как показатель принадлежности объекта к тому или иному классу предметов, явлений (поезд данного маршрута, самолет данной марки, например ТУ-134 и т. д.). При этом мы совершенно не задумываемся о самих числах. Конечно, отмечаем при встрече «круглые» числа; некоторые проверяют номера билетиков в автобусе на «счастливость»: совпадают ли суммы первых и последних трех цифр. Но эти свойства присущи не самим числам, а их представлениям в десятичной записи.

Свойствами чисел люди начали интересоваться очень давно. Еще древние греки делили натуральные числа на *простые* — имеющие лишь два различных делителя, и *составные* — у которых больше двух делителей. Единица имеет только один делитель, поэтому ее не причисляют ни к простым, ни к составным числам.

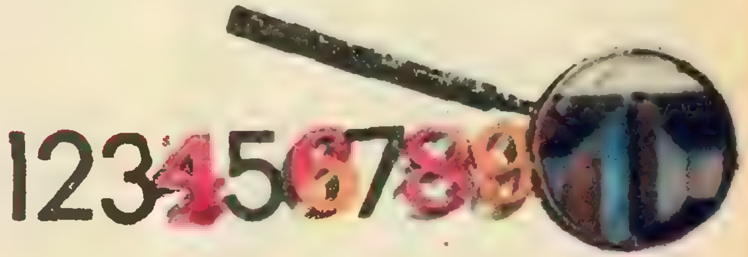
Древние греки умели доказывать, что простых чисел бесконечно много. В 1837 году немецкий математик Лежен Дирихле доказал, что *в любой арифметической прогрессии со взаимно простыми разностью и первым членом содержится бесконечно много простых чисел.*

Свойства делимости помогали грекам в решении уравнений в целых числах. Особенно велики здесь заслуги Диофанта, которого называют последним великим математиком античности. Годы его жизни точно не установлены, но имеются веские основания считать, что он жил в III веке нашей эры.

Задачи теории чисел, *несмотря на простоту формулировки*, как правило, очень трудны. Так, несколько столетий ждет решения проблема близнецов: «*Конечна или бесконечна совокупность пар простых чисел, отличающихся на 2, то есть таких, как 3 и 5, 11 и 13, 17 и 19, 29 и 31, ... ?*» А сколько труда затрачено на попытки доказать «Великую теорему Ферма»!

Рассмотрение свойств чисел, связанных с их делителями, породило большую область математики, называемую *мультипликативной теорией чисел* (от латинского слова *multiplicatio* — умножать).

Математики рассматривают также свойства чисел, связанные с их представлениями в виде суммы чисел определенного вида. Существует бесконечно



много чисел, являющихся квадратами и суммами двух квадратов одновременно; это — «пифагоровы тройки». Также существует бесконечно много кубов, являющихся суммами трех кубов, и т. д.

В 1742 году в переписке двух академиков Петербургской Академии наук Х. Гольдбаха и Л. Эйлера возникла следующая проблема (она носит название **проблемы Гольдбаха**): *верно ли, что каждое четное число, большее двух, представляется в виде суммы двух простых чисел, а каждое нечетное число, большее семи, представляется в виде суммы трех простых чисел.* Существенный вклад в решение этих проблем внесли советские математики И. М. Виноградов и Н. Г. Чудаков.

Класс проблем, связанных с представлением чисел в виде сумм чисел заданного вида, получил название *аддитивной теории чисел* (от латинского *additivus* — прилагаемый, получающийся в результате сложения).

В противоположность простым числам, математики рассматривают числа, имеющие очень много делителей. Натуральное число называется *сверхсоставным*, если у него больше различных делителей, чем у любого из натуральных чисел, меньших его. Единица со своим единственным делителем является сверхсоставным числом (поскольку нет натурального числа, меньшего ее). Следующим сверхсоставным числом будет простое число 2, имеющее два делителя 1 и 2; далее — число 4 с тремя делителями 1, 2 и 4; потом 6 с четырьмя делителями. Можно было бы предположить, что всякое число $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$ будет сверхсоставным, но это не так. Попробуйте отыскать следующие десять сверхсоставных чисел.

Для нахождения числа различных делителей у чисел существует формула. Известно, что всякое натуральное число n представляется в виде произведения степеней простых чисел и притом единственным образом:

$$n=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$$

(эта теорема носит название *основной теоремы арифметики*). Так вот, число различных делителей числа n равно следующему произведению: $(k_1+1)(k_2+1)\cdot \ldots \cdot (k_s+1)$.

Числам и их свойствам посвящены многие статьи, опубликованные в «Кванте»; см., например, 1974, № 6, с. 56; 1979, № 4, с. 38; 1981, № 9, с. 18; 1983, № 1, с. 30 и № 7, с. 42.

А. П.

Полезные факты

Признак делимости на 11

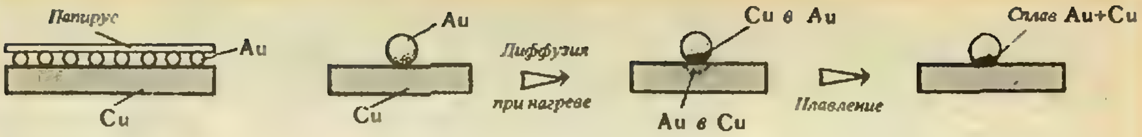
Для того чтобы число, записанное в десятичной системе счисления, делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах, делилась на 11.

Теорема Вильсона

Число $(n-1)!+1$ делится на n в том и только в том случае, если n — простое число.

Малая теорема Ферма

Если p — простое число, то для любого натурального числа a число $a^p - a$ делится на p.



(Начало см. на с. 30)

В результате в чрезвычайно узкой зоне контакта шарика и пластины образовывался медно-золотой сплав.

Температура плавления чистого золота — 1063 °C, чистой меди — 1083 °C, а сплавы золота с медью плавятся при более низких температурах. Например, сплав, состоящий из равного количества атомов золота и меди, плавится уже при 910 °C. Именно это обстоятельство является ключевым для разгадки секрета ювелиров Этрурии. Они повышали температуру до того предела, что расплавлялась только зона образовавшегося сплава, а сами золото и медь оставались в твердом состоянии. При последующем охлаждении расплав затвердевал, и крупинка, практически не потеряв своей сферической формы, приваривалась к основанию из меди. Этот процесс одновременно происходил во всех крупинках, и весь приклеенный к папирусу узор оказывался как бы «сведенным» (по аналогии с переводными картинками) на медь. Папирус при столь высоких температурах сгорал дотла, и изделие было готово. Медь окислиться не успевала, так как процесс происходил достаточно быстро и значительную часть кислорода принимал на себя при сгорании папирус.

Древние ювелирные секреты и сегодня разгаданы не до конца. Остается неясным, например, как этрускам удавалось изготовлять мельчайшие золотые шарики. Но более всего удивляет то, как вообще сумели мастера далекого прошлого выработать столь изощренную технологию. Какой удивительной комбинации случая, опыта и прозрения обязаны этруски своему открытию? Может быть, это когда-нибудь станет известным, а пока мы может лишь воздать должное исчезнувшему народу и повторить слова древнеримского историка Гая Саллюстия: «Чего люди сумеют добиться, возделывая землю, плавя металл и возводя строения, зависит от их духовной силы».

Наша обложка

(Начало см. на с. 27)

касается той же плоскости, было равно $2\sqrt{R_1R_2}$, где R_1 и R_2 — радиусы шара и основания цилиндра.

Пусть A и C, B и D — точки касания шаров радиусов R_1 и R_2 соответственно с плоскостью, l — прямая, по которой цилиндр касается плоскости. Из приведенного выше утверждения следует, что

$$AB=BC=CD=DA=2\sqrt{R_1R_2},$$

то есть $ABCD$ — ромб (рис. 2), причем его диагонали равны $2R_1$ и $2R_2$.

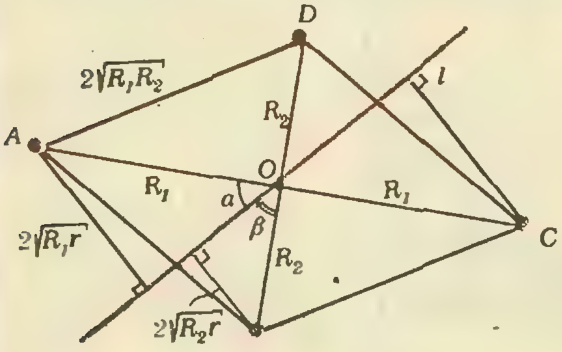


Рис. 2

Кроме того, точки A и C удалены от прямой l на одно и то же расстояние (равное $2\sqrt{R_1r}$). Следовательно, эта прямая либо проходит через середину O отрезка AC (центр ромба), либо параллельна AC. Последнее невозможно, так как точки B и D также удалены от l на одно и то же расстояние ($2\sqrt{R_2r}$). В итоге получается чертеж, показанный на рисунке 2.

Из прямоугольного треугольника AOB получаем уравнение $AB^2=AO^2+OB^2$, или

$$4R_1R_2=R_1^2+R_2^2. \qquad (1)$$

Далее, если α и $\beta=\pi/2-\alpha$ — углы между прямой l и прямыми OA и OB, то $\sin\alpha=2\sqrt{R_1r}/R_1=2\sqrt{r/R_1}$, $\cos\alpha=\sin\beta=2\sqrt{r/R_2}$, следовательно,

$$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=4r\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right). \qquad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2) совместно, получим ответ: $R_1=4r(3\pm\sqrt{3})$, $R_2=4r(3\mp\sqrt{3})$ (знаки выбираются согласованно).

В. Д.

задачник кванта

Задачи

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 апреля 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2 — 86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М968, М969» или «Ф980». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта». Новая задача по физике» или «...Новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М966—М970; Ф978—Ф982

М966. Докажите, что любой треугольник можно разрезать отрезками на четыре куска, из которых можно составить два подобных ему треугольника.

Л. Д. Курляндчик

М967. Обозначим через $\sigma(n)$ сумму всех натуральных делителей числа n (включая 1 и n) и через $\varphi(n)$ — количество чисел, меньших числа n и взаимно простых с ним. Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 2$

$$\sigma(n)+\varphi(n)\geqslant 2n.$$

В. Ф. Лев

М968. Три многоугольника в пространстве расположены так, что их плоскости пересекаются в одной точке O.

а) Докажите, что найдется плоскость, проекции на которую этих трех многоугольников имеют равные площади.

б) Сколько будет таких плоскостей, проходящих через точку O?

Н. М. Седракян

М969. Докажите неравенство

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant\frac{a+b+c}{3}.$$

Г. Г. Алиханов

М970. На начальной остановке в автобус вошло 32 пассажира, которым нужно ехать до 32 разных остановок, расположенных на расстоянии 1 км друг от друга. Водитель решил провести голосование: какие остановки отменить, а какие сохранить. Он называет остановки в некотором порядке. Пассажир голосует за отмену остановки, если он собирается ехать дальше, против, если собирается выходить на этой остановке, и воздерживается, если — раньше (не учитывая, что при дальнейшем голосовании могут отменить и его остановку). Если за отмену подано больше голосов, чем против, остановку отменяют, а те, кто хотел на ней выходить, решают ехать до ближайшей к ней из еще не отмененных (если таких две — до первой из них). Какое а) наименьшее, б)* наибольшее число остановок может сохраниться в зависимости от порядка, в котором их называет водитель?

С. Л. Елисеев

Ф978. На жестком невесомом стержне ABC длины $3l$ закреплены два одинаковых грузика B и C так,

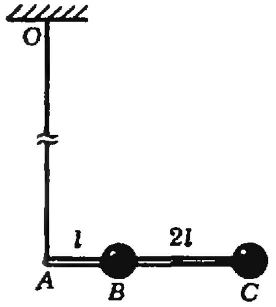


Рис. 1.

как показано на рисунке 1: $|AB|=l$, $|BC|=2l$. Стержень подвешен за точку A к очень длинной невесомой нити AO. В начальный момент стержень удерживают в горизонтальном положении, и нить при этом вертикальна; затем стержень отпускают. Какой будет скорость точки A в тот момент, когда стержень будет проходить низшее положение?

Г. Л. Коткин

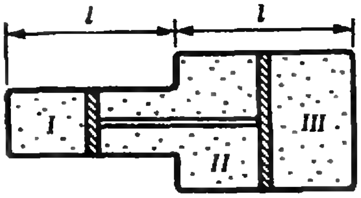


Рис. 2.

Ф979. В сосуде, имеющем форму двух «состыкованных» цилиндров одинаковой длины l и с площадями сечений S и αS $(\alpha>1)$, находится идеальный газ. Посредине каждого цилиндра находятся поршни, соединенные жестким стержнем (рис. 2); при этом давление в отсеке I равно p, в отсеке III давление равно βp, поршни находятся в равновесии. К системе подвели тепло Q так, что температура возросла, оставаясь во всех отсеках одинаковой. Определите, как изменилось давление в отсеке I. Внутренняя энергия одного моля газа равна cT (c — молярная теплоемкость газа). Теплоемкости цилиндров и поршней пренебрежимо малы; трением пренебречь.

В. С. Фадин

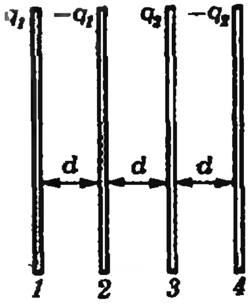


Рис. 3.

Ф980. Четыре одинаковых металлических пластины площади S каждая с зарядами q_1, $-q_1$, q_2, $-q_2$ установлены параллельно друг другу на расстоянии d одна от другой (рис. 3; d много меньше линейных размеров пластин). Внешние пластины *1* и *4* соединяют проводником. Найти разность потенциалов между пластинами *2* и *3*.

Т. В. Федотович

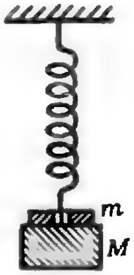


Рис. 4.

Ф981. На груз массы M, висящий на пружине, кладут груз массы m (рис. 4), удерживая груз M в первоначальном положении, а затем грузы отпускают. Найти максимальную силу, действующую на груз m со стороны груза M.

П. И. Зубков

Ф982. Как известно, предельный размер различимой детали изображения на кинопленке определяется размерами кристалликов светочувствительного слоя. С уменьшением размера кристалликов четкость изображения растет. Оцените предельный размер кристалликов, при котором зритель перестает замечать рост четкости изображения на экране кинозала. Предполагается, что вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения величины, выбрать достаточно правильные численные значения и получить численный результат.

Г. В. Меледин

Problems

M966—M970; P978—P982

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no

M966. Prove that any triangle can be cut up by line segments into four pieces from which two triangles similar to the original one can be put together.

L. D. Kurlyandchik

M967. Denote by $\sigma(n)$ the sum of all positive integer divisors of the number n (including 1 and n) and by $\varphi(n)$ the quantity

information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than March 15th, 1986 to the following address: USSR, Moscow, 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian and English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

of numbers less than n and relatively prime to n. Prove that for any natural number $n \geqslant 2$

$$\sigma(n)+\varphi(n)\geqslant 2n.$$

V. F. Lev

M968. Three polygons are situated in space so that their three planes have a single common point O.
a) Prove that there exists a plane on which the projections of the three polygons have the same area.
b) How many such planes pass through O?

N. M. Sedrakyan

M969. Prove the inequality

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geqslant\frac{a+b+c}{3}$$

G. G. Alikhanov

M970. Thirty two passengers going to 32 different stops enter a bus at its starting point. The distance between stops in 1 km. The driver then decides to hold an election to decide where the bus will stop. He calls out the stops in some order. Each passenger votes against the stop if he intends to get off at a further stop, for the stop if he gets off there and abstains if he gets off before (not taking into consideration that his stop may be cancelled by a later vote). If there are more votes against a stop than for it, this stop is cancelled and all passengers who want to get off there decide to ride to the nearest stop (if there are two, to the first one). What is the a) smallest, b)* largest number of stops which the bus will make, depending on the order in which the driver calls the stops?

S. L. Eliseev

P978. Two identical weights B and C are fixed on a rigid weightless rod ABC of length $3l$ as shown on the picture (Рис. 1, p. 36) $|AB|=l$, $|BC|=2l$. The rod hangs from the point A on a very long weightless string AO. At the initial moment the rod is held in horizontal position, the string being vertical; then the rod is dropped. What will be the velocity of the point A at the moment when the rod passes through its lowest position?

G. L. Kotkin

P979. A vessel, consisting of two connected cylinders of the same length l and section areas S and αS ($\alpha>1$), contains ideal gas. Two pistons, located in the middle of the two cylinders are joined by a rigid rod (see Рис. 2, p. 36); the pressure in chamber I is p, in chamber III is βp, the pistons are in equilibrium. The amount of heat Q is communicated to the vessel so that the temperature increases but remains equal in the three chambers. Find the change of pressure in chamber I. The internal energy of one mole of gas equals cT (c is the molar heat capacity of the gas). The heat capacity of the cylinders and pistons is negligibly small, friction is negligible.

S. V. Fadin

P980. Four identical metal plates of area S with charges q_1, $-q_1$, q_2, $-q_2$ are placed parallel to each other at the distance d from each other (see Рис. 3, p. 36); d is much less than the linear dimensions of the plates. The external plates *1* and *4* are connected by a conductor. Find the difference of potential between plates *2* and *3*.

T. V. Fedotovich

P981. A weight of mass m is placed on a weight of mass M hanging on a spring (see Рис. 4); at first the weight M is held in its original position, then the weights are released. Find the maximal force exerted by the weight M on the weight m.

P. I. Zubkov

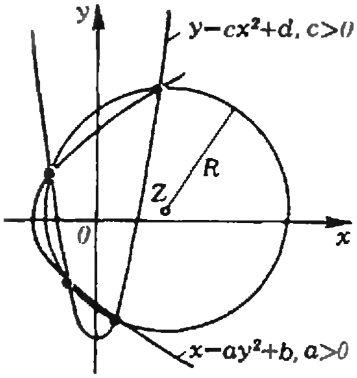
P982. It is known that the limiting size of distinguishable details on movie film is determined by the size of the little crystalls of the light-sensitive layer. When the size of these crystalls is decreased, the clarity of the image increases. Estimate the limiting size of the crystalls for which the viewer ceases to notice the increase of clarity on the screen. It is assumed that you are familiar with the phenomenon, that you can choose the parameters needed to solve the problem, correctly estimate their numerical values and obtain numerical results.

G. V. Meledin

Решения задач

М946—М950; Ф958—Ф962

М946. *Две параболы расположены на плоскости так, что их оси взаимно перпендикулярны и параболы пересекаются в четырех точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.*



Выберем прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы оси парабол были координатными осями (см. рисунок). Тогда уравнение одной из парабол $x=ay^2+b$ ($a>0$, $b<0$), другой $y=cx^2+d$ ($c>0$, $d<0$). Координаты $(x;y)$ точек пересечения парабол удовлетворяют системе уравнений $x=ay^2+b$, $y=cx^2+d$. Разделив первое уравнение на a, второе — на c и сложив получившиеся уравнения, приходим после очевидных преобразований к уравнению

$$\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2c}\right)^2=\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}-\frac{b}{a}-\frac{d}{c}.$$

Поскольку его правая часть положительна, отсюда следует, что точки пересечения парабол лежат на окружности радиуса $R=\sqrt{\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{4b^2}-\frac{h}{a}-\frac{d}{c}}$ с центром в точке $Z(1/2a;\ 1/2c)$.

Л. П. Купцов

◆

М947. *На доске в строку написаны числа*

$$1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \dots\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{11}\ \frac{1}{12}.$$

а) Докажите, что как бы мы ни расставили знаки «+» и «—» между этими числами, полученная сумма не будет равна нулю.

б) Какое наименьшее количество написанных чисел необходимо стереть с доски для того, чтобы после некоторой расстановки «+» и «—» между оставшимися числами получилась сумма, равная нулю?

В решении обоих пунктов задачи используется следующее утверждение: *сумма двух несократимых дробей a/b и c/d с разными знаменателями не может равняться нулю.* (Если, скажем, $b>d$, то равенство $ad=-bc$ невозможно, так как a взаимно просто с b, а d не делится на b.)

а) Записывая рассматриваемую сумму в виде $\left(1\pm\frac{1}{2}\pm\dots\pm\frac{1}{10}\pm\frac{1}{12}\right)\pm\frac{1}{11}$, мы видим, что в силу приведенного выше утверждения ни при каком выборе знаков она не обратится в нуль, так как наименьший общий знаменатель дробей в скобках не равен 11.

б) Ответ: 6. Из доказательства пункта а) следует, что дробь 1/11 надо стереть. Точно так же доказывается, что надо стереть 1/9, 1/8, 1/7. Общий вклад дробей 1/5 и 1/10 в сумму, если хотя бы одна из них не стерта, может равняться $\pm1/5$, $\pm1/10$ или $\pm3/10$. Поскольку знаменатели остальных дробей не делятся на 5, и эти две дроби надо стереть. Из оставшихся чисел нулевую сумму составить можно:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=0.$$

С. В. Резниченко

◆

М948. *Правильный треугольник ABC полностью покрыт пятью меньшими равными правильными треугольниками. Докажите, что треугольник ABC можно полностью покрыть четырьмя такими треугольниками (эти треугольники разрешается передвигать).*

Возьмем в треугольнике ABC шесть точек — вершины и середины сторон. Хотя бы две из них должны покрываться одним из пяти меньших треугольников, следовательно, сторона такого треугольника не меньше половины стороны треугольника ABC. Поэтому каждый из четырех правильных треугольников, на которые средние линии разбивают треугольник ABC, можно покрыть одним из данных пяти треугольников.

В. В. Произволов

◆

М949. *Даны 1985 гирь с массами 1 г, 2 г, 3 г,...,1984 г, 1985 г. Можно ли их разделить на пять групп так, чтобы и число гирь, и их суммарная масса были одинаковы во всех пяти группах?*

Ответ: можно. Десять гирь с массами $n+1$, $n+2$,...,$n+10$ граммов можно разделить на пять групп так, чтобы в каждую группу попали две гири с общей массой $2n+11$ граммов. Схема распределения приведена в таблице 1. Распределим в соответствии с этой схемой гири с массами от 16 г до 25 г, от 26 г до 35 г,..., от 1976 г до 1985 г. Оставшиеся 15 гирь можно распределить так, как показано в таблице 2. Существуют и другие схемы распределения гирь.

Таблица 1

Номер группы	I	II	III	IV	V
Массы гирь, входящих в группу	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$n+4$	$n+5$
	$n+10$	$n+9$	$n+8$	$n+7$	$n+6$

Таблица 2

Номер группы	I	II	III	IV	V
Массы гирь, входящих в группу	1	2	3	4	5
	10	7	9	6	8
	13	15	12	14	11

Е. П. Ерошенков

◆

М950. *Двадцать пять коротышек делят садовые участки в Цветочном Городе. Каждый участок представляет собой квадрат 1×1, и все участки вместе составляют квадрат 5×5. Каждый коротышка находится в ссоре не более чем с тремя другими коротышками. Докажите, что можно распределить участки таким образом, чтобы участки двух поссорившихся коротышек не были соседними. (Соседними называются участки, имеющие общую сторону)*

Вначале распределим участки произвольно. Будем считать, что на границе двух соседних участков стоит забор, если их хозяева в ссоре. Докажем, что если при этом между участками коротышек A и B стоит забор, то B сможет поменяться участками с каким-то коротышкой C так, что этот забор можно будет снести, а новых заборов ставить не придется. После нескольких таких обменов все заборы будут снесены и получится требуемое распределение.

Достаточно, чтобы коротышка C отличался от A и удовлетворял двум условиям: а) не был в ссоре ни с одним из четырех соседей B; б) не был соседом ни одного из трех (или менее) коротышек, поссорившихся с B. Условие а) исключает не более чем $4 \cdot 3=12$ коротышек, в том числе и B; условие б) также исключает случай $C=B$ и, кроме него, еще не более чем $3 \cdot 4-1=11$ коротышек. Учитывая, что $C \neq A$, всего надо исключить не более чем $12+11+1=24$ коротышки, так что остается по крайней мере один коротышка, с которым сможет поменяться B.

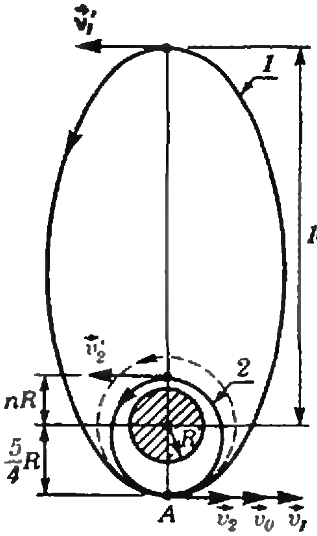
С. В. Конягин

◆

Ф958. *Космическая станция массой M и состыкованный с ней спутник массой m движутся вокруг Земли по круговой орбите, радиус которой равен*

После расстыковки станция и спутник движутся по эллиптическим орбитам, для которых точка расстыковки (точка A на рисунке) является соответственно апогеем и перигеем.

1,25R, где R — радиус Земли. В некоторый момент спутник катапультируется со станции в направлении ее движения и переходит на эллиптическую орбиту с апогеем, удаленным от центра Земли на расстояние 10R. При каком отношении m/M спутник встретится со станцией, совершив один оборот вокруг Земли?



Большие полуоси орбит спутника (1) и станции (2) равны соответственно

$$a_1=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}R+10R\right)=\frac{45}{8}R,$$

$$a_2=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}R+nR\right)=\frac{5+4n}{8}R.$$

Пусть T_1 — период обращения спутника по орбите *1* с расстоянием от центра Земли до апогея $10R$, T_2 — период обращения станции по орбите *2* с расстоянием от центра Земли до перигея nR (n — неизвестное число). Сближение спутнка и станции в точке A через один оборот спутника произойдет при условии

$$\frac{T_1}{T_2}=k>1, \text{ где } k \text{ — целое число.}$$

Выражая T_1, T_2 через массы станции M и спутника m, используя для этой цели законы Кеплера, законы сохранения импульса и энергии, найдем возможные соотношения между этими массами, которые приводят к выполнению условия $T_1:T_2=k$.

По третьему закону Кеплера

$$\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{3/2}=\left(\frac{45}{5+4n}\right)^{3/2}=k, \qquad (1)$$

где a_1, a_2 — большие полуоси соответствующих орбит (см. рисунок). Выразим n через массы m и M.

При раздельном движении станции и спутника вокруг Земли сохраняются их полные механические энергии. Так как потенциальная энергия тела массы m в поле тяготения Земли на расстоянии r от центра Земли равна

$$U=-\frac{GmM_з}{r}=-\frac{mgR^2}{r}$$

(g — ускорение свободного падения, $M_з$ — масса Земли), то из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{mv_1^2}{2}-\frac{mgR^2}{5R/4}=\frac{m(v_1')^2}{2}-\frac{mgR^2}{10R}, \qquad (2)$$

$$\frac{Mv_2^2}{2}-\frac{MgR^2}{5R/4}=\frac{M(v_2')^2}{2}-\frac{MgR^2}{nR}, \qquad (3)$$

где v_1' — скорость спутника в апогее, v_2' — скорость станции в перигее, v_1 и v_2 — скорости, приобретаемые соответственно спутником и станцией в момент расстыковки в точке A (см. рисунок).

Согласно закону сохранения импульса скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ связаны соотношением

$$(M+m)v_0=mv_1+Mv_2, \qquad (4)$$

где v_0 — скорость станции и спутника до расстыковки. Величину v_0 найдем из уравнения движения станции и спутника как целого (до расстыковки):

$$\frac{(m+M)v_0^2}{5R/4}=G\frac{(m+M)M_з}{(5R/4)^2},$$

откуда

$$v_0=\sqrt{\frac{GM_з}{5R/4}}=2\sqrt{\frac{gR}{5}}. \qquad (5)$$

Второй закон Кеплера позволяет установить связь между скоростями v_1 и v_1', v_2 и v_2':

$$\frac{5}{4}Rv_1=10Rv_1', \qquad (6)$$

$$\frac{5}{4}Rv_2 = nRv_2'. \tag{7}$$

Уравнения (2)—(7) однозначно определяют n, v_0, v_1, v_2, v_1', v_2' как функции величин m, M, R, g. Решая систему, найдем

$$n = \frac{5(1-m/3M)^2}{4(2-(1-m/3M)^2)}. \tag{8}$$

Станция не упадет на Землю после запуска спутника, если $n > 1$. Это условие будет выполнено при

$$\frac{m}{M} < 3-2\sqrt{2}$$

(случай $m > M$ не рассматривается).

Подставив (8) в (2), получим

$$\frac{m}{M} = 3-\sqrt{2(9-k^{2/3})}. \tag{9}$$

Условие $0<\frac{m}{M}<3-2\sqrt{2}$ накладывает следующие ограничения на допустимые значения k в формуле (9):

$$10 \leqslant k \leqslant 18, \qquad k < 5^{3/2} \approx 11,2.$$

Таким образом, возможны лишь значения $k=10, 11$, которым соответствуют отношения масс

$$\frac{m}{M} = 0{,}0476 \text{ и } \frac{m}{M} = 0{,}153.$$

А. А. Бирюков

◆

Ф959. *При относительной влажности воздуха $r_1=50$ % вода, налитая в блюдце, испарилась на открытом воздухе за время $t_1=40$ мин. За какое время испарилась бы вода при $r_2=80$ %?*

Наряду с процессом испарения жидкости идет и процесс конденсации пара. Скорость испарения в обоих случаях (при $r_1=50$ % и при $r_2=80$ %) одна и та же (она зависит только от температуры жидкости). Скорость же конденсации пропорциональна концентрации молекул пара в воздухе, то есть пропорциональна относительной влажности, и во втором случае она выше, чем в первом.

Очевидно, что скорость убывания воды равна $v_у=v_и-v_к$ ($v_и$, $v_к$ — скорости испарения и конденсации). При 100 % влажности $v_и=v_к$.

Учитывая все сказанное, мы можем записать:

$$\text{при } r_1=50\ \%\quad v_{у\,1}=v_и-v_{к\,1}=\frac{1}{2}v_и;$$

$$\text{при } r_2=80\ \%\quad v_{у\,2}=v_и-v_{к\,2}=\frac{1}{5}v_и.$$

Поскольку $t_2 : t_1=v_{у\,1} : v_{у\,2}$, время t_2, за которое испарилась бы вода при $r_2=80$ %, равно

$$t_2=\frac{v_{у\,1}t_1}{v_{у\,2}}=\frac{5}{2}t_1=100 \text{ мин.}$$

Примечание. При недостаточной конвекции воздуха над поверхностью жидкости у са́мой поверхности образуется слой насыщенного пара, и скорость убывания воды будет меньше. В нашем решении мы этим пренебрегли.

А. Р. Зильберман

Ф960. *Для того чтобы получить две совершенно одинаковые катушки, их наматывают на немагнитный сердечник одновременно, используя сложенные вместе провода (рис. 1). Одну из катушек подключают через ключ К к батарейке Б с напряжением U_0, вторую — к резистору R. Ключ замыкают. Рассчитайте мощность тока на резисторе. Нарисуйте график зависимости силы тока через батарейку от времени.*

Через время τ ключ размыкают. Какое количество теплоты выделится в резисторе, начиная с этого момента? Индуктивность каждой из катушек L. Батарейку считать идеальной. Сопротивлением проводов пренебречь.

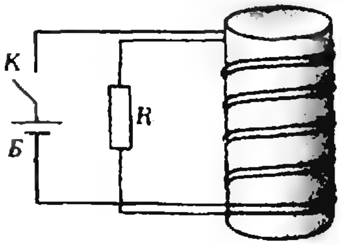


Рис. 1.

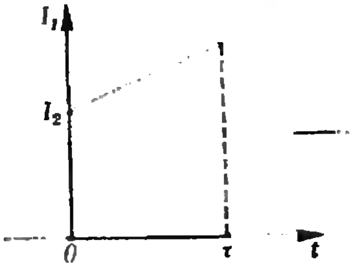


Рис. 2.

При расчете ЭДС индукции в цепи каждой катушки нужно учитывать полный магнитный поток через нее, то есть сумму потоков, создаваемых токами обеих катушек.

После замыкания ключа в обеих цепях возникают одинаковые ЭДС $\mathscr{E}_1=\mathscr{E}_2=U_0$, и мощность, выделяющаяся на резисторе, равна

$$P=\frac{\mathscr{E}_2^2}{R}=\frac{U_0^2}{R}.$$

Ток, текущий через 2-ю катушку, равен $I_2=U_0/R$. Магнитный поток, пронизывающий 1-ю катушку, равен

$$\Phi_1=LI_1+LI_2,$$

где I_1 — ток через 1-ю катушку и через батарейку. (Поток через каждую катушку, создавемый током I_2, один и тот же — катушки намотаны вместе.) Следовательно,

$$\mathscr{E}_1=U_0=\left|\frac{d\Phi_1}{dt}\right|=\left|L\frac{dI_1}{dt}+L\frac{dI_2}{dt}\right|=\left|L\frac{dI_1}{dt}\right|$$

(так как $I_2=\mathrm{const}$). Отсюда

$$I_1=\frac{U_0}{R}+\frac{U_0}{L}t.$$

График $I_1(t)$ приведен на рисунке 2. Скачок тока в первый момент связан с тем, что полный поток через катушки не должен меняться скачком, и сразу после включения возникает добавочный поток, направленный против потока, создаваемого 1-й катушкой.

К моменту размыкания ключа полный поток через 2-ю катушку равен

$$\Phi_{2\tau}=-LI_2+LI_{1\tau}=L\frac{U_0}{L}\tau=U_0\tau.$$

Сразу после размыкания ключа в этой катушке возникнет ток

$$I_р=\frac{U_0\tau}{L},$$

поскольку поток через катушку не должен меняться скачком. Тепло, которое выделится на резисторе с момента размыкания,—

$$W=\frac{1}{2}LI_р^2=\frac{U_0^2\tau^2}{2L}.$$

А. Р. Зильберман

◆

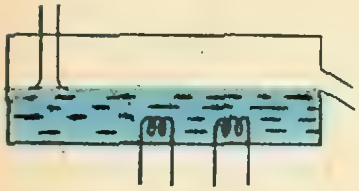
Ф961. *Для поддержания постоянной температуры воды в проточном аквариуме пользуются двумя одинаковыми нагревателями (см. рисунок). В обычном режиме используют один из них, а если подключают параллельно второй нагреватель, то расход холодной воды приходится увеличивать в три раза. Как нужно изменить расход холодной воды, если нагреватели включены в сеть последовательно? Каким должен быть расход холодной воды, если включена одна спираль мощ-*

Тепло, получаемое водой от нагревателей, компенсирует тепловые потери — тепло, отдаваемое аквариумом в окружающую среду. Мощность потерь зависит от разности температур воды в аквариуме и окружающего воздуха. Если эти температуры не меняются, то и мощность потерь остается неизменной.

Обозначим секундный расход воды в первом случае (включена одна спираль) Δm. Тогда

$$P=c\cdot\Delta m\cdot(t_2-t_1)+q, \qquad (1)$$

где q — мощность потерь. Во втором случае (включены две спирали, соединенные параллельно) мощность возрастает в два раза, и *ностью $P=100$ Вт? Температура холодной воды $t_1=10$ °С, температура воды в аквариуме $t_2=27$ °С. Вода быстро перемешивается.*



$$2P=c\cdot 3m\cdot(t_2-t_1)+q. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) сразу можно получить

$$q=\frac{1}{2}P.$$

Но в том случае, когда спирали будут включены последовательно, выделяемая ими мощность составит как раз $P/2$. Значит, в этом случае воду следует отключить.

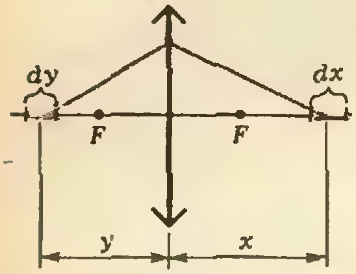
Теперь из уравнений (1) и (2) найдем секундный расход воды при условии, что включена одна спираль:

$$\Delta m=\frac{P}{2c(t_2-t_1)}=\frac{100}{2\cdot 4{,}2\cdot 10^3\cdot 17}\ \text{кг/с}\approx 7\cdot 10^{-4}\ \text{кг/с}.$$

А. Р. Зильберман

◆

Ф962. *Точечные источники, расположенные на главной оптической оси линзы, образуют равномерно светящуюся нить (проходящую через фокус линзы). Найти закон изменения $E(x)$ освещенности в точках, лежащих на той же оси по другую сторону линзы на больших от нее расстояниях x ($x\gg F$, где F — фокусное расстояние линзы).*



Отрезки светящейся нити, расположенные на расстояниях $y>F$ от линзы, дают действительные изображения на оптической оси справа от линзы. Для нахождения освещенности $E(x)$ единицы длины на оптической оси, то есть мощности излучения, падающего на единицу длины, рассмотрим, как происходит преобразование малого отрезка предмета dy в отрезок изображения dx (см. рисунок).

Пусть мощность, излучаемая с единицы длины светящейся нити, равна E_0. Тогда суммарная мощность излучения, попадающего на элемент dx изображения, равна

$$E(x)\cdot dx=E_0\frac{\Omega(y)}{4\pi}dy. \qquad (*)$$

Здесь учтено, что линза фокусирует только часть излучения элемента dy — излучение, попадающее в телесный угол $\Omega(y)$, под которым видна линза из точки y.

Преобразование длины элемента dy предмета в длину элемента dx изображения задается формулой линзы $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{F}$. Поэтому dy в формуле (*) можно выразить через dx следующим образом:

$$dy=\left|\frac{dy}{dx}\right|dx=\frac{F^2}{(F-x)^2}dx.$$

(Производная взята по модулю, поскольку длины отрезков и мощности положительны.) Подставляя значение dy в (*) и учитывая, что для $x\gg F$ $y\approx F$ и телесный угол $\Omega(y\approx F)$ не зависит от x, получим

$$E(x)\approx E_0\frac{\Omega(F)}{4\pi}\frac{F^2}{(F-x)^2}\approx E_0\frac{\Omega(F)\cdot F^2}{4\pi x^2}\sim\frac{1}{x^2}.$$

М. А. Воронцов, В. Е. Куницын

VI. Логические схемы на транзисторах

Доктор физико-математических наук М. Е. ЛЕВИНШТЕЙН,
кандидат физико-математических наук Г. С. СИМИН

Получив представление об элементарных логических операциях (см. «Квант», 1986, № 1), мы можем теперь познакомиться с тем, как они реализуются с помощью схем на транзисторах.

Простейшая логическая схема, осуществляющая операцию «ИЛИ», показана на рисунке 1. Схема содержит два биполярных транзистора типа «*n—p—n*».

Обозначение |< соответствует биполярному транзистору типа *p—n—p*; обозначение |< — транзистору типа *n—p—n*.
Наклонная стрелка соответствует эмиттеру, вертикальная черточка — базе, наклонная черточка без стрелки — коллектору.

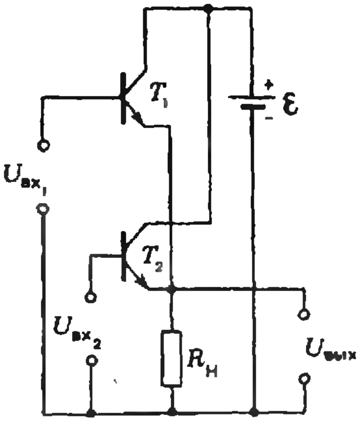


Рис. 1. Пример реализации схемы «ИЛИ» на двух биполярных транзисторах типа n—p—n.

Коллекторы обоих транзисторов подсоединены параллельно к «плюсу» источника питания $\mathcal{E}$. Эмиттеры — к нагрузочному сопротивлению $R_н$. Если напряжение между базой и эмиттером транзистора равно нулю, то переход база — эмиттер закрыт, ток через него не протекает. Поэтому не течет ток и в цепи коллектор — эмиттер (транзистор закрыт). Из рисунка 1 видно, что если сигнал на входах обоих транзисторов отсутствует, то есть напряжение на обоих входах $U_{вх\,1}$ и $U_{вх\,2}$ равно нулю, то оба транзистора закрыты. Ток I через нагрузочное сопротивление $R_н$ не протекает, и сигнал на выходе $U_{вых}=IR_н$ также равен нулю. Если хотя бы одно из напряжений, подаваемых на входы схемы, достаточно для отпирания транзисторов T_1 и T_2, ток в цепи резко возрастает и выходное напряжение существенно увеличивается.

Кремниевые транзисторы обычно закрыты, если напряжение на переходе база — эмиттер меньше 0,6 В. Поэтому в схеме данного типа уровню «логического нуля» обычно соответствует напряжение U^0, близкое к нулю, а «логической единице» — $U^1\approx0{,}8$ В.

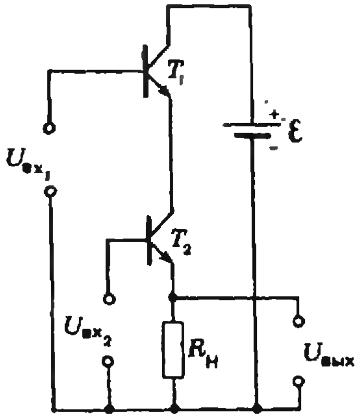


Рис. 2. Пример реализации схемы «И».

На рисунках 2 и 3 показаны схемы «И» и «НЕ» на биполярных транзисторах. Рассуждая так же, как при анализе схемы «ИЛИ», легко убедиться, что для схемы «И» выходное напряжение $U_{вых}>0$ только в том случае, если оба транзистора T_1 и T_2 одновременно открыты, то есть на оба входа подано напряжение, соответствующее логической единице ($U_{вх\,1}=U^1$, $U_{вх\,2}=U^1$). В схеме «НЕ» $U_{вых}=U^1$ при $U_{вх}=U^0$ и, наоборот, $U_{вых}=U^0$ при $U_{вх}=U^1$.

Важным недостатком логических схем на основе биполярных транзисторов является то, что в одном из состояний схемы через выходное сопротивление $R_н$ протекает большой ток. В ЭВМ, содержащих миллионы логических схем, это приводит к значительному потреблению мощности, разогреву схем в процессе работы и снижению надежности ЭВМ. Этот недостаток исключен в логических схемах на основе комплементарных*) полевых транзисторов — КМОП-схемах.

Пример КМОП-схемы представлен на рисунке 4.

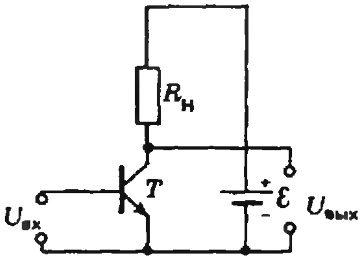


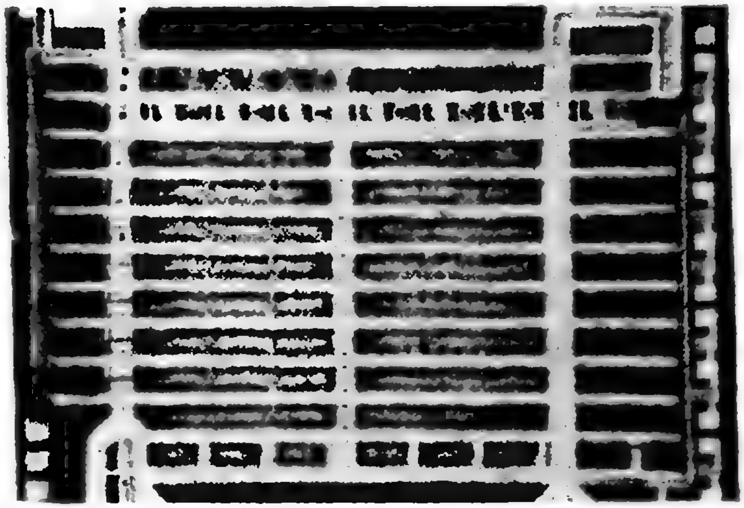
Рис. 3. Пример реализации схемы «НЕ».

---

*) «Комплементарные» в переводе с английского означает «дополняющие».

В ближайшем будущем появятся ЭВМ, логические схемы которых будут изготовлены из арсенида галлия (Ga As). Эти схемы обладают значительно бо́льшим быстродействием.

На микрофотографии показана БИС на основе арсенид-галлиевых полевых транзисторов. Размер БИС — 2,7×2,25 мм. Длина затвора транзисторов в БИС ~1 мкм. Скорость переключения элементарных логических ячеек БИС — 150 пс. По быстродействию эта схема в четыре раза превосходит лучшую кремниевую БИС аналогичного назначения.

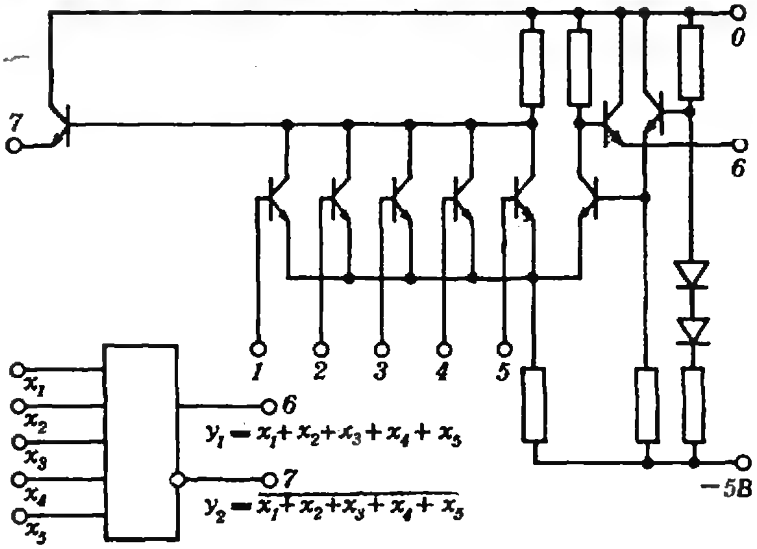


Принципиальная схема и условное обозначение современной логической микросхемы серии К187 на кремниевых биполярных n—p—n транзисторах.

Схема имеет 5 входов и 2 выхода. На одном из выходов (вывод 6) образуется напряжение логической суммы (операция «ИЛИ») сигналов x_1—x_5, поступающих на выводы 1—5, на другом выходе (вывод 7) — сигнал, сочетающий операции логического суммирования и инверсии (операции «ИЛИ» — «НЕ»).

Существенное усложнение реальной логической схемы по сравнению с простейшей ячейкой, показанной на рисунке 1, вызвано необходимостью обеспечить высокое быстродействие, малую потребляемую мощность, независимость параметров схемы от колебаний напряжения питания и количества подключаемых к ней других логических схем, требованиями помехоустойчивости логических сигналов на выходе и т. д.

Время срабатывания микросхемы около 10^{-8} с, потребляемый ток ~10 мА.


0
7
6
1
2
3
4
5
−5В
x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
6
$y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$
7
$y_2 = \overline{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}$

Вертикальная линия обозначает канал транзистора. Отходящие от нее горизонтальные линии — исток (нижняя) и сток (верхняя). Линия, идущая параллельно каналу рядом с ним, обозначает затвор. Вывод затвора изображается на одном уровне с выводом истока.

Используемые в схеме МОП-транзисторы T_1 и T_2 имеют структуру разного типа. Транзистор T_1 нормально открыт, то есть при отсутствии напряжения на затворе проводимость его канала велика; транзистор T_2 нормально закрыт, при нулевом напряжении на затворе ток по его каналу не течет. При достаточно большом положительном напряжении на затворе U^1 нормально открытый транзистор T_1 запирается, а нормально закрытый T_2 — отпирается.

В показанной на рисунке 4 схеме при $U_{вх} = 0$ T_1 открыт, а T_2 — закрыт, поэтому все напряжение источника питания падает на транзисторе T_2; поскольку выходное напряжение снимается с транзистора T_2, $U_{вых}$ велико. При $U_{вх} = U^1$ T_1 закрывается, а T_2 — открывается, поэтому $U_{вых} \approx 0$. В обоих состояниях протекающий в цепи ток равен нулю, так как один из транзисторов находится в закрытом состоянии. Поэтому КМОП-схема потребляет энергию от источника только в момент переключения. На основе КМОП-схем созданы микрокалькуляторы и микро-ЭВМ, имеющие рекордно низкое потребление мощности — доли микроватта. Такие микро-ЭВМ могут питаться от фотоэлемента, для работы которого достаточно света неяркой настольной лампы.

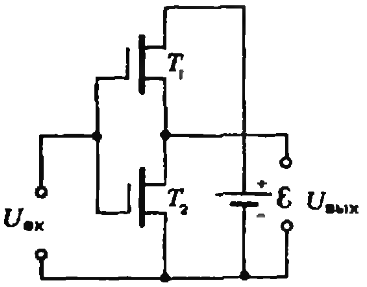


Рис. 4. КМОП-схема «НЕ».

Программирование на микрокалькуляторе: простейшие программы

Кандидат физико-математических наук
Л. Ф. ШТЕРНБЕРГ

В этой статье, предназначенной для девятиклассников, рассказывается, как транслировать (переводить) простейшие (линейные) программы, написанные на учебном алгоритмическом языке, в коды программируемого микрокалькулятора (БЗ-34, МК-56, МК-54). Таким образом, если у вас есть доступ к такому микрокалькулятору, статья поможет вам связать школьный курс информатики с практикой программирования.

Работа калькулятора. У вас в руках программируемый микрокалькулятор. Можно ли считать его вычислительной машиной, пусть маленькой? Давайте посмотрим.

— Память, способная хранить программу, и данные есть? — Да.

— Процессор, способный без вмешательства человека автоматически выполнять заложенную в память программу и обрабатывать данные, есть? — Да.

— Устройство ввода есть? — Да, клавиатура.

— Устройство вывода есть? — Да, индикатор.

Итак, калькулятор — это ЭВМ. Разумеется, маломощная и низкоскоростная, но все же позволяющая выполнять довольно серьезные расчеты и, что для нас самое главное, позволяющая хорошо понять, что происходит в любой ЭВМ — и большой, и малой. Вот поэтому мы и займемся программированием калькулятора. Только как его программировать, если он не понимает нашего алгоритмического языка, а понимает только команды, подаваемые нажатием клавиш? Значит, надо научиться переводить алгоритмы с удобной для нас записи в команды калькулятора.

Из чего же состоит и что умеет сам калькулятор? Его структура*) показана на рисунке 1. Пока обратим внимание на 14 *регистров памяти*, где будут храниться данные; они имеют номера 0,1...9, a, b, c, d (цифр не хватило — взяли буквы); а также на два операционных регистра X и Y — именно над содержимым этих регистров выполняются операции. Прочие регистры нас пока не интересуют. «Лампочки», подсоединенные к регистру X, означают, что содержимое X высвечивается на индикаторе.

С инструкцией к калькулятору вы, конечно, уже ознакомились, с инженерным (непрограммируемым) калькулятором вы тоже знакомы, поэтому описывать назначение клавиш и отдельные операции мы не будем**). Попродуем поработать.

Даны три стороны треугольника $a=3$, $b=4$, $c=5$ и надо вычислить по теореме косинусов косинус угла, лежащего против стороны a. $\left(\text{Формула: } \cos\alpha = \dfrac{a^2+c^2-b}{2bc}\right)$. Включаем калькулятор и работаем с ним в автономном режиме, то есть как с обычными инженерным калькулятором: нажимаем клавиши, а калькулятор выполняет действия:

Клав.	Инд.	Комментарии
3	3	заносим значение $a=3$
П 0	3	в Р0 (регистр 0)
4	4	заносим значение $b=4$
П 1	4	в Р1
5	5	заносим значение $c=5$
П 2	5	в Р2
Fx^2	25	возводим значение c в квадрат
ИП 1	4	вызываем значение b в X (c^2 при этом уходит в У)
Fx^2	16	возводим $b=4$ в квадрат
+	41	получаем b^2+c^2
ИП 0	3	вызываем значение a в X (предыдущий результат — в У)
Fx^2	9	получаем a^2
—	32	получаем значение числителя
П 4	32	и запоминаем его в Р4
2	2	начинаем вычислять $2\cdot b\cdot c$
ИП 1	4	...
×	8	...
ИП 2	5	...
×	40	вычислили $2\cdot b\cdot c$
ИП 4	32	вызываем числитель в X
X↔У	40	меняем местами X и У (делить нужно на знаменатель)
÷	0.8	получаем результат

---

*(Изложение ведется применительно к моделям БЗ—34, МК—56, МК—54.

**(См. «Науки и жизнь» № 2, 4, 6, 8, 10, 12 (1984), № 2, 4, 6 (1985), «Техника — молодежи» № 3 (1985) и др.

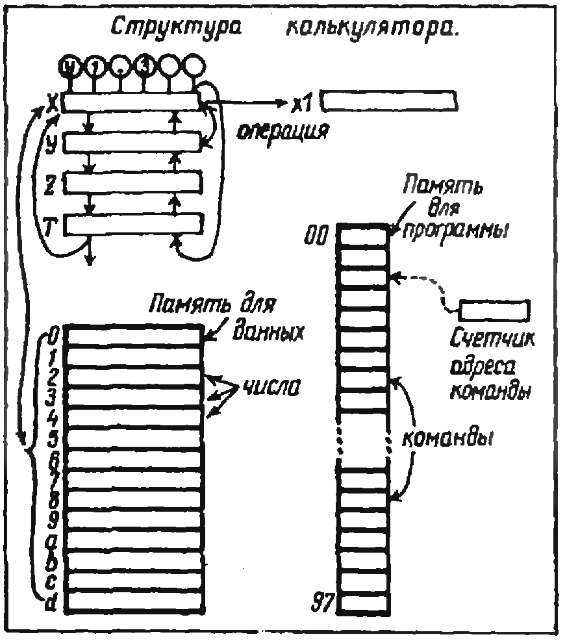


Рис. 1.

Теперь, нажав клавиши В/О, F, ПРГ, переведем калькулятор в программный режим (на индикаторе при этом загорятся два нуля на месте порядка числа), а затем нажмем *те же самые клавиши в той же последовательности*, добавив в конце нажатие клавиши С/П (зачем она нужна, объяснено далее). Теперь нажатие клавиш будет производить совсем другой эффект: калькулятор *не выполняет нужные действия, а запоминает их*. Для этого у него имеется специальная *память под команды*, состоящая из 98 ячеек, пронумерованных от 0 до 97 и *счетчик адреса*, содержащий номер той ячейки, в которую будет записано очередное действие (см. рис. 1). Клавишей В/О (возврат к нулю) в счетчик адреса записывается ноль — его-то мы и видим на индикаторе после перехода в программный режим. Нажатие клавиши (или пары клавиш), которое в автономном режиме вызывало выполнение действия, теперь вызывает запись числового кода этого действия (команды) в ячейку памяти и увеличение счетчика адреса на единицу. Текущее значение счетчика адреса и последние три команды видны на индикаторе. Итак, наша последовательность действий, превращенная в команды, оказалась в памяти калькулятора и представляет собой программу для калькулятора. Ее можно прочитать и при необходимости исправить ошибки — как это сделать, хорошо описано в инструкции к калькулятору.

Нажатием F, АВТ вернем калькулятор в автономный режим. Нажав В/О, занесем ноль в счетчик адреса (этот ноль на индикаторе мы не видим, но в счетчик он занесется). Теперь будем нажимать клавишу ПП. Каждое нажатие вызывает выполнение одной команды из памяти калькулятора — а именно той, адрес которой находится в счетчике адреса; после этого значение в счетчике увеличивается на единицу и при следующем нажатии будет выполняться следующая команда, на индикаторе будут последовательно высвечиваться те же значения, которые приведены в таблице. После 22-го нажатия увидим результат — 0.8.

Таким образом можно проверить программу, но так выполнять ее долго. Для выполнения программы у калькулятора есть третий режим — автоматический. Нажмем В/О, занося в счетчик адреса ноль, и нажмем клавишу С/П (Стоп/Пуск). Теперь калькулятор также будет выбирать из памяти по одной команде, выполнять их и увеличивать значение счетчика адреса, но уже не будет останавливаться после каждой команды. Результаты на индикаторе будут мигать так быстро, что рассмотреть их нельзя. Для того чтобы увидеть конечный результат, надо остановить автоматическую работу — для этого мы и записали в конец программы команду С/П — при ее выполнении калькулятор переходит из автоматического режима в автономный и можно посмотреть результат.

Итак, наш исполнитель — микрокалькулятор — может работать

— в автономном режиме, исполняя команды по мере их подачи с клавиатуры;

— в программном режиме, запоминая подаваемые с клавиатуры команды;

— в автоматическом режиме, выполняя введенные в память команды.

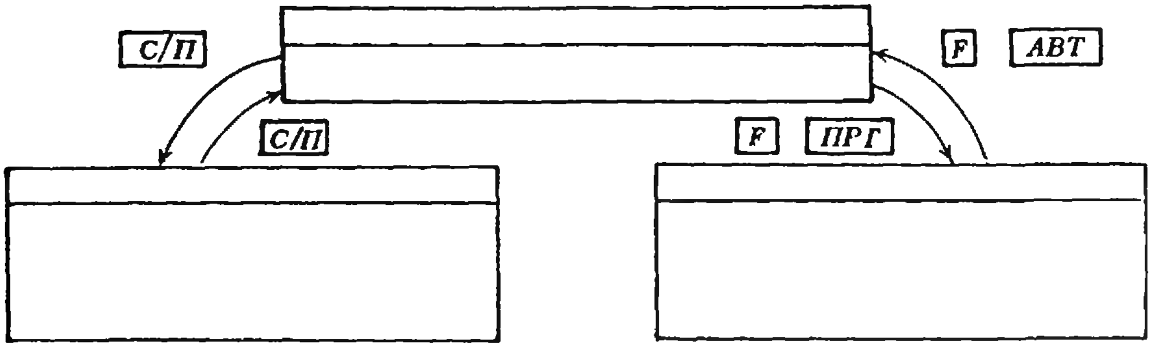


Рис. 2.

Переходы из режима в режим выполняются с помощью клавиш F, ПРГ, АВТ и СП так, как показано на рисунке 2.

Программируем линейный алгоритм. Наш исполнитель понимает весьма своеобразный язык — язык нажатий клавиш, для нас же более удобна и привычна запись на алгоритмическом языке (см. «Квант» 1985, № 9, 10). Чтобы успешно программировать калькулятор, нам надо научиться переводить программу с алгоритмического языка на язык калькулятора — как говорят профессиональные программисты: транслировать ее в код калькулятора (от англ. *translate* — переводить). Вообще-то говоря, современная ЭВМ понимает весьма своеобразный код, но у нее есть свой «встроенный» транслятор, переводящий программу с языка программирования на ее код. Для калькулятора это придется делать вручную.

Запишем нашу программу на алгоритмическом языке.

```
алг КОСИНУС
    (вещ $a$, $b$, $c$, $k$)
    арг $a$, $b$, $c$
    рез $k$
нач вещ $k$
    $k := \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
кон
```

Сформулируем теперь *правила перевода* (трансляции).

1. По служебному слову вещ (других типов переменных у калькулятора нет) распределим регистры памяти под переменные, записывая в таблицу, какой регистр соответствует данной переменной.

2. Для запроса значения калькулятор должен остановиться и подождать, пока человек наберет нужное значение, затем занести его в соответствующий регистр, затем подождать следующего значения и т. д. Таким образом, арг программируется последовательностью команд засылки в память, разделенных командами С/П.

3. Присваивание программируется очевидным образом.

4. Если за служебным словом рез следует лишь один параметр, рез транслировать нет необходимости. Если же таких параметров несколько, то в конце программы, перед словом кон, нужно запрограммировать вывод этих параметров последовательностью команд вызова на регистр X выводимых значений, за каждой из которых стоит команда С/П, приостанавливающая вычисления.

5. Кон программируется командой С/П.

Отметим, что в программе может оказаться несколько команд С/П. При переходе в автономный режим по команде С/П в счетчике адреса находится адрес следующей команды (это можно проверить, нажав F, ПРГ, то есть перейдя в программный режим, когда значение счетчика адреса видно на индикаторе, затем надо будет вернуться в автономный режим, нажав F, АВТ); если теперь нажать С/П, то начнет выполняться та команда, адрес которой находится в счетчике адреса, то есть следующая за С/П — вычисления пойдут дальше.

Оттранслируем нашу программу.

Адр	Код	Ком	Алгор. язык и комментарии
a — Р0 b — Р1 c — Р2 k — Р3			**алг** КОСИНУС **вещ** a, b, c, k) **алг** a, b, c **рез** k [Рисуем (для себя) таблицу распределения регистров.]
00	40	П0	[Затем вводим a, b, c.]
01	50	С/П	[Перед первой засылкой можно не ставить С/П (перед пуском программы калькулятор в автономном режиме), надо набрать значение c и нажать С/П]
02	41	П 1	
03	50	С/П	
04	42	П 2	
05	61	ИП 1	$k:=(b^2+c^2-a^2)/(2bc)$
06	22	F x^2	[Работаем строго по формуле: вычисляем сначала b^2, затем c^2, складываем, и т. д.]
07	62	ИП 2	
08	22	F x^2	
09	10	+	[Понятно, что результат мы получим, но можно это сделать быстрее: после ввода в регистре X осталось c и его можно сразу использовать.]
10	22	F x^2	
12	11	—	
13	44	П 4	
14	02	2	
15	61	ИП 1	[Можно сэкономить несколько команд, если считать, так:
16	12		
17	62	ИП 2	$k:=(b^2+c^2-a^2)/2/b/c$ и программировать сначала деление на 2, затем на b и наконец — на c.]
18	12		
19	64	ИП 4	
20	14	X↔У	
21	13	÷	Получаем результат. **кон** Не забудьте выключить калькулятор!

Итак, работая по чисто формальным правилам, мы получим программу для калькулятора, но она не будет оптимальной. С одной стороны, по

(Окончание см. на с. 57)

Законы Кеплера и школьная физика

Кандидат физико-математических наук
В. Е. БЕЛОНУЧКИН

На приемных экзаменах в некоторые вузы, например в Московский физико-технический институт, а также на школьных физических олимпиадах нередко встречаются задачи, в которых требуется рассмотреть движение планет (или их спутников) и определить соответствующие параметры их орбит. Большую помощь в решении таких задач может оказать знание законов Кеплера, с которыми учащиеся знакомятся в школьном курсе астрономии.

Вспомним законы Кеплера.

I закон: каждая планета обращается вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

II закон: радиус-вектор планеты за одинаковые промежутки времени описывает равные площади.

III закон: квадраты периодов обращения двух планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их орбит.

Если центральным «светилом» является не Солнце, а, например, Земля (или иная планета) и нас интересует движение ее спутников, также можно пользоваться законами Кеплера. Надо просто Солнце заменить на Землю, а планеты — на их спутники.

В этой статье мы рассмотрим несколько задач, решение которых предполагает знание законов Кеплера. Попутно вспомним и другие, в частности количественные, сведения из астрономии; они тоже могут оказаться полезными при выяснении параметров орбит планет, комет, спутников.

* * *

Ровно четверть века назад, 12 апреля 1961 года, человек, говоря словами К. Э. Циолковского, «вышел из колыбели» в Космос. Юрий Гагарин, первый космонавт Земли, на космическом корабле «Восток» совершил один оборот вокруг Земного шара. Помните ли вы продолжительность этого полета? Если нет, то не можете ли рассчитать ее?

Задача 1. *Какова минимально возможная продолжительность полета спутника вокруг Земли?*

В силу III закона Кеплера полет вокруг Земли, требующий наименьшего времени, должен проходить по эллипсу с минимальной большой полуосью. Очевидно, что таким эллипсом является окружность (эллипс с совпадающими фокусами), примыкающая к поверхности земного шара.

Продолжительность полета можно вычислить различными способами. Мы выберем, может быть, не самый простой метод, но зато такой, который непосредственно использует законы Кеплера.

Вспомним, что естественный спутник Земли — Луна — совершает один оборот за время (звездный месяц) $T_{Л} = 27{,}3$ сут $= 2{,}36 \cdot 10^6$ с. Средний радиус орбиты Луны $r_{Л} = 3{,}84 \cdot 10^5$ км, радиус Земли, а следовательно, и радиус «самой быстрой» (по времени) траектории спутника $R_З = r_{\min} = 6{,}38 \times 10^3$ км. Остается подставить эти данные в выражение III закона Кеплера

$$\frac{T^2_{\min}}{T^2_{Л}} = \frac{r^3_{\min}}{r^3_{Л}},$$

и мы найдем

$$T_{\min} = T_{Л}(r_{\min}/r_{Л})^{3/2} \approx 5{,}06 \cdot 10^3\,с = 84\ мин = 1\ ч\ 24\ мин.$$

(Заметим, что полет Ю. А. Гагарина продолжался 1 ч 48 мин, то есть корабль «Восток» сделал чуть более одного витка.)

Конечно, расчет параметров круговых орбит — дело сравнительно несложное. Мы могли бы, например, воспользоваться значением первой космической скорости для спутника, запускаемого с Земли, и, зная радиус его орбиты, вычислить период. Но когда приходится заниматься действительно эллиптическими орбитами, имеющими заметный эксцентриситет, нас могут выручить только законы Кеплера.

Задача 2. *Спутник движется вокруг Земли по круговой орбите ра-*

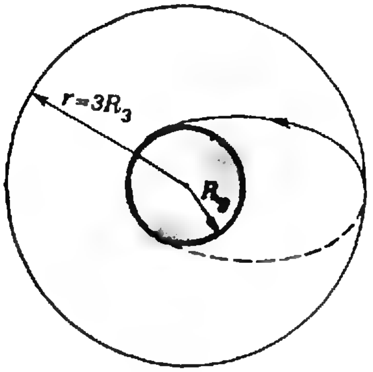


Рис. 1.

диусом $R+3R_з$ (рис. 1). В результате кратковременного действия тормозного двигателя скорость спутника уменьшилась так, что он перешел на эллиптическую орбиту, касающуюся поверхности Земли. Через какое время после торможения спутник приземлится?

До приземления спутник должен пройти половину эллиптической траектории, большая полуось которой, как нетрудно видеть, равна $2R_з$. Искомое время торможения τ можно найти непосредственно из III закона Кеплера, если использовать результаты предыдущей задачи:

$$\frac{(2\tau)^2}{T_{\min}^2}=\frac{(2R_з)^3}{R_з^3},$$

$$\tau=\frac{1}{2}T_{\min}\cdot\ 2^{3/2}=\sqrt{2}T_{\min}\approx 7{,}1\cdot\ 10^3 с\approx$$
$$\approx 119 \text{ мин}\approx 2 \text{ ч}.$$

В этом году окрестности Солнца посещает, пожалуй, самая знаменитая комета солнечной системы — комета Галлея. Впервые ученые смогут наблюдать ее не только с помощью приборов, расположенных на Земле: на свидание с кометой советская космическая ракета несет созданную международным коллективом ученых автоматическую станцию «Вега» (она посетит ВЕнеру и комету ГАллея). Ученые постараются как можно подробнее изучить во многом еще загадочную страницу космоса (программа исследований очень обширна) — ведь следующая встреча состоится только через 76 лет!

Давайте и мы проведем небольшое «исследование» кометы.

Задача 3. *Минимальное расстояние кометы Галлея от Солнца $r_{\min}=0{,}6$ а. е. (1 астрономическая единица$=1$ а. е.$=1{,}5\cdot\ 10^8$ км — радиус земной орбиты). Зная период обращения кометы $T=76$ лет, найдите, насколько далеко она уходит от Солнца.*

Мы недаром выбрали в качестве единицы времени год, а единицы длины — расстояние от Земли до Солнца. Ведь проще всего параметры орбиты кометы сравнить с параметрами орбиты Земли.

Из III закона Кеплера найдем большую полуось орбиты кометы Галлея a:

$$a=a_з\left(\frac{T}{T_з}\right)^{2/3}=r_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{2/3}\approx 17{,}9 \text{ а. е.}$$

($r_0=1$ а. е., $T_0=1$ год). Теперь нетрудно определить максимальное удаление кометы от Солнца:

$r_{\max}=2a-r_{\min}\approx 35{,}2$ а. е.$\approx 5{,}3\cdot\ 10^9$ км.

Задача 4. *Используя сведения из задачи 3, оцените максимальную и минимальную скорости кометы Галлея.*

Перигелий орбиты кометы во много раз ближе к Солнцу, чем афелий. Следовательно, мы не допустим большой ошибки, если будем считать, что вблизи перигелия комета движется не по эллиптической, а по параболической орбите. Это означает, что в перигелии скорость кометы равна так называемой второй космической скорости (или параболической скорости) относительно Солнца, то есть той минимальной скорости, при которой комета может преодолеть гравитационное притяжение Солнца.

Известно, что вторая космическая скорость v_{II} в $\sqrt{2}$ раз больше первой космической скорости v_I, вычисленной для того же расстояния от центра притяжения.*) Значит, нам надо знать первую космическую скорость для расстояния $r_{\min}=0{,}6$ а. е. от Солнца. А вычислить ее можно с помощью законов Кеплера, используя в качестве ориентира Землю и зная, что скорость движения Земли по орбите равна $v_0=30$ км/с (если вы не помните это значение, его можно вычислить, поделив длину орбиты на продолжительность периода обращения).

Теперь несколько преобразуем выражение III закона Кеплера — выразим период обращения через скорость и радиус:

---

*) С выводом этого соотношения можно познакомиться, например, по статье В. В. Можаева «Закон всемирного тяготения» («Квант», 1980, № 3). Там же можно найти метод строгого расчета интересующих нас скоростей и с его помощью убедиться, что мы ошиблись совсем немного.

$$\frac{r_1^3}{r_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{(2\pi r_1/v_{\mathrm{I}1})^2}{(2\pi r_2/v_{\mathrm{I}2})^2}, \quad \frac{r_1}{r_2} = \frac{v_{\mathrm{I}2}^2}{v_{\mathrm{I}1}^2}.$$

Таким образом, первые космические скорости и радиусы орбит (круговых) связаны соотношением

$$v_{\mathrm{I}1}/v_{\mathrm{I}2} = \sqrt{r_2/r_1}.$$

Отсюда для кометы Галлея в перигелии получаем

$$v_{\mathrm{I}\text{к}} = v_0\sqrt{r_0/r_{\min}},$$

следовательно, интересующая нас скорость кометы в перигелии

$$v_{\text{п}} = v_{\mathrm{II}\text{к}} = \sqrt{2}v_{\mathrm{I}\text{к}} = v_0\sqrt{2r_0/r_{\min}} \approx$$

$$\approx 55 \text{ км/с}.$$

Скорость в афелии можно вычислить из II закона Кеплера. Равенство площадей, «заметаемых» радиусом-вектором за одинаковые промежутки времени, означает, что длина радиуса-вектора (расстояние от Солнца) и скорость кометы в данной точке обратно пропорциональны друг другу, откуда

$$v_{\text{а}} = v_{\mathrm{II}\text{к}}r_{\min}/r_{\max} \approx 0{,}93 \text{ км/с}.$$

Мы видим, что скорость кометы в афелии во много раз меньше скорости в перигелии. Очевидно, комета бо́льшую часть периода обращения проводит вдали от Солнца и лишь ненадолго наведывается в его окрестности.

Однако продолжим «исследование» кометы Галлея.

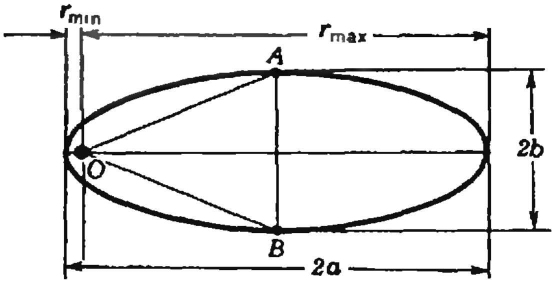


Рис. 2.

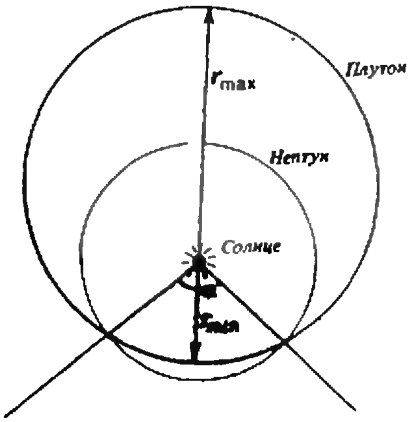


Рис. 3.

Задача 5. *Какое время затрачивает комета Галлея на прохождение дальней от Солнца половины своей орбиты и какое — на прохождение ближней половины? Площадь эллипса равна $S_1 = \pi ab$ (a и b — большая и малая полуоси эллипса).*

Обратимся к рисунку 2, на котором Солнце находится в точке O. При прохождении дальней половины орбиты радиус-вектор кометы «заметает» площадь верхней половины эллипса и площадь треугольника AOB. Эти площади равны соответственно $S_1 = \pi ab/2$ и $S_2 = b(a-r)$.

Воспользуемся II законом Кеплера, сформулировав его в несколько ином виде — площадь, описываемая радиусом-вектором, изменяется пропорционально времени, и сравним времена прохождения кометой всей орбиты и дальней ее половины:

$$\frac{T_{\text{к}}}{T} = \frac{S}{S_1+S_2}.$$

Отсюда для искомого времени получаем

$$T = T_{\text{к}}\frac{S_1+S_2}{S} = T_{\text{к}}\left(\frac{1}{2} + \frac{A-r_{\min}}{\pi a}\right) =$$

$$= \frac{T_{\text{к}}}{2}\left(1 + \frac{r_{\max}-r_{\min}}{\pi(r_{\max}+r_{\min})}\right) \approx 61{,}5 \text{ года}.$$

Остальные 14,5 лет тратятся на обход ближней к Солнцу половины орбиты. Как видим, эти времена отличаются больше, чем в 4 раза.

Упражнения

1. Орбита космического корабля «Восток» имела следующие параметры: высота в перигее $h = 181$ км, высота в апогее $H = 327$ км. Используя эти данные, уточните период обращения космического корабля Ю. А. Гагарина вокруг Земли.

2. Комета Григга — Скьеллерупа относится к группе Юпитера, то есть ее афелий расположен неподалеку от орбиты крупнейшей планеты солнечной системы, а именно на расстоянии 5 а. е. от Солнца. Период обращения кометы 4,9 года. Может ли эта комета пересечь орбиту Земли?

3. Из-за сравнительно большого эксцентриситета орбиты Плутона (большая полуось $a = 5{,}9 \cdot 10^9$ км, малая полуось $b = 5{,}73 \cdot 10^9$ км) его расстояние от Солнца заметно меняется — от минимального $r_{\min} = 4{,}4 \cdot 10^9$ км до максимального $r_{\max} = 7{,}4 \cdot 10^9$ км. Планета Нептун движется по практически круговой траектории радиуса $R_{\text{Н}} = 4{,}5 \cdot 10^9$ км. В результате часть орбиты Плутона, определяемая углом $\alpha = 100°$ (рис. 3), расположена ближе к Солнцу, чем орбита Нептуна.

В 1969 году Плутон перешел с девятого на восьмое место среди больших планет солнечной системы. Когда он вернется на свое законное девятое место?

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$6\cos x-\frac{1}{3}=\sqrt{32\cos x-\frac{17}{9}}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{x-1}+\frac{3}{|x|+1}\geqslant\frac{1}{|x|-1}.$$

3. Некоторая окружность касается прямых AB и BC соответственно в точках D и E. Точка A лежит между точками B и D, а точка C — между точками B и E. Найдите площадь треугольника ABC, если длины сторон AB и AC соответственно равны 18 и 1, а точки A, D, E и C лежат на одной окружности.

4. Из трех значений p: $0{,}24\pi$; $0{,}26\pi$; $0{,}6\pi$ — найдите те, при которых уравнение

$$\left(\frac{p-5x}{\pi}+\log_3\frac{3p}{\pi}\right)(6\sin(p-x)-\sqrt{18})=0$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $0<x<\frac{\pi}{3}$.

5. На плоскости α, проходящей через центр шара радиуса R, задана окружность с центром O_1 и радиусом r_1, расположенная внутри шара. Все точки этой окружности соединены прямыми с точкой A, принадлежащей шару и удаленной от плоскости α на расстояние R. Множество отличных от A точек пересечения этих прямых с поверхностью шара является окружность с центром O_2 и радиусом r_2. Найдите расстояние от точки O_2 до плоскости α, если расстояние между точками A и O_1 равно a.

Вариант 2
(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}6^x-2\cdot3^y=2,\\6^x\cdot3^y=12.\end{cases}$$

2. В трапеции $PQRS$ длина основания QR равна 10, длина диагонали QS равна 19, а величина угла QSP равна 30°. Выясните, что больше: длина основания QR или длина стороны RS.

3. Решите уравнение

$$4-\cos[2\pi(13x+9)^2]=5\cdot\sin[\pi(13x+9)^2].$$

4. Решите неравенство

$$\frac{2\log_{1-3|x|}(42x^2-14|x|+1)}{\log_{1-3|x|}\left(x-\frac{5}{6}\right)^2}\leqslant1.$$

5. Найдите все тройки чисел x, y, z, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{\frac{3}{2}x^2-2y^2+2z^2+10z+6y+\frac{\sqrt{3}}{2}x-17+{}}$$
$$\overline{+\sqrt{3x^2}-2\sqrt{3}(\cos\pi y+\cos\pi z)x+4}=0.$$

6. Все ребра тетраэдра $ABCD$ имеют равную длину. На ребрах AB, AC и AD выбраны, соответственно, точки K, L, M так, что длина отрезка KB равна 15, а длина отрезка MD равна 10. Известно, что радиус шара, вписанного в тетраэдр $ABCD$, равен $\frac{5}{2}\sqrt{6}$, а объем пирамиды $AKLM$ равен $375\sqrt{2}$. Найдите сумму радиусов двух шаров: вписанного в пирамиду $AKLM$ и описанного около нее.

Вариант 3
(химический факультет)

1. Решите уравнение

$$4(\sin6x+\sin4x)=\cos x(4\sin^2 5x-5).$$

2. Решите неравенство

$$5^{2x-\frac{1}{3}x^2}<5^{2-2x}(\sqrt[3]{5})^{x^2}+24.$$

3. На координатной плоскости xOy рассматривается треугольник ABC, у которого вершина A совпадает с началом координат, вершины B и C лежат соответственно на параболах $y=3x^2-10x+2$ и $y=-2x^2+5x-10$, сторона BC параллельна оси ординат, а абсцисса вершины B принадлежит отрезку $\left[\frac{3}{5};\frac{3}{2}\right]$. Какое значение должна иметь абсцисса вершины B, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

4. Высота пирамиды равна 2, основание пирамиды есть ромб, площадь которого равна 8, а величина острого угла равна $\pi/6$. Некоторый шар касается плоскости каждой боковой грани в точке, лежащей на стороне основания пирамиды. Докажите, что прямая, соединяющая вершину пирамиды с центром шара, проходит через точку пересечения диагоналей ромба. Найдите объем шара.

5. Решите систему

$$\begin{cases}|2x+y|+\log_3^2(|y|-2x+5)-20=0,\\(2x+y)^2-7(2x+y)\log_3(|y|-2x+5)-\\\qquad-8\log_3^2(|y|-2x+5)=0.\end{cases}$$

Вариант 4
(биологический факультет)

1. Решите уравнение

$$\frac{1-x}{(2-x)(x-3)}+1=\frac{1}{2-x}.$$

2. Найдите все корни уравнения

$$3\cos2x-5\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

принадлежащие отрезку $[\pi;2\pi]$.

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_3(3-2x)}-\frac{1}{4-\log_3(3-2x)}<0.$$

4. На гипотенузе LM прямоугольного треугольника LKM лежит точка N. На прямой LM взята точка P так, что точка M находится между точками N и P, а угол NKP прямой. Найдите площадь треугольника NKM, если известно, что площади треугольников LKM и NKP равны a и b соответственно, а величина угла LKP равна φ.

5. Сколько корней на отрезке [0; 1] имеет уравнение

$$8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1?$$

Вариант 5

(факультет почвоведения)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 7\cdot 2^x+6y=2, \\ 8\cdot 2^{x+1}-5y=93. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\lg(9-x)=-2\lg\left(\frac{1}{x+3}\right).$$

3. Найдите все корни уравнения

$$\cos x+(1+\cos x)\operatorname{tg}^2 x-1=0,$$

удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x>0$.

4. Через точку D основания AB равнобедренного треугольника ABC проведена прямая CD, пересекающая описанную около треугольника ABC окружность в точке E. Найдите длину отрезка AC, если длина хорды CE равна 3 и длины отрезков DE и DC равны.

5. Пусть $x=x_0$ — больший из корней уравнения

$$x^2+(3ab+3a-2)x+5ab+5a-17=0.$$

Найдите наибольшее значение x_0 при $a\geqslant 1$, $b\geqslant 0$.

Вариант 6

(отделение геологии геологического факультета)

1. Определите, что больше:

$$2^{\log_3 5}-0,1 \text{ или } 5^{\log_3 2}.$$

Результат обоснуйте.

2. Решите уравнение

$$\frac{|x-2|}{|x-1|-1}=1.$$

3. Первый рабочий изготовил 60 деталей на три часа быстрее второго. За сколько часов второй рабочий изготовит 90 деталей, если, работая вместе, они изготовят за один час 30 деталей?

4. Решите уравнение

$$5\sin^2 x-4\sin x\cos x-\cos^2 x=4.$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=$$
$$=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}.$$

6. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром длины 4. На середине ребра BC взята точка M, а на ребре $A'D'$ на расстоянии 1 от вершины A' взята точка N. Найдите длину кратчайшего пути между точками M и N по поверхности куба.

Вариант 7

(отделение геофизики геологического факультета)

1. Определите, что больше:

$$3^{\log_2 5}+10^{\frac{1}{5}\log_{10} 2} \text{ или } 5^{\log_2 3}+\sqrt[10]{10}.$$

Результат обоснуйте.

2. Решите неравенство

$$\frac{|x-2|}{|x-1|-1}\geqslant 1.$$

3. См. вариант 6, задача 3.

4. Решите уравнение

$$3\sin x+5\cos x=\sqrt{17}.$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=$$
$$=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}.$$

6. Конус вращается вокруг оси — прямой, перпендикулярной его высоте и проходящей через вершину. Найдите площадь сечения полученного тела вращения плоскостью, проходящей через ось вращения, если длина образующей конуса равна 5, а длина высоты равна 4.

Вариант 8

(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$4\sin x+\cos 2x=1.$$

2. Решите неравенство

$$\log_x(3-x)>1.$$

3. Две реки с прямолинейными руслами и одинаковой скоростью течения впадают в одном и том же месте в озеро, образуя между собой угол в 60°. От двух причалов, расположенных на разных реках и отстоящих друг от друга на расстоянии 28 км, одновременно вышли байдарка и лодка, скорости которых в стоячей воде соответственно равны 10 км/ч и 3 км/ч. Байдарка достигла озера через 2 ч, а лодка — через 4 ч. Найдите скорость течения рек.

4. Величины углов P, Q, R треугольника PQR составляют арифметическую прогрессию с разностью $(-2\pi/9)$. Биссектрисы этого треугольника пересекаются в точке S. Точки P', Q', R' находятся на отрезках SP, SQ, SR соответственно на одинаковом расстоянии от точки S. Докажите, что величины углов P', Q', R' треугольника $P'Q'R'$ также образуют арифметическую прогрессию. Найдите ее разность.

5. Найдите все числа b, удовлетворяющие условию $-1\leqslant b\leqslant 1$, для которых выражение

$$1-2\sqrt{4x^2+4bxy+y^2+8y+18}$$

принимает наибольшее значение лишь при одной паре чисел x, y.

Вариант 9

(отделение политической экономии экономического факультета)

1. Найдите все решения неравенства

$$\frac{4x-1}{3x+1}\geqslant 1.$$

2. Решите уравнение

$$2\sin x=3\operatorname{ctg} x.$$

3. Укажите все a, при которых уравнение

$$\log_2 x+\log_a x+\log_4 x=1$$

имеет решения и найдите эти решения.

4. Найдите наименьшее значение функции

$$y=\frac{2x^2+x+1}{3x^2-x+2}.$$

5. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Не позже, чем через 40 минут вслед за ним вышел второй. В пункт B сначала пришел один из пешеходов, а другой достиг B не раньше, чем через час после этого. Если бы пешеходы вышли одновременно, то они прибыли бы в пункт B с интервалом не более, чем в 20 минут. Определите, сколько времени требуется каждому пешеходу на путь от A до B, если скорость одного из них в 1,5 раза больше скорости другого.

6. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E — пересечение диагоналей. Известно, что площадь каждого из треугольников ABE и DCE равна 1, площадь всего четырехугольника не превосходит 4, $|AD|=3$. Найдите сторону BC.

Вариант 10

(отделение экономической кибернетики экономического факультета)

1. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{\sin x}=\sqrt{1-2\sin^2 x}.$$

2. Решите неравенство

$$x\log_{1/2}(1/3-x)\geqslant|x|.$$

3. В треугольнике ABC на основании AC взяты точки P и Q так, что $|AP|<|AQ|$. Прямые BP и BQ делят медиану AM на три равные части. Известно, что $|PQ|=3$. Найдите $|AC|$.

4. В 6 часов утра из пункта A в пункт B по течению реки отправились лодка и катер. Лодка прибыла в пункт B в 16 часов того же дня. Катер, дойдя до пункта B, сразу повернул назад и на своем пути из B в A встретил лодку не позднее 14 часов, а прибыл в пункт A не ранее 22 часов того же дня. Найдите время прибытия катера в пункт B, если его собственная скорость (скорость в стоячей воде) вдвое больше собственной скорости лодки.

5. Среди всех решений (x, y, z, v) системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ z^2+v^2=9, \\ xv+yz\geqslant 6 \end{cases}$$

найдите такие, при которых выражение $x+z$ принимает наибольшее значение.

Вариант 11

(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$3\sin x-2\cos^2 x+3=0.$$

2. Решите неравенство

$$3\cdot 9^x<8\cdot 3^x+3.$$

3. Три столяра делают шкафы и полки. Все они затрачивают одинаковое время на изготовление 1 шкафа, а полку каждый из них делает за 5 часов. Первый столяр сделал 2 шкафа и 1 полку, второй — 1 шкаф и 2 полки, а третий — 1 шкаф. Известно, что количества времени, затраченные первым, вторым и третьим столярами, образуют соответственно первый, второй и третий члены геометрической прогрессии. Сколько времени тратит столяр на изготовление 1 шкафа?

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=|x^2+x|+|x^2+5x+6|$$

на отрезке $[-2{,}5;\ -0{,}5]$.

5. Отрезок AB имеет длину $2R$ и является диаметром окружности. Длина хорды AC равна $R\sqrt{2}$, а другая хорда той же длины пересекает отрезок AC в точке D и отрезок AB в точке E. Величина угла BED равна α. Найдите площадь треугольника ADE.

6. Найдите все значения a, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел x, y, удовлетворяющая уравнению

$$3x^2+11xy+10y^2=7$$

и двум неравенствам

$$x+y>0,\ 4a^2x-3ay<0.$$

Вариант 12

(отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета)

1. Найдите все решения уравнения $\sqrt{2}\cos^2 x=\cos x$, удовлетворяющие условию $-6<x<-4$.

2. Маша, Вера, Таня и Нина собирали грибы. Оказалось, что количества грибов, собранные каждой из них, образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Если бы Таня нашла столько же грибов, сколько Нина, а Нина нашла бы на двенадцать грибов больше, то количества грибов, собранные девочками, образовали бы в том же порядке геометрическую прогрессию. Сколько грибов нашла Вера?

3. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+\sqrt{x-1})>-1.$$

4. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 15, а длина высоты BD равна 5. На стороне AB взята точка P так, что длины отрезков AP и PB равны соответственно 5,8 и 7,2. Найдите площадь S треугольника BPC, если известно, что $S>3$.

5. Для каждого значения b решите уравнение

$$3\cos x\sin b-\sin x\cos b-4\cos b=8\sqrt{3}.$$

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Брусок прямоугольной формы соскальзывает без трения с наклонной плоскости, угол наклона которой к горизонту равен α. Во время соскальзывания он последовательно перекрывает находящиеся на некотором расстоянии друг от друга два очень маленьких фотоэлемента *1* и *2* (рис. 1). Определите время, в течение которого передняя грань бруска движется между фотоэлементами, если длина бруска равна l и интервалы времени, на которые брусок перекрывает фотоэлементы, равны t_1 и t_2 соответственно.

2. Четыре одинаковых кубика связаны тремя невесомыми и нерастяжимыми нитями и расположены, как показано на рисунке 2. Определите натяжение средней нити (между вторым и третьим кубиками), если масса каждого кубика равна m, а на первом (верхнем) кубике находится добавочный груз массой Δm. Поверхности абсолютно гладкие, трением в осях блоков и их массой пренебречь.

3. Высоко над Землей по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости, движутся два спутника. Период обращения первого спутника в 2 раза меньше, чем второго. В некоторый момент времени спутники находятся над одной и той же точкой земной поверхности и расстояние между ними минимально. Определите, во сколько раз возрастет (по сравнению с минимальным) расстояние между спутниками через промежуток времени, равный периоду первого спутника?

4. Два баллона соединены между собой короткой трубкой с краном. Вначале кран закрыт. В одном баллоне находится идеальный газ массой m_1 под давлением p_1, в другом — такой же газ массой m_2 под давлением p_2. Температура газов в обоих баллонах одинакова. Какое давление установится в баллонах, если кран открыть? Температура газа не меняется.

5. В сосуде с поршнем первоначально находилась смесь воздуха с насыщенным паром. Затем, передвигая поршень, объем, занятый смесью, увеличили в $n_1=4$ раза, а массу паров увеличили в $n_2=2$ раза (накачивая дополнительно водяные пары в этот объем через специальное приспособление). Температура при этом не изменилась. Считая пар идеальным газом, найдите относительную влажность воздуха в новом состоянии.

6. В схеме, изображенной на рисунке 3, конденсатор имеет заряд $Q=10^{-6}$ Кл. Какой заряд будет на конденсаторе, если ключ K

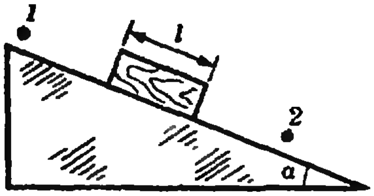


Рис. 1.

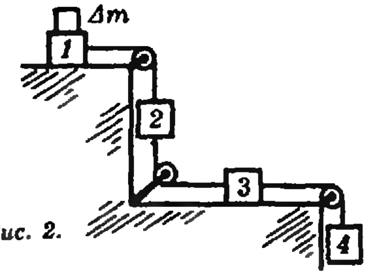


Рис. 2.

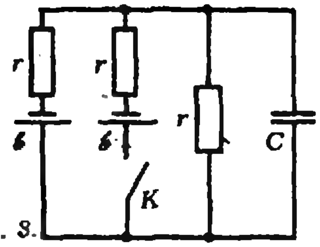


Рис. 3.

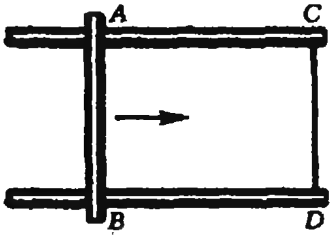


Рис. 4.

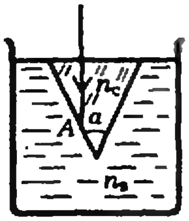


Рис. 5.

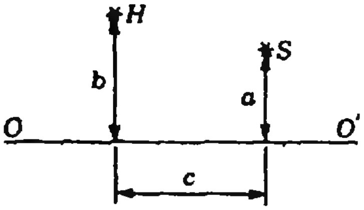


Рис. 6.

замкнуть? Сопротивления всех резисторов одинаковые, а ЭДС источников равные. Внутренним сопротивлением источников пренебречь.

7. К некоторому источнику постоянного напряжения через подводящие провода подключено некоторое внешнее сопротивление. При этом половина мощности, развиваемой источником, выделяется в подводящих проводах, а другая половина — во внешнем сопротивлении. Какая часть мощности, развиваемой источником, будет выделяться в подводящих проводах, если они будут из того же материала и той же длины, но с площадью сечения, в два раза большей? Внешнее сопротивление и источник остаются теми же. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

8. С какой скоростью надо перемещать медный стержень AB вдоль медных рельсов CA и DB (рис. 4), чтобы в течение $\tau = 1$ с температура стальной проволоки CD увеличилась на $\Delta T = 0{,}1$ К? Вся конструкция находится в магнитном поле с магнитной индукцией, направленной перпендикулярно плоскости рельсов и равной $B = 1$ Тл. Удельная теплоемкость железа $c = 0{,}46$ кДж/(кг·К), плотность $D = 7800$ кг/м^3, удельное сопротивление $\rho = 5{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. Теплоотдачей пренебречь. Сопротивлением рельсов и стержня пренебречь.

9. Стеклянная равнобедренная призма (с сечением в виде равнобедренного треугольника) опущена вершиной в воду так, что ее основание горизонтально и совпадает с поверхностью воды (рис. 5). Показатель преломления стекла $n_с$, показатель преломления воды $n_в$ ($n_с > n_в$). При каких значениях угла (при вершине призмы) α луч света, падающий по вертикали на основание призмы, испытывает полное (внутреннее) отражение на боковой поверхности призмы в точке A?

10. С помощью тонкой линзы получено изображение H точечного источника S (рис. 6). Расстояния c, a, b, определяющие положения источника и изображения относительно оптической оси линзы OO', известны ($b > a$, $b - a \ll c$). Найдите фокусное расстояние линзы.

Механико-математический факультет, факультет вычислительной математики и кибернетики, химический, географический и геологический факультеты и факультет почвоведения

1. Пуля, выпущенная из винтовки, попадает во вращающийся с частотой $n = 50$ 1/с тонкостенный пластмассовый цилиндр диаметром $d = 0{,}2$ м. Определите скорость пули, если выстрел произведен по диаметру цилиндра, а к моменту вылета пули из цилиндра входное отверстие сместилось на $l = 0{,}01$ м.

2. Брусок с массой $m = 0{,}2$ кг находится на гладкой поверхности наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Он удерживается на этой поверхности с помощью невесомой и нерастяжимой нити, расположенной параллельно наклонной плоскости и закрепленной у ее верхнего края (рис. 7). Найдите силу давления груза на наклонную плоскость, если она движется вертикально вверх с ускорением $a = 2{,}2$ м/с^2. Ускорение свободного падения $g = 9{,}8$ м/с^2.

3. К потолку подвешен однородный стержень длиной $L = 0{,}8$ м. Пружины в нерастянутом состоянии имеют одинаковую длину, но различные коэффициенты упругости k_1 и k_2. Найдите соотношение между k_1 и k_2, если стержень занимает горизонтальное положение (рис. 8). Пружина с коэффициентом упругости k_1 приклеплена к одному концу стержня, а пружина с коэффициентом упругости k_2 прикреплена на расстоянии $a = 0{,}2$ м от другого конца стержня.

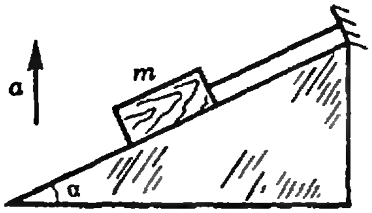


Рис. 7.

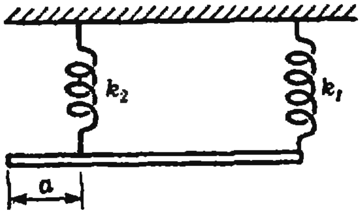


Рис. 8.

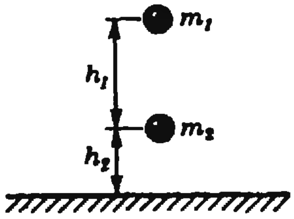


Рис. 9.

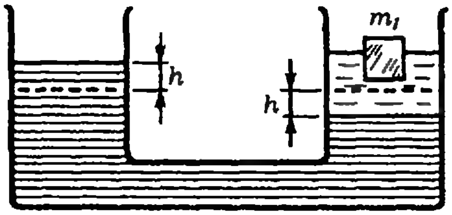


Рис. 10.

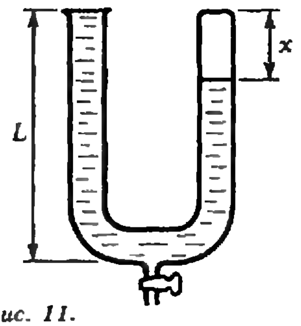


Рис. 11.

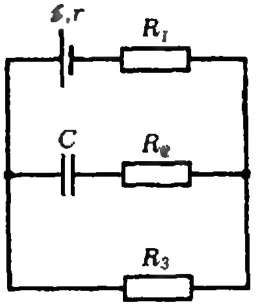


Рис. 12.

4. Тела с массами m_1 и m_2 находятся на одной вертикали на расстоянии h_1 друг от друга, причем тело с массой m_2 расположено на высоте h_2 от горизонтальной поверхности (рис. 9). Тело массой m_1, падая свободно, соударяется абсолютно неупруго с покоящимся телом массой m_2, которое в момент удара отпускают. Затем эта система тел абсолютно неупруго соударяется с горизонтальной поверхностью. Пренебрегая изменением импульса тел при их соударении друг с другом, определите, с какой силой система тел действует на поверхность, если продолжительность соударения равна Δt.

5. В двух сообщающихся цилиндрических сосудах с одинаковым поперечным сечением площадью $S=10^{-2}$ м^2 находится ртуть (рис. 10). В один из сосудов поверх ртути наливают воду массой $m=20$ кг и в нее опускают плавать груз массой $m_1=7,2$ кг. На какое расстояние h переместится уровень ртути во втором сосуде? Плотность ртути $\rho=13,6\times10^3$ кг/м^3.

6. В цилиндрический сосуд объемом $V=8,31$ м^3 накачали вначале газ массой $m_1=3,2$ кг с молярной массой $M_1=0,032$ кг/моль при температуре $T=300$ К, а затем добавили газ массой $m_2=4,4$ кг с молярной массой $M_2=0,044$ кг/моль при той же температуре T. Какое давление установится в сосуде после того, как смесь газов изотермически при температуре T сожмут с помощью поршня до объема $V/3$? Универсальная газовая постоянная $R=8,31$ Дж/(моль · К).

7. В U-образную, запаянную с одного конца трубку с длиной колена L наливается жидкость плотности ρ, причем в запаянном конце остается столб воздуха, а уровень жидкости в открытом колене совпадает с краем трубки (рис. 11). Затем часть жидкости выпускают через кран. При этом уровни жидкости в обоих коленах сравниваются и останавливаются на высоте $L/2$. Какова была первоначальная высота x столба воздуха в запаянном колене трубки? Атмосферное давление p_0.

8. Восемь точечных зарядов $|q_1|=\ldots=|q_8|=9\cdot10^{-6}$ Кл находятся в вершинах куба, сторона которого $a=0,2$ м. Четыре положительных заряда находятся в вершинах нижнего основания, четыре отрицательных — в вершинах верхнего основания куба. Определите напряженность электрического поля в центре куба. Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8,9\times10^{-12}$ Ф/м.

9. Стержень длиной $l=0,20$ м, на концах которого находятся маленькие шарики с зарядами $q_1=2\cdot10^{-5}$ Кл и $q_2=5\cdot10^{-5}$ Кл, может вращаться вокруг вертикальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Стержень находится в однородном электрическом поле с напряженностью $E=10^4$ В/м. Силовые линии поля горизонтальны и составляют с направлением стержня угол $\alpha=30°$. Какую по величине работу совершат электрические силы, если стержень повернуть так, что силовые линии будут составлять с его направлением угол $\beta=45°$?

10. До какой разности потенциалов зарядится конденсатор в цепи, изображенной на рисунке 12, если ЭДС источника $\mathscr{E}=4,8$ В, внутреннее сопротивление его $r=1$ Ом, $R_1=2$ Ом, $R_3=5$ Ом? Какой заряд будет при этом на обкладках конденсатора, если его емкость $C=2$ мкФ?

11. Во сколько раз КПД η_1 линии электропередачи при напряжении $U_1=200$ кВ больше КПД η_2 линии электропередачи при напряжении $U_2=100$ кВ, если сопротивление линии $R=400$ Ом, а передаваемая мощность $P=10^4$ кВт?

12. Гибкий замкнутый проводник сопротивлением $R=100$ кОм, образующий квадрат со стороной $a=0,1$ м, помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B=5$ Тл. Плоскость квадрата перпендикулярна вектору магнитной индукции. Какой заряд протечет по проводнику, если из квадрата сделать равносторонний треугольник, не меняя плоскости его расположения?

13. Светящаяся точка S, находящаяся в среде с показателем преломления $n_1=1,33$, рассматривается из среды с показателем преломления $n_2=1,5$ под небольшим углом к нормали, проведенной к границе раздела двух сред. Каково будет кажущееся расстояние от точки S до границы раздела сред, если истинное расстояние $h=0,133$ м?

14. Через имеющееся в доске круглое отверстие диаметром $d=10$ см проходит сходящийся пучок света, который дает на экране, расположенном за доской параллельно ей, круглое пятно диаметром $D=5$ см. Если в отверстие вставить рассеивающую линзу с фокусным расстоянием $F=30$ см, то пятно превращается в точку. Найдите расстояние между доской и экраном.

15. Спутник, летящий по круговой орбите на высоте $h=100$ км над Землей, сфотографировали неподвижным фотоаппаратом, объектив которого имеет фокусное расстояние $F=0,5$ м, делая выдержку $t=1$ с. Какой длины получится изображение спутника на пластинке? Изменением силы тяжести с высотой пренебречь. Считать, что радиус Земли $R=6300$ км, а ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

Публикацию подготовили
В. С. Панферов, А. С. Пахомов,
И. Н. Сергеев, А. Н. Соколихин

Программирование на микрокалькуляторе

(Начало см. на с. 46)

сравнению с первым вариантом наша программа улучшилась: например, из-за того, что перед нами не было записи на алгоритмическом языке, первый вариант программы не имеет ввода — программа рассчитывает угол только для одного треугольника, что, конечно же, никуда не годится. С другой стороны, вычислительная часть первого варианта получилась лучше из-за того, что учтены некоторые особенности калькулятора: например, то, что после засылки в память значение остается на регистре X и его можно тут же использовать для дальнейшего вычисления. Дело в том, что мы используем очень упрощенный алгоритмический язык: чуть-чуть улучшив его, можно получать оптимальные программы.

Введем возможность записи:

— **вывод** ⟨выражение⟩, означающий, что надо выражение вычислить и без записи в переменную вывести (на индикатор, печать...);

— промежуточного присваивания: например, $a := (b := c - k) \times p$; означает, что разность c и p надо записать в b, а кроме того, умножить на p и записать результат в a;

— конструкции вида $a :=$ **ввод** -4, означающий, что введенное значение не запоминается в переменной, а из него вычитается 4 и запоминается только результат вычитания; и конструкции вида $a2 :=$ (**ввод** $a)^2$, означающей, что введенное значение запоминается в a, и тут же возводится в квадрат с запоминанием результата в $a2$.

Тогда нашу программу можно очень коротко записать в виде:

```
алг КОСИНУС
    (вещ a, a2, b, c, k)
    арг a, a2, b, c
    рез k
нач a2:=(ввод b)²+(ввод c)²—a2)/2/b/c
кон
```

а трансляция ее в коды калькулятора даст оптимальную программу (разберитесь в ней самостоятельно);

```
FX² П0 С/П П1 FX² С/П П2 FX² + ИП0
— 2 ÷ ИП1 ÷ ИП2 ÷ С/П
```

Инструкция по ее использованию такая же, как у первой программы: набрать значение a, нажать С/П, после остановки набрать значение b, нажать С/П, после остановки набрать c, нажать С/П, после остановки прочитать результат.

Задачи

1. Написать программу, которая по сторонам треугольника a, b, c дает значения в радианах всех трех углов треугольника.
2. Написать программу решения квадратного уравнения в предположении, что дискриминант положителен.

Ответы, указания, решения

Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения

1. $x = e^t/(1 + e^t)$.
2. Нет.
4. Нет.
6. $T \approx 2\pi\left(1 + \frac{a^2}{16} + \ldots\right)$.
7. ∞.
9. $\pi/2$.

Задачи на сравнение чисел
(см. с. 24)

1. $](9 - \sqrt{193})/8;\ (11 - \sqrt{201})/8[$.
2. $]-\infty;\ \log_2 3[$; да, так как $\sqrt{2} < \log_2 3$.
3. $]\log_{\frac{2}{3}} 3;\ \log_{\frac{2}{3}} 2[$; нет, так как $\lg \frac{1}{32} > \log_{\frac{2}{3}} 2$.
4. $\left]-\infty;\ \frac{5}{2}\right[\cup]\log_2 6;\ 3[$.
5. $\left[-2 - \sqrt{4 + \cos\frac{3}{2}};\ 0\right[$.
6. $\left[\frac{1}{4};\ 3 + \sqrt{9 + \operatorname{tg}\frac{5}{2}}\right[$.
7. $]-\infty;\ -2[\cup]-2;\ 2 - \sqrt{15}[\cup [6;\ \infty[$.
8. $]-\infty;\ -2] \cup]1 + \sqrt{8};\ 4[\cup]4;\ +\infty[$.

Законы Кеплера и школьная физика

1. Большая полуось орбиты «Востока» $a = R_З + (H + h)/2$. Сравнение с результатами задачи 1 в статье дает

$$T = T_{\min}(a/R_З)^{3/2} \approx 89{,}4 \text{ мин}.$$

2. По аналогии с задачей 3 в статье найдем минимальное расстояние от кометы до Солнца. Оно оказывается равным 0,8 а. е. Следовательно, комета подходит к Солнцу ближе, чем Земля, и может пересечь ее орбиту.

3. Площадь заштрихованной на рисунке 3 в статье фигуры

$$S \approx \frac{100}{360}\,\pi\left(\frac{r_{\min} + R_Н}{2}\right)^2.$$

Время пребывания Плутона внутри орбиты Нептуна

$$\tau = \frac{S_1}{\pi ab} T = 40 \text{ лет}$$

($T = 248$ лет — период обращения Плутона). Итак, Плутон вновь станет самой далекой планетой в 2009 году.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика
(письменный экзамен)

Вариант 1

1. $x_1 = \pm\arccos\dfrac{3+\sqrt{7}}{6} + 2\pi m,$

$x_2 = \pm\arccos\dfrac{3-\sqrt{7}}{6} + 2\pi n \ (m,\ n \in \mathbf{Z}).$

Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 6\cos^2 x - 6\cos x + \dfrac{1}{3} = 0, \\ 6\cos x - \dfrac{1}{3} \geqslant 0, \end{cases}$$

в которой неравенство следует из равенства.

2. $]-\infty;\ -3] \cup]-1;\ 1[\cup]1;\ +\infty[.$

3. $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}.$

Указание. Из конгруэнтности углов BDE и BED вписанного четырехугольника $DACE$ вытекает конгруэнтность углов DAC и ECA, поэтому треугольник ABC равнобедренный.

4. $0{,}26\pi;\ 0{,}6\pi.$

Решение. При $p = 0{,}6\pi$ исходное уравнение имеет решение на промежутке $\left]0;\ \dfrac{\pi}{3}\right[$, так как линейная функция

$$f(x) = \frac{p - 5x}{\pi} + \log_3 \frac{3p}{\pi}$$

в этом случае принимает в точках $x = 0$ и $x = \dfrac{\pi}{3}$ значения разных знаков: $f(0) = 0{,}6 + \log_3 1{,}8 > 0$, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{16}{15} + \log_3 1{,}8 < 0.$

Пусть $p = 0{,}24\pi$. Тогда, с одной стороны, при $x \in \left]0;\ \dfrac{\pi}{3}\right[$ имеем

$$f(x) = 0{,}24 - \frac{5x}{\pi} + \log_3(3 \cdot 0{,}24) < \frac{1}{4} + \log_3 \frac{3}{4} =$$
$$= \frac{1}{4}\log_3 \frac{3^5}{4^4} = \frac{1}{4}\log_3 \frac{243}{256} < 0.$$

С другой стороны, если хотя бы для одного из корней

$$x = p - (-1)^n \frac{\pi}{4} - \pi n \ (n \in \mathbf{Z})$$

уравнения

$$6\sin(p - x) - \sqrt{18} = 0 \qquad (*)$$

выполнялось бы двойное неравенство $0 < x < \dfrac{\pi}{3}$, то имели бы место оценки

$$-1 < \frac{p}{\pi} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} < n < \frac{p}{\pi} - \frac{1}{4} < 0,$$

или оценки

$$0 < \frac{p}{\pi} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} < n < \frac{p}{\pi} + \frac{1}{4} < 1,$$

что невозможно ни при каком целом значении n. При $p = 0{,}26\pi$ уравнение (*) имеет корень $x = 0{,}26\pi - \dfrac{\pi}{4}$, принадлежащий промежутку $\left]0;\ \dfrac{\pi}{3}\right[$.

5. $\dfrac{a^2 r_2^2 + r_1^2 r_2^2 - 2R^2 r_1^2}{2Rr_1}.$

Решение. Пусть O — центр сферы. Выберем точку B на прямой OO_2 (перпендикулярной плоскости второй окружности), так, чтобы для некоторой (а значит, для любой) точки K второй окружности прямая BK касалась сферы в точке K. Тогда из прямоугольного треугольника BKO с высотой KO_2 (опущенной на гипотенузу) имеем (рис. 1):

$$|OO_2| = \sqrt{|OK|^2 - |KO_2|^2} = \sqrt{R^2 - r_2^2},$$
$$|BO| = \frac{|OK|^2}{|OO_2|} = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - r_2^2}},$$
$$|BK| = \frac{|KO_2| \cdot |BO|}{|OK|} = \frac{r_2 R}{\sqrt{R^2 - r_2^2}}.$$

Докажем, что точка C пересечения прямой AB с плоскостью α совпадает с центром O_1 первой окружности. Обозначим через β плоскость, проходящую через точку B параллельно плоскости α, а через L, M — точки пересечения прямой AK с плоскостями α, β соответственно. Пусть N — центр окружности, которая образуется в сечении сферы плоскостью ABK (рис. 1). Тогда прямая AN перпендикулярна прямой LC (а значит, и прямой MB), так как плоскость AON, содержащая два перпендикуляра AO и ON к прямой LC, перпендикулярна этой прямой. Поскольку BK касательная, прямые BK и NK также перпендикулярны. Треугольник ANK равнобедренный, поэтому

$$\widehat{KMB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{KAN} = \frac{\pi}{2} - \widehat{AKN} = \widehat{BKM},$$

откуда и из подобия треугольников ALC и AMB имеем

$$|LC| = \frac{|AC|}{|AB|} \cdot |BM| = \frac{|AC|}{|AB|} \cdot |BK| = k\,\frac{r_2 R}{\sqrt{R^2 - r_2^2}},$$

где коэффициент подобия $k = \dfrac{|AC|}{|AB|}$ не зависит от выбора точки K на второй окружности. Таким образом, точка C равноудалена от всех точек первой окружности, следовательно, является ее центром.

Проведем сечение сферы плоскостью AOO_2, содержащей перпендикуляр AO, а значит, и перпендикуляр O_2D к плоскости α (см. рис. 2). Из подобия треугольников ALO_1 и AMB с коэффициентом

$$k = \frac{|LO_1|}{|MB|} = \frac{r_1}{|BK|} = \frac{r_1\sqrt{R^2 - r_2^2}}{r_2 R}$$

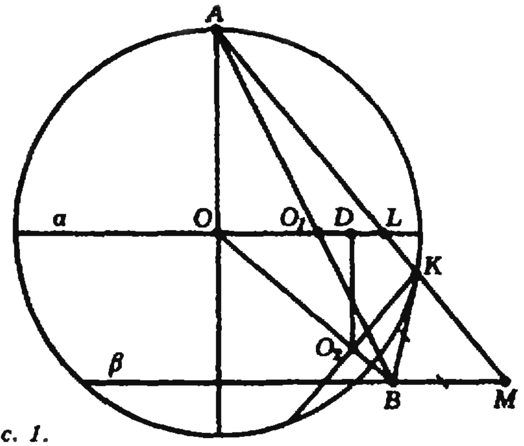


Рис. 1.

получаем $|AB| = \frac{1}{k}|AO_1| = \frac{ar_2^2 R}{r_1\sqrt{R^2-r_2^2}}$. По теореме косинусов для треугольника AOB имеем

$$\cos AOB = \frac{|AO|^2+|BO|^2-|AB|^2}{2|AO|\cdot|BO|} = \frac{2R^2r_1^2-r_1^2r_2^2-a^2r_2^2}{2Rr_1^2\sqrt{R^2-r_2^2}}.$$

Наконец, из прямоугольного треугольника OO_2D получаем

$$|O_2D| = |OO_2|\sin O_2\widehat{O_1}D = -\sqrt{R^2-r_2^2}\cdot\cos\widehat{AOB}.$$

Вариант 2

1. $\{(1; \log_3 2)\}$. 2. $|RS| > |QR|$. Указание. Из треугольника SQR, по теореме косинусов, получаем

$$|SR|^2 = 461-190\sqrt{3} > 10^2 = |QR|^2.$$

3. $x = -\frac{9}{13} \pm \frac{1}{13}\sqrt{\frac{1}{2}+2n}$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \geqslant 0$.

Указание. Подстановкой $y = \sin \pi(13x+9)^2$, уравнение приводится к виду $2y^2-5y+3=0$.

4. $\left]-\frac{1}{3}; \frac{-7-\sqrt{7}}{42}\right[\cup \left]\frac{-15+\sqrt{197}}{84}; 0\right[\cup \left]0; \frac{13-\sqrt{141}}{84}\right] \cup \left[\frac{13+\sqrt{141}}{84}; \frac{1}{3}\right[$. Указание. Поскольку $1-3|x|<1$ при $x \neq 0$, неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \log_{1-3|x|}(4x^2-14|x|+1) \leqslant \\ \qquad \leqslant \log_{1-3|x|}\left|x-\frac{5}{6}\right|, \\ 0 < \left|x-\frac{5}{6}\right| < 1 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \log_{1-3|x|}(4x^2-14|x|+1) \geqslant \\ \qquad \geqslant \log_{1-3|x|}\left|x-\frac{5}{6}\right|, \\ \left|x-\frac{5}{6}\right| > 1. \end{cases}$$

5. $\left\{\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}; 1; 1\right); \left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}; 7; -9\right)\right\}$.

Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x^2-2y^2+2z^2+10z+6y+\frac{\sqrt{3}}{2}x-17=0, \\ 3x^2-2\sqrt{3}(\cos\pi y+\cos\pi z)x+4=0. \end{cases}$$

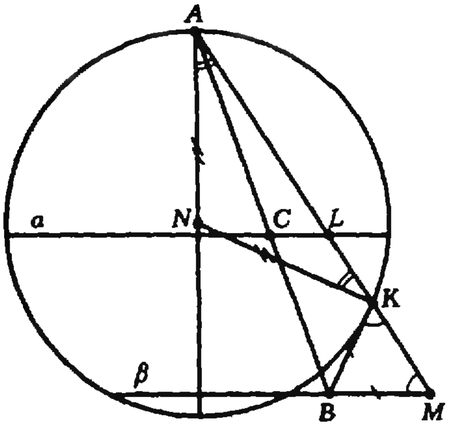


Рис. 2.

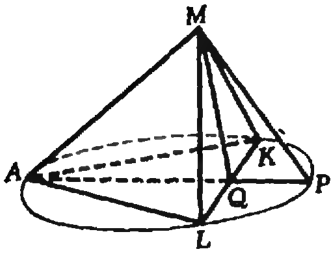


Рис. 3.

Рассматривая второе уравнение системы как квадратное относительно x, запишем условие неотрицательности дискриминанта: $D = 12(\cos\pi y+\cos\pi z)^2-48 \geqslant 0$, откуда следует, что $|\cos\pi y+\cos\pi z| \geqslant 2$. Это возможно лишь в двух случаях:

$$\begin{cases} \cos\pi y = 1, \\ \cos\pi z = 1 \end{cases} \text{и} \begin{cases} \cos\pi y = -1, \\ \cos\pi z = -1, \end{cases}$$

то есть

$$\begin{cases} y = 2k, \\ z = 2l \end{cases} (k, l \in \mathbf{Z}),$$

либо

$$\begin{cases} y = 2n+1, \\ z = 2m+1 \end{cases} (m, n \in \mathbf{Z}).$$

Подставляя $y = 2k$, $z = 2l$, получим $x = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, $7 = 4l^2-4k^2+10l+6k$, что невозможно.

В случае $y = 2n+1$, $z = 2m+1$, имеем $x = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$, $-2n^2+n+2m^2+7m=0$. Последнее равенство перепишем следующим образом: $(2n+2m+3)(m-n+2)=6$. Число $2n+2m+3$ нечетное, поэтому для нахождения чисел m и n получаем 4 системы

$$\begin{cases} 2n+2m+3 = \pm 1, \\ m-n+2 = \pm 6 \end{cases} \begin{cases} 2n+2m+3 = \pm 3, \\ m-n+2 = \pm 2. \end{cases}$$

6. $\frac{15\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{8}{11\sqrt{3}+\sqrt{43}}\right)$. Указание. Пусть a — длина ребра тетраэдра $ABCD$, а r — радиус вписанного в нее шара. Тогда $r = \frac{a}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$ и поэтому $a = 30$, $V_{ABCD} = 2250\sqrt{2}$. Отношение объемов пирамиды $AKLM$ к объему тетраэдра $ABCD$ равно

$$\frac{V_{AKLM}}{V_{ABCD}} = \frac{|AK|\cdot|AL|\cdot|AM|}{|AB|\cdot|AC|\cdot|AD|} = \frac{1}{3}\,\frac{|AL|}{|AC|} = \frac{1}{6}.$$

Поэтому $|AL| = \frac{1}{2}|AC| = 15$.

Итак, $|AK| = |AL|$ и треугольник AKL — правильный. Плоскость AKL пересекает описанную около пирамиды $AKLM$ сферу по окружности радиуса $R = \frac{|KL|}{2\sin\widehat{KAL}} = \frac{15}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$. Пусть Q — середина стороны KL (рис. 3). Тогда $|AP| = 10\sqrt{3}$. Плоскость AMP проходит через центр описанной сферы (почему?) и поэтому для радиуса этой сферы получаем выражение

$$R_{\text{оп}} = \frac{|MP|}{2\sin\widehat{MAP}},$$ но $\sin\widehat{MAP} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $|MP|^2 = |AM|^2+|AP|^2-2|AM|\cdot|AP|\cos\widehat{MAP} = 300$, то есть $|MP| = 10\sqrt{3}$.

Итак, $R_{\text{оп}} = \frac{10\sqrt{3}}{2\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{15}{2}\sqrt{2}$.

Для вычисления $R_{\text{вп}}$ — радиуса сферы, вписанной в пирамиду $AKLM$, воспользуйтесь формулой $R_{\text{вп}}=\dfrac{3V}{S}$, где S — полная поверхность пирамиды, а V — ее объем.

Вариант 3

1. $x_1=\dfrac{\pi}{2}+\pi m,\ x_2=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{30}+\dfrac{\pi n}{5}$ $(m, n\in\mathbf{Z})$.

2. $]-\infty;\ 3-\sqrt{3}[\,\cup\,]3+\sqrt{3};\ \infty[$.

Указание. Обозначьте $y=5^{2x-\frac{1}{8}x^2}$.

3. 3/5. Указание. Задача сводится к исследованию на максимум функции

$$S(x)=\frac{1}{2}\,x\,|(3x^2-10x+2)-(-2x^2+5x-10)|=$$
$$=\left|\frac{5}{2}x^3-\frac{15}{2}x^2+6x\right|$$

на отрезке $\left[\dfrac{3}{5};\ \dfrac{3}{2}\right]$.

4. $\dfrac{5\sqrt{5}}{6}\pi$. Решение. Пусть (рис. 4) основанием пирамиды $NABCD$ служит ромб $ABCD$, а шар с центром O касается боковых граней пирамиды в точках E_1, E_2, E_3, E_4, лежащих соответственно на ребрах AB, BC, CD, DA. Тогда четыре прямоугольных треугольника NOE_i $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ конгруэнтны, а значит, имеют общую точку H — основание высот E_iH, опущенных на общую гипотенузу NO. Поэтому прямая NO перпендикулярна плоскости $NE_1E_2E_3E_4$, то есть плоскости основания пирамиды. Поскольку конгруэнтные отрезки E_iH $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ перпендикулярны соответствующим сторонам ромба $ABCD$ (ибо лежат соответственно в плоскостях NOE_i), точка H равноудалена от четырех сторон ромба и является точкой пересечения его диагоналей.

Таким образом, получаем $S_{ABCD}=|AB|\times\times|AD|\sin\hat{A}=|AB|^2\cdot\dfrac{1}{2}=8$, то есть $|AB|=4$,

$$|E_1H|=\frac{S_{ABCD}}{2|AB|}=1,\ |E_1N|=\sqrt{|NH|^2+|E_1H|^2}=$$
$$=\sqrt{5},\ E_1O=\frac{|E_1H|}{|NH|}\cdot|E_1N|=\frac{\sqrt{5}}{2},\qquad V=\frac{4}{3}\times$$
$$\times|E_1O|^3\pi=\frac{5\sqrt{5}}{6}\pi.$$

5. $\{(-20;\ 36),\ (3;\ 10)\}$. Решение. Делая замену $u=2x+y$, $v=\log_3(|y|-2x+5)$, получаем систему

$$v^2+|u|-20=0,$$
$$(u+v)(u-8v)=0,$$

которая равносильна совокупности систем:

а) $\begin{cases} u=-v,\\ |v|^2+|v|-20=0,\end{cases}$ б) $\begin{cases} u=8v,\\ |v|^2+8|v|-20=0.\end{cases}$

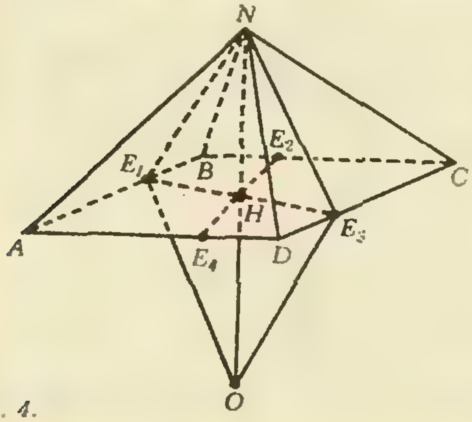


Рис. 4.

В случае а) имеем $(|v|-4)(|v|+5)=0$, то есть $|v|=4$, и, возвращаясь к переменным x, y, получаем систему

$$\begin{cases} 2x+y=\pm 4,\\ |y|-2x+5=3^{\pm 4}.\end{cases}$$

Складывая уравнения последней системы, получаем равносильную систему

$$\begin{cases} |y|+y=3^{\pm 4}\pm 4-5,\\ x=\pm 2-y/2,\end{cases}$$

из которой, раскрывая знак модуля, находим

$$y=\frac{1}{2}(3^4-4-5)=36,\qquad x=-2-18=-20.$$

В случае б), аналогично, имеем $(|v|-2)\times\times(|v|+10)=0$, то есть $|v|=2$ и

$$2x+y=\pm 16,$$
$$|y|-2x+5=3^{\pm 2},$$

откуда получаем

$$\begin{cases} |y|+y=3^{\pm 2}\pm 16-5,\\ x=\pm 8-y/2\end{cases}$$

и, наконец, $y=10$, $x=3$.

Вариант 4

1. $\{1\}$. 2. $5\pi/3$. 3. $]-311;\ -11[\,\cup\,]1;\ 1{,}5[$.

4. $\dfrac{1}{2}(a+b-\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos 2\varphi})$.

Решение. Обозначим площади треугольников LKP и NKM через c и d соответственно. Тогда из соотношений (см. рис. 5)

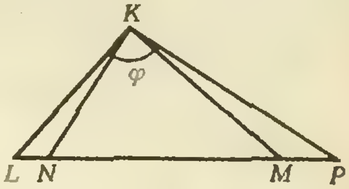


Рис. 5.

$$\widehat{NKM}=\widehat{NKP}+\widehat{LKM}-\widehat{PKL}=\pi-\varphi,$$
$$cd=\frac{1}{4}|LK|\cdot|NK|\cdot|MK|\cdot|PK|\cdot\sin\widehat{LKP}\times$$
$$\times\sin\widehat{NKM}=ab\sin^2\varphi,$$
$$c+d=S_{LKM}+(S_{MKP}+S_{MKN})=a+b.$$

Согласно обратной теореме Виета получаем, что числа c и d представляют собой пару корней уравнения

$$x^2-(a+b)x+ab\sin^2\varphi=0,$$

причем $c>d$, откуда $d=\dfrac{1}{2}(a+b-\sqrt{(a+b)^2-4ab\sin^2\varphi})$.

5. 4. Решение. Положим $x=\sin t$, тогда каждому корню $x\in[0;\ 1]$ исходного уравнения будет соответствовать ровно один корень $t\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ уравнения

$$8\sin t(1-2\sin^2 t)(8\sin^4 t-8\sin^2 t+1)=1$$

и наоборот. Преобразуя левую часть с помощью формул понижения степени, получаем уравнение

$$8\sin t\cos 2t\cos 4t=1.$$

Без ограничения общности можно считать, что $t\in\left[0;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$, так как значение $t=\pi/2$ уравнению не удовлетворяет. Поэтому, умножая обе части уравнения на $\cos t\neq 0$, получаем

$$8\cos t\sin t\cos 2t\cos 4t=\cos t,$$

откуда $\sin 8t=\cos t$.

Выбирая из решений этого уравнения $t_1=\dfrac{2}{9}\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $t_2=\dfrac{2}{7}\left(\dfrac{\pi}{4}+\pi m\right)$ $(n, m\in\mathbf{Z})$, лишь те, которые удовлетворяют условию $0\leqslant t<\pi/2$, получаем ровно четыре различных корня (при $n=0$, $n=1$, $m=0$ и $m=1$).

Вариант 5

1. $\{(3;-9)\}$. 2. $\{0\}$.

3. $x=\frac{\pi}{3}+(2n+1)\pi$ $(n\in Z)$.

Указание. Приведите уравнение к виду

$$\frac{(\cos x-1)\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)}{\cos^2 x}=0$$

и заметьте, что если $\cos x=1$, то $\operatorname{tg} x=0$, а если $\cos x=-\frac{1}{2}$, то $\operatorname{tg} x>0$ только при $x=\frac{\pi}{3}+(2n+1)\pi$, где $n\in Z$.

4. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. **Указание.** Треугольники ACD и EAC подобны, так как вписанные углы BAC и AEC опираются на конгруэнтные дуги.

5. 3. **Решение.** Обозначая $p=ab+a$, получаем равенство

$$x^2+(3p-2)x+5p-17=0,$$

где $p\in[1;\infty[$ (действительно: с одной стороны, $a\geqslant 1$, $b\geqslant 0$, поэтому $p\geqslant 1\cdot 0+1=1$; с другой стороны, любое значение $p\geqslant 1$ можно получить, например, при $b=0$ и $a=p\geqslant 1$). Таким образом, среди всех пар чисел $p\geqslant 1$ и $x=x_0$, удовлетворяющих полученному равенству, нужно найти пару с наибольшим значением x_0. Для таких пар должно быть:

$$p=\frac{17+2x_0-x_0^2}{3x_0+5}\geqslant 1 \qquad (*)$$

($x_0\neq-\frac{5}{3}$, так как это число не удовлетворяет уравнению ни при каких p). Преобразуя ($*$), получаем

$$\frac{(x_0-3)(x_0+4)}{3x_0+5}\leqslant 0,$$

и, следовательно, $x_0\leqslant 3$ Наконец, проверка показывает, что пара чисел $p=1$ и $x=3$ удовлетворяет требуемому равенству.

Вариант 6

1. Второе число больше. **Указание.** $2^{\log_3 5}=5^{\log_3 2}$.

2. $]2;\infty[$. 3. 9. 4. $x_1=\operatorname{arctg} 5+\pi k$, $x_2=-\frac{\pi}{4}+\pi l$ $(k, l\in Z)$.

5. $\{7\}$. **Указание.** Уравнение приводится к виду $(\sqrt{x+6}+\sqrt{x+2})(\sqrt{2x-1}-3)=4$. Умножив левую и правую части на $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}$, получим $\sqrt{2x-1}-3=\sqrt{x+6}-\sqrt{x+2}$.

6. $\sqrt{61}$; один путь. **Указание.** Путь, проходящий через грань $BAA'B'$, короче пути через соседние грани $ABCD$ и $A'ADD'$, в чем можно убедиться, рассматривая развертку куба.

Вариант 7

1. Первое число больше. **Указание.** $3^{\log_2 5}=5^{\log_2 3}$.

2. $]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$. 4. $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n-\operatorname{arctg}\frac{5}{3}$ $(n\in Z)$. 5. $\{2\}$. **Указание.** Переписав уравнение в виде

$$\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{3x^2-5x-1}=\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2-3x+4},$$

преобразуем левую и правую части по формуле

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$ к виду

$$\frac{-2x+4}{\sqrt{3x^2-7x+3}+\sqrt{3x^2-5x-1}}=\frac{3x-6}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{x^2-3x+4}}.$$

Ясно, что $x=2$ удовлетворяет уравнению. При $x\neq 2$ левая и правая части имеют разные знаки.

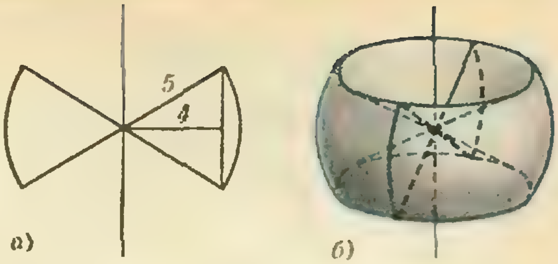


Рис. 5.

6. $50\arccos 4/5$. **Указание.** Осевое сечение тела вращения имеет вид, показанный на рисунке 6,*а*, и состоит из двух секторов окружности радиуса 5. Само тело показано на рисунке 6,*б*.

Вариант 8

1. $x=\pi n$ $(n\in Z)$. 2. $]1;1{,}5[$. 3. 4 км/ч. **Указание.** Примените теорему косинусов.

4. $-\frac{1}{18}$. **Указание.** Воспользовавшись равенствами типа

$$Q'P'S'=\frac{1}{4}(Q+P),$$

получите соотношения

$$P'=\frac{1}{4}(\pi+P),\ \hat{Q}'=\frac{1}{4}(\pi+Q),\ R'=\frac{1}{4}(\pi+\hat{R}).$$

5. $\left[-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right]$. **Решение.** Пусть $b\neq\pm 1$. Преобразуя подкоренное выражение

$$4x^2+4bxy+y^2+8y+18=(x+by)^2+\left(y\sqrt{1-b^2}+\frac{4}{\sqrt{1-b^2}}\right)^2+\left(18-\frac{16}{1-b^2}\right),$$

получаем, что исходное выражение имеет вид

$$1-2\sqrt{A+B^2+C^2},$$

где

$$\begin{cases}18-\frac{16}{1-B^2}=A,\\ x+by=B,\\ y\sqrt{1-b^2}+\frac{4}{\sqrt{1-b^2}}=C\end{cases}$$

(заметим, что для любого набора значений $b\in\,]-1;1[$, B и C последняя система имеет единственное решение). Если $A\geqslant 0$ (что равносильно условию $b^2\leqslant\frac{1}{9}$), то исследуемое выражение принимает наименьшее значение $1-2\sqrt{A}$ только при $B=C=0$, то есть при одной паре чисел x, y. Если же $A<0$, то наименьшее значение равно 1 и достигается уже при $B=0$, $C=\pm\sqrt{-A}$, то есть по меньшей мере при двух парах чисел x, y (в действительности же таких пар в этом случае бесконечно много).

При $b=\pm 1$ исходное выражение имеет вид

$$1-2\sqrt{D+B^2},$$

где

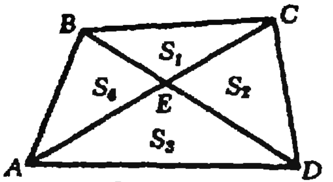


Рис. 7.

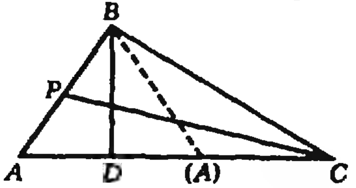


Рис. 8.

$$\begin{cases} 8y+18=D, \\ x+by=B. \end{cases}$$

В этом случае наименьшее значение равно 1 и достигается при $D\leqslant 0$, $B=\pm\sqrt{-D}$, то есть при условиях, которым удовлетворяет не единственная пара чисел x, y.

Вариант 9

1. $]-\infty; -1/3[\cup[2; +\infty[$.
2. $x=\pm\pi/3+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$.
3. $x=4^{\frac{\log_2 a}{3\log_2 a+2}}$ при $a>0$, $a\neq 1$, $a\neq 2^{-2/3}$.
4. $y_{\min}=y(-3/5)=\frac{7}{23}$.

5. 40 мин и 1 ч. **Указание.** Обозначим пешеходов буквами α и β, причем α движется быстрее β. Пусть t время, затраченное α при переходе из A в B, а τ — время, затраченное β. По условию $\tau=3/2t$. По условию $\tau-t\leqslant\frac{1}{3}$. Если первым вышел из A пешеход α, то, по условию

$$\begin{cases} t/2\leqslant\frac{1}{3}, \\ n\leqslant\frac{2}{3}, \\ t/2+n\geqslant 1 \end{cases}$$

(Здесь n — время, через которое β выходит из A после выхода α.) Складывая первые два неравенства, получим $t/2+n\leqslant 1$. Поэтому $t/2+n=1$, $n=2/3$, $t=2/3=40$ мин, $\tau=1$ ч. Если β первым вышел из A и пришел в B, а n — время задержки в A пешехода α, получается система

$$\begin{cases} t/2\leqslant 1/3, \\ n\leqslant 2/3, \\ \tau-(t+n)\geqslant 1, \end{cases}$$

из которой следует, что $n=t/2\leqslant 1$; $n-t/2\geqslant 1$, что невозможно. Если же первым в В приходит α, то получается система

$$\begin{cases} t/2\leqslant 1/3, \\ n\leqslant 2/3, \\ s-(t+n)\geqslant 1, \\ s=3/2n, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} n+t/2\leqslant 1 \\ t/2-n\geqslant 1 \end{cases}$$

что тоже невозможно.

6. 3. **Указание.** Пусть $S_{BEC}=S_1$, $S_{CED}=S_2$, $S_{ADE}=S_3$, $S_{ABE}=S_4$. Так как $S_2=S_4$, $S_{ABD}=S_{ACD}$, точки B и C равноудалены от стороны AD, $BC\parallel AD$ и $\triangle BEC\sim\triangle AED$ (рис. 7).

Кроме того, $\frac{S_1}{S_4}=\frac{S_4}{S_3}$, то есть $S_1\cdot S_3=S_2\cdot S_4=1$. А так как $S_1+S_2\leqslant 2$, имеем $S_1=S_3=1$. Поэтому $\triangle BEC\cong\triangle AED$.

Вариант 10

1. $x=(-1)^n\pi/6+\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$. **Указание.** Уравнение равносильно системе

$$6\sin x\geqslant 0$$
$$\sin x=1-\sin^2 x.$$

2. $]-\infty; -5/3]\cup[0; 1/3[$.
3. 10. **Указание.** Из условия следует, что BQ — медиана (см. рис. 8). Из точки H проведем $KH\parallel BP$. Тогда $|BH|/|HQ|=2$ и поэтому $|PK|=2|KQ|$, значит $|PK|=2$, кроме того $|AP|=|PK|$, так как $|AE|=|EH|$.
4. 12. 4. **Указание.** Пусть v скорость катера, u — скорость течения. Условие задачи приводит к системе

$$\begin{cases} \frac{s}{u+v}=10, \\ \frac{s}{2v+u}+\frac{s}{2v+u}\geqslant 16, \\ \frac{s}{2v+u}\leqslant 6. \end{cases}$$

5. $\left\{\left(\frac{4}{\sqrt{13}}; \frac{6}{\sqrt{13}}; \frac{9}{\sqrt{13}}; \frac{6}{\sqrt{13}}\right)\right\}$. **Указание.** Точка $(x; y)$ лежит на окружности $x^2+y^2=4$, поэтому существует угол α такой, что $x=2\cos\alpha$, $y=2\sin\alpha$; точно так же, для некоторого угла β будет $z=3\cos\beta$, $v=3\sin\beta$. Из неравенства получаем $6(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)\geqslant 6$, то есть $\sin(\alpha+\beta)\geqslant 1$. Поэтому $\sin(\alpha+\beta)=1$ и $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$. $x+z=2\cos\alpha+3\cos\beta=2\cos\alpha+3\sin\alpha=\sqrt{13}\ \sin(\alpha+\varphi)$, где $\varphi=\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}$. Максимум $x+z$ достигается при $\alpha=\frac{\pi}{2}-\varphi$.

Вариант 11

1. $x_1=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x_2=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{6}+\pi m$ $(n, m\in\mathbf{Z})$.
2. $]-\infty; 1[$.
3. 20 ч.
4. 4 и 1,5. **Указание.** Функция имеет вид

$$y(x)=\begin{cases} -4x-6 & \text{при} \quad -2{,}5\leqslant x<-2, \\ 2x^2+6x+6 & \text{при} \quad -2\leqslant x\leqslant -1, \\ 4x+6 & \text{при} \quad -1<x\leqslant -0{,}5, \end{cases}$$

следовательно, убывает на промежутке $]-2{,}5; -1{,}5[$ и возрастает на промежутке $]-1{,}5; -0{,}5[$.

5. $\dfrac{\sqrt{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{4\sin\alpha\cdot\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot R^2$. **Решение.** Пусть точка O — центр окружности, а точки D и E лежат на хорде $A'C'$, причем

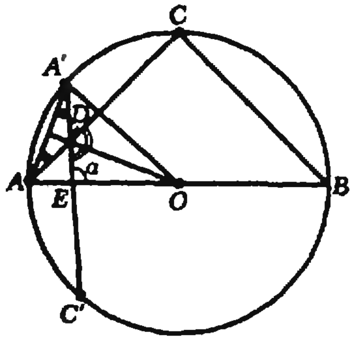


Рис. 9.

точка D расположена между точками E и A' (рис. 9). Заметим, что $\overset{\smile}{AC}=\overset{\smile}{BC}<\overset{\smile}{A'BC'}$. Поэтому $\overset{\smile}{AA'C}=\overset{\smile}{A'AC'}$ и $\overset{\smile}{CA'}=\overset{\smile}{AC}-\overset{\smile}{A'A}=\overset{\smile}{C'A'}-\overset{\smile}{A'A}=\overset{\smile}{C'A}$, следовательно, вписанные углы CAA' и $C'A'A$ конгруэнтны. Поэтому перпендикуляр к хорде AA', проведенный через ее середину, содержит обе точки D и O (равноудаленные от точек A, A') и является биссектрисой угла CDC', а значит,

$$\widehat{ADO}=\widehat{ADE}+\frac{1}{2}\widehat{CDC'}=$$

$$=\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(\pi-\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{8}\pi+\frac{\alpha}{2},$$

поскольку $\widehat{AED}=\pi-\alpha$, $\widehat{CAB}=\frac{\pi}{4}$.

Далее, имеем

$$\widehat{AOD}=\pi-\widehat{DAO}-\widehat{ADO}=\pi-\frac{\pi}{4}-\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}$$

и, применяя теорему синусов к треугольникам AOD, AED, получаем

$$|AD|=|AO|\cdot\frac{\sin\widehat{AOD}}{\sin\widehat{ADO}}=R\frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$|DE|=|AD|\cdot\frac{\sin\widehat{DAE}}{\sin\widehat{AED}}=$$

$$=R\frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\alpha}.$$

Наконец, $S=\frac{1}{2}|AD|\cdot|DE|\sin\widehat{ADE}$.

6. $\left]-\frac{5}{11};-\frac{1}{3}\right[$. Решение. Исходное уравнение приводится к виду

$$(x+2y)(3x+5y)=7,$$

поэтому целочисленная пара $(x+2y;\ 3x+5y)$ совпадает с одной из четырех пар: $(1;\ 7)$, $(-7;\ -1)$, $(-1;\ -7)$ и $(7;\ 1)$ и поэтому уравнение имеет соответственно четыре целочисленных решения $(x;\ y)$, а именно: $(9;\ -4)$, $(33;\ -20)$, $(-9;\ 4)$, $(-33;\ 20)$, среди которых только первые два удовлетворяют неравенству $x+y>0$. Таким образом, требуется найти все значения a, при которых выполнено ровно одно из неравенств:

$$4a^2\cdot9-3a(-4)<0$$

или

$$4a^2\cdot33-3a(-20)<0.$$

Теперь остается заметить, что первое неравенство выполнено при $a\in\left]-\frac{1}{3};0\right[$; а второе — при $a\in\left]-\frac{5}{11};0\right[$.

Вариант 12

1. $-\frac{7\pi}{4};\ -\frac{3\pi}{2}$. 2. 6. Указание. При составлении уравнений воспользуйтесь свойствами средних членов арифметической и геометрической прогрессий.

3. $[1;\ 2[$.

4. $\frac{36}{13}(5\sqrt{2}+6)$. Решение. Площади треугольников PBC и ABC, имеющих общую высоту (опущенную из вершины C), относятся как длины соответствующих оснований PB и AB. Поэтому

$$S=\frac{|PB|}{|AB|}S_{ABC}=$$

$$=\frac{|PB|}{|AP|+|PB|}\cdot\frac{1}{2}|BD|\cdot|AC|=\frac{18}{13}|AC|.$$

Из прямоугольных треугольников ABD и CBD по теореме Пифагора имеем

$$|AD|=\sqrt{|AB|^2-|BD|^2}=12,$$
$$|DC|=\sqrt{|BC|^2-|BD|^2}=10\sqrt{2},$$

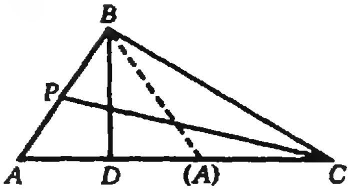


Рис. 10.

откуда (см. рис. 10).

$$|AC|=|DC|\pm|AD|=10\sqrt{2}\pm12.$$

Проверка показывает, что условие $S>3$ выполняется только в случае $|AC|=10\sqrt{2}+12$ (неравенство $\frac{18}{13}(10\sqrt{2}-12)<3$ устанавливается с помощью извлечения квадратного корня из неравенства $288<289$).

5. $x=\frac{\pi}{6}+2\pi m\ (m\in\mathbf{Z})$ при $b=\frac{5\pi}{6}+2\pi n\ (n\in\mathbf{Z})$, $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m\ (m\in\mathbf{Z})$ при $b=-\frac{5\pi}{6}+2\pi n\ (n\in\mathbf{Z})$. при остальных значениях b решений нет. Указание. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\sin(x+\varphi)=\frac{3\sqrt{3}+4\cos b}{\sqrt{8\sin^2 b+1}},\qquad(*)$$

где φ удовлетворяет условиям $\cos\varphi=\frac{3\sin b}{\sqrt{8\sin^2 b+1}}$, $\sin\varphi=\frac{\cos b}{\sqrt{8\sin^2 b+1}}$. Правая часть $(*)$ положительна и должна быть не больше 1. Это возможно лишь при $\cos b=-\sqrt{3}/2$.

Физика

Физический факультет

1. $t=\frac{1}{2}(t_1-t_2)+\frac{l}{g\sin\alpha}\left(\frac{1}{t_2}-\frac{1}{t_1}\right)$.

2. $T_2=\frac{m\Delta m}{4m+\Delta m}g$.

3. $\frac{l_{\max}}{l_{\min}}=\frac{\sqrt[3]{4}+1}{\sqrt[3]{4}-1}\approx4{,}4$.

4. $p=\frac{p_1p_2(m_1+m_2)}{p_1m_2+p_2m_1}$.

5. $\varphi=\frac{n_2}{n_1}100\,\%=50\,\%$.

6. $Q'=4/3Q\approx1{,}3\cdot10^{-}$[illegible] Кл.

7. $\alpha=P_{\text{пр}}/P_{\text{ист}}=1/3$.

8. $v=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{cD\varrho\Delta T}{\tau}}\approx0{,}14$ м/с.

9. $\alpha \leqslant 2 \arccos (n_в/n_с)$.

10. $P = \dfrac{abc}{(b-a)^2}$.

Механико-математический факультет, факультет вычислительной математики и кибернетики, химический, географический и геологический факультеты и факультет почвоведения

1. $v = \pi n d^2/l = 628$ м/с.
2. $N = m(g+a)\cos\alpha \approx 2$ Н.
3. $k_1 = k_2/2$.
4. $F = \sqrt{2g(m_1^2 h_1 + (m_1+m_2)^2 h_2)}/\Delta t$.
5. $h = (m_1+m_2)/(2\rho S) = 0{,}1$ м.
6. $p = 3\left(\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2}\right)\dfrac{RT}{V} = 1{,}8\cdot 10^5$ Па.
7. $x = \dfrac{p_0}{2\rho g}\left(\sqrt{1 + \dfrac{2L\rho g}{p_0}} - 1\right)$.
8. $E = \dfrac{8\sqrt{3}\,|q|}{9\pi\varepsilon_0 a^2} \approx 12\cdot 10^6$ В/м.
9. $A = 1/2\,(q_2 - q_1)El\,(\cos\alpha - \cos\beta) \approx$ $\approx 4{,}8\cdot 10^{-3}$ Дж.
10. $U = \dfrac{\mathscr{E} R_3}{r + R_1 + R_3} = 3$ В; $q = CU = 6\cdot 10^{-6}$ Кл.
11. $\dfrac{\eta_1}{\eta_2} = \dfrac{(U_1^2 - PR)\,U_2^2}{(U_2^2 - PR)\,U_1^2} = 1{,}5$.
12. $q = (9 - 4\sqrt{3})a^2 B/(9R) = 1{,}2\cdot 10^{-7}$ Кл.
13. $h' = hn_2/n_1 = 0{,}15$ м.
14. $l = DF/d = 15$ см.
15. $l = Ft\sqrt{(R+h)g}/h = 0{,}04$ м.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 1)

1. Очевидно, что я окажусь посередине канатной дороги в тот момент, когда количество кресел впереди и сзади окажется одинаковым. Поскольку всего кресел 96, искомый номер встречного кресла равен 66—48=18. (Если бы номер моего кресла был меньше 48, то номер встречного кресла был бы на 48 больше, и не меньше, чем номер моего кресла.)

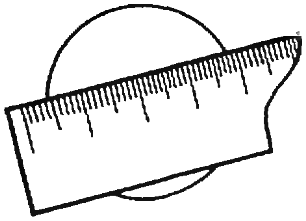


Рис. 10.

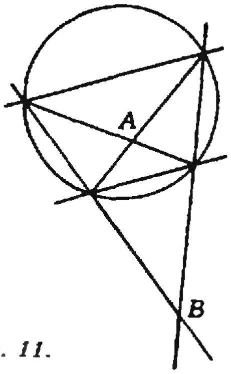


Рис. 11.

2. $4+2=8-2=3\times 2=8-2=7-1=6$.

3. Нужно отметить уровень жидкости во флаконе, заткнуть флакон и перевернуть его.

4. Наложим линейку на окружность так, чтобы по разные стороны были видны дуги разной длины (рис. 10). Затем проделаем построение, как показано на рисунке 11. Прямая AB проходит через центр окружности. Проделаем еще одно такое же построение, наложив линейку по-другому, и мы получим еще одну прямую, проходящую через центр окружности.

5. Из слов Саши следует, что дедушке 75 лет, и внукам вместе 25 лет. Если обозначить возраст Вани через x, возраст Пети через y, а возраст Саши через z, то из высказывания Пети следует, что

$$x+2y=x+y+y=x+y+(z-3)=25-3=22,$$

что при x, меньшем y, но большем 5, возможно лишь тогда, когда $x=6$, $y=8$. Итак, возраст Вани — 6 лет, Пети — 8 лет и Саши — 11 лет.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, А. А. Варламов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский,
А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Е. В. Винодарова, Т. А. Доброхотова, М. Б. Дубах,
С. В. Иванов, С. М. Рокимболь, И. Е. Смирнова,
Е. К. Тенчурина
Фото представили:
В. Т. Брель, ЛАФОКИ

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Б. Румянцева

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

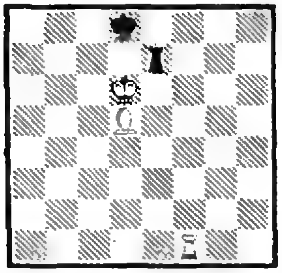
Сдано в набор 22.12.85. Подписано к печати 20.1.86.
Печать офсетная. Усл. кр.-от. 23,8
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,45. Т-03344
Тираж 199 091 экз.
Цена 40 коп. Заказ 3382

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ЭВМ И ШАХМАТНЫЙ КОДЕКС

На прошлой шахматной страничке мы рассказали о новшествах в шахматном кодексе. Так, в правиле 50 ходов, для эндшпиля «король, ладья и слон против короля и ладьи» число 50 увеличивается до 100.



Перед вами классическая позиция Филидора, проанализированная великим французским шахматистом более двухсот лет назад. Для победы белым надо прежде всего отогнать ладью с седьмой горизонтали, где она может объявлять непрерывные шахи.

1.Лf8+ Лe8 2.Лf7 Лe2! Плохо 2... Лh8 3.Лa7 Лh6+ 4.Ce6 или 2...Крc8 3.Лa7 Лd8+ 4.Крc6 Крb8 5.Лa5 Лf8 6.Крb6. **3.Лg7. Лe1 4.Лb7 Лc1.** Не помогает 4...Крc8 — 5.Лa7 Лb1 6. Лf7 Крb8 7.Лf8+ Крa7 8.Лa8+ Крb6 9.Лb8+ с выигрышем ладьи. **5. Cb3! Лc3.** Единственный ход по линии «c» (5...Лc8 6.Лg7), но расположение ладьи на третьей горизонтали в дальнейшем погубит черных. На 5...Крc8 решает 6.Лb4 Крd8 7.Лf4 Лe1 (7...Крc8 8. Cd5 Крb8 9.Лa4) 8.Ca4 Крc8 9.Cc6 Лd1+ 10.Cd5 Крb8 11.Лa4.

6.Ce6 Лd3+ 7.Cd5 Лc3 8. Лd7+ Крc8 9. Лf7 Крb8 10. Лb7+ Крc8 11. Лb4 Крd8 12. Cc4!, и все кончено.

Позже известный советский мастер и этюдист Н. Григорьев нашел симметричный выигрывающий вариант: **3.Лh7 Лe1 4.Лb7 Лc1 5.Лf7 Лe1 6.Cf3 Крe8 7.Лf4 Крd8 8.Cb5 Крc8 9.Лb4** и т. д.

Возникают естественные вопросы: всегда ли сильнейшая сторона может оттеснить неприятельского короля на крайнюю линию и можно ли в этом случае создать позицию Филидора? Теория не дает четкого ответа на эти вопросы. Кстати, кроме филидоровской известны и другие выигрышные позиции. **Белые: Крc6, Лe1, Cc5; черные: Крc8, Лd7** (позиция Лолли); **белые: Крa6, Лc1, Ca5, черные: Крa8, Лb7** (позиция Лазы); **белые: Крc7, Лe7, Cd3, черные: Крa7, Лf6** (позиция Житогорского).

А вот позиция, где белым не удается выиграть. **Белые: Крb6, Лd1, Cb5, черные: Крb8, Лc7.** Игра может протекать так: **1.Лd8+ Лc8 2.Лd7 Лc2 3.Лf7 Лc3 4.Ca4 Лc1 5.Cc6 Лb1+ 6.Крc5 Лb2!** Как показывает анализ, другие продолжения ведут к позиции Филидора. **7.Cd5 Лh2! 8.Лb7+ Крc8 9.Лe7 Крb8!**

Хотя традиционно считается, что данный эндшпиль ничейный, на практике дело чаще всего кончается победой сильнейшей стороны. **В. Смыслов — Д. Бронштейн (1949 г.). Белые: Крd5, Лb1, Cc5; черные: Крa5, Лh6.** Партия закончилась так: **1.Ce3 Лh5+? 2.Крc4 Лh4+ 3.Cd4 Крa6 4.Лb6+ Крa5 5.Лg6 Лe4 6.Лg1 Крa6 7.Лg7! Черные сдались.** Вместо 1...Лh5+ следовало играть 1...Лg6 2.Крc5 Крa6 3.Cf4 Лg4 4.Cd6 Лh4 5.Крc6 Крa5 или 2.Cf4 Лg4 3.Cd6 Лh4 4.Крc6 Лg4, и черные держатся.

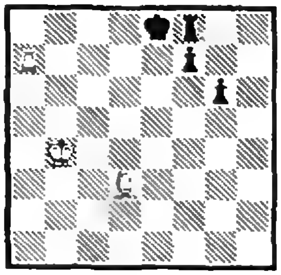
Стоит заметить, что анализ рассматриваемого окончания носит вполне математический характер. Утверждать, что данная позиция выиграна, можно только произведя полный, исчерпывающий перебор вариантов — общие соображения здесь не помогают. Забавно, но ничейность позиции можно принять лишь с некоторой оговоркой — ведь отсутствие непосредственного пути к победе еще ничего не доказывает.

По-видимому, точку в анализе этого эндшпиля когда-нибудь поставит компьютер. Не исключено, кстати, что при этом будут внесены изменения в теорию — окончание признают выигранным, а ничью объявят исключением из правил. Возможно, обнаружатся такие позиции, в которых для выигрыша нужно более 100 ходов. Тогда снова придется исправлять кодекс.

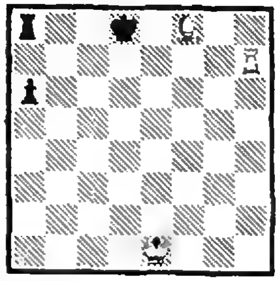
Напомним, что ЭВМ уже обнаружила позицию, где 50 ходов для выигрыша не хватает. **Белые: Крd6, Фa6, п.g7; черные: Крc2, Фb1, ход черных.** Тонкое маневрирование белого короля и ферзя после упорной защиты черных приводит через 53 хода к такой позиции. **Белые: Крd2, Фf2, п.g7; черные: Крb2, Фb3.** Здесь черный ферзь вынужден занять пассивное положение **54...Фg8**, и после **55.Фb6+ Крa3 56.Фb7 Крa4 57.Крc3 Крa5 58.Фb4+ Крa6 59.Фc4+** белые разменивают ферзей и проводят свою пешку. А вот совсем свежий пример: король и два слона против короля и коня. Учебники утверждают, что одни позиции выиграны, а другие (большинство) ничейны. Машина установила, что выигрыш есть всегда (конечно, позиции, где сильнейшая сторона сразу теряет слона или даже получает мат, не в счет), но иногда требуется 67 ходов. Жаль, что члены ФИДЕ не были знакомы с достижениями ЭВМ, иначе они распространили бы правило 100 ходов и на два указанных класса позиций.

Конкурсные задания

В предлагаемых позициях у черных помимо ладьи есть пешки, и это их подводит.



3. Белые начинают и выигрывают.



4. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 20 апреля 1986 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 3, 4».

Широким фронтом ведутся в нашей стране работы по управляемому термоядерному синтезу. Одно из перспективных направлений в этой области — лазерный термоядерный синтез (ЛТС). На первой странице обложки показана центральная часть многоканальной лазерной системы «Дельфин» для исследований по ЛТС (Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР).

С помощью гигантской кольцевой антенны радиотелескопа АН СССР (диаметр кольца 600 м; фото внизу) астрономы могут одновременно принимать радиоизлучение планет Солнечной системы, отдельных звезд и иных, чрезвычайно удаленных от нас, объектов Вселенной. РАТАН-600 — мировой рекордсмен по информативности.

О некоторых других крупных научно-технических разработках рассказывается на первых страницах этого номера.

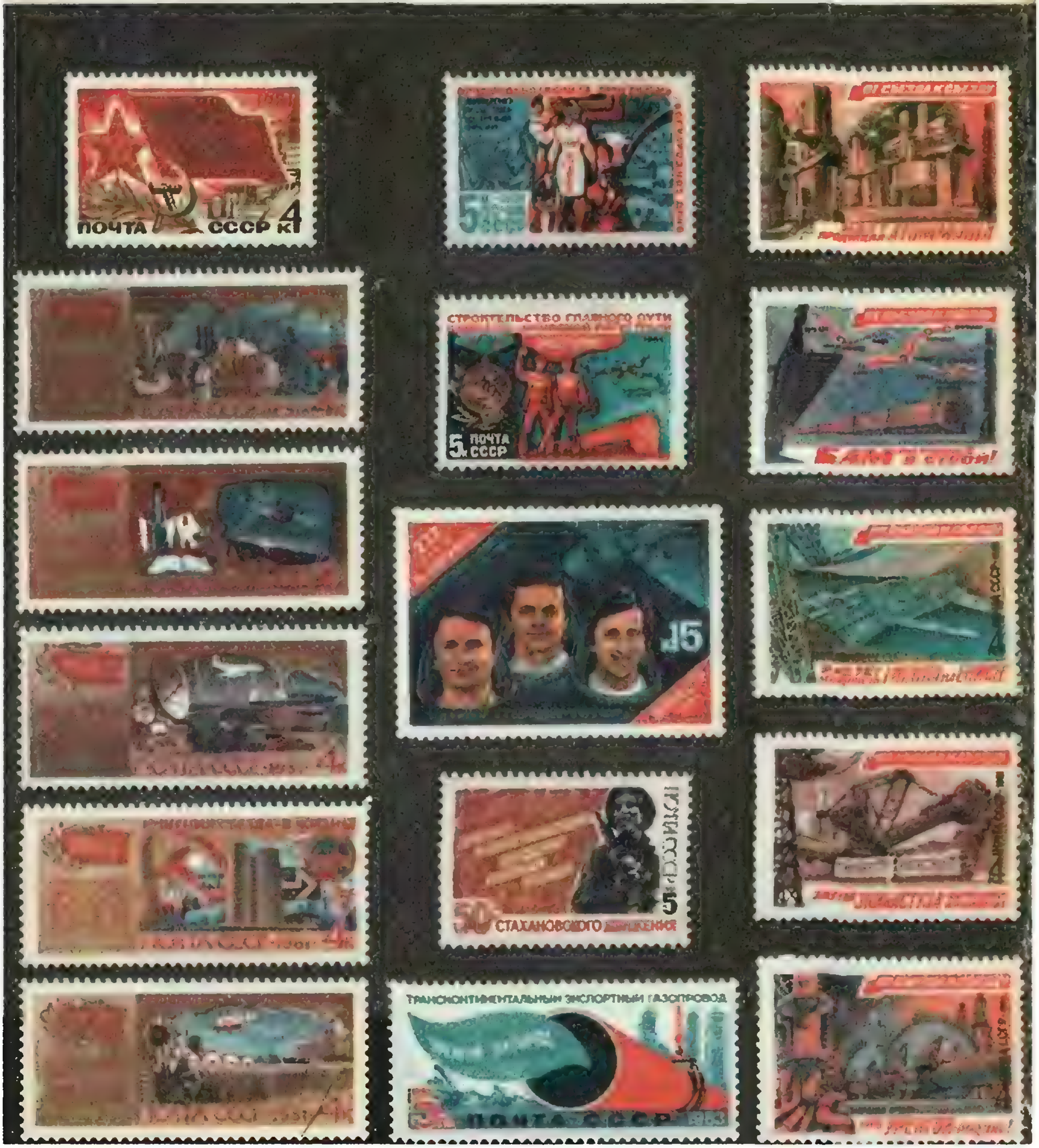
Цена 40 коп.
Индекс 70465

От съезда к съезду

Выдающимися успехами ознаменована одиннадцатая пятилетка. Завершено строительство главного пути Байкало-Амурской магистрали, введены в строй тысячекилометровые нефте- и газопроводы, в том числе трансконтинентальный газопровод Уренгой — Ужгород; завершается строительство Саяно-Шушенской ГЭС; проделана большая работа по выполнению Продовольственной программы. Успешно развивалась и наша наука. Проведена серия новых космических полетов на станции «Салют-7», в том числе рекордный полет космонавтов Л. Д. Кизима, В. А. Соловьева и О. Ю. Атькова, продолжавшийся 237 суток. Многие задачи, над решением которых наш народ трудился в одиннадцатой пятилетке, носят долговременный характер. Они включены в проект новой редакции Программы КПСС и проект Основных направлений экономического и социального развития СССР на 1986—1990 годы и на период до 2000 года.

Важнейшие события в жизни нашей страны, естественно, находят свое отражение в филателии, о чем убедительно свидетельствуют воспроизведенные здесь почтовые марки, выпущенные в годы одиннадцатой пятилетки.

В. Рудов


ПОЧТА СССР 4 к
5
СТРОИТЕЛЬСТВО ГЛАВНОГО ПУТИ
5 ПОЧТА СССР
БАМ — в строй!
15
4
50 СТАХАНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ
5
ТРАНСКОНТИНЕНТАЛЬНЫЙ ЭКСПОРТНЫЙ ГАЗОПРОВОД
ПОЧТА СССР 1983

НОМЕР
3

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант

3 1986

Основан в 1970 году

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

Оргкомитет
Московской
математической
олимпиады
Московское математическое общество

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	*А. Б. Мигдал.* Как устроена пустота?	*A. B. Migdal.* What is vacuum made of?
10	*Н. П. Долбилин.* Пик Делоне	*N. P. Dolbilin.* Delonay's peak
	Наш календарь	**Our calendar**
9	Доминик Франсуа Араго	Dominique François Arago
	Математический кружок	**Mathematics circle**
17	*Д. К. Фаддеев, И. Ф. Соколовский.* О касательной к графику функции	*D. K. Faddeev, I. F. Sokolovski.* About tangents to graphs of functions
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
21	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
24	Избранные школьные задачи	Selected school problems
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
25	Задачи	Problems
26	*Л. Кэрролл.* Королевский крокет	*L. Carroll.* The King's croquet
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
30	Победители конкурса «Кванта»	Prizewinners of the Kvant problem-solving contest
31	Задачи М971—М975; Ф983—Ф987	Problems M971—M975; P983—P987
33	Решения задач М951—М955; Ф963—Ф967	Solutions M951—M955; P963—967
42	Список читателей, приславших правильные решения	List of readers who have sent correct solutions
	Искусство программирования	**The art of programming**
45	*В. В. Рождественский, С. Г. Хлебутин.* Программирование на микрокалькуляторе: ветвление и цикл	*V. V. Rojdestvenski, S. G. Khlebutin.* Programming our pocket calculator: branching and cycles
	Полупроводниковые элементы вычислительной техники	**Semiconducting elements in computers**
48	VII. Элемент памяти — триггер	VII. Memory elements — triggers
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
51	*Б. М. Беккер, В. М. Гольховой, Ю. И. Ионин.* Уравнение касательной	*B. M. Bekker, V. M. Golkhovoy, Yu. I. Ionin.* The tangent's equation
55	**Варианты вступительных экзаменов**	**Entrance examination problems**
60	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	«Квант» улыбается *(50)*	**Kvant smiles** *(50)*
	Наша обложка *(8)*	**Our cover page** *(8)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Головоломки в шахматной партии *(3-я с. обложки)*	Chessgame puzzles *(3rd cover page)*

Красота и изящество сделанных сотни лет назад приборов не перестают удивлять и сегодня. Пример — изображенная на снимке слева армиллярная сфера, служившая для определения положения небесных тел. Изготовлена из бронзы в 1575 году, ныне хранится в Историческом музее в Брюсселе.

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1986

«Интуиция подсказывает человеку, что все должно быть связано в природе, что красота окружающего имеет высокий и таинственный смысл. Разгадать загадки Вселенной, познать непознанное призвано научное творчество». Эти слова принадлежат выдающемуся физику-теоретику академику Аркадию Бенедиктовичу Мигдалу, внесшему значительный вклад в развитие квантовой теории, теории ядра, физики элементарных частиц. А. Б. Мигдал уделяет большое внимание популяризации научных знаний. В своих книгах и статьях он рассказывает о достижениях современной физики, вводит читателя в мир научного творчества, дает почувствовать то, что называют «поэзией науки».
Сегодня мы знакомим наших читателей со статьей А. Б. Мигдала, посвященной загадкам пустоты.

Как устроена пустота?

Академик А. Б. МИГДАЛ

Речь пойдет о том, как изменились наши представления о самом распространенном во Вселенной и, быть может, самом важном объекте физических исследований — пустоте.

Что такое пустота: абстрактное понятие, «ничто», вместилище для физических тел?

Что останется, если идеальный насос удалит из замкнутого объема все частицы?

Что находится в межзвездном пространстве, где почти нет вещества?

Развитие физики последних десятилетий показало, что наше физическое пространство — вакуум — не просто геометрический объект, не пространство, в котором ничего нет, а сложная система, обладающая интереснейшими свойствами, совершенно непохожими на свойства твердых сред, жидкостей или газов; его изучение касается самых глубоких понятий, таких, как причинность, связь геометрии с материей, симметрии пространства и времени, связь симметрий с законами сохранения...

Нельзя толкнуть, не прикасаясь

Мы знаем, что тела действуют друг на друга при соприкосновении. Бросим в воду камень — от него побежит волна и всколыхнет плавающие ветки — воздействие передается от точки к точке. Звук распространяется потому, что давление передается от одного объема среды к соседнему, и т. д. Если накрыть звучащий электрический звонок стеклянным колпаком и откачать воздух, то видно, как по-прежнему молоточек ударяет по колокольчику, но звук исчезает — в пустом пространстве звук не распространяется. В то же время период колебаний маятника, помещенного под колпак, не изменяется при удалении воздуха (если пренебречь трением); значит, не изменяется и сила тяжести.

В отличие от сил, возникающих при распространении звука, электрические и магнитные силы, гравитация действуют и в пустоте, в ней распространяется свет, поэтому мы видим Солнце и звезды.

Естественно предположить, что в пространстве вблизи магнита, вблизи заряженного или массивного тела состояние пустоты изменяется. Пространство, окружающее эти тела, находится в «напряженном» состоянии, которое описывается словами: «в пространстве имеется поле». Заряды создают электрическое поле, магнит — магнитное, массивное тело вызывает гравитационное поле. Электрическое поле действует на заряженное тело, магнитное — на магнит, поле силы тяжести — на камень, заставляя их двигаться. Изменение скорости этих тел объясняется действием поля в той области пространства, где в данный момент времени они находятся. Сила передается через пустое пространство от точки к точке с помощью полей, как через невидимую жидкость. Такой механизм передачи воздействия называется близкодействием и принят современной физикой.

Но существовало и другое представление — «дальнодействие»: влияние одного тела на другое мгновенно передается на расстояние. На основе этого взгляда Ньютон построил свою теорию тяготения. Предположение о мгновенной передаче воздействия не помешало ему найти закономерности движения небесных тел, с огромной точностью совпадающие с данными наблюдений. Сейчас мы знаем, почему: небесные тела движутся со сравнительно малыми скоростями, а гравитационное взаимодействие распространяется со скоростью света и может считаться в этом случае мгновенным.

Идею дальнодействия трудно согласовать со свойствами света: было известно, что свет распространяется с конечной скоростью и проходит все промежуточные точки на линии светового луча. Особенно хорошо это видно, когда луч света проходит в тумане — он непрерывен. Ньютон предположил, что светящееся тело испускает частицы, передающие свет,— корпускулы. Тогда конечность скорости не противоречит идее дальнодействия, но остаются без объяснения волновые свойства света, доказанные опытами по интерференции и дифракции. Корпускулярная теория Ньютона так и не смогла справиться с объяснением этих явлений.

Через двести с лишним лет после Ньютона, в 1905 году, появилась замечательная работа Эйнштейна по квантовой природе света. Эйнштейн показал, что обнаруженные экспериментально закономерности фотоэффекта (вырывание электронов из атома при облучении) можно объяснить, только предположив, что свет представляет собой набор частиц — фотонов, которые взаимодействуют с электронами, выбрасывают их из атомов. (О фотонах мы подробнее поговорим позже.) Представление о свете как о волне не могло объяснить главную особенность фотоэффекта — энергия вылетающего электрона не зависит от интенсивности света, а только от его частоты.

В некотором смысле точка зрения Эйнштейна означала возврат к ньютоновской теории корпускул. И снова возник вопрос, на который не смог ответить Ньютон: как объединить оба представления — о волновой и о корпускулярной природе света? Возник важный парадокс, который был разрешен квантовой теорией, доказавшей, что свет — и волна, и частица, так же как электрон — и частица, и волна! Это представление получило название «квантово-волнового дуализма».

Сейчас нам известно, что в пустоте все взаимодействия — электрическое,

Возник важный парадокс, который был разрешен квантовой теорией, доказавшей, что свет — и волна, и частица...

магнитное, гравитационное, ядерное — передаются от точки к точке со скоростью, не превышающей скорость света. Если одно тело передвинуть, должна измениться сила тяготения, действующая с его стороны на другое тело. Но если это другое тело находится далеко от первого, то пройдет заметное время, прежде чем оно получит воздействие. Где же находится возмущение, когда первое тело уже переместилось, а второе еще не имеет сведений о его новом положении?.. На этот вопрос теория дальнодействия не могла ответить, и многие физики отказались от нее еще в прошлом веке.

Для объяснения передачи воздействия на расстояние была придумана специальная среда — эфир, заполняющая все пространство между частицами вещества. Воздействие передается за счет того, что вокруг заряженных или намагниченных тел эфир деформируется, и возникает сила, действующая на другое заряженное или намагниченное тело. Деформация эфира передается последовательно — от точки к точке. Свет распространяется в нем так же, как звук в среде.

Вплоть до начала XX века физики пытались строить эфир по образу и подобию известных твердых и жидких тел, а его нужно было изучать самого по себе. Это — среда особого рода. Следствием неверного представления о природе пустоты было возникновение интереснейших парадоксов, разрешение которых приводило к созданию новых физических теорий.

Электромагнитные свойства пустоты

Джеймс Максвелл своими удивительными уравнениями, найденными в 1865 году, объединил различные разделы физики: оптику, электричество, магнетизм.

Начало на этом пути было положено его могучим предшественником Майклом Фарадеем, открывшим в 1831 году закон электромагнитной индукции. Если изменять магнитное поле, пронизывающее проволочное кольцо, то в проводнике возникает электрический ток — заряды в нем начинают двигаться под действием образующегося в пространстве кольцевого электрического поля. Итак, переменное магнитное поле рождает в пустоте переменное электрическое.

Джеймс Максвелл своими удивительными уравнениями объединил различные разделы физики: оптику, электричество, магнетизм.

Еще в 1820 году другой предшественник Максвелла Ханс Эрстед обнаружил, что ток, текущий по проводнику, создает вокруг себя кольцевое магнитное поле! Если периодически изменять напряженность электрического поля в проводнике, возникает переменный ток и переменное магнитное поле. Максвелл высказал гениальную догадку о том, что не только движущиеся заряды создают магнитное поле, его образует и само переменное электрическое поле.

Из этих двух замечательных свойств пустоты последовало третье, не менее важное — в пустоте распространяются электромагнитные волны. Когда вблизи антенны радиопередатчика возникает переменное электрическое поле, оно образует вокруг себя, согласно Максвеллу, переменное магнитное поле, а магнитное — по закону Фарадея — создает уже в соседнем месте переменное электрическое... Так возмущение передается все дальше и дальше.

Из уравнений Максвелла следовало, что электромагнитные колебания должны распространяться со скоростью света. Существование электромагнитных волн было экспериментально доказано Генрихом Герцем в 1886—1889 годах. Естественно было прийти к заключению, что свет — тоже электромагнитная волна. Это предположение было проверено и подтверждено опытом.

Как абстрактно выглядели эти представления во времена Максвелла!

И как быстро они стали основой почти всех благ современной цивилизации: от телефона и радио до современных средств космической связи — не перечислить всего того, что родилось из опытов в маленьких лабораториях прошлого века, из смутных догадок великих умов!

Теория Максвелла была триумфом близкодействия: все электромагнитные воздействия передаются через среду — эфир. Но тут же возникли новые противоречия.

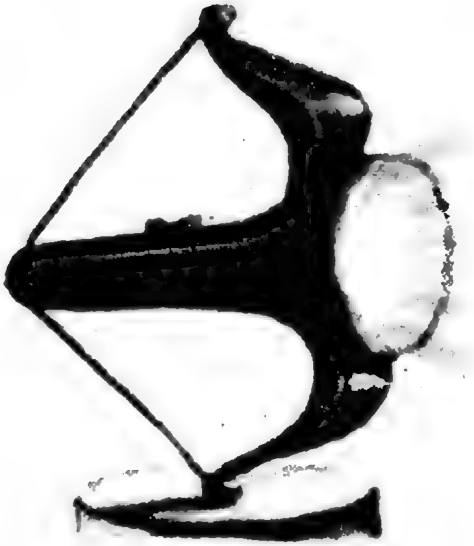
Когда в эфире движется тело, движется ли вместе с ним эфир? Эксперименты дали противоречивые результаты, некоторые опыты показали частичное или полное вовлечение эфира в движение, другие — что эфир вовсе не увлекается движущимся телом. В 1851 году французский физик Арман Физо измерил скорость света в текущей воде и показал, что эфир частично захватывается движущейся средой. Американский физик Альберт Майкельсон в 1881 году измерял скорость света вдоль и поперек направления орбитального движения Земли. Если бы эфир был неподвижен, то скорость света вдоль движения Земли складывалась бы из скорости света в эфире и скорости Земли относительно эфира. Оказалось, что скорость света одна и та же, то есть она не зависит от скорости источника, и если свет действительно распространяется в эфире — значит, эфир полностью увлекается Землей...

Разрешить противоречия эфира предстояло теории относительности.

Эфир умер — да здравствует эфир!

В начале XX века идея близкодействия получила дальнейшее развитие и обоснование в теории относительности и теории тяготения Эйнштейна. Оказалось, что не только электромагнитные, но и гравитационные воздействия распространяются в пустоте со скоростью света. Скорость света вошла не только в электродинамику, но и в механику, и в теорию тяготения.

Противоречие между опытом Физо и опытом Майкельсона было снято новой формулой сложения скоростей, вытекавшей из теории относительности, свойства эфира здесь роли не играли. Отпала необходимость в самом понятии эфира, его заменил вакуум — новый непротиворечивый объект. Эфир умер.



Скорость света вошла не только в электродинамику, но и в механику, и в теорию тяготения.

Но в науке новое, как правило, не отменяет старого, старые и новые идеи переплетаются и проникают друг в друга. Даже коренная научная революция не отменяет, а только пересматривает, переосмысливает прежнее, устанавливает границы применимости найденных ранее соотношений. Судьба эфира — убедительное подтверждение этому.

В начале XX века казалось, что все свойства пустоты объясняются гравитационными и электромагнитными воздействиями. Но изучение атомных ядер показало, что существуют силы, удерживающие нейтроны и протоны в ядре,— ядерные силы. И с точки зрения близкодействия их тоже нужно рассматривать как особое, напряженное состояние вакуума. Вакуум обогатился еще одним свойством.

Когда к электромагнитному полю и к полям, описывающим, например, пары частиц электрон — позитрон, протон — антипротон и так далее, применили квантовую механику, оказалось, что в пустоте происходят непрерывные колебания этих полей, рождаются и исчезают элементарные частицы... При столкновениях нуклонов (нейтронов и протонов) из пустоты возникает целый сноп различных частиц. Вакуум полон частицами! Удивительно сложную и интересную среду — вакуум — можно было бы снова назвать эфиром, если бы не боязнь путаницы с наивным понятием XIX века.

Квантовая механика вакуумных полей

Без некоторых минимальных сведений о квантовой механике нельзя составить даже грубую физическую картину явлений, происходящих в вакууме. Поэтому, прежде чем говорить об удивительных свойствах вакуумных полей, нам придется немного отвлечься и поговорить о том, к каким результатам приводит применение квантовой механики к системам, колеблющимся около положения равновесия. Такие системы часто встречаются в физике и называются осцилляторами. Как бы ни был конкретно устроен осциллятор — будь то маятник, грузик на пружинке, колебательный контур,— его энергия состоит из двух слагаемых: потенциальной энергии, пропорциональной квадрату некоторой величины, которую можно назвать «обобщенной координатой», и кинетической, пропорциональной квадрату скорости изменения этой «координаты». Для грузика на пружинке «обобщенная координата» — смещение грузика от положения равновесия, для колебательного контура — заряд на обкладках конденсатора. Коэффициент пропорциональности в кинетической энергии определяет «обобщенную массу». Мы называем эти величины обобщенными потому, что они не зависят от реализации осциллятора — «координате», как вы видите, совсем не обязательно иметь размерность длины.

Остановим маятник — в положении равновесия его энергия минимальна: и кинетическая, и потенциальная энергия равны нулю. Так ведет себя классический осциллятор. Но вот что получилось, когда к осцилляторам применили квантовую механику.

Один из важнейших принципов квантовой механики — принцип неопределенности, сформулированный Вернером Гейзенбергом в 1927 году, гласит: некоторые физические величины не могут одновременно принимать определенные значения. Именно такими величинами являются «обобщенная координата» и «обобщенный импульс» — произведение «обобщенной массы» на «обобщенную скорость». Проделывая мысленные эксперименты, Гейзенберг пришел к заключению, что чем точнее измерять координату электрона, тем менее определенным становится его импульс, и наоборот. Это — принципиальное ограничение, которое природа накладывает на понятия координаты и импульса.

Один из важнейших принципов квантовой механики — принцип неопределенности.

Когда квантовая механика была применена к осцилляторам, сразу стало ясно, что кинетическая и потенциальная энергии квантового осциллятора не могут одновременно равняться нулю: если бы это было так, то должны были бы одновременно быть определены и равны нулю и координата, и импульс осциллятора, а это противоречит принципу неопределенности. Квантовый осциллятор, в отличие от классического, даже в состоянии с наинизшей энергией не покоится. Он совершает «нулевые колебания» около положения равновесия.

Это замечательное свойство квантовых осцилляторов хорошо проверено на опыте и чрезвычайно важно для современной физики.

Упругие колебания твердого тела, так же как и колебания струны, описываются набором осцилляторов различных частот. Если учесть, что осцилляторы должны подчиняться квантовой механике, то получится, что при абсолютном нуле температуры происходят нулевые упругие колебания — атомы твердого тела не неподвижны, а участвуют в «нулевых колебаниях». Это подтвердили опыты по рассеянию света в твердых телах при низких температурах.

Электромагнитные волны в пустоте тоже можно рассматривать как результат колебаний набора осцилляторов. Представим себе, что между параллельными металлическими экранами, перпендикулярно им, образовалась стоячая электромагнитная волна,— она получится, если между экранами укладывается целое число полуволн. Стоячая волна возникает в результате сложения бегущих волн, отражающихся от левого и правого экранов. Похожая волна возникнет в обычной струне — дернешь струну, по ней побегут волны, отразятся от мест закрепления, и установится стоячая волна. Подобное же происходит в органной трубе.

Напряженность электрического поля в стоячей электромагнитной волне будет периодически колебаться — перед нами снова осциллятор. В качестве «обобщенной координаты» такого осциллятора можно взять напряженность электрического поля в какой-либо точке (например, в точке, где амплитуда колебаний напряженности максимальна). Импульсом должна быть величина, пропорциональная скорости изменения «координаты»,— именно такая величина — напряженность*) магнитного поля. Но раз «координата» и «импульс» квантового осциллятора не имеют одновременно определенных значений, значит, энергии электрического («потенциальная» энергия) и магнитного («кинетическая» энергия) полей не могут одновременно равняться нулю.

Даже если в пространстве нет ни одной частицы, ни одного кванта, электрические и магнитные поля совершают нулевые колебания. Последовательное применение квантовой механики к электромагнитному полю, взаимодействующему с электронами, было начато в конце 20-х годов в работах Дирака и завершено через 20 лет физиками-теоретиками Фейнманом, Швингером, Томонагой, Дайсоном. Возник раздел теоретической физики — квантовая электродинамика, которая позволила с большой точностью описывать все процессы взаимодействия электронов между собой и с электромагнитным полем.

Нулевые колебания электромагнитного поля заставляют дрожать электрон, движущийся в атоме,— он как бы превращается в шарик с радиусом, равным амплитуде дрожания. Но шарик слабее взаимодействует с ядром, чем точечный электрон. В результате энергетические уровни атома слегка сдвигаются по сравнению со значением, вычисленным без учета дрожания. Это явление называется «лэмбовским сдвигом», по имени впервые наблюдавшего его экспериментатора Лэмба. Квантовая электродинамика позволяет рассчитать «лэмбовский сдвиг» с огромной точностью. Получилось удивительнейшее совпадение с данными, найденными на опыте.

Еще одно свойство квантового осциллятора — его энергия изменяется порциями величины $h\nu$, где h — постоянная Планка, а ν — частота колебаний соответствующего классического осциллятора. В применении к электромагнитному полю это означает, что энергия электромагнитного осциллятора с определенной длиной волны λ и частотой $\nu = c/\lambda$ тоже изменяется порциями $h\nu$. Когда энергия волны изменяется на одну порцию, говорят, что «появился квант электромагнитного поля». В бегущей электромагнитной волне одновременно с увеличением энергии на величину $h\nu$ увеличивается и импульс на величину $h\nu/c$. Таким образом, в бегущей волне каждый квант имеет энергию $h\nu$ и импульс $p = h\nu/c$. Можно сказать, что квантовое поле описывает набор частиц-фотонов (так называются

Вакуум наполнен не вполне родившимися, образующимися и исчезающими частицами, они называются «виртуальными».

---

*) Школьники знакомы с силовой характеристикой магнитного поля — магнитной индукцией $\vec{B}$. *(Примеч. ред.)*

кванты бегущей электромагнитной волны) с разными энергиями и импульсами. В этом и состояла гипотеза световых квантов, развитая Эйнштейном за 20 лет до того, как она была доказана квантовой электродинамикой.

В результате квантования поля само собой возникло понятие частицы как характеристики возбуждения электромагнитной волны с определенной длиной. Так была решена проблема «дуализма волн-частиц». Удивительная идея — воспринимать частицы как квантовые состояния осцилляторов некоего поля — оказалась на редкость плодотворной. Она пронизывает всю современную теоретическую физику. Поле оказалось первичным понятием. Элементарные частицы возникают в результате его квантования.

Применение квантовой механики к полям, описывающим не фотоны, а другие частицы, например электроны и позитроны или пи-мезоны, приводит к очень похожему результату. В пустоте существуют нулевые колебания электрон-позитронного, пионного и вообще полей всех возможных частиц. Эти нулевые колебания проявляются в том, что в вакууме возникают и исчезают пары «частица — античастица»: электрон — позитрон, нуклон — антинуклон... Вакуум наполнен такими не вполне родившимися, образующимися и исчезающими частицами, они называются «виртуальными» от латинского virtue — «возможность».

Но стоит в вакууме столкнуться двум нуклонам или электрону с позитроном, как виртуальные частицы могут превратиться в реальные — при столкновениях рождаются новые частицы.

* * *

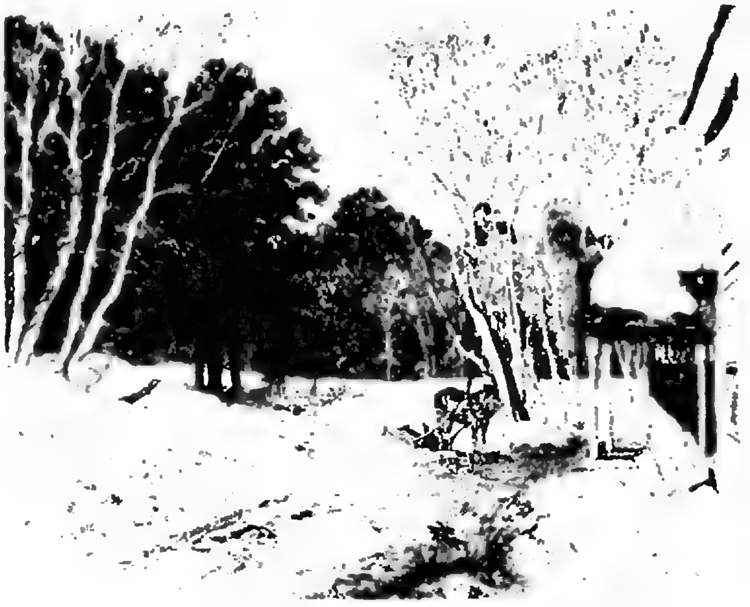
Мы рассказали лишь о малой части удивительных свойств пустоты. В последние годы стало известно, что в пустоте под влиянием внешних полей или высокой температуры могут происходить переходы в другие состояния, подобно плавлению твердых тел. Но самое замечательное — это «нулевые колебания» геометрических свойств пространства, которые, возможно, дадут ключ к пониманию связи сил тяготения с другими силами природы.

Однако об этом — в другой раз.

Наша обложка

В «Кванте» уже не раз появлялись статьи, содержание которых было навеяно картинами замечательных художников. В этом номере мы предлагаем вам еще раз полюбоваться картиной И. И. Левитана «Март» и ...решить две задачи, которые художник «сформулировал» своими изобразительными средствами.

Первую задачу мы привели в Задачнике «Кванта» этого номера — задача Ф987. Ее решение будет опубликовано в июльском номере журнала. А вот вторая задача: какое время дня запечатлел художник?



Доминик Франсуа Араго

Стремясь ревностно к открытиям, он был осторожен в своих выводах и больше всего любил прокладывать новые пути, по которым можно было бы прийти к установлению тождества причин различных явлений.

Александр Гумбольдт

26 февраля 1986 года исполнилось 200 лет со дня рождения Доминика Араго, замечательного французского ученого, одного из самых популярных людей Франции своего времени.

Араго родился в Эстажеле, крохотном городке в Восточных Пиринеях, на границе с Испанией. Никакими особыми способностями в раннем детстве он не отличался. Прилежно посещал начальную школу, мечтая, когда вырастет, стать военным. Затем продолжил обучение в училище соседнего городка Перпиньяна. Порядки в этом училище не отличались большой строгостью, и Араго проводил почти все время за чтением французской классики. Читать он предпочитал сидя на поросшем травой старом городском валу. Здесь-то и произошла встреча, круто изменившая всю его жизнь и положившая начало рождению Араго-ученого.

Однажды Доминик Франсуа увидел офицера инженерных войск, производившего за старым валом какие-то сложные геодезические измерения на местности. Юношу поразила молодость этого офицера (они были чуть ли не ровесниками). Поскольку застенчивостью Араго никогда не отличался, он немедленно подошел к офицеру и спросил, как ему удалось в таком молодом возрасте получить эполеты. Офицер ответил, что получил их по окончании Политехнической школы в Париже.

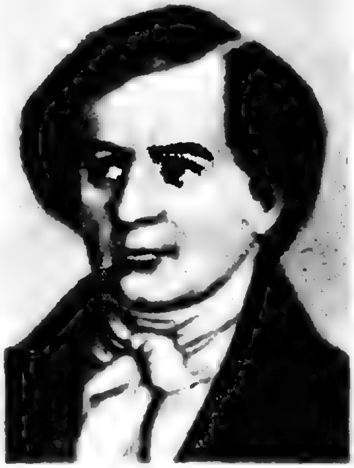
В тот же день в библиотеке училища Араго разыскал программу экзаменов, которые нужно было сдавать при поступлении в Политехническую школу. Больше всего молодого человека пугала математика — ее он не знал совершенно. Однако страх перед математикой боролся с желанием получить офицерское звание. Мечта стать военным победила, и Араго засел за изучение математики.

Очень скоро он проштудировал все имеющиеся в его распоряжении учебники, но этого было явно недостаточно. Тогда пятнадцатилетний Араго стал читать «взрослые» математические книги. В результате за полтора года он продвинулся в математике настолько, что с блеском сдал длившийся два с половиной часа вступительный экзамен «самому Монжу»*). Знания Араго отдельных вопросов математики соответствовали к тому времени уровню выпускного курса.

Началась студенческая жизнь, которая длилась три года.

Окончив в 1806 году Школу, Араго становится секретарем Бюро долгот в Париже, и с 1809 по 1830 год — он профессор Политехнической школы. В 1809 году, когда Доминику Франсуа Араго было всего 23 года, он избирается членом Парижской Академии наук.

Следующие примерно 20 лет были годами наибольшей творческой активности Араго. В должности профессора Политехнической школы, а позднее на посту директора Парижской обсерватории он успел сделать необычайно много. Широта его научных интересов поражает. Араго занимался астрономией, оптикой, электромагнетизмом. Ему принадлежат важные работы в области метеорологии и физической географии. Наконец, он оставил заметный след как историк науки. В небольшой заметке нет никакой возможности даже вкратце рассказать обо всех проблемах, в решение которых внес вклад Араго. Поэтому мы приведем здесь лишь короткий перечень.



Араго проверил правильность закона Бойля—Мариотта для различных газов и воздуха, провел ряд опытов по изучению упругости водяных паров при высоких температурах и давлениях. Много лет отдал Араго оптическим экспериментам, сделав ряд важных открытий в области поляризации света. Араго первым составил таблицу коэффициентов преломления света в газах в зависимости от их состояния. Как астроном и геофизик Араго прославился тем, что установил связь полярных сияний с магнитными бурями, усовершенствовал телескоп. Он занимался также уточнением формы Земли, измерением диаметров планет, фотометрией звезд и Луны, изучением колец Сатурна, солнечными затмениями. Араго изобрел один из первых актинометров (прибор для измерения интенсивности солнечного излучения) и определил удельный вес воздуха. Он обнаружил намагничивание железных опилок вблизи проводника с электрическим током и исследовал уровни и температуру морей на различных широтах. Поистине не было области современной ему естественной науки, к которой он не приложил бы свои руки, свой ум, свою неистощимую энергию.

Об одном открытии Араго хотелось бы сказать чуть подробнее. В 1826 году он обнаружил явление, названное позднее магнитным явлением Араго. Объяснение этому явлению дал знаменитый английский физик Майкл Фарадей. Вот описание «явления Араго» со слов Фарадея: «Если медная пластинка поворачивается вблизи от магнитной стрелки или от магнита, подвешенного таким образом, что он может вращаться в плоскости, параллельной

(Окончание см. с. 50)

---

*) Гаспар Монж (1746—1818) — известный французский математик, один из создателей Политехнической школы.

Пик Делоне

Кандидат физико-математических наук
Н. П. ДОЛБИЛИН

Одна из красивейших вершин в массиве Белухи на Алтае называется «Пик Делоне», по имени ее первовосходителя. О жизни и творчестве этого удивительного человека рассказано здесь.

Борис Николаевич Делоне был прежде всего крупным математиком, и математическое творчество было безусловно основным в жизни этого замечательного ученого. Однако говорить о Борисе Николаевиче только как о математике невозможно, точно так же, как невозможно выделить в сложном полифоническом произведении его основную, пусть самую яркую, тему, так неразрывно она связана с другими темами.

Жизнь Б. Н. Делоне, а прожил он 90 лет, можно сравнить с цельным произведением искусства. Она была исключительно насыщена и многогранна. Даже простое перечисление наиболее характерных моментов его биографии потребовало бы слишком много места для одной статьи. В таком перечислении хронологически одним из первых шел бы

1897 год — семилетний мальчик читает в подлиннике «Фауста» Гёте, знает наизусть отдельные главы поэмы, пишет маслом первые свои пейзажи.

Где-то в конце списка был бы отмечен

1975 год, 6 июля — Борис Николаевич на 86-м году жизни проводит при 25° мороза ночь на леднике под вершиной семитысячника Хан-Тенгри на высоте 4200 м. Утром он на вертолете спускается к озеру Иссык-Куль и оттуда перелетает во Фрунзе, где стоит 40-градусная жара. К исходу дня он оказывается в подмосковном аэропорту, откуда ему предстоит добраться до дачи, расположенной в окрестностях Абрамцева. Приехав на станцию последней электричкой, Борис Николаевич с тяжелым рюкзаком идет поздней ночью через лес и сбивается с пути. Проплутав в ночном лесу, он сбрасывает в укромном месте рюкзак и налегке лишь к рассвету находит свой дом.

Эти биографические детали показывают, с одной стороны, что разностороннее дарование Б. Н. Делоне проявилось в очень раннем возрасте. С другой стороны, до преклонных лет он сохранил по-юношески задорный темперамент, а незаурядное физическое здоровье позволяло ему с полной отдачей заниматься на закате жизни как научной работой, так и туризмом. Геометрия чисел, математическая кристаллография, дискретная геометрия — таков спектр научных работ, написанных Борисом Николаевичем, когда ему было уже за восемьдесят. Алтай и Кавказ, Карпаты и Тянь-Шань — такова география путешествий, совершенных Борисом Николаевичем в преклонном возрасте.

* * *

Борис Николаевич Делоне родился в семье профессора механики в 1890 году. Он, как говорили прежде, получил прекрасное воспитание. Его занятия музыкой были основательны. Хорошо знал, любил Баха, Моцарта. Играл все сонаты Бетховена, много сочинял сам. Учитель музыки настаивал на том, чтобы одаренный мальчик поступал в консерваторию по классу композиции. Но ничуть не меньше оснований было и у преподавателя рисования, когда он рекомендовал Борису Делоне продолжить свое образование в Художественной академии. Занятия рисованием, живописью были пронизаны талантом и серьезным отношением.

Пока учителя и родители размышляют о будущем Бориса, мальчик пишет пейзажи и путешествует по горам, занимается музыкой и играет в футбол, воспроизводит в карандаше «Тайную вечерю» Леонардо и лазает по деревьям (с младшей сестрой на плечах для нагрузки), сочиняет музыкальные пьесы и ставит физические опыты. Свою комнату он превратил в физическую лабораторию, в которой немало приборов было сделано им самим. Он часто вспоминал с чувством гордости о тех маленьких хитростях, которые позволили ему получить с помощью лейденской банки «во-о-от такую искру» (красноречивый жест).

Увлекаясь астрономией, он построил телескоп, зеркало для которого шлифовал сам. Рассказывая об этом, Борис Николаевич не забывал добавлять: «шлифовать зеркало из бронзы было глупо — и трудоемко, и быстро тускнело».

Отец Бориса Николаевича — Николай Борисович Делоне — будучи сам известным ученым, дружил со знаменитым ученым, «отцом русской авиации» Н. Е. Жуковским. Под влиянием Жуковского Николай Борисович организовал в 1907 году в Киеве первый в России планерный кружок. Семнадцатилетний Борис активно включается в работу кружка и в течение следующих двух лет строит один за другим, постоянно совершенствуя их конструкции, пять планеров, совершает полеты на них, иногда с риском для жизни. Однажды кинематографисты, приехавшие снять фильм о работе кружка, уговорили его, несмотря на сильный ветер, подняться в воздух. Порыв ветра опрокидывает планер, и Борис падает с 15-метровой высоты, но, к счастью, на глубоко вспаханное поле.

Конечно, с точки зрения современных представлений об авиации достижения членов кружка могут показаться наивными: полеты на несколько десятков метров, запуски при помощи жгута, лошади, зимой при помощи санок, летом — велосипеда. Однако это было время зарождения авиации, и деятельность кружка имела пионерский характер. Работа киевского кружка оказала влияние на развитие отечественного авиастроения. Достаточно сказать, что один из членов кружка — И. Сикорский, заполучив необходимые средства, уже в 1913 году построил огромный по тем временам 4-моторный самолет, ставший хорошо известным в истории отечественного самолетостроения под названием «Илья Муромец». Интересно, что крупнейший советский авиаконструктор Андрей Николаевич Туполев в своих мемуарах, когда писал об исключительном значении, которое имело для него знакомство с Жуковским, отмечал, что познакомил его, тогда еще молодого студента, с Жуковским Б. Н. Делоне.

Пока еще ничего не было сказано о математическом даровании юного Бориса Делоне, а проявилось оно между тем довольно рано. В 12 лет он знал основы анализа, чуть позднее приступил к самостоятельным исследованиям по алгебре, теории чисел. Семейная обстановка безусловно способствовала развитию и этой грани его таланта. Отец, к примеру, взял его с собой на Международный конгресс в Гейдельберг, где 14-летний Борис Делоне видел и слышал Гильберта и Минковского. Нередко Борис присутствовал при беседах отца с его коллегой, замечательным русским математиком Георгием Феодосьевичем Вороным. Работы Вороного оказали огромное влияние на математическое творчество Б. Н. Делоне. Однако личных научных контактов у Бориса Николаевича с Вороным не было. Вороной умер в возрасте 40 лет в 1908 г., в том самом году, когда Борис Делоне поступил на физико-математический факультет Киевского университета.

Получилось так, что почти одновременно на этот же факультет поступили еще несколько очень одаренных молодых людей, ставших впоследствии широко известными учеными: среди них были О. Ю. Шмидт и Н. Г. Чеботарев.

Из семейного альбома — Борис Делоне (справа) с отцом и братом

Н. Г. Чеботарев (1891—1947) стал одним из крупнейших алгебраистов, был избран членом-корреспондентом АН СССР. О. Ю. Шмидт (1891—1956), человек огромного дарования и колоссальной энергии, стал выдающимся ученым и общественным деятелем. Как математик он получил ряд первоклассных результатов в теории групп и основал московскую школу алгебраистов. Имя Героя Советского Союза О. Ю. Шмидта прекрасно знают в нашей стране в связи с легендарной экспедицией на ледоколе «Челюскин», которую он возглавлял. В науке имя академика Шмидта хорошо известно и в связи с тем, что ему принадлежит теория происхождения Солнечной системы.

Делоне, Шмидт, Чеботарев стали участниками алгебраического семинара под руководством профессора Д. А. Граве. Именно в эти годы и на долгое время вперед определилась область научных интересов Бориса Делоне — алгебра и теория чисел. Его студенческая работа «Связь между теорией идеалов и теорией Галуа» была удостоена «Большой золотой медали» университета. В первой своей печатной работе, опубликованной в 1915 году, Б. Н. Делоне предложил гораздо более короткое, чем предыдущее, принадлежавшее Гильберту, доказательство одной важной алгебраической теоремы.

* * *

Вершиной математического творчества Б. Н. Делоне является цикл исследований в теории диофантовых уравнений третьей степени с двумя неизвестными. Остановимся на этом подробнее.

Диофантовы уравнения — это уравнения вида $p(x, y, z, \ldots)=0$, где p — многочлен с целыми коэффициентами, для которых ищутся решения в целых (иногда в рациональных) числах. Например, целые положительные решения диофантова уравнения

$$x^2+y^2=z^2$$

суть не что иное, как известные «пифагоровы тройки» (такие, как (3, 4, 5) или (5, 12, 13)), дающие все решения прямоугольных треугольников с целыми сторонами (подробнее см. «Квант», 1986, № 1 с. 11). Название этих уравнений связано с именем выдающегося древнегреческого математика Диофанта (II век н. э.).

В своем докладе на международном математическом конгрессе 1900 года выдающийся немецкий математик Давид Гильберт сформулировал ряд фундаментальных проблем, адресованных математикам наступающего XX века. В одной из них, десятой по счету, Гильберт поставил вопрос о существовании такого алгоритма, который по коэффициентам конкретного диофантова уравнения позволял бы узнавать, имеет ли оно решение или нет. Сейчас, после работ советского математика Ю. В. Матиясевича, точно известно, что такого алгоритма нет (см. «Квант», 1970, № 7, с. 37). Более того, Ю. В. Матиясевич построил такой многочлен с целыми коэффициентами $p(a, x_1, \ldots, x_n)$, что не существует алгоритма, позволяющего для каждого целого значения параметра a узнавать, имеет ли целое решение уравнение

$$p(a, x_1, \ldots, x_n)=0.$$

Простейшим диофантовым уравнением является, пожалуй, *уравнение первой степени с двумя неизвестными*

$$ax+by=1,$$

где a и b — целые числа. Если a и b имеют общие множители, то решений нет. Если же a и b взаимно просты, то решений бесконечно много (подробнее см. «Квант» 1973, № 4, с. 38). Теория таких уравнений, как утверждают историки математики, была изложена еще индийским математиком Ариабхата в V—VI вв. н. э. (кстати, его именем назван первый индийский искусственный спутник Земли).

Следующей по сложности ступенькой после линейного уравнения естественно считать аналогичное *квадратное уравнение*

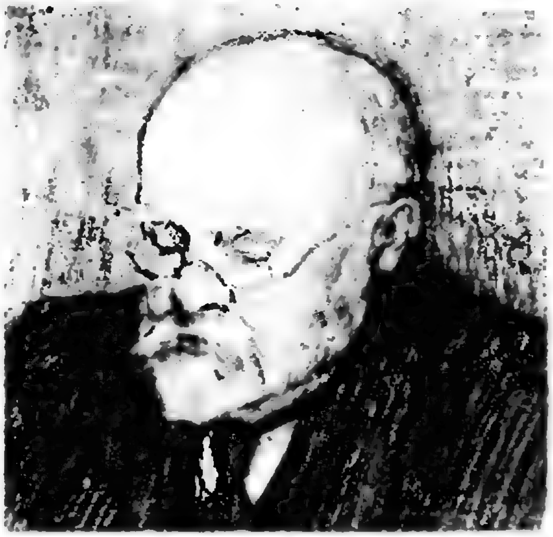
$$ax^2+bxy+cy^2=1.$$

Важный частный случай уравнений 2-й степени — *уравнение Пелля*

$$x^2-dy^2=1$$

— был изучен Эйлером (подробнее см. «Квант» 1985, № 1, с. 20). Если c (>0) — квадрат целого числа, то, кроме очевидного решения (1; 0), других целых решений нет. Если же c не является квадратом целого, то решений бесконечно много. Исследование общего вида диофантовых уравнений 2-й степени было проведено знаменитым французским математиком Лагранжем (1736—1813).

Что касается решений диофантовых уравнений более высоких степеней, то серьезных успехов в этом вопросе не было вплоть до начала XX века. Это придало вопросу о диофантовых уравнениях 3-й степени авторитет трудной проблемы. На этой проблеме Борис Николаевич, которого всегда отличало стремление браться за трудные, важные задачи, не разменивать свой талант и время на мелочи, и остановил свой выбор.



Портрет отца (рисунок Бориса Делоне)

К сожалению, а, возможно, и нет, Делоне не знал об опубликованной незадолго до этого работе норвежского математика А. Туэ. Туэ рассматривал диофантовы уравнения вида

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ldots+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n=b \quad (1)$$

и доказал, что при $n\geqslant3$ они могут иметь лишь конечное число решений, если, разумеется, левая часть уравнения не раскладывается в произведение многочленов с рациональными коэффициентами, содержащее сомножители степени меньше 3. (Если в разложении присутствует многочлен второй или первой степени, то решений может быть бесконечно много.)

Теорема Туэ является одной из наиболее фундаментальных в теории диофантовых уравнений. Однако, утверждая для каждого диофантова уравнения указанного типа конечность числа решений, теорема Туэ ничего не может сказать о том, как найти эти решения. В ней ничего не говорится о верхней оценке значений решений конкретного уравнения. А это важно. Представим себе, что по коэффициентам конкретного диофантова уравнения мы можем вычислить константу c, которая заведомо превосходит абсолютные значения $|x_0|$, $|y_0|$ для любого целого решения (x_0, y_0) этого диофантова уравнения. Тогда, подставляя в уравнение всевозможные пары целых чисел (x, y) с условием $|x|, |y|<c$, можно найти все решения конкретного уравнения. Сама же теорема Туэ в этом отношении неэффективна.

Исследования Б. Н. Делоне относились к уравнениям 3-й степени, но, как мы увидим, дали весьма эффективные и исчерпывающие результаты. Сначала он приступил к исследованию *кубического аналога уравнения Пелля:*

$$ax^3+y^3=1,$$

где целое число a не является кубом целого. (В случае, когда a есть куб целого числа, левая часть уравнения раскладывается в произведение многочленов с целыми коэффициентами, и кубическое уравнение Пелля сводится к решению диофантовых уравнений 1-й и 2-й степеней.)

Кубическое уравнение Пелля всегда имеет по крайней мере одно решение — (0; 1). Имеются ли другие решения, и если да, то какие?

Ответы на эти вопросы связаны с изучением совокупности чисел вида

$$A\sqrt[3]{a^2}+B\sqrt[3]{a}+C \quad (A,\ B,\ C\in Z),$$

где a — коэффициент уравнения Пелля).

Среди этих чисел выделяются *единицы*, то есть такие числа, обратные к которым имеют такой же вид. Например, при $a=2$ число $\sqrt[3]{2}-1$ является единицей, поскольку обратное к нему равно $\varepsilon^{-1}=\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1$. Известно, что для каждого целого a ($\sqrt[3]{a}\notin Z$) среди единиц найдется такая (*основная*) единица ε_0, $0<\varepsilon_0<1$, из которой все остальные (положительные) единицы получаются возведением в целую степень.

Проявив исключительную изобретательность, Б. Н. Делоне доказал трудную теорему: *уравнение* $ax^3+y^3=1$, *где* a *— целое, но не куб целого, может иметь, кроме решения* (0, 1), *еще не более одного решения в целых числах; второе решение существует тогда и только тогда, когда основная единица* ε_0 *двучленна, то есть имеет вид* $\varepsilon_0=X_0\sqrt[3]{a}+Y_0$, *и тогда второе решение есть* (X_0, Y_0).

Что касается нахождения основной единицы, то еще лет за двадцать до этого Вороной дал алгоритм ее вычисления.

Например, для уравнения $4x^3+y^3=1$ основная единица трехчленна, поэтому других решений, кроме (0; 1), это уравнение не имеет. А уравнение $37x^3+y^3=1$, для которого основная единица двучленна, $\varepsilon_0=-3\sqrt[3]{37}+10$, имеет два решения (0,1) и (—3, 10).

Затем Б. Н. Делоне перешел к более общему случаю *кубических уравнений с двумя неизвестными отрицательного дискриминанта*

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=1, \quad \text{(A)}$$

где коэффициенты a, b, c, d — целые числа, а слова «в случае отрицательного дискриминанта» означают, что соответствующий уравнению многочлен at^3+bt^2+ct+d имеет единственный вещественный корень t_0. В противном случае задача также сводится к исследованию двучленных единиц. Посредством созданного им «алгоритма повышения» Б. Н. Делоне получил следующий фундаментальный результат: *в общем случае уравнение вида* (A) *имеет не более трех решений в целых числах. Только в двух случаях уравнение вида* (A) *имеет четыре решения, и еще в одном случае уравнение имеет пять решений. Никакое уравнение вида* (A) *не имеет более пяти решений.* (Так, уравнение $x^3-xy^2+y^3=1$ имеет пять решений: (1; 1), (1; 0), (0; 1), (—1, 1), (4, —3), а то, что других решений нет, следует из теоремы Делоне.

* * *

Работы Б. Н. Делоне по кубическим диофантовым уравнениям обозначили едва ли не первый после Эйлера и Лагранжа серьезный сдвиг в направлении конкретного исследования уравнений более высоких степеней. Успех не был случаен. Тысячи часов напряженнейшей работы — такова цена победы над трудной проблемой. Трудолюбие, воля, целеустремленность и, конечно, любовь к науке — без этих качеств цель не была бы достигнута. Тем более, что работать приходилось в исключительных условиях: деникинцы и петлюровцы, «кайзеровцы» и белополяки, «зеленые» и «жовтоблакитные» — кто только не терроризировал Киев в годы гражданской войны...

Можно сказать, что в определенном смысле результаты Б. Н. Делоне оставались непревзойденными около полувека, до конца 60-х годов. Как писал член-корреспондент АН СССР Д. К. Фаддеев:

> «По конкретности анализа, простоте и ясности цикл работ Б. Н. Делоне, посвященных неопределенным уравнениям, является исключительным в математике XX столетия с ее часто громоздким аппаратом и абстрактными построениями. По своему стилю этот цикл близок к лучшим образцам классических работ Гаусса и Чебышева по теории чисел».

* * *

После цикла работ по диофантовым уравнениям у Б. Н. Делоне еще было впереди 60 лет творческой деятельности, которая добавила к авторитету крупного алгебраиста авторитет крупного геометра. Смещение его исследований в сторону геометрии происходило естественно. Определенную роль здесь сыграло соприкосновение в процессе исследований неопределенных уравнений с работами Вороного. Но основная причина геометризации исследований Б. Н. Делоне заключалась в его исключительно образном, художническом восприятии мира.

Б. Н. Делоне перед туристским походом (70-е годы)

Характерно, что Борис Николаевич никогда не жалел сил, времени на то, чтобы довести понимание, казалось бы, уже законченного математического результата до такого уровня, на котором результат оформился бы в зримый геометрический образ. «Что это означает попросту?» — любимый вопрос Бориса Николаевича, который он задавал и себе и коллегам, когда обсуждалась очередная работа. Не случайно в его работах «натягиваются разделенные параллелепипеды», «вытягивают носы», между точками, рассыпанными в пространстве, «летают пустые шары».

Признание научных заслуг не заставило себя долго ждать: в 1929 году Б. Н. Делоне выбирают в члены-корреспонденты АН СССР. К этому моменту он уже семь лет профессорствует в Ленинградском университете. Его предельно ясные, продуманные лекции вызывают большой интерес у студентов. Б. Н. Делоне никогда не упускал возможности рассказать им о трудной, нерешенной проблеме. В своей педагогической практике Б. Н. Делоне руководствовался известным принципом «Ученик — не сосуд, который нужно наполнить, а факел, который нужно зажечь». Высокий научный авторитет, преданное и вместе с тем эстетическое отношение к науке, личное обаяние, артистизм — все это притягивало к нему молодых людей. Неудивительно, что у Бориса Николаевича было много учеников, среди которых несколько выдающихся математиков: академик А. Д. Александров, члены-корреспонденты АН СССР Д. К. Фаддеев и И. Р. Шафаревич.

Весной 1934 года в Ленинграде Б. Н. Делоне организовал для школьников первую олимпиаду по математике, с которой фактически началось олимпиадное движение в нашей стране. Участники ленинградской олимпиады до сих пор вспоминают, какое «ошеломляющее впечатление» произвели на них встречи с Борисом Николаевичем (см. «Квант» 1984, № 9, с. 52).

В 1934 г. в Ленинграде был создан Математический институт им. В. А. Стеклова, где Б. Н. Делоне со дня его основания заведовал отделом алгебры (до 1960 года), а затем отделом геометрии. В 1935 году Математический институт наряду с другими ведущими учреждениями Академии наук СССР переводится в Москву. С этого же года Б. Н. Делоне заведовал кафедрой геометрии в Московском университете. В период работы в МГУ он читает оригинальный курс лекций по аналитической геометрии, который отличался исключительным богатством геометрических идей. Студенты, имевшие счастье слушать лекции Б. Н. Делоне, вряд ли подозревали, что за их великолепием скрывалась тщательная подготовка. Так, в первые годы на подготовку двухчасовой лекции у него уходило два полных дня, в дальнейшем — день. Борис Николаевич не переносил верхоглядства, небрежности, он отшлифовывал каждую идею, выверял каждое слово, оттачивал каждый рисунок. И, как следствие этого, во время лекции на доске легко и быстро появлялись симпатичные «аффинные коты», изящные параболоиды и гиперболоиды, четкие додекаэдры и икосаэдры. Одно время у студентов мехмата МГУ в ходу была серия анекдотов о своих профессорах на тему:

«Кто (из профессоров) в чем варит суп». Согласно студенческой версии, не лишенной иронии, Борис Николаевич варил суп в n-мерной решетке: суп, правда, вытекал, зато оставалась геометрическая наглядность.

О Делоне ходили легенды. Однажды на лекции, для того чтобы вытереть верхнюю часть доски, он начал подпрыгивать, после чего с неподражаемой интонацией обратился к студентам: «А вы знаете, что я не только знаменитый математик, но и известный альпинист. Вот вы, наверное, не только не знаете математики, но даже стойку на руках не умеете делать». И тут же на столе кафедры сделал стойку. Шел ему в то время восьмой десяток...

Борис Николаевич действительно был известным альпинистом. Увлечение альпинизмом зародилось еще в детские годы, когда он поднимался в Альпах на Монблан, Монтроз и другие вершины. Позднее он совершил много восхождений в горах Кавказа, Алтая. В 1931 году Б. Н. Делоне организовал на Кавказе для рабочих ленинградского завода «Красный путиловец» первый в стране альпинистский лагерь. В изданной им книге «Вершины Западного Кавказа» он описал несколько десятков основных вершин этого района. Описание сопровождалось выполненными им же самим рисунками каждой вершины и панорамы района в целом. Б. Н. Делоне разработал принципы технической классификации вершин, действующие и поныне. В соответствии с этой классификацией вершины и маршруты восхождений распределяются по степени трудности на десять категорий. В 1935 г. Б. Н. Делоне был удостоен почетного звания «Мастер советского альпинизма».

С возрастом на смену альпинистским восхождениям пришли туристские походы. Не прогулки на 5—10 километров, а именно настоящие 30—40-километровые походы, иногда очень трудные, и проходившие неизменно по самым красивым местам Подмосковья. Борис Николаевич был физически исключительно закаленным человеком. И все равно было не по себе наблюдать в конце зимы быстро идущего с рюкзаком, обнаженного по пояс пожилого человека. Падающий снег таял и, стекая по седой голове, застывал в виде крупных сосулек.

Борис Николаевич очень любил природу и восторгался ее красотой всегда молча, словно стараясь впитать в себя все и вся. Его восхищение невольно передавалось спутникам. Общение с природой походило на таинство, и ему было неприятно, хотя он и не подавал виду, когда это таинство нечаянно нарушалось чьими-то разговорами. Зато у костра или в электричке его спутники становились слушателями многочисленных историй, одна другой интересней. Рассказчиком Б. Н. был замечательным... «Вы, конечно, не знаете, что моя сестра святая (пауза, лукавый взгляд рассказчика, недоумение слушателей). Да-да, совершенно серьезно, святая...» и начинался интереснейший рассказ о его двоюродной сестре, русской патриотке, монахине и героине французского Сопротивления Е. Кузьминой-Караваевой (ей посвящен фильм «Мать Мария»).

В приветственном адресе по случаю 80-летия, Германская академия естествоиспытателей «Леопольдина» пожелала члену этой академии Б. Н. Делоне «спокойного вечера жизни». «Вечер жизни» продолжался еще 10 лет и не получился таким уж спокойным — он оказался достойным всей жизни.

Но жизнь подходила к своей естественной границе. Я никогда не забуду, как месяца за три до конца Борис Николаевич читал одно замечательное место у Пуанкаре. Голос дрожал: «...жизнь есть лишь беглый эпизод между двумя вечностями смерти и... в этом эпизоде прошедшая и будущая длительность сознательной мысли — не более чем мгновение. Мысль — только вспышка света посреди долгой ночи. Но эта вспышка — все».

О касательной к графику функции

Член-корреспондент АН СССР
Д. К. ФАДДЕЕВ,
И. Ф. СОКОЛОВСКИЙ

Основная цель этой статьи — наглядно пояснить, чем касательная к графику дифференцируемой функции отличается от других прямых, проходящих через точку касания. Оказывается, ответ на этот вопрос не только проясняет геометрический смысл касательной, но позволяет находить ее уравнение, не вычисляя производную функции.

Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$ чаще всего определяется как предельное положение секущей MN, когда точка N неограниченно приближается к точке M, двигаясь по графику функции (рис. 1). Из этого определения выводится («Алгебра и начала анализа», п. 23) известное уравнение касательной

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \qquad (1)$$

где $f'(x_0)$ — значение производной f' функции f при $x = x_0$. Эта формула верна в предположении, что функция f имеет производную в точке x_0.

Может возникнуть вопрос: «Почему собственно понятию касательной уделяется столько внимания? Чем касательная в точке $(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, «лучше» других прямых, проходящих через эту точку?» Ведь в общем случае о касательной к графику функции нельзя даже сказать (по аналогии с касательной к окружности), что она имеет единственную общую точку с графиком функции. Далее, касательная к графику функции может пересекать график, переходя с одной стороны графика на другую, именно в точке касания; например, так ведет себя касательная к графику функции $y = x^3$ в точке $(0; 0)$, или касательная к графику функции $y = x^3 - 3x^2$ в точке $(1; -2)$. А касательная к графику функции $y = x^4 \sin(1/x)$ пересекает график бесконечное число раз.

Итак, чем же примечательна касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$? Оказывается, что *в достаточно малой окрестности точки касания касательная прижимается к графику функции плотнее, чем любая другая прямая, проходящая через точку касания*. Разберемся в этом детальнее.

Пусть $y = f(x)$ — данная функция, имеющая производную $f'(x_0)$ в данной точке x_0. Уравнение произвольной наклонной прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$, имеет вид $y = k(x - x_0) + y_0$. При $k = f'(x_0)$ получаем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$. Ордината точки на графике функции $y = f(x)$ отличается от ординаты соответствующей точки на прямой на величину

$$\varepsilon = f(x) - (k(x - x_0) + f(x_0)) =$$
$$= f(x) - f(x_0) - k(x - x_0) =$$
$$= (x - x_0)\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - k\right).$$

Вводя обозначения $x - x_0 = \Delta x$ и $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$, это выражение можно записать короче:

$$\varepsilon = \Delta x \cdot \left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - k\right).$$

Если $k = f'(x_0)$, то есть в случае касательной, при $\Delta x \to 0$ имеем $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)$ и, следовательно, каждый сомножитель в правой части равенства стремится к нулю.

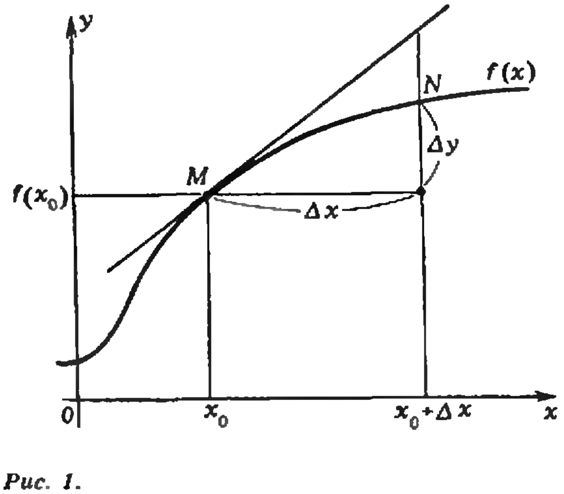


Рис. 1.

Если $k \neq f'(x_0)$, то $k = f'(x_0) + c$, где c — некоторая константа, не равная нулю. Тогда

$$\varepsilon = \Delta x \left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) - c \right).$$

При $\Delta x \to 0$ второй сомножитель в правой части равенства стремится к $c \neq 0$. Таким образом, при $\Delta x \to 0$ точка на касательной существенно быстрее приближается к соответствующей точке графика, нежели точка с той же абсциссой, на прямой, отличной от касательной.

Что особенно важно, касательная прижимается к кривой не просто количественно лучше других прямых, а в некотором смысле «на порядок лучше». Поясним это.

Перепишем выражение для ε в случае $k \neq f'(x_0)$ в виде

$$\varepsilon = \Delta x \left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right) - c\Delta x.$$

Из такой формы записи видно, что в случае, когда прямая отлична от касательной, разность между ординатами соответствующих точек на прямой и на графике функции содержит слагаемое пропорциональное Δx, то есть вида $c \cdot \Delta x$, где c — постоянная, в случае же приближения по касательной расстояние между точкой на прямой и соответствующей точкой на графике уменьшается «на порядок быстрее», чем само Δx, то есть имеет вид $\gamma \cdot \Delta x$, где γ — переменная, стремящаяся к нулю вместе с Δx. Таким образом, *среди всех прямых, проходящих через точку графика функции, только касательная отличается от функции на величину, не содержащую линейного слагаемого относительно* Δx.

Это свойство касательной и составляет ту особенность, которая выделяет ее из всего семейства прямых, проходящих через точку касания. Оно вполне характеризует касательную и поэтому может быть положено в основу определения касательной; тогда производную функции в точке можно определить как угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке. Выведенное свойство касательной обосновывает метод получения уравнения касательной через приближенные равенства, оценивающие значение функции вблизи точки касания. Покажем применение этого метода на примерах. (В дальнейшем Δx будем обозначать буквой α.)

Пример 1. *Напишем уравнение касательной к графику функции* $f(x) = x^2 - 3x - 6$ *в точке* $x_0 = -1$.

Решение. Пусть $x = -1 + \alpha$, где $|\alpha|$ близок к нулю. Тогда $f(-1+\alpha) = (-1+\alpha)^2 - 3(-1+\alpha) - 6 = 1 - 2\alpha + \alpha^2 + 3 - 3\alpha - 6 = -5\alpha + \alpha^2 - 2$. Пренебрегая α^2, получим $f(-1+\alpha) \approx -5\alpha - 2$. Вернемся к старым обозначениям; получим $f(x) \approx -5x - 7$ вблизи $x_0 = -1$. Прямая $y = -5x - 7$ вблизи $x_0 = -1$ отличается от $f(x)$ на величину, не содержащую линейного относительно α слагаемого, а таким свойством обладает только касательная, значит, $y = -5x - 7$ — уравнение касательной к графику данной функции в точке $x_0 = -1$. (Проверьте этот результат, получив уравнение касательной по формуле (1).)

Пример 2. *Выведем уравнение касательной к графику функции* $f(x) = x^2$ *в произвольной точке* x_0.

Решение. Пусть $x = x_0 + \alpha$, где $|\alpha|$ близок к 0. Тогда $f(x_0 + \alpha) = x_0^2 + 2x_0\alpha + \alpha^2$. Пренебрегаем α^2 и получаем $f(x_0 + \alpha) \approx x_0^2 + 2x_0\alpha$. В старых обозначениях $f(x) \approx x_0^2 + 2x_0 \times (x - x_0) = x_0^2 + 2x_0x - 2x_0^2 = 2x_0x - x_0^2$. Прямая $y = 2x_0x - x_0^2$ — касательная к графику функции в точке x_0, угловой коэффициент касательной $2x_0$ — производная функции x^2 в точке x_0.

Особенно простым становится вывод уравнения касательной в случае, когда выражение, задающее функцию $f(x)$, содержит линейные множители вида $(x - x_0)$.

Пример 3. *Напишем уравнения касательных к графику функции*

$$y = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

в точках пересечения графика с осью абсцисс.

Решение. Пусть $x = x_0 + \alpha$, $y = \alpha(x_0 - x_1 + \alpha)(x_0 - x_2 + \alpha)$. Ясно, что при раскрытии скобок слагаемое, линейное относительно α, имеет вид $\alpha(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$, тогда

$$y = (x - x_0)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$$

— уравнение касательной к графику функции в точке x_0. Аналогично получаем уравнения касательных в точках x_1 и x_2:

$$y = (x - x_1)(x_1 - x_0)(x_1 - x_2),$$
$$y = (x - x_2)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1).$$

Покажем конкретные примеры, в которых надо найти уравнение касательной в точке x_0.

Пример 4. *Напишем уравнение касательной к графику функции*

$$f(x)=(x+2)(x^2-4x-10)$$

при $x_0=-2$.

Решение. Пусть $x=-2+\alpha$, тогда $f(-2+\alpha)=((-2+\alpha)^2-4(-2+\alpha)-10)\cdot$ Линейное относительно α слагаемое имеет вид $\alpha((-2)^2-4(-2)-10)$, то есть второй сомножитель $f(x)$ просто заменяется его значением при $x=-2$. Возвращаясь к старым обозначениям, получим

$$y=(x+2)(4+8-10)=(x+2)\cdot 2.$$

Значит $y=2x+4$ — уравнение касательной.

Упражнение 1. *Найдите касательные к графикам функций в указанных точках:*

а) $f(x)=\dfrac{(x-1)(x^3-3x^2+1)}{x^2+1}$, $x_0=1$.

б) $f(x)=x(x+3)(x+2)(x-1)$, $x_0=0$.

Следующий пример — несколько особый случай, и мы остановимся на нем подробнее.

Пример 5. *Найдем уравнение касательной к графику функции* $f(x)=(x-2)^2(x+3)$ *при* $x_0=2$.

Решение. Пусть $x=2+\alpha$, тогда $f(2+\alpha)=\alpha^2(5+\alpha)$. Выражение для $f(2+\alpha)$ не содержит слагаемых, линейных относительно α. Это означает, что угловой коэффициент касательной равен нулю. График функции $y=f(x)$ наиболее плотно примыкает к прямой $y=0$, то есть касательной является ось Ox.

Рассуждения, приведенные выше, в несколько видоизмененной форме дают уравнения касательных в случае, когда функция имеет вид $(x-x_0)\,g(x)$, где $g(x)$ — произвольная функция. Сначала заметим следующее: на значении произведения двух сомножителей существенно сказывается относительное изменение сомножителей, а не абсолютное. Поэтому, *если один из сомножителей слабо изменяется в относительном смысле, а другой сильно, то при оценке приближенного значения произведения сомножитель, изменяющийся относительно слабо, можно считать постоянным.*

Приведем конкретный числовой пример. Рассмотрим произведение $3\times1000=3000$. Изменим на 1 первый множитель, получим $4\times1000=4000$: произведение выросло на 1000. Изменим на 1 второй множитель, получим $3\times1001=3003$: произведение выросло всего на 3.

Воспользуемся этим свойством произведения для нахождения касательных.

Пример 6. *Найдем уравнение касательной к графику функции* $f(x)=(x-3)\sqrt{7-x}$, $x_0=3$.

Решение. При неограниченном приближении x к числу 3 относительное изменение $\sqrt{7-x}$ стремится к нулю, так что этим изменением можно пренебречь и считать, что $\sqrt{7-x}\approx\sqrt{4}=2$ при $x\to3$. Сомножитель $(x-3)$ при $x\to3$ претерпевает сильное относительное изменение, поэтому оставляем его в неизменном виде. Тогда (при $x\to3$) $f(x)\approx(x-3)\cdot2$; прямая $y=2x-6$ и есть касательная к графику функции $f(x)$ в точке $x_0=3$.

Пример 7. *Найдем уравнение касательной к графику функции*

$$f(x)=\sqrt{5+x^3}$$

в точке $x=-1$.

Решение. Воспользуемся преобразованием, полезным при оценке значения квадратного корня. Заметим, что $\sqrt{5+x^3}\approx\sqrt{4}=2$ при $x\to-1$. Имеем

$$f(x)=\sqrt{5+x^3}-2+2=$$

$$=\frac{(\sqrt{5+x^3}-2)(\sqrt{5+x^3}+2)}{\sqrt{5+x^3}+2}+2=$$

$$=\frac{5+x^3-4}{\sqrt{5+x^3}+2}+2=\frac{(1+x)(1-x+x^2)}{\sqrt{5+x^3}+2}+2.$$

Слабо меняющиеся при $x\to-1$ множители заменим их значениями в точке $x=-1$. Получим

$$f(x)\approx\frac{(1+x)(1+1+1)}{\sqrt{5-1}+2}+2=\frac{3}{4}(x+1)+2;$$

прямая $y=3x/4+11/4$ — искомая касательная.

Пример 8. *Найдем уравнения касательных к графику функции*

$$f(x)=(x-5)(x-4)^2(x+3)$$

в точках а) $x_0=5$; *б)* $x_0=4$; *в)* $x_0=-3$.

Решение. а) $x_0=5$. Слабо меняющиеся множители — второй и третий; считаем их постоянными. Тогда $y\approx(x-5)(5-4)^2(5+3)$; искомая касательная: $y=8x-40$.

б) $x_0=4$. Слабо меняющиеся множители — первый и третий, поэтому здесь $y\approx(4-5)(x-4)^2(4+3)$. Это выражение не содержит $\alpha=x-4$ в первой степени, значит, угловой коэффициент касательной равен нулю и касательной является ось абсцисс $y=0$.

в) $x_0=-3$. Слабо меняются первый и второй множители, поэтому $y\approx$

$\approx(-3-5)(-3-4)^2(x+3)$; уравнение касательной — $y=-392x-1176$.

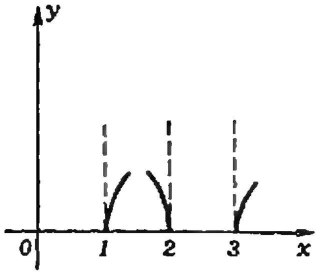


Рис. 2.

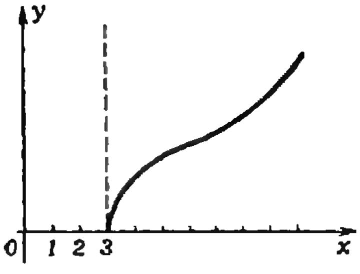


Рис. 3.

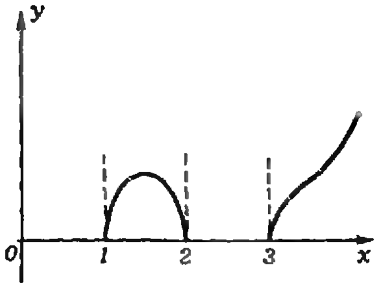


Рис. 4.

Оказывается, совершенно элементарное соображение об оценке величины произведения позволяет иногда получить ответ на довольно сложный вопрос о форме графика вблизи точки x_0. Рассмотрим такой пример.

Пример 9. *Выясним форму графика функции*

$$f(x)=\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

вблизи точек $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$.

Решение. Те же рассуждения, что и в предыдущих примерах дают:

а) около точки $x_1=1$

$$f(x)\approx\sqrt{(x-1)\cdot 12}=\sqrt{12}\cdot\sqrt{x-1};$$

б) около точки $x_2=2$

$$f(x)\approx\sqrt{-(x-2)}=\sqrt{2-x};$$

в) около точки $x_3=3$

$$f(x)\approx\sqrt{2(x-3)}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x-3}.$$

Следовательно, вблизи точек $x_1=1$, $x_3=3$ график функции $f(x)$ получается из графика функции $\sqrt{x}$ сдвигом на 1 и 3 соответственно, а вблизи точки $x_2=2$ — сдвигом на 2 и отражением относительно прямой $x=2$ (рис. 2).

Аналогичные рассуждения можно применить и в случае, если мы хотим оценить вид графика данной функции при больших значениях x. При неограниченном возрастании x отбрасывание слагаемых -1, -2 и -3 относительно мало меняет сомножители, а значит, слабо сказывается на произведении. Можно считать, что $f(x)\approx\approx\sqrt{x^3}=x\sqrt{x}$ при $x\to\infty$. Ясно, что при больших значениях x функция $y=x\sqrt{x}$ растет быстрее, чем $y=kx$, так как $y/x=\sqrt{x}$, — растет не только y, но и отношение y/x, в то время как у прямой $y=kx$ это отношение постоянно. Таким образом, $y=x\sqrt{x}$ «обгоняет» любую прямую. Отсюда вытекает, что при достаточно больших x график функции все более круто поднимается вверх, то есть имеет форму, выпуклостью обращенную вниз, показанную на рис. 3.

Таким образом, на основе элементарных рассуждений, не используя производную, мы получили довольно полное представление о форме графика весьма сложной функции. Схематический график функции $f(x)$ показан на рисунке 4.

Замечание. Приближенное равенство $f(x)\approx x\sqrt{x}$ в примере 8 при больших и возрастающих x не означает, что график функции асимптотически, то есть сколь угодно близко, приближается к графику функции $y=x\sqrt{x}$. Знак приближенного равенства в этих случаях означает, что мала лишь относительная погрешность приближения, абсолютная же погрешность неограниченно возрастает вместе с ростом x, но тем не менее она составляет все меньшую долю самого значения функции $f(x)$. Графически это означает, что при любом выборе масштаба графики данных функций и данной функции $y=x\sqrt{x}$ в пределах точности построения станут неразличимы при достаточно больших x.

Упражнение 2. а) *Постройте график функции*

$$f(x)=\sqrt{(x-1)(x-3)^2}.$$

б) *Определите знаки* $g(x)$ *вблизи точки* $x_0=1$, *не прибегая к методу интервалов, если*

$$g(x)=\frac{(x-1)(x^2-14x+8)}{x^2+15x-31}.$$

В заключение заметим, что цель настоящей статьи вовсе не в том, чтобы заменить известные вам из начал анализа методы исследования функций и построения их графиков элементарными приемами решения подобных задач. Нам хотелось показать, что если отвлечься от проблем обоснований и строгости, то основная идея дифференциального исчисления сводится к очень простому соображению: на небольшом участке график «хорошей» функции успевает мало изогнуться и тем меньше, чем меньше рассматриваемый участок. Поэтому малый участок кривой линии почти совпадает с отрезком некоторой прямой — эта прямая и есть касательная — и их различие постепенно исчезает по мере стягивания участка кривой к некоторой точке.

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Вторая космическая скорость» предназначена восьмиклассникам, «Магнитный момент тока» — девятиклассникам, «О ядерном веществе» — десятиклассникам. Материалы подготовил Н. К. Белкин.

Вторая космическая скорость

Если некоторому телу сообщить скорость, равную первой космической скорости, то оно не упадет на Землю, а станет искусственным спутником, движущимся по околоземной круговой орбите. Напомним, что эта скорость должна быть перпендикулярна направлению к центру Земли и равна по величине

$$v_I=\sqrt{gR}=7{,}9 \text{ км/с},$$

где $g=9{,}8$ м/с^2 — ускорение свободного падения тел у поверхности Земли, $R=6{,}4\cdot10^6$ м — радиус Земли (см. «Физику 8», § 40).

А может ли тело и вовсе порвать цепи тяготения, «привязывающие» его к Земле? Оказывается, может, но для этого его нужно «бросить» с еще большей скоростью. Минимальную начальную скорость, которую необходимо сообщить телу у поверхности Земли, чтобы оно преодолело земное притяжение, называют второй космической скоростью v_{II}. Найдем ее значение.

При удалении тела от Земли сила притяжения совершает отрицательную работу, в результате чего кинетическая энергия тела уменьшается. Одновременно с этим уменьшается и сила притяжения. Если кинетическая энергия упадет до нуля до того, как станет равной нулю сила притяжения, тело вернется обратно на Землю. Чтобы этого не произошло, нужно, чтобы кинетическая энергия сохранялась отличной от нуля до тех пор, пока сила притяжения не обратится в нуль. А это может произойти лишь на бесконечно большом расстоянии от Земли.

Согласно теореме о кинетической энергии (см. «Физику 8», § 55) изменение кинетической энергии тела равно работе действующей на тело силы. Для нашего случая можно записать:

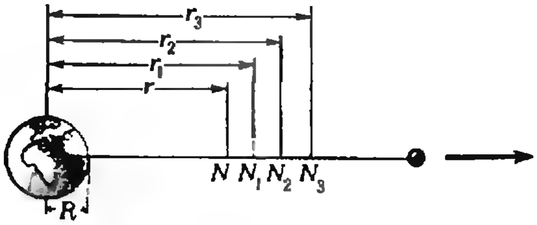
$$0-\frac{mv_{II}^2}{2}=A,$$

или

$$\frac{mv_{II}^2}{2}=-A, \qquad (*)$$

где m — масса брошенного с Земли тела, A — работа силы притяжения. Таким образом, для вычисления второй космической скорости нужно найти работу силы притяжения тела к Земле при удалении тела от поверхности Земли на бесконечно большое расстояние. Как это ни удивительно, но работа эта вовсе не бесконечно большая, несмотря на то, что перемещение тела как будто-бы бесконечно велико. Причина тому — уменьшение силы притяжения по мере удаления тела от Земли. Чему же равна работа силы притяжения?

Воспользуемся той особенностью, что работа силы притяжения не зависит от формы траектории движения тела (см. «Физику 8», § 56), и рассмотрим самый простой случай — тело удаляется от Земли по линии, проходящей через центр Земли. На приведенном здесь рисунке изображен Земной шар и тело массой m, которое движется вдоль направления, указанного стрелкой.



Найдем сначала работу A_1, которую совершает сила притяжения на очень малом участке от произвольной точки N до точки N_1. Расстояния этих точек до центра Земли обозначим через r и r_1 соответственно, так что работа A_1 будет равна

$$A_1=-F(r_1-r)=F(r-r_1).$$

Но какое значение силы F следует подставить в эту формулу? Ведь оно изменяется от точки к точке: в N оно равно GMm/r^2 (M — масса Земли), в точке N_1 — GMm/r_1^2. Очевидно, нужно взять среднее значение этой силы. Так как расстояния r и r_1 мало отличаются друг от друга, то в качестве среднего можно взять значение силы в некоторой средней точке, например такой, что $r_{ср}^2 = rr_1$. Тогда получаем

$$A_1 = G\frac{Mm}{rr_1}(r-r_1) = GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right).$$

Рассуждая таким же образом, найдем, что на участке N_1N_2 совершается работа

$$A_2 = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

на участке N_2N_3 совершается работа

$$A_3 = GMm\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2}\right),$$

а на участке NN_3 работа равна

$$A_1 + A_2 + A_3 = GMm\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r}\right).$$

Закономерность ясна: работа силы притяжения при перемещении тела от одной точки к другой определяется разностью обратных расстояний от этих точек до центра Земли. Теперь нетрудно найти и всю работу A при перемещении тела от поверхности Земли ($r=R$) на бесконечно большое расстояние ($r \to \infty$, $1/r = 0$):

$$A = GMm\left(0 - \frac{1}{R}\right) = -\frac{GMm}{R}.$$

Как видно, эта работа и в самом деле не бесконечно велика*).

Подставив полученное выражение для A в формулу (*), найдем значение второй космической скорости:

$$v_{II} = \sqrt{-\frac{2A}{m}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} = 11{,}2 \text{ км/с}.$$

Отсюда видно, что вторая космическая скорость в $\sqrt{2}$ раз больше первой космической скорости:

$$v_{II} = \sqrt{2}\, v_I.$$

В проведенных расчетах мы не принимали во внимание то, что наше тело взаимодействует не только с Землей, но и с другими космическими объектами. И в первую очередь — с Солнцем. Получив начальную скорость, равную v_{II}, тело сумеет преодолеть тяготение к Земле, но не станет истинно свободным, а превратится в спутник Солнца. Однако если телу у поверхности Земли сообщить так называемую третью космическую скорость $v_{III} = 16{,}6$ км/с (попробуйте получить это значение самостоятельно), то оно сумеет преодолеть и силу притяжения к Солнцу.

Магнитный момент тока

Из курса физики девятого класса («Физика 9», § 88) известно, что на прямолинейный проводник длиной l с током I, если он помещен в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, действует сила $\vec{F}$, равная по модулю

$$F = BIl \sin\alpha,$$

где α — угол между направлением тока и вектором магнитной индукции. Направлена эта сила перпендикулярно и полю, и току (по правилу левой руки).

Прямолинейный проводник — это только часть электрической цепи, поскольку электрический ток всегда замкнут. А как магнитное поле действует на замкнутый ток, точнее — на замкнутый контур с током?

На рисунке 1 в качестве примера показан контур в форме прямоугольной рамки со сторонами a и b, по которой в указанном стрелками направлении течет ток I. Рамка помещена в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ так, что в начальный момент вектор $\vec{B}$ лежит в плоскости рамки и параллелен двум ее сторонам. Рассматривая каждую из сторон рамки по отдельности, мы найдем, что на боковые стороны (длиной a) действуют силы, равные по модулю $F = BIa$ и направленные в противоположные стороны. На две другие стороны силы не действуют (для них $\sin\alpha = 0$). Каждая из сил F относительно оси, проходящей через середины верхней и нижней сторон рамки, создает момент силы (вращающий момент), равный $BIab/2$ ($b/2$ — плечо силы). Знаки моментов одинаковы (обе силы поворачивают рамку в одну сторону), так что общий вращающий момент M равен $BIab$, или, поскольку произведение ab равно площади S рамки,

$$M = BIab = BIS.$$

Под действием этого момента рамка начнет поворачиваться (если смотреть сверху, то по часовой стрелке) и будет поворачиваться до тех пор, пока не станет своей плоскостью перпендикулярно вектору индукции $\vec{B}$ (рис. 2). В этом положении сумма сил и сумма

---

*) Десятиклассникам понятно, что таким способом мы вычислили интеграл.

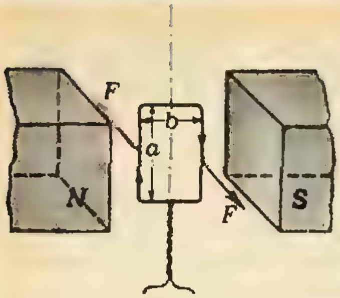


Рис. 1.

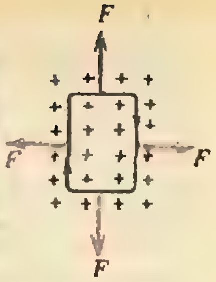


Рис. 2.

моментов сил равны нулю, и рамка *находится* в состоянии устойчивого равновесия. (На самом деле рамка остановится не сразу — в течение некоторого времени она будет совершать колебания около своего положения равновесия.)

Нетрудно показать (сделайте это самостоятельно), что в любом промежуточном положении, когда нормаль к плоскости контура составляет произвольный угол β с индукцией магнитного поля, вращающий момент равен

$$M = BIS \sin \beta.$$

Из этого выражения видно, что при данном значении индукции поля и при определенном положении контура с током вращающий момент зависит только от произведения площади контура S на силу тока I в нем. Величину IS и называют магнитным моментом контура с током. Говоря точнее, IS — это модуль вектора магнитного момента. А направлен этот вектор перпендикулярно плоскости контура и притом так, *что если мысленно вращать* буравчик в направлении тока в контуре, то направление поступательного движения буравчика укажет направление магнитного момента. Например, магнитный момент контура, показанного на рисунках 1 и 2, направлен от нас за плоскость страницы. Измеряется магнитный момент в А · м^2.

Теперь мы можем сказать, что контур с током в однородном магнитном поле устанавливается так, чтобы его магнитный момент «смотрел» в сторону того поля, которое вызвало его поворот.

Известно, что не только контуры с током обладают свойством создавать собственное магнитное поле и поворачиваться во внешнем поле. Такие же свойства наблюдаются и у намагниченного стержня, например у стрелки компаса.

Еще в 1820 году замечательный французский физик Ампер высказал идею о том, что сходство поведения магнита и контура с током объясняется тем, что в частицах магнита существуют *замкнутые токи. Теперь* известно, что в атомах и молекулах действительно есть мельчайшие электрические токи, связанные с движением электронов по своим орбитам вокруг ядер. Из-за этого атомы и молекулы многих веществ, например парамагнетиков, обладают магнитными *моментами. Поворот этих моментов* во внешнем магнитном поле и приводит к намагничиванию парамагнитных веществ.

Выяснилось и другое. Все частицы, входящие в состав атома, обладают также магнитными моментами, вовсе не связанными с какими-либо *движениями зарядов*, то есть с токами. Для них магнитный момент является таким же «врожденным» качеством, как заряд, масса и т. п. Магнитным моментом обладает даже частица, не имеющая электрического заряда,— нейтрон, составная часть атомных ядер. Магнитным моментом обладают поэтому и атомные ядра.

Таким образом, магнитный момент — одно из самых важных понятий в физике.

О ядерном веществе

В состав атомного ядра входят частицы двух типов: положительно заряженные протоны и нейтральные нейтроны. Они очень близки по массе $m_p \approx m_n \approx 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг. Величина эта ничтожна, но, тем не менее, плотность вещества в ядре очень велика. Попытаемся оценить ее.

Опыты Резерфорда, в которых было открыто существование атомного ядра, показали, что размер его $\sim 10^{-14}$—10^{-15} м. Последующие измерения дали для радиуса ядра с массовым числом $A > 10$ значение

$$R_я \approx 1{,}3 \cdot 10^{-15} \sqrt[3]{A} \text{ м}.$$

При этом для объема ядра (считая его сферическим) имеем

$$V_я = \frac{4}{3} \pi R_я^3 \approx 10^{-44} A \text{ м}^3.$$

Масса ядра

$$M_я \approx m_p A,$$

поэтому плотность вещества в ядре

$$\rho_я = \frac{M_я}{V_я} \approx \frac{m_p A}{V_я} \approx 10^{17}\ кг/м^3.$$

Она оказывается чудовищно большой. Если бы можно было сплошь заполнить ядрами кубик объемом один кубический сантиметр, то масса этого кубика была бы равна примерно 100 миллионов тонн!

Такая грандиозная плотность ядерного вещества свидетельствует, очевидно, о существовании огромных сил притяжения, действующих между частицами, составляющими ядро. (Об основных свойствах ядерных сил рассказывается в § 107 «Физики 10».)

Кроме обычных ядер, физики-теоретики предполагают возможность существования и «необычных»: чисто нейтронных, сверхплотных (в них вещество сжато еще в несколько раз сильнее) и т. п. Экспериментальные поиски их пока не привели к положительным результатам.

Может ли в природе ядерное вещество существовать в виде больших образований? Положительный ответ на этот вопрос был получен, когда астрономы обнаружили (в 1967 году) нейтронную звезду.

Такая звезда может образоваться из обычной при быстром сжатии. В обычной звезде существует равновесие между силами гравитации, стремящимися сжать звезду, и силами давления нагретого звездного вещества, препятствующими этому сжатию. Сжатие начинается, когда внутри звезды термоядерные источники энергии исчерпают свои ресурсы. Звезда остывает, равновесие нарушается, и вещество устремляется к центру звезды. Плотность материи резко возрастает, атомные электроны «вдавливаются» в ядра и начинаются ядерные реакции превращения протонов в нейтроны. Приходит момент, когда вещество внутри звезды будет состоять, в основном, из нейтронов и иметь ядерную плотность. При этом звезда с массой, равной солнечной, должна сжаться до шара радиусом ~10 км.

Возможность существования нейтронных звезд предсказал выдающийся советский физик Л. Д. Ландау.

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Решите уравнение

$$x^3-9x^2+27x=19.$$

2. Докажите, что число $1984\cdot 1985\cdot 1986\times\times 1987+1$ является полным квадратом.

3. Докажите, что если у двух выпуклых четырехугольников середины сторон совпадают, то их площади равны*)

4. x, y — целые числа, причем число $6x+11y$ делится на 31. Докажите, что число $x+7y$ также делится на 31.

5. Из пунктов A и B, расположенных на расстоянии 100 км, одновремено выезжают навстречу друг другу два велосипедиста, которые двигаются со скоростью 20 км/ч и 30 км/ч. Вместе с первым велосипедистом из пункта A вылетает муха-слепень со скоростью 50 км/ч и летит по направлению к пункту B до встречи со вторым велосипедистом, затем поворачивает и летит обратно до встречи с первым велосипедистом, снова поворачивает и т. д. Сколько километров пролетит слепень в направлении от пункта A к пункту B до того момента, как велосипедисты встретятся?

Девятый класс

6. Постройте график функции

$$y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right).$$

7. Какое число больше: $\lg^2 11$ или $\lg 12$?

8. Докажите, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равен полусумме двух других его сторон, то это трапеция.

9. Существуют ли заданные на всей числовой оси функции f и g такие, что для всех x и y выполняется равенство

$$f(x)\cdot g(y)=x+y+1?$$

10. Постройте квадрат по четырем точкам, лежащим по одной на его сторонах.

Десятый класс

11. Какое число больше: $\cos\sin 1$ или $\sin\cos 1$?

12. Сколько у уравнения

$$(x-y)^2=x+y$$

целочисленных решений, удовлетворяющих неравенствам $|x|<100$, $|y|<100$?

13. Диагонали делят трапецию на четыре треугольника. Пусть s — площадь трапеции, s_1 и s_2 — площади двух треугольников, которые примыкают к основаниям трапеции. Докажите, что $\sqrt{s}=\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}$.

14. Действительные числа x, y, a таковы, что $x+y=a-1$, $xy=a^2-7a+14$. При каком значении a сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение?

15. Может ли сечение n-угольной призмы быть правильным $(n+2)$-угольником?

Публикацию подготовил Л. Д. Курляндчик

---

*) Эту же задачу нам прислал С. Р. Сефибеков. *(Примеч. ред.)*

Квант для младших школьников

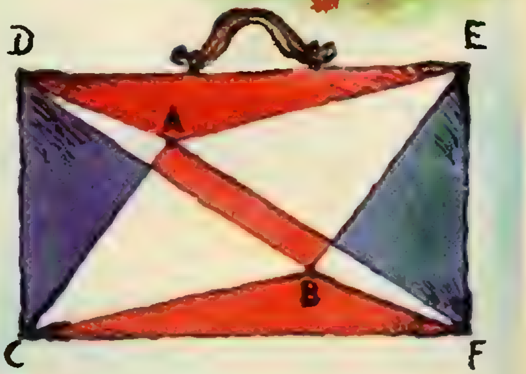
Задачи

1. Руслан купил для своей коллекции четыре марки: кубинскую, монгольскую, болгарскую и польскую. Стоимость покупки без кубинской марки — 40 копеек, без монгольской — 45 копеек, без болгарской — 44 копейки, а без польской — 27 копеек. Сколько стоит каждая марка?

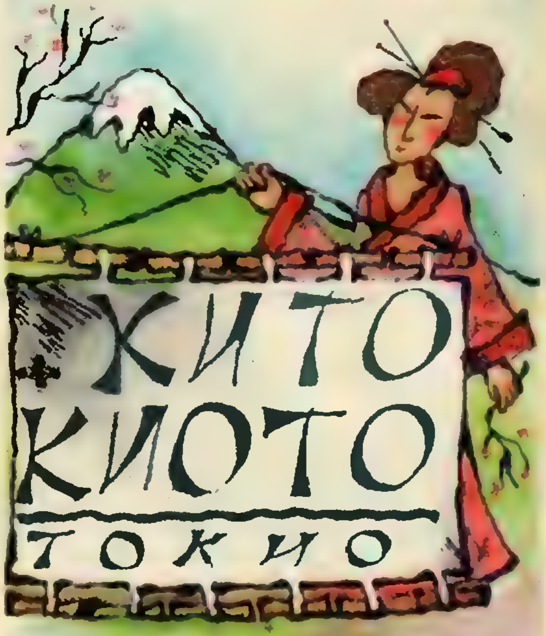
2. Если к двадцати прибавить шестнадцать, получится 36 — полный квадрат. Если от двадцати отнять шестнадцать, получится четыре — тоже полный квадрат. Существуют ли еще числа, которые становятся полными квадратами после прибавления и вычитания числа 16?

3. Туристы подошли к небольшой речке, через которую переброшено бревно. Им нужно перебраться на другую сторону. Первый турист пошел по бревну и упал в воду, но сумел перебраться на другой берег вплавь. Тогда руководитель быстро перебежал по бревну. За ним перебежали на другую сторону и остальные туристы.

Почему по бревну лучше перебежать, чем перейти?



4. Точки A и B, взятые внутри прямоугольника $CDEF$, соединили с его вершинами. Два из образовавшихся треугольников закрасили в синий цвет, еще два — в красный цвет, так же как и центральный четырехугольник (см. рисунок). Докажите, что площадь красной части прямоугольника равна площади его синей части для любого расположения точек A и B внутри прямоугольника.



5. При каком основании системы счисления имеет решение (и какое) числовой ребус на рисунке? (О системах счисления см. ответ на шуточное стихотворение «Необыкновенная девочка» на с. 60.)

Эти задачи нам предложили *В. Д. Вьюн*, ученик 7 класса школы № 60 г. Баку *Назим Ширинов*, *С. С. Кротов*, *Г. А. Гальперин*, *А. В. Швецов*.

Королевский крокет

У входа в сад рос большой розовый куст, розы на нем были белые, но три садовника усердно красили их в красный цвет. Подходя Алиса услышала: — Пятерка! Ты меня забрызгал!

— Это Семерка толкнул меня — отвечал Пятерка. Семерка посмотрел на него и сказал:

— Правильно! Всегда сваливай на другого!

— Ты бы лучше помалкивал. — сказал Пятерка. — Вчера я своими ушами слышал, как Королева сказала, что тебе давно пора отрубить голову!

— Ну, знаете,...— но взгляд его упал на Алису. Все трое склонились в низком поклоне. —Скажите, пожалуйста, — робко спросила Алиса, — зачем вы красите эти розы? Двойка

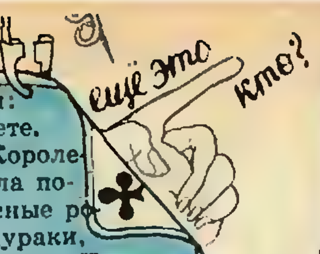
кто ещё это?
кто это ещё?

Валету, но тот лишь улыбнулся и поклонился. Потом она обернулась к Алисе и спросила: «Как тебя зовут, дитя?» — Меня зовут Алисой, с позволения Вашего Величества, — ответила Алиса учтиво. — А это кто такие — спросила Королева указывая на валявшихся вокруг куста садовников. Они лежали лицом вниз, и Королева не могла разобрать — садовники это, или придворные. — Переверни их! — приказала она Валету. Валет осторожно перевернул садовников носком сапога. — Встать! — крикнула Королева. Садовники вскочили и принялись кланяться. — Сию же минуту перестаньте! — завопила Королева. — У меня от ваших поклонов голова закружилась! — И, взглянув на куст роз, прибавила: — А что это вы тут делали? — С позволения Вашего Величества, — смиренно начал Двойка — мы... — Все ясно! — произнесла Королева. — Отрубить им головы! И шествие двинулось дальше. Только три солдата задержались, чтобы привести приговор в исполнение.

ли все сразу, не дожидаясь очереди. В скором времени Королева пришла в бешенство, топала ногами и то и дело кричала: — Отрубить ей голову! Голову ему долой! Алиса забеспокоилась, решив, что у нее с Королевой спор мог возникнуть в любую минуту. «Что со мной будет? — думала Алиса. — Здесь так любят рубить людям головы. Она огляделась, желая незаметно улизнуть, как вдруг над головой у нее появилось что-то непонятное. Алиса никак не могла понять, что же это такое, но через

ется, — сказала Алиса. — Я это где-то читала, Увидев проходившую мимо Королеву, Король крикнул: — Душенька, вели убрать этого кота! — Отрубить ему голову! — крикнула она, не глядя. Алисин фламинго забрел на другой конец сада и Алиса пошла за ним. Алиса увидела, как он безуспешно пытается взлететь на дерево. Когда она, наконец, поймала его и принесла обратно, ...жи уже перестали драться и разбежались.

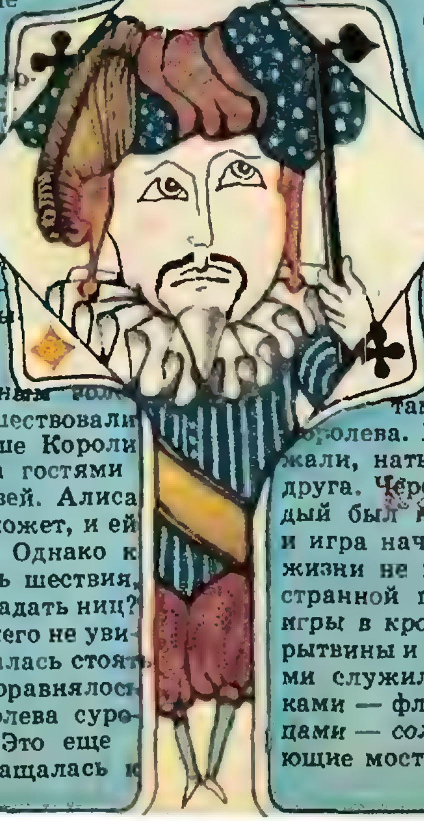
«Ну и пусть, — подумала Алиса. — Все равно воротца тоже ушли». Она сунула фламинго под мышку и вернулась к Коту. Ей хотелось с ним поговорить. Подойдя к тому месту, где в воздухе парила его голова, она с удивлением увидела, что вокруг образовалась большая толпа. Палач, Король и Королева шумно спорили: каждый кричал свое, не слушая другого, а остальные молчали и только смущенно переминались с ноги на ногу. Завидев Алису, все трое бросились к ней, чтобы



тихо сказал:

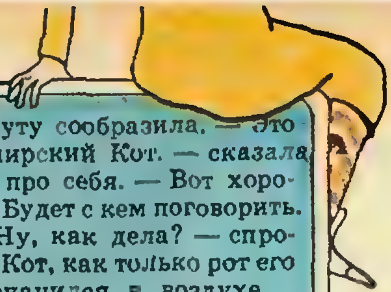
— Понимаете, барышня, Королева приказала посадить красные розы, а мы, дураки, посадили белые. Плакали теперь наши головы. В эту минуту Пятерка крикнул:

— Королева! Садовники пали ниц. Алиса обернулась. — Впереди выступали десять солдат с пиками наперевес; они были очень похожи на садовников — такие же плоские и четырехугольные. За ними — десять придворных; их одежды были расшиты крестами. За придворными бежали королевские дети. Их было тоже десять. Одежда у них сверкала червонным золотом. За ними шествовали гости, все больше Короли и Королевы. За гостями шел Валет Червей. Алиса заколебалась: может, и ей броситься ниц? Однако к чему устраивать шествия, если все будут падать ниц? Никто тогда ничего не увидит... И она осталась стоять. Едва шествие поравнялось с Алисой, Королева сурово спросила: «Это еще кто?». Она обращалась к



Несчастные садовники бросились к Алисе за помощью. — Не бойтесь, — сказала Алиса. — Я вас в обиду не дам. И она сунула их в цветочный горшок. Солдаты походили вокруг, поискали и зашагали прочь. — Ну что, отрубили им головы? — крикнула Королева. — Пропали их головы, Ваше Величество. — гаркнули солдаты. — Отлично! — завопила Королева. — Сыграем в крокет? Солдаты молча сделали знак Алисе. — Сыграем! — крикнула Алиса и вошла в толпу гостей.

— Все по местам! — закричала Королева. И все побежали, натыкаясь друг на друга. Через минуту каждый был на своем месте, и игра началась. Алиса в жизни не видала такой странной площадки для игры в крокет: сплошные рытвины и борозды. Шарами служили ежи, молотками — фламинго, а воротцами — солдаты, делающие мостик. Игроки би-



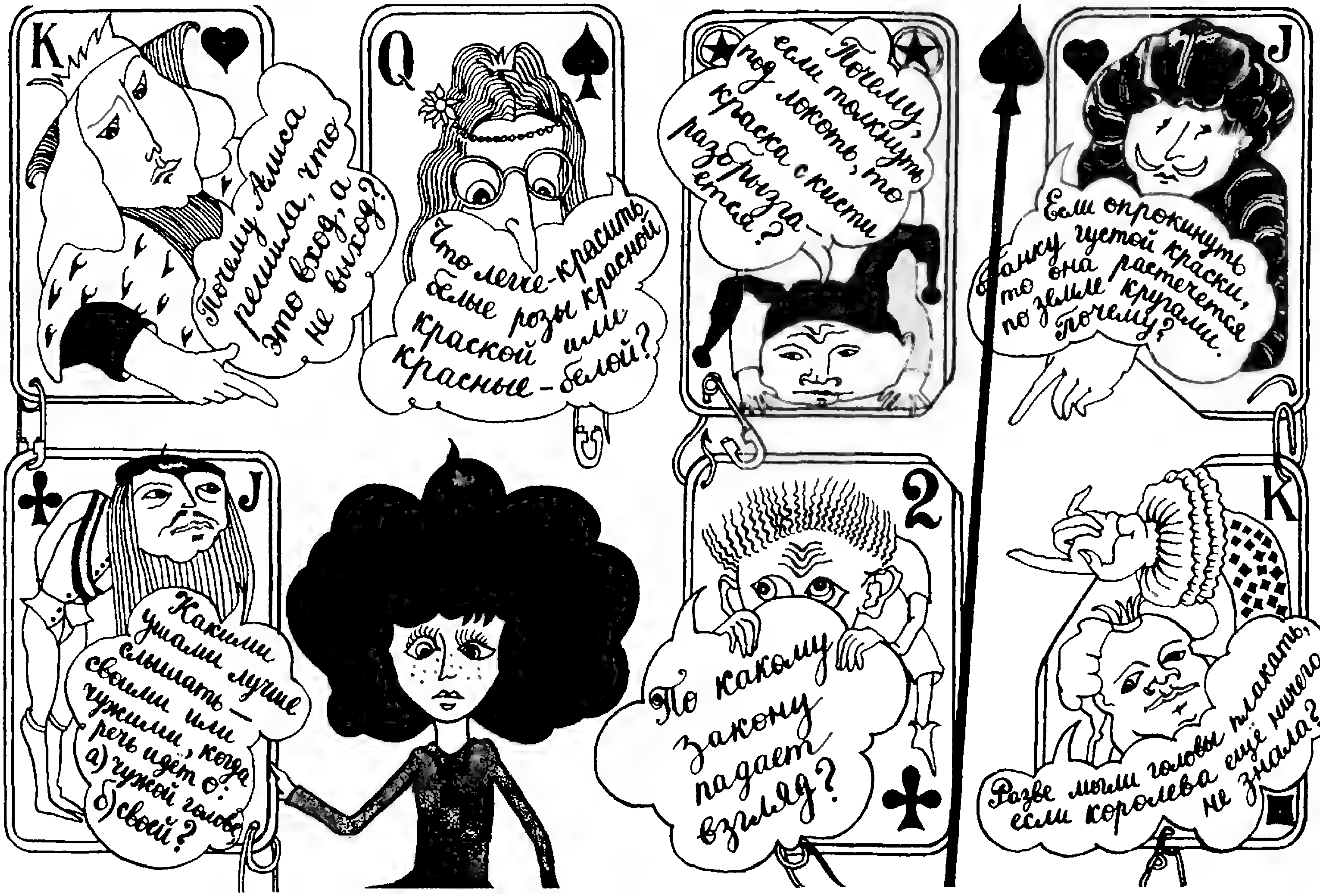
минуту сообразила. — Это Чеширский Кот, — сказала она про себя. — Вот хорошо! Будет с кем поговорить.

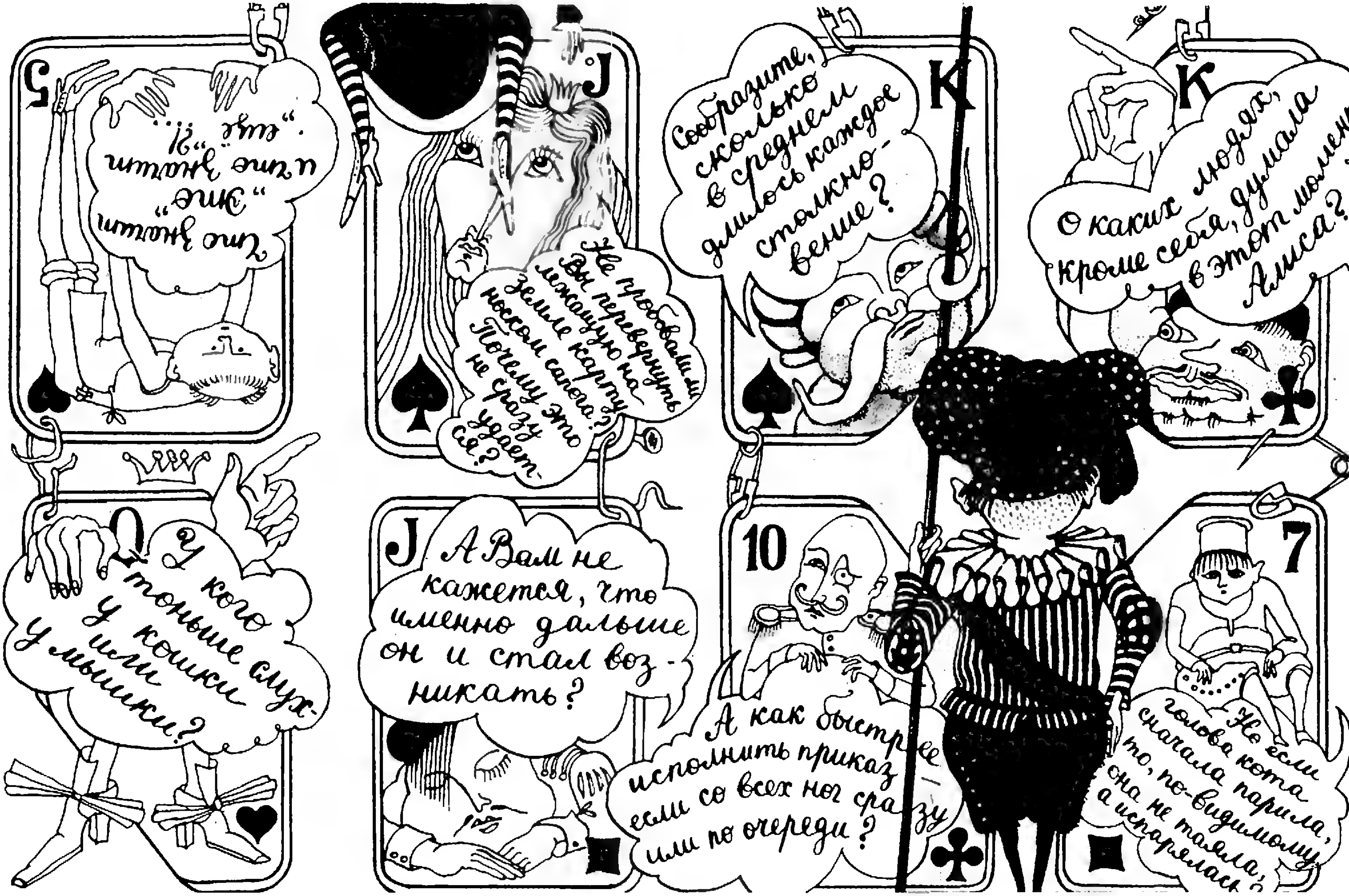
— Ну, как дела? — спросил Кот, как только рот его обозначился в воздухе. «Отвечать сейчас все равно бесполезно, — подумала она, — Подожду, пока появятся уши — или хотя бы одно!» Через минуту показалась вся голова. Кот, очевидно, решил, что головы вполне достаточно, и дальше возникать не стал.

— По-моему, они играют совсем не так, — проговорила Алиса. — Справедливости никакой. Правил нет, а если есть, то никто их не соблюдает. — С кем это ты разговариваешь? — спросил Король, подходя к Алисе и с любопытством глядя на парящую голову.

— Это мой друг, Чеширский Кот, — отвечала Алиса. — Он мне совсем не нравится, — заметил Король. — Впрочем, пусть поцелует мне руку, если хочет. — Особого желания не имею, — сказал Кот. — Не смей говорить дерзости, — пробормотал Король. — И не смотри так на меня. — Котам на королей смотреть не возбраня-

она разрешила их спор. Они громко повторяли свои доводы, но так как все говорили разом, она никак не могла понять, в чем дело. Палач говорил, что нельзя отрубить голову, если кроме головы ничего больше нет. Он такого никогда не делал и делать не собирается. Стар он для этого, вот что! Король говорил, что раз есть голова, то ее можно отрубить. И нечего нести вздор! А Королева говорила, что если сию же минуту они не примутся за дело, она велит отрубить головы. Алиса не нашла ничего лучшего, как сказать: — Кот принадлежит Герцогине. Лучше бы посоветоваться с ней. — Она в тюрьме, — сказала Королева и повернулась к палачу. — Веди ее сюда! Палач со всех ног бросился исполнять приказ. Голова Кота начала медленно таять, так что, когда палач привел Герцогиню, ее уже не было видно.


Почему Алиса решила, что это вход, а не выход?
Что легче — красить белые розы красной краской или красные — белой?
Почему, если толкнуть под локоть, то краска с кисти разбрызгается?
Если опрокинуть банку густой краски, то она растечется по земле кругами. Почему?
Какими ушами слышать лучше — своими или чужими, когда речь идёт о: а) чужой голове б) своей?
По какому закону падает взгляд?
Разве могли головы плакать, если королева ещё ничего не знала?


Что значит „Это" и что значит „ещё"?!..
Не пробовали ли Вы перевернуть лежащую на земле карту носком сапога? Почему это не сразу удаётся?
Сообразите, сколько в среднем длилось каждое столкновение?
О каких людях, кроме себя, думала в этот момен Алиса?
У кого тоньше слух — у кошки или у мышки?
А Вам не кажется, что именно дальше он и стал возникать?
А как быстрее исполнить приказ — если со всех ног сразу или по очереди?
Но если голова кота сначала парила, то, по-видимому, она не таяла, а испарялась?

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из Задачника «Кванта». Ниже публикуются списки победителей конкурса «Задачник «Кванта» 1985 года. Награждаются Дипломом и значком журнала «Квант» и получают право участвовать сразу в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады 1986 года:

По математике

А. АКСЕНОВ — Великие Луки, с. ш. № 7, 9 кл.
М. АЛЕКСАНДРОВ — Москва, с. ш. № 542, 10 кл.
Я. АРГЕНТОВ — Алма-Ата, РОФМШ, 10 кл.
Я. ВАРШАВСКИЙ — Харьков, с. ш. № 27, 8 кл.
Т. ГАЗАРЯН — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
Д. ГАМАРНИК — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 10 кл.
О. ГЕВОРКОВ — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 9 кл.
Р. ГЕНДЛЕР — Ташкент, с. ш. № 110, 9 кл.
Н. ГРИГОРЬЕВА — Андропов, с. ш. № 33, 10 кл.
А. ГРИГОРЯН — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
А. ДАВТЯН — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
Д. ДОБРИЦЫН — Москва, с. ш. № 91, 9 кл.
А. ДЫННИКОВ — Жуковский, с. ш. № 1, 10 кл.
Д. ЗАЙЦЕВ — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
А. ИВАНОВ — Первомайск, с. ш. № 15, 10 кл.
С. ИСМАИЛОВ — Баку, ФМШ № 1, 10 кл.
В. КАПОВИЧ — Хабаровск, с. ш. № 2, 10 кл.
О. КИРНАСОВСКИЙ — Винница, с. ш. № 15, 8 кл.
А. КИСЕЛЕВ — Леиинград, с. ш. № 30, 10 кл.
А. КОНОНЕНКО — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
Б. КРУГЛИКОВ — Харьков, с. ш. № 149, 9 кл.
М. КУРИННОЙ — Харьков, с. ш. № 27, 10 кл.
Н. КУШЛЕВИЧ — Москва, с. ш. № 91, 9 кл.
С. КЯРАС — Молетай, с. ш. № 2, 10 кл.
О. ЛИМЕШКО — Куйбышев, с. ш. № 16, 9 кл.
К. МАМУРОВ — Душанбе, с. ш. № 53, 10 кл.
В. МЕХРАБОВ — Баку, с. ш. № 20, 10 кл.
Г. МИХАЛКИН — Ленинград, с. ш. № 30, 10 кл.
М. МУНЬКИН — Алма-Ата, РОФМШ, 10 кл.
Д. МУРАЛАШВИЛИ — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 10 кл.
И. РАСКИНА — Витебск, с. ш. № 31, 10 кл.
М. РЗАЕВ — Баку, с. ш. № 94, 9 кл.
И. САМОВОЛ — Гайворон, с. ш. № 5, 9 кл.
Р. СИБИЛЕВ — Ленинград, с. ш. № 30, 10 кл.
И. СИМОНЕНКО — Великие Луки, с. ш. № 1, 10 кл.
Д. ТАМАРКИН — Горький, с. ш. № 17, 9 кл.
К. ТИЩЕНКО — Минск, с. ш. № 65, 10 кл.
Ю. ШАМРУК — д. Новый Даор Гродненской обл., 8 кл.
В. ЭПИКТЕТОВ — Алма-Ата, РОФМШ, 10 кл.

По физике

А. АБАНОВ — Красноярск, с. ш. № 170, 10 кл.
М. АХМЕДОВ — Сумгаит, с. ш. № 23, 10 кл.
К. БЕДОВ — Челябинск, с. ш. № 138, 10 кл.
А. БЕРЕНГОЛЬЦ — Кишинев, с. ш. № 3, 10 кл.
О. БЕСМАН — Алма-Ата, РОФМШ, 10 кл.
А. БЕСПАЛОВ — Тбилиси, с. ш. № 37, 10 кл.
А. БЫЦКО — Ленинград, с. ш. № 239, 9 кл.
А. ВОЛОШИН — Ивановка Кирг. ССР, с. ш. № 2, 10 кл.
А. ГАМАЮНОВ — Полтава, с. ш. № 6, 9 кл.
Б. ДОБРОВОЛЬСКИЙ — Тбилиси, с. ш. № 42, 10 кл.
А. ДОДА — Корсунь-Шеаченковский, с. ш. № 4, 10 кл.
Д. ЕЖИКОВ — Минск, с. ш. № 32, 9 кл.
А. ЖАРИКОВ — Киев, с. ш. № 157, 10 кл.
К. ЗАХАРОВ — Фрунзе, с. ш. № 61, 10 кл.
Н. ЗАХАРОВА — Алма-Ата, РОФМШ, 10 кл.
Б. ЗИНГЕРМАН — Самарканд, с. ш. № 51, 10 кл.
С. ИВАНОВ — Уфа, с. ш. № 12, 10 кл.
В. КАЛАЦКИЙ — Солигорск, с. ш. № 2, 10 кл.
М. КЕЛЬМАНСОН — Москва, с. ш. № 47, 10 кл.
П. ЛУШНИКОВ — Москва, с. ш. № 47, 10 кл.
А. МАКСИМОВ — Ташкент, с. ш. № 110, 10 кл.
Ю. МАХЛИН — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
В. МЕЛИК-АЛАВЕРДЯН — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
Г. НИКОЛАИШВИЛИ — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 10 кл.
И. ОБИЖАЕВ — Ташкент, с. ш. № 50, 10 кл.
А. ПАРЕЦКИЙ — Минск, с. ш. № 23, 10 кл.
С. РАХАМОВ — Казань, с. ш. № 131, 10 кл.
А. РОЗЕНВАЙН — Киев, с. ш. № 206, 9 кл.
Е. РОЗНОЩИК — Киев, с. ш. № 206, 9 кл.
С. РОСЯ — Минск, с. ш. № 76, 10 кл.
Р. САДЫКОВ — Фрунзе, с. ш. № 61, 10 кл.
В. ТАРНЕЦКИЙ — Алма-Ата, РОФМШ, 10 кл.
С. ТУЖАНСКИЙ — Виниица, с. ш. № 33, 10 кл.
Р. УЛЬМАСОВ — Душанбе, с. ш. № 8, 10 кл.
Г. ФИНКЕЛЬШТЕЙН — п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82, 9 кл.
Г. ШВЕЦ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
А. ШУЛЯК — Черкасская обл., Молодецкая с. ш., 9 кл.

(Окончание см. на с. 59)

задачник Кванта

Задачи

М971 — М975; Ф983 — Ф987

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 мая 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3 — 86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М971, М972» или «Ф983». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. Фамилию, имя и отчество пишите печатными буквами. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М971. Восемь волейбольных команд провели турнир в один круг (каждая сыграла с каждой один раз). Докажите, что можно выбрать из них такие четыре команды A, B, C, D, что A выиграла у B, C и D, B выиграла у C и D, C выиграла у D.

А. Т. Украинцев

М972. Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ задается условиями $x_1=\frac{1}{2}$, $x_{n+1}=x_n^2+x_n$ $(n=1, 2, \ldots)$. Найдите целую часть числа

$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\ldots+\frac{1}{x_{100}+1}.$$

А. А. Анджанс

М973. В треугольнике ABC проведены высота AH и биссектриса BE. Докажите, что если $\angle BEA=45°$, то и $\angle EHC=45°$.

И. Ф. Шарыгин

М974. Двое играют в шахматы с часами. После того как оба сделали по 40 ходов, часы обоих показывали 2 часа 30 минут.

а) Докажите, что в партии был момент, когда часы одного обгоняли часы другого более чем на 1 минуту 50 секунд.

б) Можно ли утверждать, что в некоторый момент разница показаний часов была не менее 2 минут?

С. В. Фомин

М975. На «шахматной доске» размером $n\times n$ стоит 20 различных фигур. Известно, что каждая фигура с любого поля бьет не более 20 полей.

а) Докажите, что при $n=100$ эти фигуры можно переставить так, чтобы они не били друг друга.

б) Пусть дополнительно известно, что если фигуру сдвинуть, то множество полей, которые она бьет, тоже параллельно сдвинется (на тот же вектор). Докажите, что при $n=30$ эти 20 фигур можно переставить так, чтобы они не били друг друга.

А. К. Толпыго

Ф983. На шероховатом столе лежит брусок массой $m=1$ кг; коэффициент трения покоя бруска о стол $\mu_0=1$ Н/м, коэффициент трения скольжения $\mu=0{,}9$ Н/м. К бруску прикреплена пружина жесткостью $k=1$ Н/м. Пружину начинают тянуть в горизонтальном направлении так, что ее свободный конец движется с постоянной скоростью v (рис. 1). Как будет двигаться брусок?

И. И. Мазин

Рис. 1.

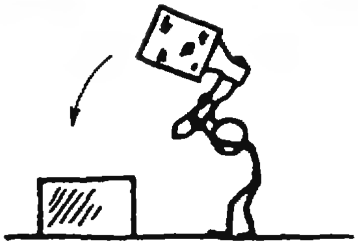


Рис. 2.

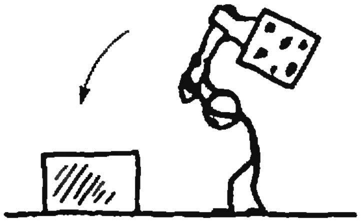


Рис. 3.

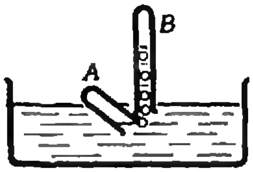


Рис. 4.

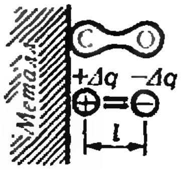


Рис. 5.

Ф984. При колке дров топор иногда застревает в расщелине полена. В таких случаях дальше колют либо так, как показано на рисунке 2, либо — как на рисунке 3. Какой способ более эффективен?

Т. С. Петрова

Ф985. В сосуд, заполненный жидким эфиром, погружают перевернутую пробирку A. Из нее сразу же начинают выходить пузырьки. Пузырьки «собирают» в первоначально полностью заполненную эфиром пробирку B (рис. 4), длина которой в два раза больше, чем длина пробирки A. При этом из пробирки B вытесняется $\frac{2}{3}$ первоначального объема эфира. Температура в комнате поддерживается равной 20 °C, давление равно нормальному атмосферному. Объясните происходящее явление и определите по имеющимся в задаче данным давление насыщенных паров эфира при указанной температуре.

А. И. Буздин

Ф986. Две хорошо очищенные пластины, платиновая и вольфрамовая, находятся в вакууме, образуя плоский конденсатор. Пространство между ними заполняют окисью углерода CO. Определите возникающую при этом разность потенциалов между пластинами. Считайте, что молекулы CO осаждаются на поверхности металла с образованием химической связи углерод — металл; молекула CO представляет собой диполь (рис. 5), $|\Delta q|\cdot l = 3{,}3\cdot 10^{-31}$ Кл·м.

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Ф987. На картине И. Левитана «Март» (см. с. 8 и 1-ю с. обложки) тени на снегу, отбрасываемые деревьями в ясный солнечный день, голубого цвета. Не правильнее ли (с физической точки зрения) было нарисовать их темными бесцветными (черными или серыми)?

А. С. Бутов

Problems

M971—M975; P983—P987

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solntions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later that May 15th.

M971. Eight volleyball teams took part in a round robin tournament (each team playing once with each). Prove that it is possible to choose four teams A, B, C, D among the eight so that A has defeated B, C and D, B has defeated C and D, C has defeated D.

A. T. Ukraintsev

M972. The sequence x_1, x_2, ... is defined by the conditions $x_1 = {}^1\!/_2$, $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ ($n = 1, 2, \dots$). Find the integer part of the number

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \dots + \frac{1}{x_{100}+1}.$$

A. A. Andjans

M973. In triangle ABC, AH is an altitute and BE a bissector. Prove that $\angle BEA = 45°$ implies $\angle EHC = 45°$.

I. F. Sharygin

M974. Two players played a chess game, using a standard (double) time-punching clock. After both had made 40 moves, both clocks showed 2 hours 30 minutes.

1986 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

a) Prove that at some stage of the game one of the clocks was more than 1 min. 50 sec. ahead of the other.
b) Can we claim that at some stage the difference between the showings of the clocks was necessarily no less than 2 minutes?

S. V. Fomin

M975. 20 different chess pieces stand on an n by n «chessboard». It is known that each piece, wherever it is located, attacks no more than 20 positions.
a) Prove that all 20 pieces can be placed on a 100 by 100 chessboard without attacking each other.
b) Now suppose that whenever a piece is displaced, the set of positions attacked by it undergoes parallel translation (with the same displacement vector). Prove that these 20 pieces can be placed on a 30 by 30 board without attacking each other.

A. K. Tolpygo

P983. A solid of mass 1 kg is placed on the rough surface of a table; the friction coefficient of the solid (at rest) against the table is $\mu_0=1$ N/m, the sliding friction coefficient is $\mu=0.9$ N/m. A spring of rigidity $k=1$ N/m is tied to the solid. The spring is pulled in the horizontal direction so that its free extremity moves with constant velocity v (see figure Рис. 1). How will the solid move?

I. I. Mazin

P984. In the process of splitting logs for firewood, the ax sometimes gets stuck in the log. One can then try to split the log either as shown on figure Рис. 2, or as shown on figure Рис. 3. Which is more efficient?

T. S. Petrova

P985. A test tube A is immersed upside down in a vessel filled with liquid ether. Little bubbles immediately begin to come out of it and are «gathered» in the test tube B (originally filled with ether) whose length is twice that of A (see figure Рис. 4). As a result, 2/3 of the volume of ether originally contained in test tube B is forced out. The temperature in the room is maintained at 20 °C, the pressure is normal atmospheric. Explain the phenomenon described above and use the data of the problem to determine the pressure of saturated vapors of ether at the temperature indicated above.

A. I. Buzdin

P986. Two plates with well finished surfaces, made of platinum and wolfram and placed in vacuum, constitute a plane capacitor. The space between them is filled with carbon monoxide CO. Determine the difference of potential between the plates. You may assume that the CO molecules deposited upon the plates form a chemical bond of the carbonmetal type; each CO molecule is a dipole (see figure Рис. 5), $|\Delta q|\cdot l=3.3\cdot 10^{-31}$ C· m.

E. N. Yunosov, I. V. Yaminski

P987. On I. Levitan's famous painting «March» (see the front cover and p. 8) the shadows under the trees on the snow on a clear sunny day are painted blue. Is this correct (from the point of view of physics), or should they have been painted in colourless tones (black or gray)?

A. S. Butov

Решения задач

М951 — М955; Ф963 — Ф967

М951. *Все стороны выпуклого шестиугольника ABCDEF равны 1. Докажите, что радиус описанной окружности одного из треугольников ACE и BDF не меньше 1.*

Обозначим радиусы описанных окружностей треугольников BDF и ACE через r и r_1; условимся, что $r \geqslant r_1$.

Доказательство поведем от противного. Пусть $r<1$ (значит, и $r_1<1$). Оценим сумму углов шестиугольника. Поскольку равнобедренные треугольники ABF и OBF, где O — центр описанной окружности треугольника BDF, имеют общее основание BF и при этом $AB=1>OB=r$, угол при вершине

у первого треугольника меньше: $\angle A < \angle FOB$. Аналогично, $\angle C < \angle BOD$, $\angle E < \angle DOF$. Следовательно,

$$\angle A + \angle C + \angle E < \angle FOB + \angle BOD + \angle DOF, \quad (*)$$

а сумма в правой части (*) или равна 2π (когда треугольник BDF остро- или прямоугольный; рис. 1), или меньше (когда этот треугольник тупоугольный; рис. 2). Точно так же доказывается, что $\angle B + \angle D + \angle F < 2\pi$ (поскольку $r_1 < 1$), и поэтому сумма всех углов шестиугольника меньше 4π, что невозможно. Таким образом, $r \geqslant 1$.

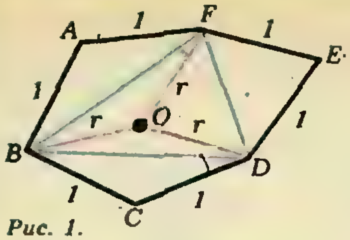


Рис. 1.

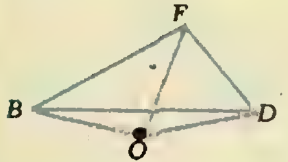


Рис. 2.

Справедливо и более сильное утверждение: в наших обозначениях либо $r > 1 > r_1$, либо $r = r_1 = 1$. Для доказательства прежде всего покажем, что треугольники ACE и BDF остроугольные. Допустим, например, что угол BFD не острый. Тогда точка F лежит в круге с диаметром BD, то есть $MF \leqslant MB$, где M — середина BD (рис. 3). Следовательно, точка N пересечения серединного перпендикуляра к BF с отрезком BD лежит между B и M. Равнобедренные треугольники BFA и BFN имеют общее основание BF и при этом $BN \leqslant BM < 1 = BA$ (так как $2BM = BD < BC + CD = 2$), поэтому $\angle AFB > \angle FBD$. Аналогично, $\angle DFE > \angle FDB$. Но тогда угол шестиугольника при вершине F больше π ($\angle F = \angle AFB + \angle BFD + \angle DFE > > \angle FBD + \angle BFD + \angle FDB = \pi$), а это противоречит выпуклости шестиугольника.

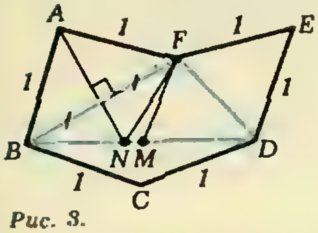


Рис. 3.

Тем самым доказано, что правая часть в неравенстве (*) равна 2π и, рассуждая так же, как выше, мы получим, что $r_1 \leqslant 1$ (иначе сумма всех углов шестиугольника оказалась бы больше 4π).

Наконец, если один из радиусов, скажем r, равен 1, то, очевидно, точки A, C и E симметричны центру O описанной окружности треугольника BDF относительно его сторон (рис. 4). Отсюда легко вывести, что $\triangle ACE = \triangle DFB$, значит, и $r_1 = 1$. (Более того, в этом случае треугольники ACE и DFB симметричны относительно середины отрезка OH, где H — точка пересечения высот треугольника BDF, так что противоположные стороны шестиугольника параллельны.)

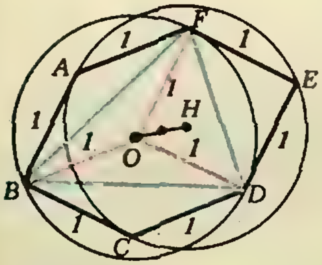


Рис. 4.

Е. Хорват, В. Н. Дубровский

М952. *Обозначим через $\{x\}$ дробную часть числа x: $\{x\} = x - [x]$, где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x.*

а) Приведите пример числа a такого, что

$$\{a\} + \{1/a\} = 1.$$

б) Докажите, что такое число a не может быть рациональным.

◆

а) **Ответ:** один из примеров — $a = 2 + \sqrt{3}$. Действительно, поскольку $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$,

$$\{a\} + \{1/a\} = (\sqrt{3} - 1) + (2 - \sqrt{3}) = 1.$$

Вообще, годится любое число вида $n \pm \sqrt{n^2 - 1}$, где n — целое и больше 1.

б) Допустим, что число a рационально и представим его в виде несократимой дроби: $a = m/n$. Если $\{a\} + \{1/a\} = 1$, то очевидно, $a + 1/a$ — это целое число; обозначим его через k. Итак, $m/n + n/m = k$, то есть $m^2 + n^2 = kmn$. Отсюда следует, что m^2 делится на n, а n^2 — на m, а поскольку m и n взаимно просты, это возможно лишь при $|m| = |n| = 1$, то есть при $a = \pm 1$. Но в этом случае $\{a\} + \{1/a\} = 0$. Следовательно, рассматриваемое уравнение не имеет рациональных решений.

И. Варга

М953. *На плоскости даны шесть точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Проводятся все 15 прямых, соединяющих по-*

◆

Ответ: 10 точек. Пример расположения с 10 точками тройного пересечения прямых показан на рисунке 1: за исходные 6 точек здесь берутся вершины и центр правильного пятиугольника.

парно эти точки. Каково наибольшее число точек (отличных от данных), в которых пересекаются 3 из этих 15 прямых?

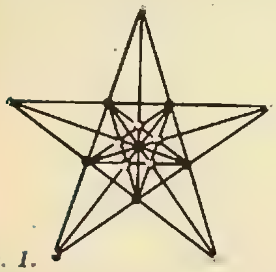


Рис. 1.

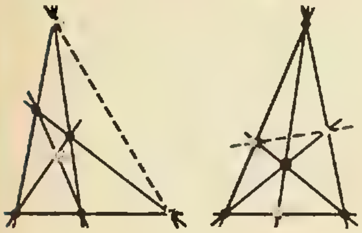


Рис. 2.

M954. *а) В треугольник вписан прямоугольник со сторонами a и b так, что все его вершины лежат на сторонах треугольника. Пусть a_1 и b_1 — длины проекций треугольника на прямые, параллельные сторонам a и b прямоугольника. Докажите равенство*

$$\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}=1.$$

б) В произвольный тетраэдр вписан прямоугольный параллелепипед с ребрами a, b и c так, что все его вершины лежат на поверхности тетраэдра. Пусть a_1, b_1 и c_1 — длины проекций тетраэдра на прямые, параллельные ребрам a, b и c. Докажите равенство

$$\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}+\frac{c}{c_1}=1.$$

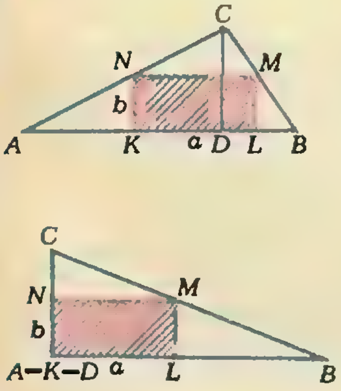


Рис. 1.

Покажем теперь, что на каждой из 15 рассматриваемых прямых лежит не более двух точек тройного пересечения (отличных от данных), то есть что общее их число не превосходит $(15\cdot 2):3=10$ (при подсчете учитывается, что каждая из этих точек лежит на трех прямых).

Заметим, что 6 прямых, попарно соединяющих любые 4 из данных точек, пересекаются по две в трех точках (если среди этих прямых нет параллельных), причем *эти три точки не могут лежать на одной прямой* (рис. 2). Поэтому на прямой, соединяющей две оставшиеся точки, могут лежать самое большее две точки тройного пересечения, что и требовалось доказать.

Выделенное курсивом утверждение нетрудно доказать строго, пользуясь тем, что прямая, не проходящая через вершины треугольника и пересекающая одну из его сторон, пересекает ровно одну другую сторону *). Интересно, что в некоторых неевклидовых геометриях это утверждение принимают за аксиому («аксиома Фано»), а в некоторых геометриях оно и вовсе не выполняется.

В. В. Прасолов

◆

а) Очевидно, на одной из сторон треугольника должны лежать две соседние вершины прямоугольника, а на двух других сторонах — еще по вершине (рис. 1). В обозначениях рисунка 1 из гомотетичности треугольников ABC и NMC, ACD и ANK получаем

$$\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}=\frac{NM}{AB}+\frac{KN}{DC}=\frac{NC}{AC}+\frac{AN}{AC}=1.$$

Поясним подробнее равенство $a_1=AB$, имея в виду, что в задаче б) аналогичные утверждения не столь очевидны. Проекция точки C на прямую AB лежит на отрезке AB (иначе одна из точек K и L — проекций N и M на AB — должна была бы лежать вне этого отрезка); следовательно, проекция треугольника на прямую $KL=AB$ совпадает с его стороной AB.

б) Ясно, что на одной грани тетраэдра может лежать либо целая грань параллелепипеда, либо одно его ребро, либо одна вершина, либо вовсе ни одной (впрочем, последнее, как мы увидим далее, невозможно). Рассмотрим два случая.

1) Пусть *какая-то грань $KLMN$ параллелепипеда лежит на грани ABC данного тетраэдра $ABCD$.* Тогда параллельная грань $K'L'M'N'$ вписана в сечение $A'B'C'$ тетраэдра плоскостью этой грани (рис. 2). Пусть $KL=a$, $KN=b$, $KK'=c$. Поскольку проекция E вершины D на плоскость ABC лежит в треугольнике ABC (иначе одна из точек K, M, N должна была бы лежать вне его), проекции a_1 и b_1 тетраэдра на прямые KL и KN совпадают с проекциями грани ABC на эти прямые. Проекция же c_1 тетраэдра на прямую KK', очевидно, равна его высоте DE. Треугольник $A'B'C'$ гомотетичен треугольнику ABC с центром D и коэффициентом $k=DE'/DE=(c_1-c)/c_1=1-c/c_1$ (E' — точка пересечения DE и плоскости $A'B'C'$), следовательно, проекции треугольника $A'B'C'$ на $K'L'$ и $K'N'$

---

*) См. учебник А. В. Погорелова «Геометрия 6—10» (теорема 1. 2).

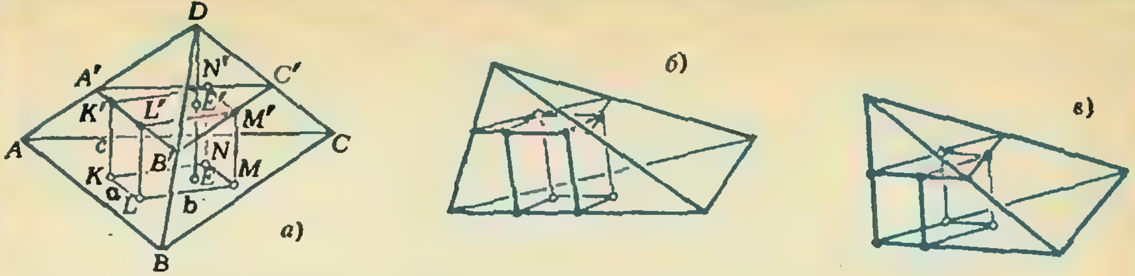


Рис. 2. Показанные здесь три возможных случая рассматриваются совершенно одинаково.

равны ka_1 и kb_1 и в силу задачи а)

$$\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}+\frac{c}{c_1}=k\left(\frac{a}{ka_1}+\frac{b}{kb_1}\right)+\frac{c}{c_1}=k+\frac{c}{c_1}=1.$$

2) Пусть *ни одна из граней параллелепипеда не лежит целиком в грани тетраэдра.* Тогда на каждой грани тетраэдра должно лежать по две вершины параллелепипеда, то есть по одному ребру. Легко понять, что среди этих четырех ребер два, скажем KL и MN, обязательно лежат в одной грани параллелепипеда и параллельны, а два других — $K'N'$ и $L'M'$ — в противоположной грани и перпендикулярны первым двум. Поэтому общее ребро AB граней тетраэдра, содержащих отрезки KL и MN, параллельно им, а противоположное ребро тетраэдра CD параллельно $K'N'$ и $L'M'$ (и перпендикулярно AB; рис. 3).

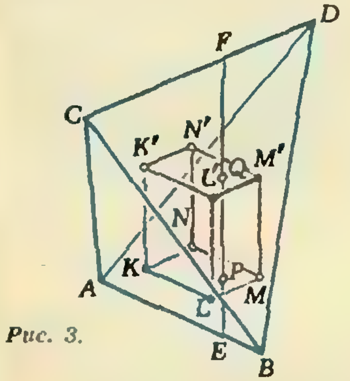


Рис. 3.

Пусть EF — общий перпендикуляр прямых AB и CD, P и Q — точки его пересечения с плоскостями KLM и $K'L'M'$. Проекция c_1 тетраэдра на KK', очевидно, равна EF, а его проекции a_1 и b_1 на прямые AB и CD (которые параллельны KL и KN) совпадают с проекциями треугольника ABF на AB и CDE на CD. Рассмотрим проекции наших многогранников на плоскости ABF (рис. 4, *а*) и CDE (рис. 4, *б*). Рассуждая так же, как в конце пункта а), убеждаемся, что точка E лежит между A и B, а F — *между* C *и* D. *Следовательно,* $a_1=AB$, $b_1=CD$. Теперь, пользуясь гомотетичностью треугольников на рисунках 4, *а* и 4, *б*, получаем

$$\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}+\frac{c}{c_1}=\frac{FQ}{FE}+\frac{PE}{FE}+\frac{PQ}{FE}=1.$$

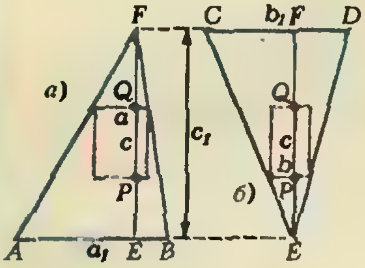


Рис. 4.

Утверждение задачи справедливо и для произвольного параллелепипеда, вписанного в тетраэдр, если под a_1, b_1, c_1 понимать длины параллельных проекций тетраэдра на ребра a, b, c параллелепипеда вдоль плоскостей соответствующих граней параллелепипеда.

В. Н. Дубровский

◆

М955. *За круглым столом сидят n участников «безумного чаепития». Каждую минуту одна пара соседей меняется местами. Через какое наименьшее время все участники чаепития могут оказаться сидящими в противоположном порядке (так что левые соседи у всех станут правыми и наоборот)? Решите эту задачу: а) для $n=4$, 5 и 6; б) для любого $n\geqslant 3$.*

а), б) Ответ: пусть t_n — искомое наименьшее время (в минутах), тогда $t_{2k}=k^2-k$, $t_{2k+1}=k^2$; в частности, $t_4=2$, $t_5=4$, $t_6=6$.

Докажем, что при $n\geqslant 4$

$$t_n\geqslant t_{n-1}+\left[\frac{n-1}{2}\right] \qquad (1)$$

($[a]$ — целая часть числа a). Представим, что участники чаепития сидят в *вершинах правильного* n-угольника. Тогда их итоговое расположение получается из исходного симметрией относительно некоторой оси. Пусть A — один из участников, наиболее удаленных от оси, B — симметричный ему. Кратчайший путь от A к B по границе много-

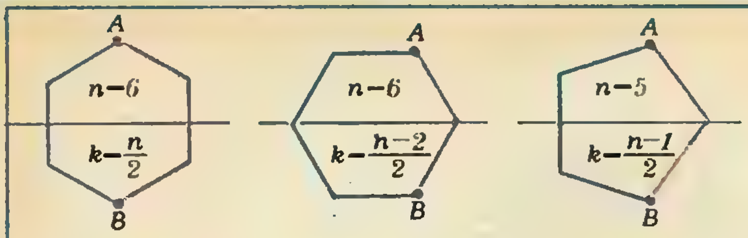


Рис. 1.

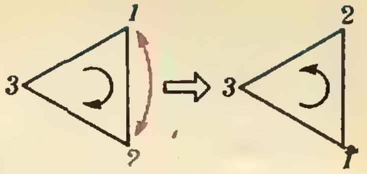


Рис. 2.

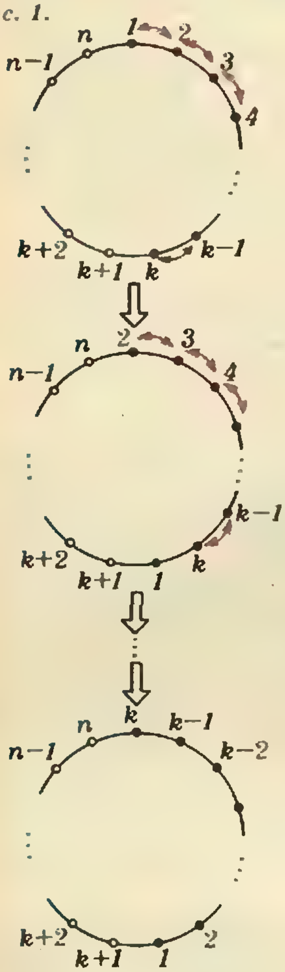


Рис. 3.

угольника (красная ломаная на рисунке 1) содержит $k\geqslant[(n-1)/2]$ сторон (см. рис. 1), поэтому A должен пройти по пути к B не менее k сторон, то есть сделать не менее k пересаживаний. Но при этих пересаживаниях порядок взаимного расположения остальных $n-1$ участников не меняется и им нужно сделать еще по меньшей мере t_{n-1} пересаживаний между собой, чтобы разместиться в противоположном порядке, откуда и следует (1).

Поскольку $t_3=1$ (рис. 2), из оценки (1) получаем, что

$$t_{2k}\geqslant 1+\left[\frac{3}{2}\right]+\left[\frac{4}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{2k-1}{2}\right]=$$

$$=2(1+2+\ldots+(k-1))=k^2-k, \qquad (2)$$

$$t_{2k+1}\geqslant 1+\left[\frac{3}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{2k-1}{2}\right]+\left[\frac{2k}{2}\right]=k^2. \qquad (3)$$

Покажем, что найденного здесь числа пересаживаний достаточно, то есть знак $\geqslant$ в (2) и (3) можно заменить на знак $=$. Занумеруем участников чаепития по порядку от 1 до n и разобьем их на две группы — от 1-го до k-го и от $(k+1)$-го до n-го. Чтобы поменять порядок в первой группе, пересадим последовательно 1-го участника со 2-м, 3-м, ..., k-м, затем 2-го — с 3-м, 4-м, ..., k-м и т. д. (рис. 3). На это уйдет $(k-1)+(k-2)+\ldots+1=(k^2-k)/2$ пересаживаний. Аналогично, за $(n-k)(n-k-1)/2$ пересаживаний мы получим обратный порядок во второй группе. Всего при $n=2k$ или $n=2k+1$ (то есть $k=[(n+1)/2]$) надо будет произвести k^2-k или k^2 пересаживаний, соответственно.

Приведем идею другого вывода оценок (2) и (3). Заметим, что из любых трех участников чаепития хотя бы двое должны поменяться местами (иначе их порядок сохраняется). Соединим двух участников отрезком, если им ни разу не приходилось пересаживаться друг с другом. Мы получим набор отрезков с концами в n точках (или, как говорят, *граф с n вершинами*). В силу сделанного замечания, эти отрезки (*ребра графа*) не образуют ни одного треугольника. Нетрудно доказать по индукции, что граф с n вершинами без треугольников содержит не более $[n^2/4]$ ребер (это частный случай так называемой теоремы Турана; доказательство для четного n было дано в решении задачи М934а в «Кванте» № 11 за 1985 г.). Следовательно, количество пар участников, которые хотя бы раз пересаживались друг с другом, не меньше $n(n-1)/2-[n^2/4]$, что, как легко проверить, совпадает с правой частью (2) или (3) — в зависимости от четности n.

В. Б. Алексеев, В. Н. Дубровский

◆

Ф963. *Плоскости P и Q пересекаются под прямым углом и плоскость P составляет угол α с горизонтом (рис. 1). Из некоторой точки A пространства*

Свободное падение шарика из точки A на плоскость P и дальнейшее его движение по параболическим траекториям удобно представить как суперпозицию движений в двух взаимно перпендикуляр-

на плоскость P свободно падает маленький шарик. Соударения шарика с плоскостями абсолютно упругие. При каком условии шарик вновь окажется в точке A? Изобразите одну из возможных траекторий возвращения.

ных направлениях — вдоль осей X и Y (см. рис. 1). «Составляющие» движения будут равноускоренными с $v_{0x}=v_{0y}=0$ и с ускорениями $g_x=g\sin\alpha$ и $g_y=g\cos\alpha$. Упругие удары шарика о плоскости P и Q делают эти движения периодическими. Обозначим расстояния от точки A до плоскостей Q и P через l и h; времена прохождения этих расстояний («туда» или «обратно») —

$$\tau_x=\sqrt{\frac{2l}{g\sin\alpha}},\quad \tau_y=\sqrt{\frac{2h}{g\cos\alpha}}.$$

Возврат шарика в точку A будет реализован при одновременном его появлении в точке A как в движении по оси X, так и в движении по оси Y, то есть если будет соблюдаться равенство

$$\tau_x=k\tau_y,$$

где k — рациональное число. При этом условии всегда найдутся некоторые четные числа m и n, равные «числу ходов» шарика по осям X и Y от начала движения до его появления в точке A:

$$m\tau_x=n\tau_y.$$

Найдем реальную траекторию, по которой шарик сможет опять попасть в точку A. Используя соотношения отрезков путей, проходимых в равноускоренном движении за равные последовательные интервалы времени (при $v_0=0$), можно графически точно показать места ударов шарика о плоскость P и точки касания его траектории (отрезков парабол) оси X.

На рисунке 1 траектория спуска от точки A до удара о плоскость Q показана синим цветом. Возврат в точку A возможен лишь в том случае, если шарик после «отражения» от плоскости Q где-то опять «сядет» на эту же траекторию и будет двигаться по ней «вверх». Никакая другая траектория не приведет шарик в точку A (в той точке обязательно $v_x=v_y=0$).

В частности, если плоскость Q шарик встретит на линии A_1B_1 ($m=2$, $n=2$), или на линии A_2B_2 ($m=2$, $n=4$), или на A_3B_3 ($m=2$, $n=6$) и т. д., то он сразу же после упругого удара окажется на синей траектории и обязательно вернется в точку A.

Теперь обратим внимание на красную траекторию на рисунке 1. Если после отражения от плоскости Q шарик попадает на эту траекторию, то, двигаясь по ней «вверх», он в точке B отразится от

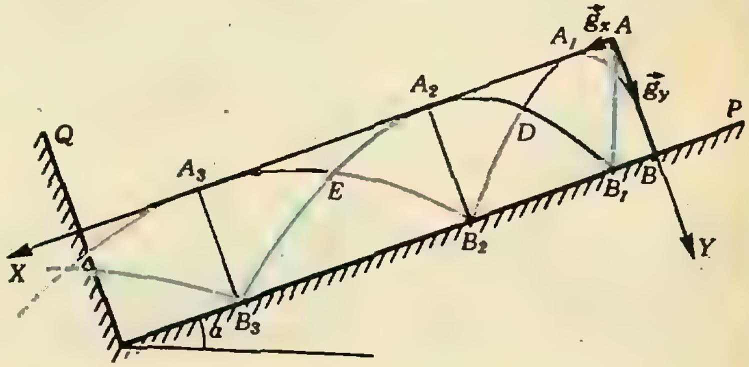


Рис. 1.
$|AA_1|:|A_1A_2|:|A_2A_3|=$
$=|BB_1|:|B_1B_2|:|B_2B_3|=$
$=1:3:5.$

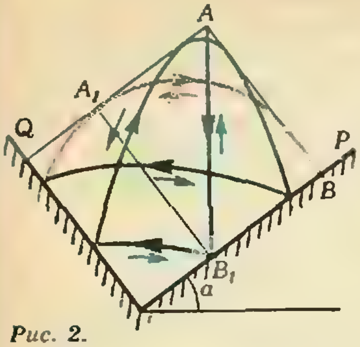


Рис. 2.

плоскости P, вновь окажется на этой же траектории и пойдет по ней в обратную сторону (красная траектория отвечает движению шарика, брошенного из точки B со скоростью v_0 такой, что $v_{0y}=\sqrt{2gh}\cos\alpha$, $v_{0x}=0$).

В точках пересечения красной и синей траекторий $|\vec{v}_{x1}|=|\vec{v}_{x2}|$ и $|\vec{v}_{y1}|=|\vec{v}_{y2}|$ согласно закону сохранения энергии, и становится понятным, что если в одной из этих точек (в точке D или в точке E) окажется плоскость Q, то шарик с синей траектории в этой точке «пересядет» на красную траекторию, пройдет по ней до точки B и обратно до плоскости Q и, вторично «пересев» на синюю траекторию, вернется в точку A. При этом для точки D $m_D=4$, $n_D=6$; для точки E $m_E=4$, $n_E=10$.

Но в общем случае пересадки с синей траектории на красную и обратно должны осуществляться через *«промежуточные параболы»* (они на рисунке 2 показаны зеленым цветом), причем какая-то из них, имея касание с осью X, будет обязательно иметь касание с осью Y. (На рисунке 2 приведена вся траектория движения шарика при $m=8$ и $n=10$.)

Если k — иррациональное число, на плоскости Q зеленые параболы никогда не пересекутся с красной, и шарик никогда не окажется в точке A.

Г. С. Лапидус

◆

Ф964. *Материальные точки образуют замкнутую систему. Между любыми двумя точками системы действует сила притяжения, равная* $\vec{F}_{ij}=km_im_j\vec{r}_{ij}$, где m_i, m_j — массы *точек*, $|\vec{F}_{ij}|$ — *сила, действующая на точку i со стороны точки j*, $|\vec{r}_{ij}|$ — *расстояние между точками (рис. 1), k — постоянный коэффициент. В начальный момент все частицы покоятся. Докажите, что через некоторое время все точки столкнутся. Определите это время, если известны масса всей системы $M=\sum_j m_j$ и коэффициент k.*

Докажем, что частицы одновременно столкнутся в центре масс системы.

По определению центра масс радиус-вектор $\vec{r}$, проведенный из начала координат в центр масс, есть

$$\vec{r}=\sum_j m_j\,\vec{r}_j/M, \qquad (1)$$

где $\vec{r}_j$ — радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку с массой m_j.

Поместим начало координат в центр масс системы. Тем самым мы положим $\vec{r}=\vec{0}$. Но согласно (1) это означает, что $\sum_j m_j\vec{r}_j=\vec{0}$. (Это равенство мы в дальнейшем используем.)

Сила, действующая на i-ю точку со стороны точки j, может теперь быть выражена так:

$$\vec{F}_{ij}=km_im_j\vec{r}_{ij}=km_im_j(\vec{r}_j-\vec{r}_i).$$

Со стороны всех точек системы на i-ю точку действует сила

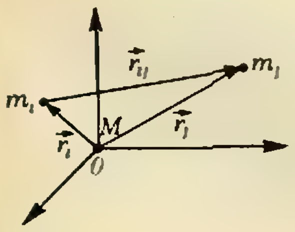
$$\vec{F}_i=km_i\sum_j m_j(\vec{r}_j-\vec{r}_i)=km_i\sum_j m_j\vec{r}_j-km_i\sum_j m_j\vec{r}_i=$$

$$=\vec{0}-km_i\vec{r}_i\sum_j m_j=-km_iM\vec{r}_i \qquad (2)$$

(мы учли, что $\sum_j m_j\vec{r}_j=0$). Перепишем (2) в виде $\vec{F}_i=-\alpha_i\vec{r}_i$, или в скалярной форме

$$F_i=-\alpha_i r_i, \text{ где } \alpha_i=kMm_i.$$

Мы видим, что каждая точка движется так, как если бы она была соединена с центром масс системы пружиной жесткостью $\alpha_i=kMm_i$, и в нерастя-



нутом состоянии длина пружины нулевая.

Так как в начальный момент все точки покоились (и пружины при этом были растянуты), в дальнейшем каждая точка будет двигаться прямолинейно по направлению к центру масс. Время, за которое точка i дойдет до центра масс, — это четверть периода колебаний груза массой m_i на пружине жесткостью α_i:

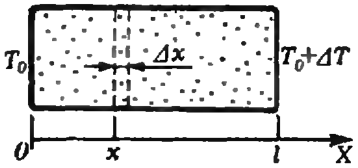
$$t_i=\frac{T_i}{4}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_i}{\alpha_i}}=\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{kM}}.$$

Как видно, t_i не зависит от параметров конкретной точки; следовательно, все частицы одновременно придут в центр масс через время $\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{kM}}$.

А. Г. Самосват

◆

Ф965. *Длинный цилиндрический сосуд наполнен идеальным газом до давления p_0. Сначала температура цилиндра поддерживается постоянной и равной T_0. Затем температуру одной из торцевых стенок сосуда повышают на ΔT, а температура противоположной стенки остается прежней. Найти установившееся давление в сосуде и положение центра масс газа. Считать, что $\Delta T \ll T_0$.*



После установления равновесия в разных местах сосуда давление газа будет одним и тем же, а температура будет различной: больше вблизи более теплой стенки и меньше — у противоположной. Если $\Delta T \ll T_0$, то можно считать, что температура меняется по линейному закону

$$T(x)=T_0\left(1+\frac{\Delta T}{T_0}\,\frac{x}{l}\right)$$

(см. рисунок). Мысленно разобьем сосуд на тонкие слои толщиной Δx такие, что в пределах каждого слоя можно считать температуру газа постоянной. Для газа в каждом таком слое выполняется условие

$$p=n(x)\cdot k\cdot T(x),$$

где p — давление в сосуде, k — постоянная Больцмана, $n(x)$ — объемная концентрация газа в данном слое. Видно, что концентрация тоже зависит от x

$$n(x)=\frac{p}{kT_0\left(1+\frac{\Delta T}{T_0}\,\frac{x}{l}\right)}\approx\frac{p}{kT_0}\left(1-\frac{\Delta T}{T_0}\,\frac{x}{l}\right)$$

(мы воспользовались приближенным равенством $\frac{1}{1+\alpha}\approx 1-\alpha$ при $\alpha \ll 1$) и по линейному закону меняется от $n_0=\frac{p}{kT_0}$ у «холодной» стенки до $n_l=\frac{p}{kT_0}\left(1-\frac{\Delta T}{T_0}\right)$ у «теплой». Среднее значение концентрации

$$n_{\text{ср}}=\frac{n_0+n_l}{2}=\frac{p}{kT_0}\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{\Delta T}{T_0}\right).$$

Выразим через $n_{\text{ср}}$ полное число молекул в сосуде:

$$N=Sln_{\text{ср}}=\frac{pSl}{kT_0}\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{\Delta T}{T_0}\right) \qquad (1)$$

(S — площадь торца цилиндра). С другой стороны,

$$N=Sln_0=\frac{p_0Sl}{kT_0}, \qquad (2)$$

где n_0 — концентрация газа в сосуде при p_0, T_0. Из (1) и (2) находим давление в сосуде при установившемся равновесии:

$$p=\frac{p_0}{\left(1-\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T_0}\right)}\approx p_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T_0}\right).$$

Теперь найдем положение центра масс газа:

$$x_{\text{ц.м}}=\frac{S}{N}\int_0^L dx\cdot x\cdot n(x)=$$

$$=L\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T_0}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\frac{\Delta T}{T_0}\right)\approx L\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\frac{\Delta T}{T_0}\right).$$

Таким образом, центр масс сместился в сторону более холодной стенки на

$$\Delta l=\frac{1}{12}\frac{\Delta T}{T_0}L.$$

Смещение центра масс кажется на первый взгляд парадоксальным, однако естественно объясняется взаимодействием молекул газа со стенками сосуда. Дело в том, что в процессе установления равновесия изменение импульса молекул, сталкивающихся с более теплой стенкой, будет больше, чем у тех, которые сталкиваются с противоположной стенкой. Это приведет к передаче импульса от стенок сосуда газу, а значит, и к смещению центра масс газа.

В. И. Комов

◆

Ф966. *Для иллюстрации поверхностного натяжения одну из мыльных пленок, натянутых на параллельные «направляющие» и разделенных ниткой AB (см. рис. 1), прокалывают; при этом нить AB натягивается. Определите силу натяжения нити. Расстояние между «направляющими» равно d, длина нити l ($l>\pi d/2$), коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора σ.*

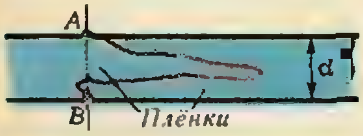


Рис. 1.

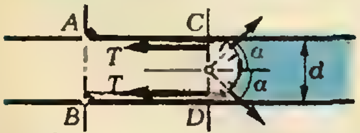


Рис. 2.

Выясним сначала, вид какой кривой примет нить под действием силы поверхностного натяжения. Легко догадаться, что в случае $l<\pi d/2$ это будет дуга окружности, так как, предположив противное (то есть что радиус кривизны нити не постоянен), придем к тому, что равновесие нити невозможно.

С учетом этого найдем, что в случае $l>\pi d/2$ нить будет иметь два прямолинейных участка длиной $x=\frac{1}{2}\left(l-\frac{\pi d}{2}\right)$ и полуокружность (так как точки C и D покоятся) радиусом $d/2$ (рис. 2).

Пусть сила натяжения нити T (см. рис. 2). Рассматривая симметричные участки нити, можно записать:

$$2T=\sum_i\sigma\cdot\Delta l_i\cdot\cos\alpha=\sigma d\ \Rightarrow\ T=\frac{\sigma d}{2}.$$

Л. Г. Маркович

◆

Ф967. *Стопку очень тонких металлических пластин, находящихся на одинаковых расстояниях друг от друга, заряжают от батареи следующим образом. Отрицательную клемму батареи соединяют с самой правой пластиной, а положительную клемму присоединяют по очереди к самой левой пластине, затем ко второй слева, к третьей и т. д. до предпоследней (второй спра-*

Обозначим через S площадь каждой пластины, d — расстояние между пластинами, $\mathscr{E}$ — ЭДС батареи. Найдем, какой заряд соберется на самой правой пластине (*1*) после того, как зарядили k-ю пластину справа.

Расстояние между этими пластинами равно $(k-1)d$, разность потенциалов равна ЭДС батареи $\mathscr{E}$, и, следовательно, напряженность электрического поля в промежутке между этими пластинами должна быть равна *ва: рис. 1). Найдите отношение заряда на самой правой пластине к заряду на третьей справа пластине. Считать, что толщина стопки много меньше, чем линейные размеры пластин.*

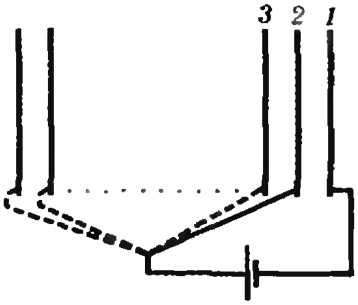


Рис. 1.

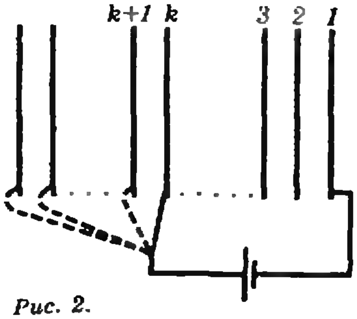


Рис. 2.

$$E=\frac{\mathscr{E}}{(k-1)d}.$$

Это электрическое поле создается отрицательным зарядом, расположенным на пластине *1*, и всеми положительными зарядами, находящимися на уже заряженных пластинах (рис. 2). Так как напряженность поля бесконечной заряженной плоскости не зависит от расстояния до нее и не меняется при ее перемещении, то мы можем мысленно придвинуть все положительно заряженные плоскости к k-й справа. При этом получится плоский заряженный конденсатор с расстоянием между пластинами $(k-1)d$. Так как поле в плоском конденсаторе равно $Q/\varepsilon_0 S$, где Q — заряд каждой пластины, то отрицательный заряд самой правой пластины (*1*) после зарядки k-й справа будет равен

$$Q=\frac{\mathscr{E}\varepsilon_0 S}{(k-1)d}. \quad (1)$$

Таким же по величине будет суммарный заряд на всех положительно заряженных пластинах.

Заряд самóй k-й пластины можно найти из следующих соображений. До ее зарядки положительный заряд всех пластин слева до $(k+1)$-й включительно был равен $Q'=\frac{\mathscr{E}\varepsilon_0 S}{kd}$, общий положительный заряд после зарядки k-й пластины стал равен $Q=\frac{\mathscr{E}\varepsilon_0 S}{(k-1)d}$. Следовательно, заряд самóй k-й пластины равен

$$Q=\frac{\mathscr{E}\varepsilon_0 S}{d}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right). \quad (2)$$

Теперь можно ответить на вопрос, поставленный в задаче. Отрицательный заряд, который в конце концов соберется на самой правой пластине, как следует из выражения (1) для $k=2$, будет равен

$$Q_1=\frac{\mathscr{E}\varepsilon_0 S}{d}.$$

Заряд пластины *3* (выражение (2) $k=3$) —

$$Q_3=\frac{\mathscr{E}\varepsilon_0 S}{d}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{\mathscr{E}\varepsilon_0 S}{6d}.$$

Таким образом, искомое отношение зарядов

$$Q_1:Q_3=6.$$

Е. П. Соколов

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М926—М940, Ф938—Ф952, справились с задачами М926, М929, М931, М936, Ф938, Ф941—Ф943, Ф947, Ф951, Ф952. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Х. Агаев (с. Тюркоба Аз. ССР) 33, 37; *Н. Агазарян* (Абовян) 33—35; *Н. Азамов* (С. Балыкчи Андижанской обл.) 37—39; *А. Аксенов* (Великие Луки) 28, 34, 37, 38; *М. Александров* (Москва) 28, 33, 37—40; *А. Алексейчук* (Одесса) 37; *М. Альт* (Одесса) 28, 37, 38; *Я. Аргентов* (Алма-Ата) 32, 33, 37; *В. Асамбаев* (Алма-Ата) 37; *А. Асташкевич* (Томск) 28, 33—35, 37, 38; *В. Балахонцев* (Алма-Ата) 37; *А. Баран* (Киев) 28, 30, 33, 37, 39; *Н. Безденежных* (Нижний Тагил) 30, 32—34; *Р. Безрукавников* (Калуга) 28, 30, 33, 34, 38; *В. Берездивин* (Донецк) 33, 37; *О. Бесман*

(Алма-Ата) 37; *И. Биндер* (Ленинград) 28; *Е. Богомол* (Алма-Ата) 37; *М. Бойко* (Киев) 30, 32, 39; *М. Бона* (Секешфехервар, ВНР) 33, 39; *А. Буга* (Ульяновск) 37; *Я. Варшавский* (Харьков) 28, 32, 33, 35, 37, 38; *М. Векслер* (Ленинград) 28; *И. Вербовский* (Алма-Ата) 37; *Т. Газарян* (Ереван) 32—35, 37—40; *Д. Гамарник* (Тбилиси) 33, 37—40; *Г. Гевондян* (Ереван) 37, 38; *О. Геворков* (Тбилиси) 28, 37, 38; *О. Гендельман* (Харьков) 30, 38; *Р. Гендлер* (Ташкент) 28, 33, 38—40; *О. Геупель* (Дрезден, ГДР) 28, 30, 32—35, 37—40; *А. Глуцюк* (Харьков) 28, 38; *Р. Гой* (Львов) 28, 33; *Г. Горбатенко* (Арзамас) 28; *А. Гороховский* (Киев) 28, 32, 33, 35, 38—40; *Д. Гребнева* (Алма-Ата) 37; *П. Григорьев* (Алма-Ата) 37; *Н. Григорьев* (Андропов) 28, 33, 35, 37—39; *Л. Гринберг* (Алма-Ата) 37; *М. Гринберг* (Харьков) 30; *Р. Гринив* (Львов) 28, 33, 37, 38; *А. Даетян* (Ереван) 32—35, 37—40; *А. Дементьев* (Нальчик) 28; *Г. Дементьев* (Алма-Ата) 37; *А. Джафаров* (с. Тюркоба Аз. ССР) 33, 37; *М. Добрицын* (Москва) 28, 32—35, 37—39; *А. Донченко* (Киев) 28, 32, 33, 35; *С. Дубаденко* (Алма-Ата) 37; *М. Дудник* (Алма-Ата) 33, 37; *А. Дынников* (Жуковский) 28, 32, 33, 35, 37—40; *И. Дынников* (Жуковский) 28, 32, 33, 35, 37—40; *А. Жаксыбеков* (Алма-Ата) 37; *С. Жевноватый* (Алма-Ата) 37; *С. Железовская* (Саратов) 33, 37, 38; *В. Журавлев* (Гайворон) 28, 30, 32, 33, 35, 38; *П. Задорожный* (Киев) 32, 33, 35, 37, 38; *Д. Зайцев* (Киев) 28, 33, 35, 37, 38, 40; *Л. Запольский* (Москва) 37, 38; *А. Захаров* (Гатчина) 28; *Н. Захарова* (Алма-Ата) 37; *А. Иванов* (Первомайск Николаевской обл.) 38, 40; *М. Игнатьев* (Саратов) 28, 32, 33; *И. Кан* (Семипалатинск) 38; *В.* и *И. Каповичи* (Хабаровск) 28, 33, 34, 38; *Х. Каримбердиев* (Ташкент) 28; *О. Кирнасовский* (Винница) 28, 33, 37; *А. Киселев* (Ленинград) 28, 32—34, 37—39; *А. Козинский* (Гайворон) 33, 35; *И. Козуля* (Жуковский) 33, 38; *Д. Коноваленко* (Севастополь) 30; *А. Кононенко* (Киев) 33, 35, 37—39; *Ю. Королев* (Казань) 37; *А. Коршиков* (Мозырь) 33, 38; *Д. Кохманюк* (Киев) 28; *В. Кращенко* (Алма-Ата) 37; *Б. Кругликов* (Харьков) 33, 38; *Н. Крылов* (Ленинград) 32, 33; *О. Крылов* (п. Эльдикан Як. АССР) 35, 39; *М. Кукс* (Львов) 28, 37; *А. Купчишин* (Алма-Ата) 37; *М. Куринной* (Харьков) 28, 32, 33, 37—40; *С. Кутайцев* (Конаково) 28; *Н. Кушлевич* (Москва) 28, 32, 37, 38; *И. Ларцев* (Донецк) 33, 37; *Л. Леняшин* (Ленинград) 28, 32, 33, 37, 38, 40; *О. Лимешко* (Куйбышев) 28, 33, 35, 38; *А. Литвак* (Ленинград) 28, 32, 33, 37—39; *М. Литвинов* (Киев) 28, 32, 37, 38; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 38; *Н. Лучинин* (Алма-Ата) 37; *М. Макаров* (Севастополь) 28, 30, 32, 34; *К. Мамуров* (Душанбе) 28, 30, 33, 35, 37—39; *В. Матвеев* (Челябинск) 37, 38; *Ю. Махлин* (Москва) 28, 37, 38, 40; *С. Меленцевич* (Минск) 28; *Б. Меркулов* (Куйбышев) 38; *А. Минасян* (Ереван) 33, 35; *Т. Мисирпашаев* (Москва) 28, 32, 33, 37, 38; *Г. Михалкин* (Ленинград) 28, 33, 35, 38, 40; *С. Михно* (Краснодар) 28; *Д. Музаффаров* (п. Герматук Аз. ССР) 30; *М. Мунькин* (Алма-Ата) 28, 32, 33; *З. Мусина* (Алма-Ата) 37; *А. Нагорный* (Слуцк) 32, 33, 38; *Е. Нагорская* (Ереван) 28; *И. Неронов* (Алма-Ата) 33; *Ю. Ним* (п. Черноголовка Московской обл.) 38; *О. Ниц* (Одесса) 28, 30, 32, 33, 37, 38; *А. Новичков* (Жуковский) 33, 35; *О. Овецкая* (Донецк) 33; *Е. Орынбасаров* (Алма-Ата) 37; *Е. Осипова* (Алма-Ата) 37; *О. Падалко* (Уфа) 37; *В. Парьев* (п. Красногвардейское Белгородской обл.) 28; *Д. Пастур* (Харьков) 38, 39; *И. Пачин* (Алма-Ата) 33, 37; *Я. Печатников* (Ленинград) 37, 38; *А. Пинчук* (Киев) 28 ; *А. Покровский* (Киев) 28, 30; *М. Померанцев* (Черкассы) 28, 32, 33, 35, 37—39; *В. Попеня* (Алма-Ата) 37; *В. Попов* (Подольск) 28; *И. Портной* (Одесса) 28, 32, 33, 35, 37, 38; *А. Пришляк* (Киев) 28, 32, 33, 35, 37, 39; *В. Протасов* (Москва) 28, 30; *И. Пухов* (Москва) 28; *Т. Радько* (Корсунь-Шевченковский) 28, 32, 33, 37—39; *А. Райскин* (Алма-Ата) 37; *И. Райскин* (Алма-Ата) 37; *И. Раскина* (Витебск) 33, 35, 37—39; *Е. Растигеев* (Барнаул) 28; *В. Ратнюк* (Евпатория) 32, 38, 39; *С. Рубан* (Днепропетровск) 28; *Т. Руденко* (Киев) 38; *Д. Румынин* (Красноярск) 33; *А. Рывчин* (Киев) 28; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 37; *Э. Салканова* (Алма-Ата) 37; *И. Симовол* (Гайворон) 28, 30, 32, 33, 35, 38; *Р. Сибилев* (Ленинград) 32, 33, 37—39; *И. Симоненко* (Великие Луки) 28, 34, 37, 38; *В. Слободянюк* (Киев) 30; *С. Стафеев* (Петрозаводск) 32; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 28, 30, 37, 38; *В. Судаков* (Тбилиси) 28, 32, 33, 35, 37—40; *Р. Сулейманов* (Алма-Ата) 37; *Ж. Сушинскас* (Вильнюс) 38; *А. Таджибаев* (Пскент) 28, 30; *Д. Тажибаева* (Алма-Ата) 37; *Д. Тамаркин* (Горький) 28, 33, 37—39; *В. Тарнецкий* (Алма-Ата) 37; *А. Тен* (Алма-Ата) 37; *Б. Те* (Алма-Ата) 37; *К. Тищенко* (Минск) 38, 39; *Г. Топровер* (Волгоград) 38; *К. Туз* (Евпатория) 37; *Д. Туляков* (Жданов) 28, 38; *М. Тумаш* (Львов) 35, 38; *А. Тымко* (Алма-Ата) 37; *К. Узких* (Сморгонь) 33; *С. Ферлегер* (Ташкент) 32; *В. Филимоненков* (Свердловск) 33, 37—39; *Л. Филипенко* (Алма-Ата) 37; *М. Фукс* (Москва) 30; *М. Хованов* (Москва) 32, 33, 37, 39; *В. Циркунов* (Киев) 28, 30, 32, 38, 39; *А. Чагиров* (Алма-Ата) 33, 35; *Д. Чижов* (Алма-Ата) 37; *К. Чурашев* (Новосибирск) 38; *Шабельников* (Алма-Ата) 37; *И. Шадрин* (Алма-Ата) 33, 37; *Ю. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) 33; *С. Шейнин* (Молодечно) 28, 33, 37, 38; *И. Шефтель* (Ленинград) 28; *Б. Шойхет* (Москва) 28; *В. Шульга* (Евпатория) 32, 38; *В. Эпиктетов* (Алма-Ата) 28, 32, 33, 37; *Т. Юрьева* (Алма-Ата) 37.

Физика

А. Абанов (Красноярск) 39, 44, 49; *А. Абибуллаев* (Ташкент) 49, 50; *Д. Абсатов* (Алма-Ата) 49; *М. Албегов* (Москва) 44, 45, 50; *С. Анатольев* (Ярославль) 45, 48—50; *В. Апальков* (Харьков) 39, 44, 45; *М. Ахмедов* (Сумгаит) 49; *В. Барарь* (п/о Боровуха Витебской обл.) 45, 50; *Д. Барц* (Харьков) 39; *В. Башкиров* (Чебоксары) 45, 48—50; *А. Бегларов* (Тбилиси) 49; *К. Бедов* (Челябинск) 44, 45, 50; *С. Беловолов* (Новосибирск) 49; *А. Белопольский* (Киев) 39, 42, 44—46, 49; *И. Бена* (Васлуй, СРР) 45; *А. Бендерский* (п. Черноголовка Московской обл.) 45; *А. Беренгольц* (Кишинев) 44, 45, 49, 50; *А. Бермус* (Ростов-на-Дону) 39, 45; *О. Бесман* (Алма-Ата) 45, 49; *Л. Блинов* (Черновцы) 45, 48; *С. Бобылев* (Березники) 44, 49; *С. Болдырев* (Мытищи) 49; *Ю. Боровский* (Киев) 48, 49; *Ш. Бреннер* (Хуст) 48—50; *А. Быцко* (Ленинград) 39, 44, 45; *К. Вайнберг* (Тбилиси) 50;

И. Варга (Салонта, СРР) 45; *А. Васильев* (Красноярск) 39; *А. Вилькоцкий* (Минск) 39, 45, 49, 50; *Р. Воливач* (Днепропетровск) 45, 48; *В. Волков* (п. Пограничный Приморского кр.) 45; *С. Волков* (Нижний Тагил) 49; *А. Володько* (Одесса) 39; *А. Волошин* (п. Ивановка Иссык-Атинского р-на) 39; *Г. Габададзе* (Тбилиси) 42; *А. Гаек* (Днепропетровск) 48—50; *О. Гендельман* (Харьков) 49; *А. Глазок* (Киев) 50; *Л. Головань* (Красногорск Московской обл.) 46; *Л. Гольдштейн* (Киев). 39; *С. Гончарик* (Барановичи) 46; *Л. Горкин* (п. Научный Крымской обл.) 49; *А. Гречишников* (Миасс) 49; *В. Гринберг* (Москва) 44, 49; *В. Гурарий* (п. Черноголовка Московской обл.) 45, 48, 50; *Л. Гуревич* (Кемерово) 44; *А. Дементьев* (Нальчик) 46, 49; *Д. Дементьев* (Нальчик) 46, 49; *Б. Добровольский* (Тбилиси) 49, 50; *А. Дода* (Корсунь-Шевченковский) 42, 44, 45, 48, 49; *А. Дынников* (Жуковский) 39, 45, 48, 50; *И. Дьяков* (п. Черноголовка Московской обл.) 49; *Д. Ежиков* (Минск) 39, 48; *М. Ермаков* (Рига) 45; *С. Ефремов* (Запорожье) 39, 45; *А. Жариков* (Киев) 39, 42, 44, 45, 48—50; *В. Жевлаков* (п. Черноголовка Московской обл.) 42, 45, 49, 50; *А. Желудев* (Москва) 44, 45; *А. Жуков* (Киев) 49; *О. Заборонский* (Москва) 49, 50; *Р. Зайнуллин* (Белорецк) 42; *Н. Захарова* (Алма-Ата) 45; *К. Зварич* (Киев) 44, 45, 50; *В. Зелов* (Новосибирск) 49; *Е. Зельцер* (Киев) 48; *К. Зимин* (Запорожье) 45, 48, 49; *Б. Зингерман* (Самарканд) 45, 49, 50; *И. Иванов* (Калуга) 49; *С. Иванов* (Уфа) 44, 45, 48, 49; *О. Игнатьева* (Новополоцк) 44; *В. Калацкий* (Солигорск) 45, 49; *А. Калашников* (Киев) 49; *В. Каменькович* (Харьков) 49; *И. Каплан* (Сумгаит) 49; *А. Карякин* (Тамбов) 39; *М. Кац* (Саратов) 45; *В. Кирьяшкин* (Саратов) 48, 49; *А. Киселев* (Ленинград) 45, 49; *П. Кларк* (Тула) 44, 45, 49; *И. Коваленко* (с. Термаховка Киевской обл.) 49; *Е. Кожевников* (Москва) 49; *Ю. Кондратенко* (Киев) 42, 50; *А. Краковский* (Харьков) 48, 49; *В. Красиков* (Мозырь) 50; *А. Красота* (Киев) 45; *В. Кращенко* (Алма-Ата) 45; *С. Крючков* (Ногинск) 49; *А. Курачев* (Новосибирск) 39, 48—50; *Д. Кушнер* (Мытищи) 48, 50; *П. Лаврентьев* (п. Черноголовка Московской обл.) 45; *А. Ларкин* (Армавир) 49; *А. Левенштейн* (Донецк) 45, 49, 50; *Л. Лиознов* (Москва) 49, 50; *М. Литвинов* (Киев) 39; *Ю. Лобзаков* (Киев) 44—46; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 49; *И. Луценко* (Донецк) 44, 45, 49, 50; *П. Лушников* (Москва) 42, 44, 45, 50; *А. Максимов* (Ташкент) 45; *М. Маргулис* (Харьков) 45; *Г. Марченков* (Саратов) 45; *С. Маслов* (Москва) 49; *Ю. Махлин* (Москва) 39, 44, 45, 50; *З. Мачарадзе* (Тбилиси) 45; *В. Мелик-Алавердян* (Ереван) 44, 45, 49; *К. Мельников* (Пермь) 45; *А. Мельничук* (Хабаровск) 39; *В. Микизиль* (Ростов-на-Дону) 39; *Т. Мисирпашаев* (Москва) 39; *Е. Михалюк* (Минск) 42, 48—50; *С. Михно* (Москва) 50; *А. Мищаненко* (Новосибирск) 48, 49; *Д. Могилевцев* (Шклов) 39, 45, 49, 50; *А. Мудрик* (Брест) 45; *С. Настенко* (Киев) 39, 48, 49; *А. Недачин* (Киев) 48; *С. Никитенко* (Киев) 48, 49; *И. Никитин* (Горький) 39, 42, 45; *Г. Николаишвили* (Тбилиси) 39, 44, 45, 48, 49; *Т. Никольская* (Донецк) 45, 49, 50; *С. Новиков* (Херсон) 45, 48—50; *А. Нурмагамбетов* (Новосибирск) 45; *А. Оводенко* (Донецк) 45, 49, 50; *В. Овчаров* (Шостка) 45; *О. Осауленко* (Киев) 39, 49, 50; *В. Остроушко* (Кривой Рог) 49; *Р. Паламарчук* (Нежин) 49; *А. Панич* (Ленинград) 45; *А. Панычев* (Магадан) 39; *А. Парецкий* (Минск) 39, 45, 48, 49; *В. Парьев* (п. Красногвардейское Белгородской обл.) 39; *А. Пекарь* (Москва) 49; *В. Песоцкий* (д. Дворец Брестской обл.) 39, 42, 48, 49; *Е. Петров* (Минск) 48—50; *В. Полищук* (Львов) 45; *В. Поляшов* (Кстово) 45, 50; *О. Посудневский* (Береза) 39, 48—50; *К. Пугач* (Ленинград) 45, 48—50; *Т. Пустогова* (Киев) 49; *А. Путилин* (Минск) 45, 49, 50; *А. Пяллинг* (Новосибирск) 44, 45; *И. Раджабов* (с. Хив Даг. АССР) 45; *С. Рахамов* (Казань) 44, 45, 49, 50; *С. Ревков* (Киев) 44, 45; *В. Родин* (Сасово) 49; *А. Розенберг* (Уфа) 48, 49; *А. Розенвайн* (Киев) 39; *Н. Ромец* (Киев) 45; *С. Рося* (Минск) 39, 44, 46, 49; *Ю. Рыбалочка* (Киев) 39, 44, 45, 49, 50; *С. Рыжков* (Москва) 39, 45; *В. Рябуха* (Брест) 45; *Д. Саввичев* (Таганрог) 50; *Р. Сагайдак* (с. Матусов Черкасской обл.) 39, 45; *Т. Сагайдак* (Канев) 44; *Р. Садыков* (Фрунзе) 49; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 39, 44, 45; *Д. Самборский* (Истра) 39; *О. Самойленко* (Киев) 49; *Б. Самойлов* (Киев) 39, 44, 45, 50; *В. Сандомирский* (Братск) 48; *М. Свердлов* (Минск) 39; *А. Сенчик* (Киев) 44; *О. Серафимович* (Пинск) 45, 49; *А. Сиваченко* (Москва) 45, 49, 50; *С. Сильвестов* (Москва) 48, 49; *М. Ситников* (Климовск) 39, 48, 49; *А. Скачков* (Тула) 39; *С. Скобаро* (п. Коряжма Архангельской обл.) 39, 44, 50; *А. Снижко* (Запорожье) 45, 49, 50; *А. Сомов* (Киев) 44, 45, 48, 49; *А. Сотников* (Губкин) 39; *С. Сочнев* (Киев) 48—50; *Е. Степанов* (Ленинград) 39; *И. Стрешинский* (Киев) 44, 45, 48, 49; *И. Струговщиков* (Киев) 39, 44, 45; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 44, 50; *Н. Суконников* (Винница) 39, 44, 48—50; *В. Сысов* (Киев) 44, 45, 49; *В. Тарнецкий* (Алма-Ата) 45, 50; *А. Татаринов* (Тула) 45; *Б. Татиевский* (Киев) 49; *А. Ткаченко* (Киев) 44; *С. Толмачев* (Минск) 39, 45, 48, 49; *В. Троян* (Джанкой) 39; *С. Тужанский* (Винница) 39, 49, 50; *М. Тумаш* (Львов) 49, 50; *Р. Ульмасов* (Душанбе) 49; *С. Ушаков* (Ярославль) 49, 50; *М. Федоров* (Ульяновск) 39, 45, 49; *Г. Финкельштейн* (п. Черноголовка Московской обл.) 44, 45, 49, 50; *А. Фурс* (п/о Дричин Минской обл.) 45; *А. Хафизов* (п. Красногорский Звениговского р-на) 39; *Ю. Ходоровская* (Киев) 49; *А. Хонахбеев* (Рига) 49, 50; *В. Черных* (Хабаровск) 48—50; *Р. Черныш* (Пермь) 39, 50; *Ю. Чернявский* (п. Раздольное Крымской обл.) 49, 50; *А. Чунаев* (Волгоград) 50; *Л. Шаповаленко* (Канев) 39, 44, 48—50; *В. Шаповалов* (Донецк) 49; *А. Шарипов* (Сатка) 48, 49; *Г. Швец* (Киев) 39, 44, 45, 48; *А. Шуляк* (с. Молодецкое Черкасской обл.) 39, 45, 49, 50; *М. Юдин* (Запорожье) 44, 45, 49, 50; *О. Юсухно* (Киев) 45, 49, 50; *В. Яковлев* (Киев) 48, 49; *И. Яковлева* (Киев) 50; *А. Янчук* (Дубровица) 45, 50.

Программирование на микрокалькуляторе: ветвление и цикл

В. В. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ,
С. Г. ХЛЕБУТИН

Эта заметка предназначается в первую очередь для девятиклассников, изучающих курс «Основы информатики и вычислительной техники» и имеющих доступ к программируемому микрокалькулятору.

В предыдущем номере «Кванта» рассказывалось о том, как простейшие программы, написанные на учебном алгоритмическом языке, можно «транслировать в коды программируемого микрокалькулятора», то есть автоматически превращать такие программы в списки команд для микрокалькулятора (см. статью Л. Ф. Штернберга «Программирование на микрокалькуляторе: простейшие программы»). Здесь мы продолжаем этот рассказ. Речь пойдет о трансляции двух основных конструкций алгоритмического языка: ветвления и цикла. Изложение ведется применительно к микрокалькулятору «Электроника МК-54», но незначительными изменениями может быть приспособлено к другим моделям отечественных программируемых калькуляторов.

Прежде всего, посмотрим как работает калькулятор в автоматическом режиме, то есть когда программа выполняется без вмешательства человека. Для управления выбором команд из памяти служит некоторая специальная ячейка, называемая счетчиком адреса. Эта ячейка может содержать любой адрес программной памяти.

Если в автономном режиме нажать клавишу С/П, то тем самым отдается приказ калькулятору начать автоматическую работу. Это значит, что калькулятор анализирует содержимое ячейки программной памяти, на которую указывает счетчик адреса, выполняет ту или иную операцию и изменяет содержимое счетчика адреса. Такие действия называются *тактом* работы программы. Последовательно выполняя такты, программа считает, пока не встретит команды СТОП.

Если в программе нет операций переходов, то в процессе выполнения одного такта значение счетчика адреса увеличивается на единицу. Операции перехода предназначены именно для того, чтобы менять содержимое счетчика адреса по нашему усмотрению. Как же работают команды перехода?

Рассмотрим команды БП и $Fx\vee 0$, где $\vee$ обозначает один из знаков операции сравнения: $<$, $=$, $\geqslant$, $\neq$. Для работы этих команд необходимо использовать две ячейки памяти: одну для хранения кода команды и следующую для хранения некоторого адреса.

Работа команды БП осуществляется так: калькулятор помещает в счетчик адреса тот адрес, который у нас записан в следующей после кода БП ячейке.

Команда $Fx\vee 0$ делает следующее: если условие $x\vee 0$ выполнено, то старое содержимое счетчика адреса увеличивается на два, если же условие не выполнено, то в счетчик адреса помещается адрес из следующей за кодом команды $Fx\vee 0$ ячейки.

Пример 1. Проследим за изменением счетчика адреса в процессе потактового выполнения следующих программ (см. таблицы ниже).

адрес	команда	код	счетчик
00	7	07	01
01	8	08	02
02	9	09	03
03	F x⩾0	59	05
04	06	06	
05	/–/	0L	06
06	С/П	50	07

адрес	команды	код	счетчик
00	7	07	01
01	8	08	02
02	/–/	0L	03
03	F x≥0	59	06
04	06	06	
05	/–/	0L	
06	С/П	50	07

Итак, мы видим, что наличие операций перехода позволяет нарушать естественную (по порядку следования адресов) последовательность команд, а это как раз и необходимо при программировании конструкций «цикл» и «ветвление».

Конструкция «цикл»

На алгоритмическом языке такая конструкция выглядит следующим образом:

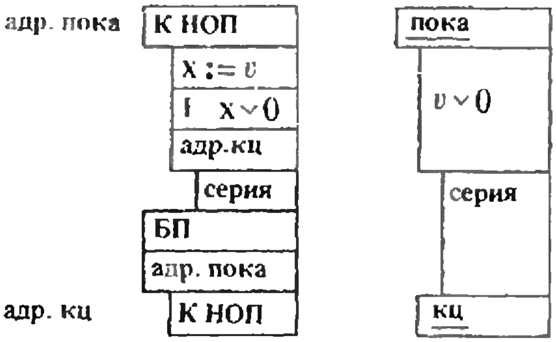
```
пока условие
 нц
    серия
 кц
```

Для облегчения перевода конструкции «цикл» на язык калькулятора мы будем записывать ее в несколько ином виде, а именно:

```
пока
  $v \vee 0$
    серия
  кц
```

Здесь v — арифметическое выражение, $\vee$ — один из знаков сравнения, описанных выше.

Предлагаем следующую схему перевода оператора цикла с алгоритмического языка на язык калькулятора (здесь X обозначает вершину стека):



Заметим, что команда К НОП (нет операции) хотя и не влечет никакого действия, но удобна для установления соответствия между ключевыми словами (пока, кц) алгоритмического языка и командами калькулятора, а также облегчает прослеживание логики программы. Выравнивание записей по вертикали удобно для поиска адресов перехода и для чтения программы.

Пример 2. Разработаем программу вычисления $m=n!$

На учебном алгоритмическом языке программа выглядит так:

```
алг факториал (цел $m$, $n$)
    арг $n$
    рез $m$
нач цел
    ввод $n$
    $m:=1$
    $i:=1$
    пока $i<n$
       нц
         $i:=i+1$
         $m:=m*i$
       кц
    вывод $m$
кон
```

Обратите внимание на то, что в тело программы мы вставили две дополнительные команды (ввод и вывод) — они облегчают трансляцию.

Теперь можно транслировать программу. Сначала опишем место хранения переменных в виде таблицы.

Переменные	n	m	i
Память	Rg0	Rg1	Rg2

Оттранслированная программа выглядит так:

Адреса	Команды	Коды	Алгоритмический язык
00	С/П	50	ввод n
01	X → П0	40	
02	1	01	m:=1
03	X → П1	41	
04	1	01	i:=1
05	X → П2	42	
06	К НОП	54	пока
07	П → X2	62	$i-n<0$
08	П → X0	60	
09	−	11	
10	F x<0	5C	
11	22	22	
12	П → X2	62	i:=i+1
13	1	01	
14	+	10	
15	X → П2	42	
16	П → X1	61	$m:=m\cdot i$
17	П → X2	62	
18	X	12	
19	X → П1	41	
20	БП	51	
21	06	06	
22	К НОП	54	кц
23	П → X1	61	вывод m
24	С/П	50	

Конструкция «ветвление»

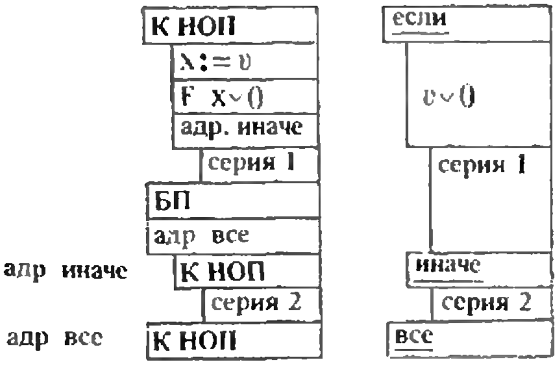
На алгоритмическом языке эта конструкция записывается так:

```
если условие
  то серия 1
  иначе серия 2
все
```

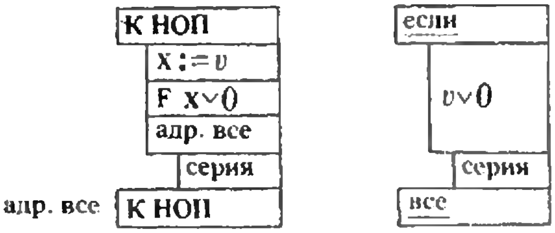
Для удобства перевода на язык калькулятора мы будем записывать ее так:

```
если
  $v \vee 0$
    серия 1
  иначе
    серия 2
все
```

Предлагаем следующую схему перевода:



Для «укороченного» оператора ветвления (**если... то... все**) схема перевода может быть такой:



Пример 3. Разработаем программу нахождения большего из двух чисел a и b.

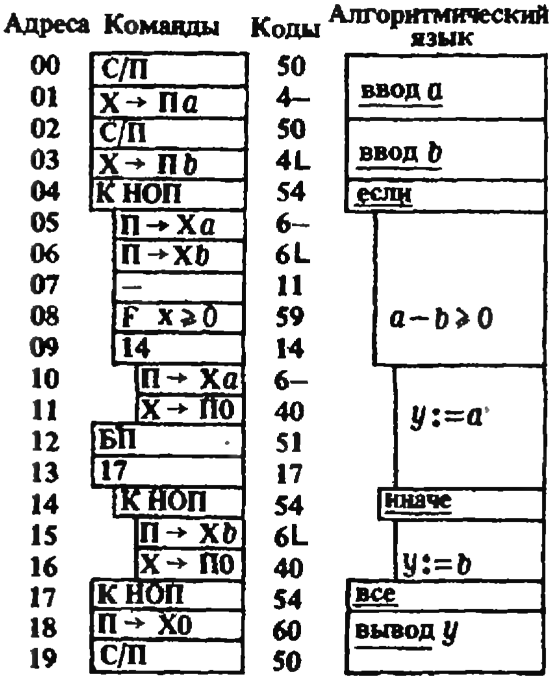
На алгоритмическом языке эту программу можно записать следующим образом (как и выше, для удобства трансляции мы ввели дополнительные команды **ввод** и **вывод**):

```
алг бид (вещ $a$, $b$, $y$)
  арг $a$, $b$
  рез $y$
нач
    ввод $a$, $b$
    если $a \geqslant b$
      то $y := a$
      иначе $y := b$
    все
    вывод $y$
кон
```

Выпишем в виде таблицы адреса переменных:

Переменные	a	b	y
Память	Rg a	Rg b	Rg 0

Программа транслируется следующим образом:



Адреса	Команды	Коды	Алгоритмический язык
00	С/П	50	ввод a
01	X → Пa	4–	
02	С/П	50	ввод b
03	X → Пb	4L	
04	К НОП	54	если
05	П → Xa	6–	$a-b \geqslant 0$
06	П → Xb	6L	
07	—	11	
08	F $x \geqslant 0$	59	
09	14	14	
10	П → Xa	6–	$y:=a$
11	X → П0	40	
12	БП	51	
13	17	17	
14	К НОП	54	иначе
15	П → Xb	6L	$y:=b$
16	X → П0	40	
17	К НОП	54	все
18	П → X0	60	вывод y
19	С/П	50	

В заключение заметим, что схемы перевода могут быть лучше или хуже, но само их наличие позволяет осуществлять перевод автоматически и почти без ошибок. Таким образом, если программа на алгоритмическом языке составлена грамотно, то довести ее до калькулятора совсем несложно.

Поправка

В первом номере «Кванта» за этот год допущена опечатка в условии задачи 2 варианта I на стр. 52. Неравенство в условии следует читать так: $\log_{\frac{1}{4}-3x}(1-25x^2)>0$.

VII. Элемент памяти — триггер

*Доктор физико-математических наук М. Е. ЛЕВИНШТЕЙН,
кандидат физико-математических наук Г. С. СИМИН*

Предыдущий раздел, посвященный логическим схемам (см. «Квант», 1986, № 1, 2), мы начали с обсуждения логических задач, которые приходится решать устройству, управляющему движением лифтов в обычном доме. Теперь, наверное, самое время упомянуть о том, что даже такое простое устройство не может функционировать, если в нем не предусмотрены элементы памяти. В «памяти» управляющего устройства лифта постоянно записано несколько данных: сколько секунд должна стоять открытой дверь после того, как лифт освободится; что делать, если автоматически закрывающиеся двери натолкнулись на препятствие; какова последовательность операций при нажатии аварийной кнопки «стоп» и т. д. Кроме этих постоянных данных, в «память» лифта вводят и записывают оперативные данные, меняющиеся в процессе работы — на каких этажах нажаты кнопки; куда движется лифт в данный момент: вверх, вниз, стоит на месте.

В памяти ЭВМ, решающей сложную задачу, зафиксированы сотни тысяч, а иногда и миллионы данных. Эти данные, как уже говорилось, записаны в форме, которую ЭВМ способна воспринимать и обрабатывать, то есть с помощью «нулей» и «единиц» (в двоичной системе счисления).*)

Ясно, что ни рассмотренные нами элементы вычислительной техники — транзисторы, ни логические схемы на их основе сами по себе элементами памяти быть не могут. Все они после прекращения действия входного импульса сразу возвращаются в исходное состояние.

Для элемента памяти нужно устройство, которое под действием входного импульса могло бы переключаться из состояния «0» в состояние «1» и обратно; и при этом, после прекращения действия входного импульса, запоминало бы свое состояние и могло находиться в нем неопределенно долго (до прихода следующего переключающего входного импульса).

Радиотехническая схема, удовлетворяющая этим требованиям, называется триггером (от английского trigger — защелка).

Понять принцип работы триггера легче всего, воспользовавшись уже известным нам свойством логической схемы НЕ (инвертора).

Рассмотрим два последовательно соединенных инвертора (рис. 1). Напряжение на входе первого инвертора $U_{вх}=x$ может равняться либо U^0 (логическому нулю), либо U^1 (логической единице). Напряжение на выходе инвертора всегда равняется $\bar{x}$ (не x), то есть U^1 при $U_{вх}=U^0$ и U^0 при $U_{вх}=U^1$. Выходное напряжение первого

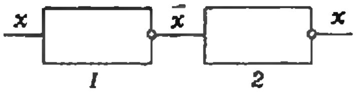


Рис. 1. Последовательное соединение двух логических схем типа «НЕ».

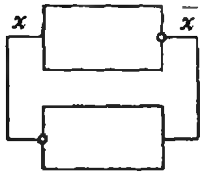


Рис. 2. Кольцо из двух инверторов.

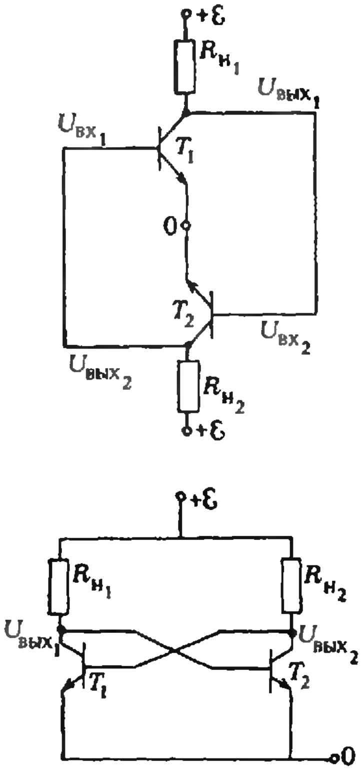


Рис. 3. Триггер на двух БТ. Схемы а) и б) полностью эквивалентны.

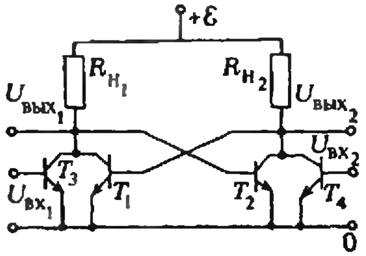


Рис. 4. Ячейка памяти на триггере с двумя входами.

---

*) Шуточное стихотворение «Необыкновенная девочка» (с. 50) поможет вам разобраться, как связаны двоичная и десятичная системы счисления.

инвертора является входным для второго. Поэтому на выходе второго инвертора напряжение всегда равно $\overline{(\bar{x})}$ (не (не x)), то есть x.

А теперь соединим выход второго инвертора со входом первого (рис. 2). При этом, очевидно, ничего не изменится: ведь напряжение на входе первого инвертора и до присоединения было равно x, и после соединения осталось таким же. Образовавшееся «кольцо» из двух инверторов, очевидно, будет оставаться в равновесии сколь угодно долго. При этом возможны два состояния: либо слева «1», а справа «0», либо, наоборот, слева «0», а справа «1». Схема «запомнит» то состояние, в котором были инверторы в момент образования кольца, и будет находиться в этом состоянии неограниченно долго *).

На рисунке 3, *а* показана принципиальная схема триггера, реализованная на двух биполярных транзисторах (БТ). Каждый из БТ образует инвертор, а соединение инверторов соответствует рисунку 2: выход T_1 соединен со входом T_2, а выход T_2 — со входом T_1.

Схема, представленная на рисунке 3, *б* — это та же схема, что и на рисунке 3, *а*, только несколько иначе нарисованная. Посмотрите внимательно на обе схемы и убедитесь в этом. Симметричное и изящное представление триггера, показанное на рисунке 3, *б*, общепринято, хотя, быть может, оно и не так наглядно поясняет принцип его работы, как первая схема.

Показанный на рисунке 3 триггер не может, однако, служить элементом памяти, поскольку состояние, в котором он находится, нельзя изменить с помощью сигнала.

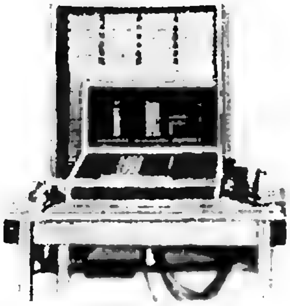
Схема триггера, дополненная двумя транзисторами (рис. 4), лишена этого недостатка. Под воздействием входных сигналов такой триггер может изменять свое состояние.

Условимся, например, считать, что триггер находится в состоянии «0», если $U_{\text{вых }2}=U^0$ (в этом случае, как мы знаем, $U_{\text{вых }1}=U^1$). Если, наоборот, $U_{\text{вых}2}=U^1$ (а $U_{\text{вых }1}=U^0$), будем считать, что триггер находится в состоянии «1». Можно сказать и так: в первом случае в *ячейку памяти*, показанную на рисунке 4, записан «0», во втором — «1».

Пусть в ячейке памяти записан «0». Это значит, что транзистор T_1 заперт (напряжение $U_{\text{вых }1}=U^1$), а транзистор T_2 открыт ($U_{\text{вых }2}=U^0$). Если подать на вход транзистора T_3 напряжение $U_{\text{вх }1}=U^1$, то через него потечет большой ток, напряжение на сопротивлении $R_{\text{н}1}$ возрастет, а на транзисторе T_1 — уменьшится и станет равным $U_{\text{вых }1}=U^0$. Но напряжение на T_1 служит входным сигналом для инвертора T_2. Инвертор T_2 «перевернется»: транзистор T_2 «запрется». На его выходе появится напряжение $U_{\text{вых }2}=U^1$. Это напряжение поступит на базу транзистора T_1 и... ничего не изменит. Транзистор T_1 и так открыт; напряжение на его выходе $U_{\text{вых }1}=U^0$. В результате ячейка памяти перейдет во второе возможное стабильное состояние, которому, по условию, соответствует «1».

Это новое состояние будет сохраняться неопределенно долго; пока на вход транзистора T_4 не поступит входной сигнал U^1. После этого триггер вновь «перевернется» и в ячейке памяти снова окажется записанным «0».

Более подробный разговор о записи, хранении и считывании информации в ЭВМ будет продолжен в следующей заметке.

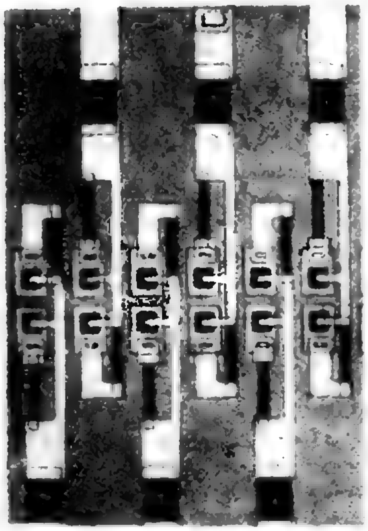


В машине немецкого инженера К. Цузе, часть которой представлена на снимке, программа, то есть последовательность команд, управляющих действиями машины, была задана в виде отверстий, пробитых в обычной киноленте.

Идея представления программы в двоичном коде и хранения ее так же, как и чисел, принадлежит американскому математику Джону Нейману (1946 г.). Он же разработал проект первой ЭВМ с «электронным» хранением программы — «ЭДВАК», — создававшейся с 1945 по 1950 годы. Элементами памяти в этой машине были ламповые триггеры.

* * *

Триггерная память современных быстродействующих ЭВМ выполняется на основе биполярных кремниевых транзисторов. БИС триггерной памяти, фрагмент которой показан на фото, имеет объем до сотен килобит (1 килобит равен тысяче двоичных разрядов). Быстродействие таких БИС порядка нескольких десятков наносекунд, включая и время поиска ячейки с нужной записью.



---

*) Это изящное объяснение принципа работы триггера принадлежит известному советскому ученому и педагогу профессору И. П. Степаненко.

Доминик Франсуа Араго

(Начало см. на с. 9)

плоскости пластинки, то магнит стремится следовать за движением пластинки; если же поворачивается магнит, пластинка стремится следовать за его движением; и это взаимодействие является настолько сильным, что поворачивает магниты или пластинки весом (массой) в несколько фунтов (1 фунт=454 г.). Если магнит и пластинка неподвижны друг относительно друга, то между ними нельзя наблюдать ни малейшего взаимодействия, ни притяжения, ни отталкивания». Попробуйте самостоятельно объяснить это явление.

Большой интерес представляет литературно-историческое наследие Араго. Это и учебники, и различные популярные книги. А его труд «Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров» до сих пор является одним из фундаментальных исследований по истории науки.

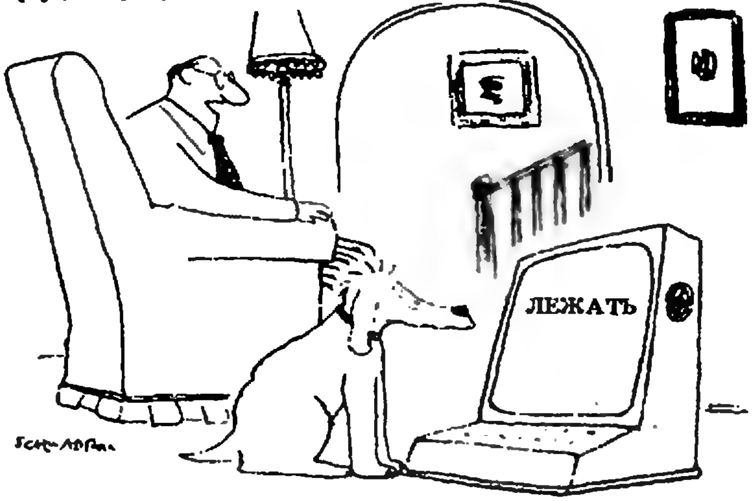
Надо сказать, что наука не была единственным увлечением Араго. Последние 20 лет своей жизни он активно занимался политикой. Избранный в 1831 году в Палату депутатов, в 1848 году он вошел во временное правительство, став военным, а позднее и морским министром. Современники отмечали, что в политике, как и в науке, ему были свойственны честность, беспристрастность, твердость характера, хладнокровие и находчивость в трудных ситуациях.

Девизом жизни Араго были слова, сказанные Даламбером одному молодому человеку, встречавшему трудности при изучении математики: «Идите, идите вперед — и обретете уверенность». Верность этому девизу позволила Доминику Франсуа Араго стать одним из сподвижников развития и совершенствования науки, промышленности и образования во Франции.

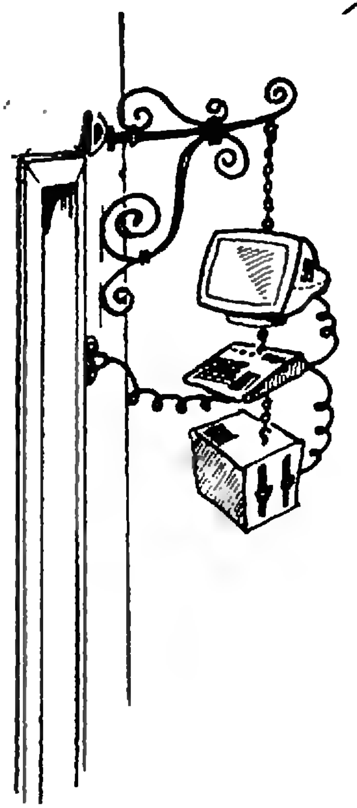
Б. И. Геллер

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Персональные компьютеры в картинках
(по материалам «PERKOMPUTILA INSTRUADO», 1985, № 2 [6] (Венгрия)



Устные команды ты уже выполняешь, попробуй освоить компьютерное управление.



Необыкновенная девочка

А. Н. Стариков

Ей было тысяча сто лет,
Она в сто первый класс ходила,
В портфеле по сто книг носила —
Все это правда, а не бред.
Когда, пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий.
Она ловила каждый звук
Своими десятью ушами,
И десять загорелых рук
Портфель и поводок держали.
И десять темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно...
Но станет все совсем обычным,
Когда поймете наш рассказ.

Уравнение касательной

Б. М. БЕККЕР,
В. М. ГОЛЬХОВОЙ,
кандидат педагогических наук Ю. И. ИОНИН

В этой статье мы разберем несколько типов задач по теме «Касательная», часто предлагаемых на конкурсных экзаменах по математике.

Напомним, что уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку $M(x_0;y_0)$, можно записать в виде $y=k(x-x_0)+y$. Так как угловой коэффициент касательной к графику дифференцируемой функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 равен $f'(x_0)$, уравнение касательной имеет вид

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

Таким образом, чтобы написать уравнение касательной, нужно знать три числа: x_0, $f(x_0)$ и $f'(x_0)$. Начнем с задач, в которых из условия легко находится значение x_0, а затем вычисляются $f(x_0)$, $f'(x_0)$.

Задача 1 (МГУ, психологический факультет, 1980). *Вычислите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y=\frac{x}{2x-1}$, в точке с абсциссой $x_0=1$.*

Решение. Найдем уравнение касательной. Для этого вычислим последовательно $f(1)$, $f'(x)$, $f'(1)$:

$$f(1)=1,\ f'(x)=-\frac{1}{(2x-1)^2},\ f'(1)=-1.$$

Уравнение касательной имеет вид $y=-(x-1)+1$, то есть $y=-x+2$. Эта прямая пересекает оси координат в точках A (2; 0) и B (0; 2). Таким образом, искомая площадь $S_{AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=2$.

Задача 2 (Красноярский ГУ, математический факультет, 1980). *Хорда параболы $y=-a^2x^2+5ax-4$ касается кривой $y=\frac{1}{1-x}$ в точке $x_0=2$ и делится этой точкой пополам. Найдите a.*

Решение. Напишем уравнение касательной к графику функции $f(x)=\frac{1}{1-x}$ в точке M с абсциссой $x_0=2$:

$$f(2)=-1,\ f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2},\ f'(2)=1,$$

так что уравнение касательной имеет вид $y=x-3$.

Предположим, что эта касательная пересекает данную параболу в точках A и B. Абсциссы точек A и B — это корни уравнения $-a^2x^2+5ax-4=x-3$, или

$$-a^2x^2+(5a-1)x-1=0. \qquad (1)$$

Точка M является серединой отрезка AB в том и только в том случае, если ее абсцисса равна полусумме абсцисс точек A и B. Воспользовавшись теоремой Виета, это условие можно записать в виде равенства $\frac{5a-1}{a^2}=4$, которое выполняется при $a=1$ и при $a=\frac{1}{4}$. Остается проверить, пересекаются ли при этих значениях a данная парабола и прямая $y=x-3$, то есть имеет ли корни уравнение (1). При $a=1$ получаем уравнение $-x^2+4x-1=0$ с положительным дискриминантом, а при $a=\frac{1}{4}$ — уравнение $-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{4}x-1=0$ с отрицательным дискриминантом.

Таким образом, $a=1$.

Задача 3. *Напишите уравнение касательной к параболе $y=2x^2-x-1$ в точке с ординатой 5, если известно, что эта касательная не проходит через точку M (1; —2).*

Решение. В условии задачи задана не абсцисса, а ордината точки касания. Для нахождения абсциссы решим уравнение $2x^2-x-1=5$. Получим два корня $x_1=-\frac{3}{2}$, $x_2=2$. Пусть $f(x)=2x^2-x-1$. Тогда $f'(x)=4x-1$, $f'\left(-\frac{3}{2}\right)=-7$, $f'(2)=7$. Напишем уравнение касательных: $y=-7\left(x+\frac{3}{2}\right)+5$ и $y=7(x-2)+5$, то есть $y=-7x-5{,}5$ и $y=7x-9$.

Подставив координаты точки M в каждое из уравнений, мы обнаружим, что первая касательная не проходит через точку M, а вторая проходит через эту точку.

Итак, ответ: $y=-7x-5{,}5$.

В задачах 4, 5, 6 условие, задающее касательную, позволяет найти значение производной в точке касания, а затем абсциссу и ординату этой точки.

Задача 4 (ЛГУ, биологический факультет, 1977). *К графику функции $y=x^3-x^2-13x+4$ проведена касательная в той точке второй четверти, где угловой коэффициент равен 3. Найдите точки пересечения этой касательной с координатными осями.*

Решение. Пусть a — абсцисса точки касания. По условию $f'(a)=3$. Так как $f'(x)=3x^2-2x-13$, для нахождения a получаем уравнение $3a^2-2a-13=3$, имеющее корни -2 и $8/3$. Значение $a=8/3$ нужно отбросить (по условию задачи точка касания лежит во второй четверти). При $a=-2$ точка касания имеет координаты $(-2;\ 18)$ и лежит во второй четверти. Уравнение касательной имеет вид $y=3x+24$. Эта прямая пересекает оси координат в точках $(-8;\ 0)$ и $(0;\ 24)$.

Задача 5 (ЛГУ, математико-механический факультет, 1977). *При каком значении a касательная к графику функции $y=a-x^2$ отсекает от первой четверти равнобедренный прямоугольный треугольник с площадью, равной $\frac{9}{32}$?*

Решение. Из условия задачи следует, что угол наклона касательной к оси абсцисс равен 135°. Поскольку $\operatorname{tg} 135^\circ=-1$, абсцисса точки касания — это корень уравнения $-2x=-1$. Следовательно, уравнение касательной имеет вид $y=-x+a+\frac{1}{4}$. Эта прямая пересекает оси координат в точках $A\left(0;\ a+\frac{1}{4}\right)$, $B\left(a+\frac{1}{4};\ 0\right)$.

По условию задачи точки A и B лежат на положительных полуосях, так что $a+\frac{1}{4}>0$. Площадь треугольника, о котором говорится в условии, равна $\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{4}\right)^2$. Решив уравнение $\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{32}$ (с учетом того, что $a+\frac{1}{4}>0$), получим ответ: $a=\frac{1}{2}$.

Если прямая задана уравнением вида $y=kx+b$, то коэффициент k равен тангенсу угла наклона этой прямой к оси абсцисс (мы пользовались этим, решая задачу 5). Отсюда следует, что прямые, заданные уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, параллельны в том и только в том случае, если $k_1=k_2$.

Задача 6 (Ереванский ГУ, факультет прикладной математики). *В какой точке кривой $y=\sqrt{1+x^2}$ касательная параллельна прямой $y=\frac{x}{2}+1$?*

Решение. Вычислим производную данной функции: $y'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой a равен значению производной в этой точке. По условию этот угловой коэффициент должен быть равен $\frac{1}{2}$. Таким образом, абсцисса искомой точки — это корень уравнения $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{1}{2}$. Решая это уравнение, получаем $a=1/\sqrt{3}$.

Ответ: $(1/\sqrt{3};\ 2/\sqrt{3})$.

Задача 7 (МАИ, 1981). *В каких точках графика функции $y=(1-x)\times(1+x)^2$ надо провести к нему касательные, чтобы они проходили через точку $(-1;\ 0)$?*

Решение. Обозначим через t абсциссу точки касания. Так как $y'=-(1+x)^2+2(1+x)(1-x)=(1+x)\times(1-3x)$, уравнение касательной имеет вид $y=(1+t)(1-3t)(x-t)+(1-t)(1+t)^2$. Условие прохождения касательной через точку $(-1;\ 0)$ запишется теперь в виде уравнения относительно t:

$$0=(1+t)(1-3t)(-1-t)+(1-t)(1+t)^2,$$

которое легко преобразуется к виду $(1+t)^2\cdot 2t=0$. Корни этого уравнения $t=0$, $t=-1$ — абсциссы искомых точек; их ординаты находим, вычисляя соответствующие значения данной функции. Ответ: $(0;\ 1)$, $(-1;\ 0)$.

Задача 8 (Воронежский ГУ, математический факультет). *Найдите уравнение касательной к кривой*

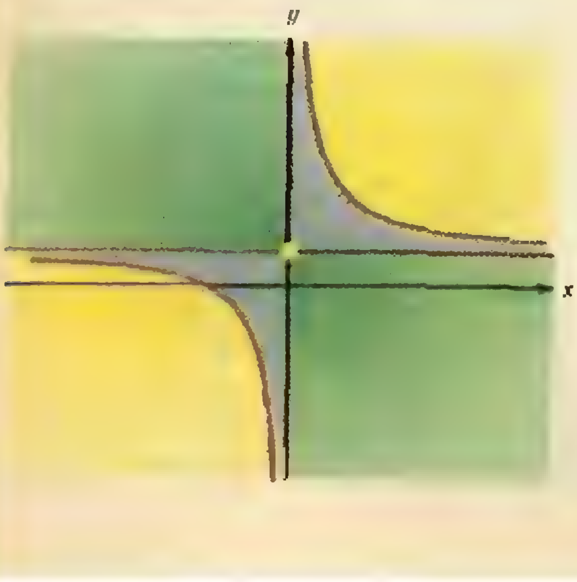
$y=\frac{x+1}{x}$, *если известно, что касательная проходит через точку M (a; b). Сколько существует решений в зависимости от точки M (a; b)?*

Решение. Ответ на второй вопрос задачи легко представить себе, если посмотреть на график данной функции. На рисунке красным цветом изображена гипербола $1+\frac{1}{x}$ и ее асимптоты (кроме точки их пересечения). Через каждую красную точку можно провести одну касательную. Синим цветом изображены области, из точек которых можно провести две касательные к одной ветви гиперболы. Через точки зеленых областей также проходят две касательные, но по одной к каждой ветви гиперболы. Из точек же областей, закрашенных желтым цветом, к данной гиперболе касательную провести нельзя.

Обозначим теперь через t абсциссу произвольной точки данной гиперболы и напишем уравнение касательной в этой точке: $y=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}+1$. Эта прямая проходит через точку M (a; b) в том и только в том случае, если $b=-\frac{1}{t^2}a+\frac{2}{t}+1$. Это условие равносильно системе

$$\begin{cases}(b-1)t^2-2t+a=0,\\ t\neq 0.\end{cases}\qquad(2)$$

Прежде всего рассмотрим случаи $b=1$ (в этом случае уравнение (2) является линейным) и $a=0$ (это единственный случай, когда уравнение (2) имеет корень $t=0$).



При $b=1$ уравнение (2) имеет единственный корень $t=\frac{a}{2}$, отличный от нуля при $a\neq 0$. Уравнение единственной касательной в этом случае имеет вид $y=-\frac{4}{a^2}x+\frac{4}{a}+1$.

При $a=0$ и $b\neq 1$ уравнение (2) имеет единственный отличный от нуля корень $t=\frac{2}{b-1}$. Уравнение единственной касательной в этом случае имеет вид $y=-\frac{(b-1)^2}{4}x+b$.

Наконец, при $a=0$, $b=1$ уравнение (2) ненулевых корней не имеет.

Пусть теперь $b\neq 1$, $a\neq 0$. Дискриминант квадратного уравнения (2) равен $4(1+a-ab)$. Если $1+a-ab<0$, то уравнение (2) корней не имеет, и, следовательно, через точку M (a; b) нельзя провести касательную к графику данной функции. Заметим, что неравенство $1+a-ab<0$ можно при $a>0$ записать в виде $b>\frac{1+a}{a}$, а при $a<0$ — в виде $b<\frac{1+a}{a}$. Таким образом, это неравенство задает желтые области на рисунке.

Если $1+a-ab=0$ (то есть точка $M(a;\ b)$ лежит на гиперболе), то уравнение (2) имеет единственный корень $t=a$, и уравнение касательной имеет вид $y=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}+1$.

Если $1+a-ab>0$, то уравнение (2) имеет два корня $t=\frac{1\pm\sqrt{1+a-ab}}{b-1}$. Подставляя эти корни в уравнение $y=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}+1$, мы получим уравнение двух касательных, проходящих через точку $M(a;\ b)$. Неравенство $1+a-ab>0$ вместе с неравенствами $b\neq 1$, $a\neq 0$ задает области, окрашенные на рисунке в синий и зеленый цвета.

Задача 9 (МФТИ, 1982). *Из точки $M(1;\ 1)$ проведены касательные к двум ветвям гиперболы $y=\frac{k}{x}$ ($k<0$), касающиеся этих ветвей в точках A и B, причем треугольник MAB правильный. Найдите коэффициент k и площадь треугольника MAB.*

Решение. Пусть t — абсцисса произвольной точки данной гиперболы. Касательная в этой точке задается уравнением $y=-\frac{k}{t^2}x+\frac{2k}{t}$ и проходит через точку $M(1;\ 1)$ в том и только в том случае, если $1=-\frac{k}{t^2}+\frac{2k}{t}$ или $t^2-2kt+k=0$. Это уравнение при $k<0$ имеет два корня t_1, t_2 — абсциссы точек A и B. По теореме Виета $t_1+t_2=2k$, $t_1t_2=k$. Поскольку ветви данной гиперболы симметричны относительно прямой $y=x$, а точка M лежит на этой прямой, точки A и B симметричны относительно прямой $y=x$. Впрочем, в этом можно убедиться и так: $t_1t_2=k$, то есть абсцисса точки B равна ординате точки A, а ордината точки B равна абсциссе точки A. Таким образом, точка A имеет координаты $(t_1;\ t_2)$, а точка B — координаты $(t_2;\ t_1)$. Отсюда следует, что $|MA|=|MB|$ при любом $k<0$. Таким образом, k нужно находить из равенства $|MA|=|AB|$. Вычислим $|MA|^2$ и $|AB|^2$:

$$|AB|^2=(t_1-t_2)^2+(t_2-t_1)^2=$$
$$=2(t_1-t_2)^2=2((t_1+t_2)^2-4t_1t_2)=$$
$$=8k^2-8k;$$
$$|MA|^2=(t_1-1)^2+(t_2-1)^2=$$
$$=t_1^2+t_2^2-2(t_1+t_2)+2=$$
$$=(t_1+t_2)^2-2(t_1+t_2)-2t_1t_2+2=$$
$$=4k^2-6k+2.$$

Мы получили относительно k уравнение $8k^2-8k=4k^2-6k+2$, которое имеет единственный отрицательный корень $k=-\frac{1}{2}$. Для нахождения площади правильного треугольника MAB подставим найденное значение k в выражение для $|AB|^2$. Получим $|AB|^2=6$ и, следовательно, $S_{MAB}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Задача 10 (МИСиС, 1978). *Найдите уравнение общей касательной к параболам $y=x^2+4x+8$ и $y=x^2+8x+4$.*

Решение. Обозначим через u и v абсциссы точек касания. Уравнение касательной к первой параболе в точке с абсциссой u имеет вид $y=(2u+4)x-u^2+8$, а уравнение касательной ко второй параболе в точке с абсциссой v имеет вид $y=(2v+8x-v^2+4$. Так как оба уравнения — это уравнения одной и той же прямой, имеем $2u+4=2v+8$, $-u^2+8=-v^2+4$. Из полученной системы уравнений находим $u=2$, $v=0$. Следовательно, уравнение искомой касательной $y=8x+4$.

Задача 11 (2-й тур Ленинградской математической олимпиады). *Найдите уравнение прямой, касающейся графика функции $f(x)=x^4-2x^3+x^2+x-2$ в двух точках.*

Заметим, что $f(x)-(x-2)=x^2(x-1)^2$. Оказывается, *если многочлен $f(x)$ представляется в виде $f(x)=(x-a)^2g(x)+l(x)$, где $l(x)$ — линейная функция, а $g(x)$ — произвольный многочлен, то прямая $y=l(x)$ является касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой a.* Действительно, в этом случае $f(a)=l(a)$, $f'(a)=l'(a)$, так что прямая $y=l(x)$ проходит через точку $(a;\ f(a))$ и имеет угловой коэффициент $f'(a)$. В нашем случае отсюда сразу же следует, что прямая $y=x-2$ касается графика данной функции в точках с абсциссами 0 и 1. Таким образом, прямая $y=x-2$ касается графика данной функции в двух точках. Докажите самостоятельно, что никакая другая прямая не касается графика данной функции в двух точках. Итак, уравнение искомой касательной $y=x-2$.

Упражнения

1 (ЛГУ, мат.-мех. факультет, 1977). При каком значении k касательная к графику функции $y=kx^2$ образует с осью абсцисс угол, равный $\frac{\pi}{3}$, и отсекает от четвертой четверти треугольник с площадью, равной $\frac{8\sqrt{3}}{3}$?

2 (Казанский ГУ, физический факультет, 1978). На кривой $y=x^3-3x^2+2$ найдите точки, в которых касательная параллельна прямой $y=3x$.

3 (МГУ, факультет выч. мат. и кибернетики, 1978). Найдите уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$, касающейся графика функции $y=-\frac{x^3}{2}+2$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y=\sqrt{4-x^2}$.

4 (МГУ, мех.-мат. факультет, 1980). Касательная к графику функции $y=\sqrt[3]{x^2}$ такова, что абсцисса c точки касания принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$. При каком значении c площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью абсцисс и вертикальной прямой $x=2$, будет наименьшей и чему равна эта наименьшая площадь?

5 (2-й тур Ленинградской математической олимпиады, 1984). Докажите, что если две касательные к параболе $y=x^2$ взаимно перпендикулярны, то расстояние между точками касания не меньше 1.

Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Разность цифр двузначного натурального числа A по модулю не превосходит 3, а сумма цифр числа A равна 9. Найдите A.

2. Решите уравнение

$\log_{1/3}(9^x+a)+\log_3(2\cdot 3^x)=0,\ a\in R.$

3. Решите уравнение

$$\sin\left(b\sqrt{x-1}+\frac{\pi}{6}\right)=0{,}5,\ b\in R.$$

4. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит правильный треугольник ABC. Высоты SD и AF боковой грани ASC имеют длину k и h соответственно, а все плоские углы при вершине S пирамиды имеют одинаковую величину. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины ребер AS, AB и BC, если известно, что точки A и C удалены на одинаковое расстояние от плоскости BSD.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\frac{a}{a-3\sin^2 2x}=3.$$

2. Имеются два сосуда с раствором щелочи разных концентраций (по объему). Первый сосуд содержит 4 л раствора, второй — 6 л раствора. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 35 % щелочи. Если же слить вместе по 3 л раствора из каждого сосуда, то получится раствор, содержащий a % щелочи. Сколько литров щелочи содержит второй сосуд?

3. Через вершину S прямого кругового конуса проведена плоскость, пересекающая окружность основания конуса в точках A и B. Медианы AC и SD треугольника ASB имеют длины m_1 и m_2 соответственно. Определите величину угла при вершине S в осевом сечении конуса, если известно, что площадь треугольника ASB имеет наибольшее возможное значение.

4. Функция $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+a}$ определена на отрезке [5; 7]. Найдите $f'(x)$ и все значения $a\in R$, при которых наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке [5; 7] не превышает 0,1.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Система состоит из невесомого стержня длиной $l=35$ см, положенного на неподвижную призму, а также невесомого блока с двумя грузами массой m_1 и m_2 и груза массой $M=2$ кг ($m_1+m_2=M$), прикрепленных к концам стержня (рис. 1). При движении грузов относительно блока равновесие стержня имеет место, если точка опоры стержня сдвинута на расстояние $\Delta l=5$ см влево от середины стержня. Определите массы m_1 и m_2. Трением пренебречь.

2. Плоская шайба массой $m=0{,}2$ кг начинает скользить с начальной скоростью $v_0=12$ м/с вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha=30°$ с горизонтом. Коэффициент трения между шайбой и плоскостью $\mu=0{,}3$. Какую работу совершат над шайбой силы трения в течение времени $t=3{,}5$ с после начала движения?

3. В установке, изображенной на рисунке 2, масса каждого груза (A и B) $m=2$ кг, угол $\alpha=30°$, массы блока и нити пренебрежимо малы, трения нет. Найдите мощность, которую разовьет сила натяжения нити, действующая на груз A, через время $t=2$ с после начала движения.

4. Один моль идеального газа перевели из состояния *1* в состояние *2* изохорически, так, что его давление уменьшилось в $n=1{,}5$ раза, а затем изобарически нагрели до первоначальной температуры T_1. При этом газ совершил работу $A=0{,}83$ кДж. Найдите T_1.

5. Шарик массой $m=2$ г, имеющий заряд $q=2{,}5\cdot 10^{-9}$ Кл, подвешен на нити и движется по окружности радиусом $R=3$ см с угловой скоростью $\omega_1=2$ с$^{-1}$ (рис. 3). В центр окружности поместили шарик с таким же зарядом. Какой должна стать угловая скорость ω_2 вращения шарика, чтобы радиус окружности не изменился?

6. Шарик массой $m=1$ кг и зарядом $q=2\cdot 10^{-4}$ Кл подвешен на изолирующей нити в однородном электрическом поле с напряженностью $E=3\cdot 10^4$ В/м, причем вектор $\vec{E}$ перпендикулярен силе тяжести и направлен влево. Шарик отвели вправо так, что нить отклонилась на угол $\alpha=30°$ от вертикали, и отпустили. Найдите натяжение нити при прохождении ею вертикального положения.

7. Электролампа с вольфрамовой спиралью в момент включения потребляет мощность $P=500$ Вт. Какую мощность она будет потреблять после нагревания спирали от комнатной температуры до температуры $t=2500$ °C, если температурный коэффициент сопротивления вольфрама $\alpha=4{,}5\cdot 10^{-3}$ K^{-1}?

8. Пучок протонов, ускоренных разностью потенциалов $U=20$ кВ, падает на заземлен-

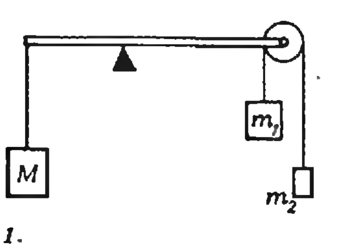


Рис. 1.

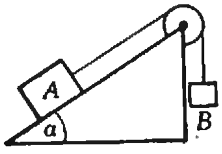


Рис. 2.

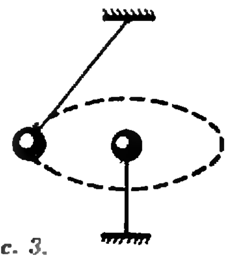


Рис. 3.

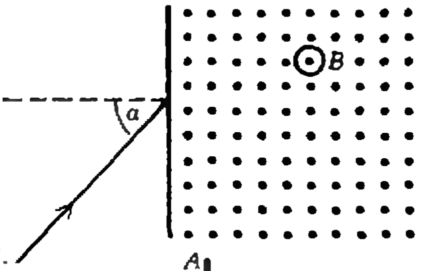


Рис. 4.

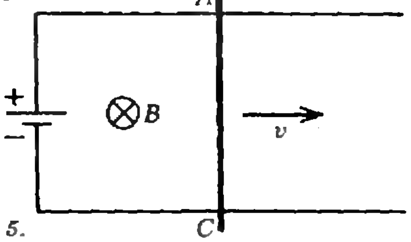


Рис. 5.

ную металлическую пластинку нормально к ее поверхности. Полагая, что все протоны поглощаются пластинкой, определите силу, с которой пучок действует на пластинку, если ток в пучке $I=80$ мА. Отношение электрического заряда протона к его массе $e/m=10^8$ Кл/кг. Силой тяжести пренебречь.

9. Протон влетает в область поперечного к его траектории однородного магнитного поля под углом $\alpha=30°$. Для указанного на рисунке 4 направления индукции магнитного поля $\vec{B}$ время движения протона в области поля составляет $\tau=0{,}5\cdot10^{-6}$ с. Найдите B. Отношение заряда протона к его массе $e/m=10^8$ Кл/кг.

10. Контур с источником тока, имеющим внутреннее сопротивление $r=0{,}2$ Ом, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}1$ Тл. Вектор $\vec{B}$ перпендикулярен к плоскости контура и направлен так, как показано на рисунке 5. Найдите ток в цепи при движении проводника AC со скоростью $v_1=10$ м/с вправо, если при движении его в том же направлении со скоростью $v_2=40$ м/с ток отсутствует. Сопротивление проводника AC $R=0{,}1$ Ом, его длина $l=10$ см. Сопротивлением направляющих рельсов пренебречь.

Публикацию подготовили
А. И. Руденко, В. Е. Чижов,
Н. В. Шолохов

Московский институт стали и сплавов

Вариант письменного экзамена

1. Упростите до числового значения при $a=27$

$$\frac{a^{4/3}-8a^{1/3}b}{a^{2/3}+2(ab)^{1/3}+4b^{2/3}}:\left(1-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right).$$

2. При каком наименьшем целом значении k уравнение

$$(k-1)x^2-2(k+1)x+k-3=0$$

имеет два различных корня?

3. Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{6x^2+10}.$$

В ответе запишите меньший корень уравнения.

4. Предприятие увеличивало объем выпускаемой продукции ежегодно на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что за два года объем выпускаемой продукции увеличился на 44 %.

5. Решите неравенство

$$(0{,}2)^{\frac{x+3}{4-x}}\leqslant 0{,}04.$$

В ответе запишите наибольшее целое решение неравенства.

6. Решите уравнение

$$(x^{\lg x})^2-100x^3=0.$$

В ответе запишите больший корень уравнения.

7. Проведена касательная к графику функции $y=x^2-4x-3$ в точке пересечения этого графика с осью ординат. Найдите площадь треугольника, образованного касательной и осями координат.

8. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x)=3x^4+2x^3-18x^2+15$ на отрезке $[-3;\ 1]$.

9. Упростите выражение и вычислите при $\alpha=\frac{7\pi}{6}$

$$\sqrt{3}\,\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}.$$

10. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}(x+1)\cdot\operatorname{ctg}(2x+1)=1.$$

В ответе запишите количество корней уравнения, принадлежащих отрезку $[0;\ 15]$.

11. Длины оснований трапеции равны 10 и 24, длины боковых сторон равны 13 и 15. Найдите площадь трапеции.

12. Объем конуса равен 81. Высота конуса разделена на три равные части и через точки деления проведены плоскости параллельно основанию. Найдите объем части конуса, находящейся между проведенными плоскостями.

Физика

Вариант письменного экзамена

1. Тележка массой $M=20$ кг может катиться без трения по горизонтальному пути. У заднего края тележки лежит брусок массой $m=2$ кг (края бруска и тележки совпадают). Коэффициент трения между бруском и тележкой $\mu=0{,}25$. К бруску приложена горизонтальная сила $F=20$ Н. Через какое время брусок упадет с тележки, если его длина $l=1$ м?

2. Для расплавления $m=1$ т стали используется электропечь мощностью 100 кВт. Сколько времени продолжается плавка, если слиток до начала плавления надо нагреть на $\Delta T=1500$ К? Удельная теплоемкость стали $c=500$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления стали $\lambda=2{,}7\cdot10^5$ Дж/кг.

3. Определите массу меди, выделившейся при электролизе, в ходе которого затрачено $W=8$ кВт · ч энергии. Напряжение на электродах электролитической ванны $U=12$ В, КПД установки $\eta=80$ %. Электрохимический эквивалент меди $k=3{,}3\cdot10^{-7}$ кг/Кл.

4. В стеклянную U-образную трубочку (рис. 1) налита ртуть так, что весь столбик имеет длину $l=20$ см. После заполнения трубочку слегка наклонили и возвратили в вертикальное положение, от чего столбик ртути начал колебаться. Найдите период этих колебаний.

5. Металлическое изделие массой $m_1=0{,}8$ кг было нагрето до температуры $t_1=950$ °С, а затем с целью закалки опущено в ванну, заполненную жидкостью массой $m_2=50$ кг с начальной температурой $t_0=16$ °С. Какую равно-

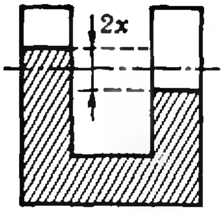


Рис. 1.

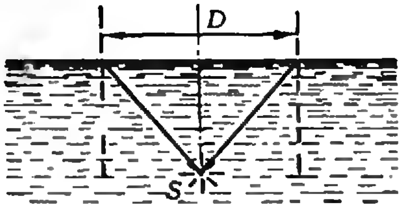


Рис. 2.

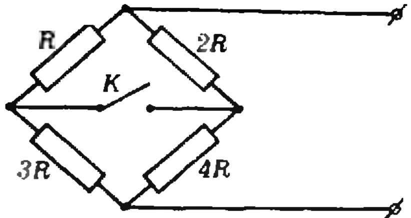


Рис. 3.

весную температуру будут иметь изделие и жидкость в ванне? Потерями тепла пренебречь. Удельная теплоемкость изделия $c_1=460$ Дж/(кг · К), жидкости — $c_2=4100$ Дж/(кг · К).

6. На какой глубине расположен точечный источник света в воде, если с поверхности воды лучи света выходят в воздух из круга диаметром $D=2$ м (рис. 2)? Показатель преломления воды $n=1{,}333$.

7. Воздух в помещении имеет температуру $t_1=24$ °C и относительную влажность $\varphi_1=50\,\%$. Определите влажность воздуха после его охлаждения до $t_2=20$ °C. Процесс охлаждения считать изохорическим. Давление насыщенного водяного пара при 20 °C и 24 °C равны соответственно $p_{н2}=2330$ Па и $p_{н1}=2943$ Па.

8. До замыкания ключа K сопротивление группы резисторов, соединенных по схеме, изображенной на рисунке 3, $R=504$ Ом. Найдите сопротивление этой группы резисторов после замыкания ключа.

9. Два иона, имеющие одинаковый заряд и одинаковую кинетическую энергию, но различные массы, влетели в однородное магнитное поле. Первый ион описал окружность радиусом $r_1=3$ см, а второй — $r_2=1{,}5$ см. Вычислите отношение масс ионов.

10. Горизонтально расположенный диск вращается вокруг вертикальной оси, делая $n=15$ об/мин. Наибольшее расстояние от оси вращения, на котором тело удерживается на диске в равновесии, равно $r=10$ см. Чему равен коэффициент трения тела о диск?

11. Определите максимальную кинетическую энергию электронов, вылетающих из некоторого металла при его освещении светом с длиной волны $\lambda=0{,}345$ мкм. Работа выхода для этого металла $A=2{,}45$ эВ.

12. Пучок параллельных лучей проходит через две тонкие собирающие линзы, оставаясь параллельным. Расстояние между линзами $l=15$ см. Определите фокусное расстояние первой линзы, если для второй линзы оно равно $F_2=9$ см.

Публикацию подготовили
В. А. Карасев, В. И. Марченко

Московский энергетический институт

Математика

Вариант письменного экзамена

1. Упростите выражение

$$\left[\frac{a+b}{(a+b)^2-4ab}\cdot(a-b)-\frac{a-b}{(a-b)^2+4ab}\times\right.$$
$$\left.\times(a+b)\right]\frac{(a^2-b^2)\cdot 10^{-\lg(a^2+b^2)}}{2ab}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{21}{8}, \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{37}{6}. \end{cases}$$

3. Разность двух чисел равна наибольшему значению функции $f(x)=\frac{x^3}{3}-x+1$ на отрезке $[0;\ 2]$, а сумма этих чисел в два раза больше наименьшего значения той же функции на указанном отрезке. Найдите эти числа.

4. Найдите все корни уравнения

$$(\sin x-1)[(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\sin 4x-2]=0,$$

удовлетворяющие неравенству

$$\lg\left[(x+2\pi)\left(-x-\frac{3\pi}{2}\right)+1\right]\geqslant 0.$$

5. Найдите углы ромба, если известно, что площадь вписанного в него круга вдвое меньше площади ромба.

Задачи устного экзамена

1. Каким свойством должны обладать диагонали параллелограмма, чтобы: а) параллелограмм можно было вписать в окружность? б) в параллелограмм можно было вписать окружность?

2. Каким свойством должны обладать стороны треугольника, чтобы центр вписанной в него окружности совпадал с центром описанной около него окружности?

3. Докажите неравенство

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+1\geqslant\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$$

при $\alpha,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$.

4. Упростите выражение

$$A=\sqrt{-(a+b+c)^2+\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

5. Найдите наименьший период функции

$$y=5\sin x+\sin 2x.$$

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=3\cdot\sin^2 x+4\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x.$$

7. Сколько действительных корней имеет уравнение

$$1+x-x^2=|x|^3?$$

8. Найдите область определения функции

$$f(x)=\frac{\sqrt[4]{16-x^2}}{1-\sin x\cdot\sin 7x}.$$

9. Постройте графики следующих функций:
а) $y=\sqrt{-(1-x^2)^2}$; б) $y=\arcsin x+\sqrt{x^2-1}$.

10. Найдите производную функции

$$y=\left[\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^3+1\right]^{\log_2 x^2}$$

11. При каком значении x функция

$$y=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\ldots+(x-a_n)^2$$

достигает наименьшего значения?

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Количество теплоты. Единицы измерения. Удельная теплоемкость. Формула подсчета количества теплоты, необходимого для нагревания тела. Первый закон термодинамики.

2. Два тела движутся вдоль оси координат OX. На основании графиков зависимости скорости тела от времени $v(t)$ (рис. 1) запишите формулу скорости для каждого тела. Начертите графики зависимости координат тел от времени $x(t)$, если начальная координата тел $x_0=0$.

3. При температуре $t_1=27$ °C давление газа в замкнутом сосуде было равно $p_1=3\cdot10^5$ Па. Какой будет температура газа при давлении $p_2=2{,}5\cdot10^5$ Па?

4. Какую максимальную скорость могут получить вырванные из калия электроны при облучении его светом с длиной волны $\lambda=0{,}4$ мкм? Работа выхода электрона для калия $A=3{,}2\cdot10^{-19}$ Дж, масса электрона $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, постоянная Планка $h=6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж · с.

5. Частица массой $m=10^{-4}$ кг и зарядом $q=10^{-8}$ Кл влетает в область однородного электрического поля шириной $b=0{,}1$ м под углом $\alpha=45°$, а вылетает под углом $\beta=60°$ (рис. 2). Определите первоначальную скорость частицы, если напряженность однородного поля $E=10^6$ В/м. Траектория частицы лежит в плоскости чертежа. Силой тяжести пренебречь.

Вариант 2

1. Два рода электричества. Взаимодействие электрических зарядов. Закон Кулона. Диэлектрическая проницаемость вещества. Единица измерения заряда.

2. Узкую, длинную, запаянную с одного конца стеклянную трубку частично заполнили водой и перевернули закрытым концом вверх. Что находится в образовавшемся объеме?

3. Свеча находится на расстоянии $d=10$ см от тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F=5$ см. На каком расстоянии от линзы находится изображение и какое оно?

4. Напряжение на конденсаторе в идеальном колебательном контуре изменяется по закону $U=50\cos(1\cdot10^5 t)$ (В) и при этом максимальное значение заряда конденсатора равно $q_m=5\cdot10^{-6}$ Кл. Определите индуктивность катушки контура.

5. В цепь, состоящую из аккумулятора и резистора с сопротивлением $R=20$ Ом, подключили вольтметр сначала последовательно, затем параллельно резистору. Показания вольтметра в обоих случаях одинаковы. Сопротивление вольтметра $R_в=500$ Ом. Определите внутреннее сопротивление аккумулятора.

Публикацию подготовили
В. Ф. Сафонов, М. Г. Тимошин

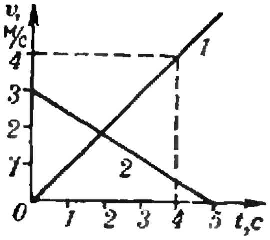


Рис. 1.

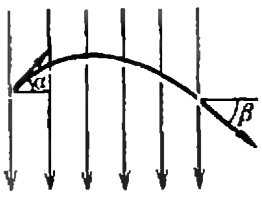


Рис. 2.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение
$$\sqrt[3]{(2+x)^2}+4\sqrt[3]{(2-x)^2}=5\sqrt[3]{4-x^2}.$$

2. Решите неравенство
$$\log_x\log_3(9^x-6)\geqslant1.$$

3. Найдите наибольший на интервале $]-\pi/2;\ \pi[$ корень уравнения.
$$\sin\frac{3}{2}x\cos\frac{x}{2}\cos=\frac{1}{2}(5x-\pi/2).$$

4. В окружности проведены две взаимо перпендикулярные хорды AB и CD. Найдите радиус этой окружности, если $AC=6$ см, $BD=8$ см.

5. Река имеет ширину 160 м и скорость течения 6 км/час. Лодка, скорость которой в стоячей воде 4,8 км/час, пересекает реку за 2 минуты, высаживает пассажиров и возвращается обратно. На каком минимальном расстоянии от места старта может оказаться лодка?

; **Вариант 2**

1. Решите уравнение
$$\sqrt{\frac{x-4}{x}}+\sqrt{\frac{3x+4}{x}}=2.$$

2. Решите уравнение
$$\frac{1}{4}\log_{\sqrt{x+1}}9+\log_{3x}3=0.$$

3. Найдите наибольший на интервале $]-\pi/6;\ \pi/2[$ корень уравнения
$$-2\sin x\cos 2x=\cos(5x+\pi/2).$$

4. В окружность вписан треугольник ABC. Расстояние от точек A и C до прямой, касающейся окружности в точке B, равны 4 см и 9 см. Найдите высоту треугольника, проведенную из вершины B.

5. При каких значениях параметра a каждое решение неравенства
$$x^2-3x+2<0$$
будет содержаться среди решений неравенства
$$ax^2-(3a+1)+3>0?$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. На наклонной плоскости, имеющей угол наклона к горизонту $\alpha=30°$, находится цилиндр. Цилиндр удерживается в покое огибающей его нитью, один конец которой закреплен на вершине наклонной плоскости, а другой тянут вертикально вверх. С какой силой нужно тянуть нить, если масса цилиндра $m=30$ г?

2. В сообщающиеся сосуды налили ртуть. Затем в один из сосудов налили еще столб масла высотой $h_1=30$ см, а в другой — столб воды высотой $h_2=20$ см. Определите разность уровней ртути в сосудах. Плотность ртути $\rho=13{,}6\cdot10^3$ кг/м^3, масла $\rho_1=0{,}9\cdot10^3$ кг/м^3, воды $\rho_2=1{,}0\cdot10^3$ кг/м^3.

3. Стеклянный шарик объемом $V=0{,}5$ см^3 равномерно падает в воде. Какое количество теплоты выделится при перемещении шарика

на $h=6$ м? Плотность стекла $\varrho_1 \approx 2505$ кг/м^3, воды $\varrho_2=1000$ кг/м^3.

4. Стеклянная трубка, запаянная с одного конца, расположена горизонтально. Воздух, находящийся в трубке, отделен от атмосферного столбиком ртути длиной $l=10$ см. Трубку перемещают вдоль ее оси равномерно с ускорением $a=10$ м/с^2 сначала запаянным концом вперед, затем открытым концом вперед. Определите атмосферное давление, если в первом случае длина воздушного столбика в трубке в $n=1{,}3$ раза больше, чем во втором. Плотность ртути $\varrho=13{,}6\cdot 10^3$ кг/м^3.

5. Шарик массой m, подвешенный на длинной нити, совершает колебания. Во сколько раз изменится период колебаний, если шарику сообщить положительный заряд q и поместить его в однородное электрическое поле напряженностью $\vec{E}$, силовые линии которого направлены вертикально вниз?

6. Дуговая лампа горит под напряжением $U=80$ В и потребляет мощность $P=800$ Вт. На сколько градусов нагреются подводящие провода через $\tau=1$ мин после включения лампы, если проводка выполнена медным проводом сечением $S=4$ мм^2? Половина выделившегося количества теплоты отдается окружающей среде, удельное сопротивление меди $\varrho=1{,}7\times 10^{-8}$ Ом·м, плотность $D=8{,}9\cdot 10^3$ кг/м^3, удельная теплоемкость $c=395$ Дж/(кг·К).

7. В электрическую цепь последовательно включены батарея с ЭДС $\mathcal{E}=12$ В, реостат и катушка с индуктивностью $L=1$ Гн. При сопротивлении реостата $R=10$ Ом в цепи протекал некоторый постоянный ток. Затем сопротивление реостата начали изменять так, чтобы ток в цепи уменьшался с постоянной скоростью $\Delta I/\Delta t=0{,}2$ А/с. Каким будет сопротивление цепи через $t=2$ с после начала изменения тока? Внутренним сопротивлением батареи и активным сопротивлением катушки пренебречь.

8. Протон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B=0{,}4$ Тл перпендикулярно вектору магнитной индукции $\vec{B}$. Определите, на какую глубину в область поля может проникнуть протон, если его энергия $W=1{,}6\times 10^{-13}$ Дж. Масса протона $m=1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг, его заряд $q=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл.

9. На главной оптической оси собирающей линзы расположены две светящиеся точки: на расстояниях $d_1=20$ см и $d_2=40$ см от линзы. Зная, что их изображения находятся в одной и той же точке, определите фокусное расстояние линзы.

10. Объектив фотоаппарата изготовлен из двух линз — рассеивающей и собирающей. Рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F_1=5$ см находится на расстоянии $l=45$ см от фотопленки. Где необходимо разместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F_2=8$ см, чтобы на пленке получались резкие изображения удаленных предметов?

Публикацию подготовили
В. В. Варфоломеев, М. Н. Данилычева,
И. М. Матусевич

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

(Начало см. на с. 30)

Награждаются Дипломом и значком журнала «Квант» и книгами серии «Библиотечка «Квант» за активное участие в конкурсе:

По математике

Н. АГАЗАРЯН — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
М. АЛЬТ — Одесса, с. ш. № 100, 8 кл.
А. АСТАШКЕВИЧ — Томск, с. ш. № 24, 10 кл.
Г. ГЕВОНДЯН — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
О. ГЕУПЕЛЬ — Дрезден (ГДР)
А. ГОРОХОВСКИЙ — Киев, с. ш. № 79, 8 кл.
И. ДЫННИКОВ — Жуковский, с. ш. № 1, 9 кл.
В. ЖУРАВЛЕВ — Гайворон, с. ш. № 2, 9 кл.
М. ИГНАТЬЕВ — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
И. КАПОВИЧ — Хабаровск, с. ш. № 2, 10 кл.
А. КОЗИНСКИЙ — Гайворон, с. ш. № 2, 9 кл.
Т. МИСИРПАШАЕВ — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
О. НИЦ — Одесса, с. ш. № 100, [illegible] кл.
Д. ПАСТУР — Харьков, с. ш. № 146, 10 кл.
М. ПОМЕРАНЦЕВ — Черкассы, с. ш. № 4, 10 кл.
А. ПРИШЛЯК — Киев, с. ш. № 179, 10 кл.
Т. РАДЬКО — Корсунь-Шевченковский, с. ш. № 4, 10 кл.
К. СТЫРКАС — п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82, 9 кл.
В. СУДАКОВ — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 10 кл.
Д. ТУЛЯКОВ — Жданов, с. ш. № 7, 8 кл.
А. ЧАГИРОВ — Алма-Ата, с. ш. № 56, 10 кл.
С. ШЕЙНИН — Молодечно, с. ш. № 7, 10 кл.

По физике

С. АНАТОЛЬЕВ — Ярославль, с. ш. № 33, 10 кл.
А. БЕЛОПОЛЬСКИЙ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
И. БЕНА — Васлуй (СРР)
Ю. БОРОВСКИЙ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
А. ВИЛЬКОЦКИЙ — Минск, с. ш. № 16, 10 кл.
Л. ГОЛЬДШТЕЙН — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
В. ЖЕВЛАКОВ — п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82, 10 кл.
В. ЗЕЛОВ — Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ, 10 кл.
В. КИРЬЯШКИН — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
П. КЛАРК — Тула, с. ш. № 36, 10 кл.
К. ЛОПИН — Фрунзе, с. ш. № 61, 10 кл.
Д. МОГИЛЕВЦЕВ — Шклов, с. ш. № 4, 10 кл.
С. МЯГЧИЛОВ — Одесса, с. ш. № 16, 10 кл.
А. НЕДАЧИН — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
О. ОСАУЛЕНКО — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
В. ПЕСОЦКИЙ — Брестская обл., Дворецкая с. ш., 10 кл.
О. ПОСУДНЕВСКИЙ — Береза, с. ш. № 1, 10 кл.
Ю. РЫБАЛОЧКА — Киев, ФМШ № [illegible] при КГУ, 10 кл.
Т. САГАЙДАК — Канев, с. ш. № 4, 10 кл.
В. САКБАЕВ — Алма-Ата, РОФМШ, 10 кл.
Б. САМОЙЛОВ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
М. СИТНИКОВ — Климовск, с. ш. № 5, 10 кл.
О. ЮСУХНО — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.

Уравнение касательной

1. $K=\frac{3}{16}$.

2. $(1-\sqrt{2};\ \sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$.

3. $y=-x+\frac{5}{2}$.

4. $\frac{48}{25}\sqrt{\frac{5}{4}}$ при $c=\frac{4}{5}$.

«Квант» для младших школьников

1. Сумма указанных чисел $40+45+44+27=156$ есть утроенная стоимость всех четырех марок. Таким образом, четыре марки стоят 52 копейки. Вычитая из 52 копеек сумму в 40 копеек, получим 12 копеек — стоимость кубинской марки. Аналогично стоимость монгольской марки 7 копеек, болгарской — 8 копеек, польской — 25 копеек.

2. Обозначим искомое число через x. Тогда $x+16=n^2$, а $x-16=k^2$. Отсюда $n^2-k^2=32=1\cdot 32=2\cdot 16=4\cdot 8=(n+k)(n-k)$. Получаем две системы уравнений: $n+k=16$, $n-k=2$ и $n+k=8$, $n-k=4$. (Случай $n+k=32$, $n-k=1$ отпадает, так как числа n и k должны иметь одинаковую четность). В первом случае $n=9$, $k=7$, $x=65$; во втором случае $n=6$, $k=2$, $x=20$. Таким образом, только числа 20 и 65 обладают указаным в задаче свойством.

3. Когда человек бежит по бревну, он просто не успевает упасть.

4. Заметим, что сумма площадей четырех треугольников ADE, ACF, BDE и BCF равна площади прямоугольника. С другой стороны, эта сумма равна удвоенной площади красной части прямоугольника плюс площадь белой его части. Аналогично сумма площадей четырех треугольников BCD, BEF, ACD и AEF равняется площади прямоугольника, и в то же время равна площади белой части плюс удвоенная площадь синей части. Отсюда следует утверждение задачи.

5. Примем за основание системы счисления число n. Из первого справа столбца следует, что бука О равна нулю. Таким образом, переносы единиц будут из второго столбца в третий и из четвертого в пятый. Отсюда получаем соотношения: $2Т=n+И$, $И+1=К$, $К+И=n$, $К+1=Т$. Таким образом, $n=7$, $И=3$, $К=4$, $Т=5$.

Необыкновенная девочка

(*см. с. 50*)

Когда мы говорим, что у человека две ноги, а у собаки — четыре, мы даже не задумываемся в том, в какой *системе счисления* мы считаем. Говоря, «этой черепахе сто лет», мы подразумеваем, что

$$100=1\cdot 10^2+0\cdot 10^1+0\cdot 10^0.$$

И вообще, если $a_1, a_2, \ldots a_n$ — цифры числа, то само число $A=\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ мы считаем равным $a_1\cdot 10^n+a_2\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_n\cdot 10^0$. На самом деле так будет только в *десятичной системе счисления*, *основание* которой равно *десяти*. Однако в качестве основания системы счисления можно взять любое натуральное число $q>1$; число $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ в такой q-ичной системе счисления будет равно

$$\overline{a_1a_2\ldots a_n}=a_1q^n+a_2q^{n-1}+\ldots+a_n\cdot q^0.$$

В какой же системе счисления у девочки может быть 10 рук, 10 ушей и 10 глаз? Только в такой, в которой 10 будет равно числу 2, то есть $10_q=1\cdot q^1+0\cdot q^0=2$. Таким образом, $q=2$, значит, в этом стихотворении все происходит в двоичной системе счисления. В этой системе

$100=1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+0\cdot 2^0=4$,

$101=1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0=5$,

$1100=1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+0\cdot 2^0=12$.

Девочке было 12 лет, она училась в пятом классе.

Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. 36, 45, 54, 63. **Указание.** Если $A=10x+y$, где x и y — цифры, то по условию

$$\begin{cases} |1x-y|\leqslant 3, \\ x+y=9. \end{cases}$$

2. $\{\log_3(1+\sqrt{1-a})\}$ при $a\in]-\infty;\ 0]$; $\{\log_3(1+\sqrt{1-a}),\ \log_3(1-\sqrt{1-a})\}$ при $a\in]0;\ 1]$; $\varnothing$ при $a\in]1;+\infty[$. **Указание.** Уравнение после замены $t=3^x$ приводится к виду $t^2-2t+a=0$ и имеет корни $t_{1,2}=1\pm\sqrt{1-a}$ при $a\leqslant 1$. Необходимо еще учесть, что $t>0$.

3. $x_1=1+\left(\frac{2\pi k}{b}\right)^2$, $x_2=1+\frac{4\pi^2}{9b^2}(3l+1)^2$ $(k,\ l\in \mathbf{Z})$, $k\geqslant 0$, $l\geqslant 0$ при $b\in]0;+\infty[$; $x\in[1;+\infty[$ при $b=0$; $x_1=1+\left(\frac{2\pi k}{b}\right)^2$; $x_2=1+\frac{4\pi^2}{9b^2}(3l+1)^2$ $(k,\ l\in \mathbf{Z})$, $k\leqslant 0$, $l<0$ при $b\in]-\infty;\ 0[$.

Указание. При $b\neq 0$ уравнение приводится к виду $b\sqrt{x-1}=-\frac{\pi}{6}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$ при $n\in \mathbf{Z}$. Если $n=2k$, то $b\sqrt{x-1}=2\pi k$. Если $b>0$, то при $k\geqslant 0$ имеем $x_1=1+\left(\frac{8\pi^2k}{b}\right)^2$. Если $b<0$, то $x_1=1+\left(\frac{2\pi k}{b}\right)^2$ при $k\leqslant 0$. Аналогично рассматривается случай нечетного $n=2l+1$.

4. $S_1=\frac{kh^3}{4k^2-h^2}$; $S_2=\frac{kh(k^2-h^2)}{4k^2-h^2}$, если $\frac{h}{k}\in]1;\ \sqrt{2}[$. $S=\frac{kh^3}{4k^2-h^2}$, если $\frac{h}{k}\in]0;\ 1[$.

Указание. Поскольку точки A и C (рис. 1) одинаково удалены от плоскости BSD, $|AD|=|DC|$. Это значит, что $\triangle ASC$ — равнобедренный и $(AC)\perp(BSD)$. Пусть $|AS|=l$, $|AC|=a$, $|SB|=x$, $\widehat{ASC}=\alpha$. Тогда $\begin{cases} ak=hl, \\ k^2+\frac{a^2}{4}=l^2, \end{cases}$ откуда $a=\frac{2kh}{\sqrt{4k^2-h^2}}$, $l=\frac{2k^2}{\sqrt{4k^2-h^2}}$, причем $\frac{h}{k}<2$.

Пусть K, N, M — середины ребер AS, AB и BC соответственно. Сечение пирамиды плоскостью KNM — параллелограмм $KLMN$, так как

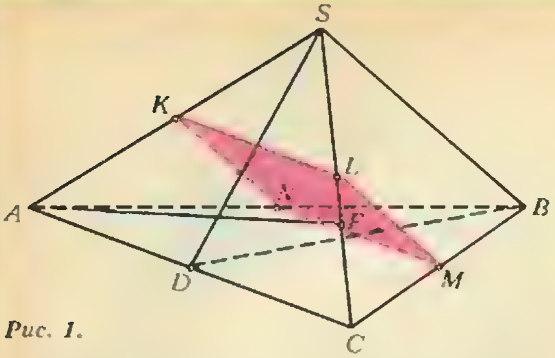


Рис. 1.

$(LM)\parallel(SB)$, $(KL)\parallel(AC)$ и $(SB)\perp(AC)$, параллелограмм $KLMN$ является прямоугольником с площадью $\frac{ax}{4}$. По теореме косинусов $|AC|^2=2l^2-2l^2\cos\alpha=|BC|^2=x^2+l^2-2lx\cos\alpha$, откуда $x_1=l$, $x_2=l(1-2\cos\alpha)$.

Из $\triangle ASC$ получаем $\cos\alpha=\frac{2k^2-h^2}{2k^2}$, поэтому $x_2=l\frac{h^2-k^2}{k^2}$. Если $h\leqslant k$, имеется лишь одна пирамида, удовлетворяющая условию задачи. Если $k<h<k\sqrt{2}$, то имеются две пирамиды (правильная с $x_1=l$ и неправильная с $x_2=l(1-2\cos\alpha)$).

Вариант 2

1. $x=\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{9-4a}{9}+\frac{\pi n}{2}$, $(n\in\underline{Z})$ при $0<a\leqslant\frac{9}{2}$. При остальных значениях a решений нет. Указание. При $a=0$ решений нет. При $a\neq0$ воспользуйтесь соотношением $\sin^2 2x=\frac{1-\cos4x}{2}$.

2. $10{,}5-\frac{6}{25}a$; задача имеет решение при $a\in\left]\frac{175}{6};\ 35\right[\cup\left]35;\ \frac{175}{4}\right[$. Указание. Пусть в первом сосуде содержится x литров щелочи, а во втором — y литров. Из условия следует система

$$\begin{cases}\frac{x+y}{10}=\frac{35}{100},\\ \frac{\frac{3x}{4}+\frac{3y}{6}}{6}=\frac{a}{100},\\ 0<y<6,\ 0<x<4.\end{cases}$$

3. $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4m_1^2-m_2^2}}{3m_2}$ при $\frac{1}{2}<\frac{m_1}{m_2}<\sqrt{\frac{5}{2}}$;

$$\varphi\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right[\ \text{при}\ m_1=\sqrt{\frac{5}{2}}\,m_2.$$

Указание. Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ASB. Из $\triangle AOD$ получаем $|AD|=\frac{1}{3}\sqrt{4m_1^2-m_2^2}$. Рассмотрим два случая: а) $\triangle ASB$ — остроугольный, б) $\triangle ASB$ — неостроугольный. В случае а) треугольник ASB является осевым сечением конуса, и поэтому искомый угол $\varphi=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{4m_1^2-m_2^2}}{3m_2}$. Этот случай реализуется при $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}<1$, то есть когда $\frac{1}{2}<\frac{m_1}{m_2}<\sqrt{\frac{5}{2}}$. В случае б) треугольник ASB наибольшей площади должен быть прямоугольным (это следует из того, что площадь всякого сечения ASB конуса, проходящего через вершину S, равен $\frac{1}{2}l^2\sin\alpha$, где α — угол между образующими AS и BS, и поэтому принимает наибольшее значение при $\alpha=\frac{\pi}{2}$. Таким образом, так как при $m_1>\sqrt{\frac{5}{2}}\,m_2$ треугольник ASB тупоугольный, он не может быть сечением конуса, имеющим наибольшую площадь. Если же $m_1=\sqrt{\frac{5}{2}}\,m_2$, треугольник ASB прямоугольный и угол φ осевого сечения конуса может принимать любые значения $\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi<\pi$.

4. $f'(x)=\frac{4-2x}{(x^2-4x+a)^2}$; $a\in\left]-\infty;\ -21\right[\cup\left[5;\ +\infty\right[$.

Указание. Для того чтобы $f(x)$ была определена при всех $x\in[5;7]$, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $\varphi(x)=x^2-4x+a=0$ не имело корней на этом отрезке. Это в свою очередь будет тогда и только тогда, когда $\varphi(5)>0$ и $\varphi(7)>0$, или $\varphi(5)<0$ и $\varphi(7)<0$, то есть, когда $\varphi(5)\cdot\varphi(7)>0$. Поскольку $f'(x)<0$, при $x\in[5;7]$ задача сводится к решению неравенства $f(5)\leqslant\frac{1}{10}$.

Физика

1. Запишем условие равновесия стержня:

$$Mg\left(\frac{l}{2}-\Delta l\right)=2T\left(\frac{l}{2}+\Delta l\right),$$

где T — сила натяжения нити, на которой подвешены грузы массой m_1 и m_2. Эту силу можно найти, используя второй закон Ньютона:

$$m_1a=m_1g-T,$$
$$-m_2a=m_2g-T,$$

откуда

$$T=\frac{2m_1m_2g}{m_1+m_2}.$$

Подставляя этот результат в условие равновесия стержня и используя равенство $m_1+m_2=M$, получаем следующее уравнение для масс m_1 и m_2:

$$m_{1,2}^2-m_{1,2}M+\frac{M^2}{4}\left(\frac{l/2-\Delta l}{l/2+\Delta l}\right)=0.$$

Решение этого уравнения даст

$$m_1=\frac{M}{2}\left(1+\sqrt{\frac{4\Delta l}{l+2\Delta l}}\right)=1{,}67\ \text{кг},$$

$$m_2=\frac{M}{2}\left(1-\sqrt{\frac{4\Delta l}{l+2\Delta l}}\right)=0{,}33\ \text{кг}.$$

2. При движении вверх по наклонной плоскости шайба замедляется силой тяжести и силой трения. При этом ускорение шайбы

$$a_1=g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$$

и время движения

$$t_1=\frac{v_0}{a_1}=\frac{v_0}{g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}=1{,}6\ \text{с}.$$

Поскольку условия задачи требуют вычисления работы за время $t=3{,}5$ с $(t>t_1)$, необходимо рассмотреть также движение шайбы вниз по наклонной плоскости. В этом случае ускорение шайбы

$$a_2=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$$

и время движения

$$t_2=t-t_1.$$

За время t шайба проходит путь

$$l=\frac{v_0^2}{2a_1}+\frac{a_2t_2^2}{2}.$$

На этом пути сила трения $F_{тр}=\mu mg\cos\alpha$ совершает над шайбой работу

$$A_{тр}=-F_{тр}l=-\frac{\mu m\cos\alpha}{2}\left(\frac{v_0^2}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}+\right.$$

$$\left.+g^2(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\left(t-\frac{v_0}{g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}\right)^2\right)=$$

$$=-7{,}2\ Дж.$$

3. Для нахождения силы натяжения нити T и ускорения грузов a запишем второй закон Ньютона для тел A и B:

$$ma=T-mg\sin\alpha,$$
$$ma=mg-T,$$

откуда получаем

$$a=\frac{g}{2}(1-\sin\alpha);\quad T=\frac{mg}{2}(1+\sin\alpha).$$

Мощность N, развиваемая силой натяжения нити, через время t после начала движения можно найти по формуле

$$N=Tat=\frac{mg^2t}{4}(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=$$

$$=\frac{mg^2t}{4}\cos^2\alpha=75\ Вт.$$

4. Давление p_1 и объем V_1 газа в начальном состоянии *1* связаны с давлением p_3 и объемом V_3 в конечном состоянии *3* уравнением состояния

$$p_1V_1=p_3V_3=RT_1.$$

Газ совершает работу только при переходе из промежуточного состояния *2* в конечное состояние *3*:

$$A=p_1(V_3-V_1)=p_3V_3\left(1-\frac{V_1}{V_3}\right)=RT_1\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда получаем

$$T_1=\frac{nA}{R(n-1)}=300\ К.$$

5. Запишем второй закон Ньютона для движущегося шарика до и после внесения заряда в центр окружности:

$$m\omega_1^2R=mg\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$m\omega_2^2R=mg\,\mathrm{tg}\,\alpha-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0R^2},$$

где α — угол между нитью подвеса и вертикалью. Из этих уравнений находим

$$\omega_2=\sqrt{\omega_1^2-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0R^3m}}=1{,}7\ с^{-1}.$$

6. В тот момент, когда нить занимает вертикальное положение, второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось запишется в виде

$$F-mg=\frac{mv^2}{l},$$

где F — сила натяжения нити, v — скорость шарика в этот момент, l — длина нити. Скорость v можно найти с помощью закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2}=mgl(1-\cos\alpha)+qEl\sin\alpha.$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$F=mg+2mg(1-\cos\alpha)+2qE\sin\alpha=$$
$$=mg(3-2\cos\alpha)+2qE\sin\alpha=18{,}4\ Н.$$

7. Мощность, потребляемую лампой сразу ж после ее включения, запишем в виде

$$P=\frac{U^2}{R},$$

где U — напряжение на лампе, $R=R_0\times$ $\times(1+\alpha t_к)$ — сопротивление спирали при комнатной температуре $t_к\approx20\ ^\circ C$ (R_0 — сопротивление при $0\ ^\circ C$). После нагревания сопротивление спирали увеличивается до значени $R'=R_0(1+\alpha t)$, и лампа потребляет мощност

$$P'=\frac{U^2}{R'}=\frac{PR}{R'}=P\frac{1+\alpha t_к}{1+\alpha t}\approx44\ Вт.$$

8. Сила, с которой пучок действует на пластинку, может быть вычислена по формул

$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t},$$

где ΔP — импульс пучка протонов, переданный пластинке за время Δt. Преобразуе эту формулу следующим образом:

$$F=mv\frac{\Delta N}{\Delta t}=\frac{mv}{e}\frac{e\Delta N}{\Delta t}=\frac{mv}{e}\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{mv}{e}I.$$

Здесь v — скорость протонов, ΔN — числ протонов, попадающих на пластинку за врем Δt, Δq — заряд протонов, достигающи пластинку за время Δt. Скорость v найдем с помощью закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2}=eU,\quad v=\sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Теперь окончательно получаем

$$F=I\sqrt{\frac{2mU}{e}}=1{,}6\cdot10^{-3}\ Н.$$

9. В области магнитного поля протон движетс по дуге окружности и вылетает под углом — (рис. 2). Время τ движения протона в област магнитного поля связано со временем полног оборота T соотношением

$$\tau=\frac{\pi+2\alpha}{2\pi}T.$$

Для вычисления времени $T=2\pi R/v$ необходим найти отношение скорости протона v к радиус траектории R. Это отношение получим и уравнения движения протона

$$\frac{mv^2}{R}=evB,\quad\frac{v}{R}=\frac{eB}{m}.$$

Таким образом,

$$T=\frac{2\pi m}{eB}.$$

Подставив этот результат в формулу для времени τ и решив полученное уравнение относительно индукции магнитного поля, найде

$$B=\frac{(\pi+2\alpha)m}{e\tau}=8{,}4\cdot10^{-3}\ Тл.$$

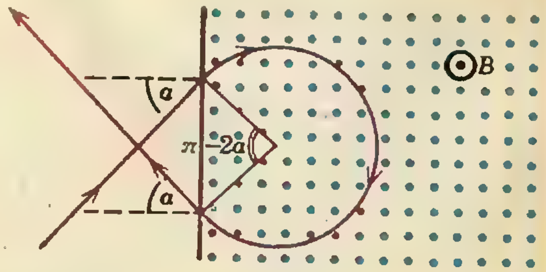


Рис. 2.

10. При движении проводника со скоростью v_2 ЭДС индукции Blv_2 оказывается равной ЭДС $\mathscr{E}$ источника тока:

$$\mathscr{E}-Blv_2=0,\ \mathscr{E}=Blv_2.$$

Следовательно, при движении проводника со скоростью v_1 по цепи потечет ток

$$I=\frac{\mathscr{E}-Blv_1}{r+R}=\frac{Bl(v_2-v_1)}{r+R}=1{,}0\ \text{А}.$$

Московский институт стали и сплавов

Математика

1. (9). **2.** (2). **3.** (−1). **4.** (20). **5.** (3). **6.** (100). **7.** (1,125). **8.** (67). **9.** (1,5). **10.** (5). **11.** (204). **12.** (21).

Физика

1. $t=\sqrt{\dfrac{2l}{F/m-\mu g(1+m/M)}}\approx 0{,}52$ с.

2. $\tau=m(c\Delta T+\lambda)/P=10\,200$ с.

3. $m=\eta kW/U\approx 0{,}63$ кг.

4. $T=\pi\sqrt{2l/g}\approx 0{,}63$ с.

5. $t=\dfrac{c_1m_1t_1+c_2m_2t_2}{c_1m_1+c_2m_2}\approx 17{,}7\ ^\circ\text{C}$.

6. $h=D\sqrt{n^2-1}/2\approx 0{,}885$ м.

7. $\varphi_2=\varphi_1\dfrac{p_{н1}}{p_{н2}}\dfrac{T_2}{T_1}\approx 62\ \%$.

8. $R'=500$ Ом.

9. $m_1/m_2=(r_1/r_2)^2=4$.

10. $\mu=4\pi^2n^2r/g\approx 0{,}025$.

11. $E_k=hc/\lambda-A\approx 1{,}84\cdot 10^{-19}$ Дж $\approx 1{,}15$ эВ (здесь $h=6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, $c=3\cdot 10^8$ м/с — скорость света, 1 эВ $=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Дж).

12. $F_1=l-F_2=0{,}06$ м $=6$ см.

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

1. $2\cdot(a^2+b^2)^{-1}$ при $a\neq 0,\ b\neq 0,\ a\neq \pm b$.

2. $\left\{\left(\frac{9}{4};\ \frac{3}{8}\right),\ \left(\frac{3}{8};\ \frac{9}{4}\right)\right\}$.

3. $\left\{\frac{7}{6};\ -\frac{1}{2}\right\}$.

4. $x=-\frac{3\pi}{2}$.

5. $\left\{\arcsin\frac{2}{\pi};\ \pi-\arcsin\frac{2}{\pi}\right\}$.

Задачи устного экзамена

1. а) Диагонали параллелограмма должны быть конгруэнтны друг другу; б) диагонали параллелограмма должны быть перпендикулярны друг другу.

2. Воспользуйтесь неравенством Коши: $a+b\geqslant 2\sqrt{ab},\ a,\ b\geqslant 0$.

3. 0. Указание. Учтите, что областью определения данного выражения является множество

$$\{(a,\ b,\ c)\ \vdots\ a+b+c=0;\ ab+bc+ca\geqslant 0\}=$$
$$=\{(a,\ b,\ c)\ \vdots\ a+b+c=0;\ ab+bc+ca=0\}.$$

4. $T=2\pi$.

5. $M=2+\sqrt{5},\ m=2-\sqrt{5}$.

6. Два.

7. $|x|\leqslant 4$. Указание. Докажите, что $\sin x\cdot\sin 7x\neq 1$.

8. Указание. Учтите область определения функций.

9. 1 при $x>0$.

10. $x=\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$.

Физика

Письменный экзамен

2. $v_1(t)=t$; $v_2(t)=3-0{,}6t$; см. рис. 3.

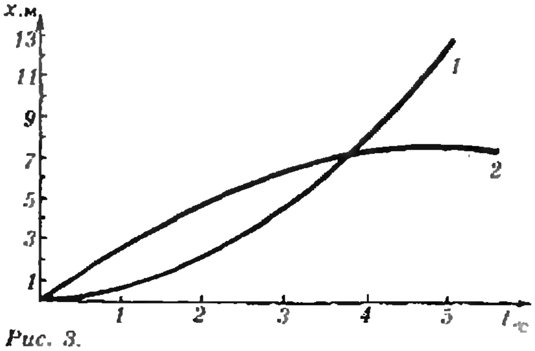


Рис. 3.

3. $T_2=T_1p_2/p_1=250$ К; $t_2=-23\ ^\circ\text{C}$.

4. $v_{\max}=\dfrac{2hc}{\lambda m}-\dfrac{2A}{m}\approx 6{,}2\cdot 10^5$ м/с.

5. $v=\sqrt{\dfrac{qEB}{m\cos^2\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}}=2{,}7$ м/с.

Вариант 2

2. Насыщенный водяной пар.

3. Мнимое, прямое и уменьшенное изображение находится на расстоянии $f=dF/(d+F)=3{,}3$ см от линзы.

4. $L=U_m/(\omega^2q_m)=10^{-3}$ Гн.

5. $r=R^2/R_в=0{,}8$ Ом.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Вариант 1

1. $\{0;\ 126/65\}$. Указание. Поскольку $x=2$ не является корнем данного уравнения, оно приводится к виду $t^2+4t-5=0$,

где $t=\sqrt[3]{\dfrac{2+x}{2-x}}$.

2. $]\log_8 7;\ 1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$.

3. $\frac{7}{9}$ л.

4. 5 см.

5. 320 м.

Вариант 2

1. $\{-4/3;\ 4\}$. **2.** $\{(\sqrt{21}-3)/6\}$. **3.** $\pi/3$.

4. 6 см. **5.** $\left]-\infty;\ \frac{1}{2}\right[$.

Физика

1. $T=mg\dfrac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=0{,}1$ Н.

2. $\Delta h=(\rho_1h_1-\rho_2h_2)/\rho\approx 0{,}5\cdot 10^{-2}$ м $=0{,}5$ см.

3. $Q=(\rho_1-\rho_2)Vgh=4{,}5\cdot 10^{-2}$ Дж.

4. $p_0=\rho la(n+1)/(n-1)\approx 10^5$ Па.

5. Период колебаний уменьшается в $\sqrt{1+\dfrac{qE}{mg}}$ раз.

6. $\Delta T=\dfrac{\eta P^2\rho\tau}{U^2S^2cD}\approx 0{,}8$ К.

7. $R_t=\dfrac{\mathscr{E}+L\Delta I/\Delta t}{\dfrac{\mathscr{E}}{R}-\dfrac{\Delta I}{\Delta t}t}=15{,}25$ Ом.

8. $x=2\sqrt{2Wm}/(qB)\approx 0,72$ м.

9. $F=2d_1d_2/(d_1+d_2)\approx 26,7$ см. Указание. Светящиеся точки находятся по разные стороны от линзы.

10. Расстояние от собирающей линзы до фотопленки равно $a_1=40$ см либо $a_2=10$ см.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 2)

1. 41 год.

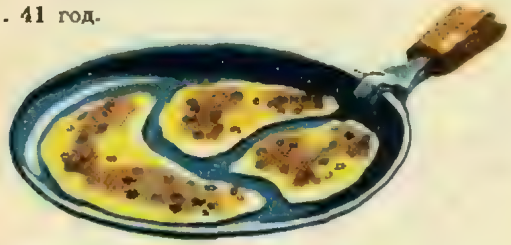


Рис. 4.

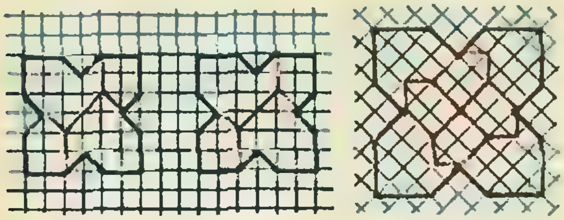


Рис. 5.

2. $17^3=4913$, $4+9+1+3=17$.

3. Частицы несгоревшего топлива (дым) поднимает вверх поток теплого воздуха, образующийся при горении. После остывания воздуха эти частицы оседают на землю.

4. Возьмем такую же сковороду и перевернем в нее оладьи. Они лягут другой стороной и вновь не будут налезать друг на друга. Пример расположения, когда невозможно перевернуть одну из оладий, изображен на рисунке 4.

5. См. рисунок 5.

Шахматная страничка

(см. «Квант», 1985, № 11, 12)

Задание 21 (Л. Кайев, 1947, г.). **1. c5 h4 2. Ce6 de 3. c6 h3 4. c7 h2 5. c8Ф h1Ф 6. Фc3+ Крd5 7. Фc5+ Крe4 8. Фc6+.**

Задание 22 (А. Селезнев, 1927 г.). **1. Крc4! Кр:f4 2. d5 Крe5 3. Крc5 a4 4. d6 Крe6 5. Крc6 a3 6. d7 a2 7. d8Ф a1Ф 8. Фe8+ Крf6 9. Фh8+, 3...f4 4. d6 Крe6 5. Крc6 f3 6. d7 f2 7. d8Ф f1Ф 8. Фe8+ и 9. Фf8+.**

Задание 23 (Э. Погосянц, 1982 г.). Для решения задачи прежде всего следует повернуть доску на 180°, после чего король переставляется с e1 на c1, завершая длинную рокировку (недостающие полхода!).

Задание 24 (Б. Сидоров, 1981 г.). Вот одна из позиций, где любой шах ферзем ведет к его потере. Белые: **Крb5, Фe8**; черные: **Крb2, Фh2.**

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, А. А. Варламов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Е. В. Винодарова, М. Б. Дубах, Т. Н. Кольченко, Д. А. Крымов, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, Н. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Фото представил А. С. Кондратьев

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Д. Дорохова

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 22.1.86. Подписано к печати 20.2.86
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,32. Т-06916
Тираж 200 527 экз.
Цена 40 коп. Заказ 91

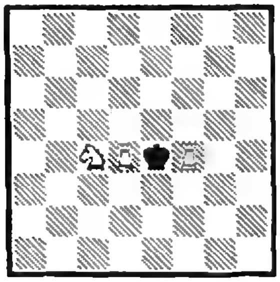
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

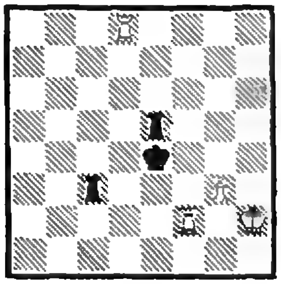
ГОЛОВОЛОМКИ В ШАХМАТНОЙ ПАРТИИ

Название очередной «странички» кажется несколько странным. Практическая партия — это настоящие шахматы, а головоломки, шахматно-математическая задача — совсем иной жанр, как будто не имеющий отношения к реальной игре. Но...

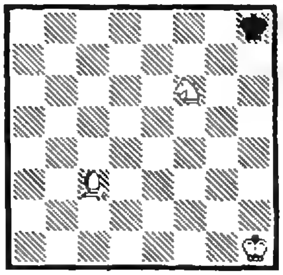
Однажды Сэм Лойд, знаменитый шахматный композитор и «гроссмейстер занимательной математики» объявил, что нашел способ заматовать одинокого короля в центре доски двумя ладьями и конем без поддержки собственного короля. Любители шахмат поначалу пришли в ярость, но когда Лойд показал разгадку своей головоломки, они вдоволь насмеялись.



Наверное, вы решили, что такой мат возможен только в головоломке, но вот посмотрите, какая однажды случилась история (рассказал ее мастер О. Сабитов). В одной из партий на турнире в Душанбе возникло такое окончание.



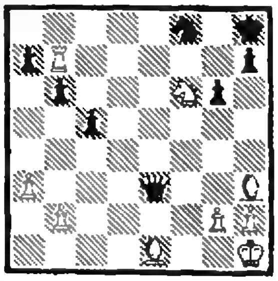
В сильнейшем цейтноте белые потянулись рукой к ладье f2, а черные, успев разглядеть, что после 1.Лe2+ отступать королем нельзя из-за потери ладьи (1...Крf5 2.Лf8+ Крe6 3.Лe8+), схватили свою ладью c3, намереваясь загородиться ею от шаха. И шах действительно последовал, но с другого поля — **1.Лf4+**. Черные в суматохе не обратили внимания на изменение ситуации и молниеносно ответили заготовленным **1...Лe3!?** Флажок белых угрожал вот-вот рухнуть, и, позабыв о шахе, объявленном предыдущим ходом, они окружили неприятельского короля и с другой стороны — **2.Лd4!!**, создав уникальную позицию, подобную которой не сыскать во всей шахматной истории.



Мат в 1 ход.

Чтобы объявить мат в 1 ход, белый конь... встает на дыбы! После такого «маневра» поля g8 и h7 по-прежнему под его охраной (ведь он не покинул поле f6, а только приподнялся над ним), а матует белый слон c3. Эта идея может вызвать вполне реалистическую ассоциацию... Анализируя как-то свою встречу с А. Гипслисом, гроссмейстер Э. Гуфельд пришел к такой позиции.

Поначалу Гуфельд решил, что белые, которыми он играл, проигрывают: материальный перевес на его стороне, но



слон под боем, а отступать им бесполезно ввиду обнаженности первой горизонтали (Фc1+). Но, вспомнив шутку с конем, вздымающимся на дыбы, он нашел выход: 1.Лe7!! Ф:e7 2.Сc3! Сравните это положение с головоломкой, и вы поймете, что разница невелика. Вновь конь готов взметнуться в воздух и нет защиты от потери ферзя — 3.Кd5+ или мата — 3.Кg4+ Крg8 4. Кh6×.

Задача. *Конь стоит на a1. Может ли он обойти всю доску, посетив каждое поле ровно один раз, и завершить свое путешествие на h8?*

Конь на каждом ходу меняет цвет поля, на котором находится. Исходное поле a1 черное, на 63-м ходу конь окажется на белом поле. Но поле h8 — черное, и, стало быть, условие задачи выполнить невозможно.

Подобных головоломок существует немало. Имеют ли они отношение к шахматной игре? Самое непосредственное.

Рассмотрим такую позицию:

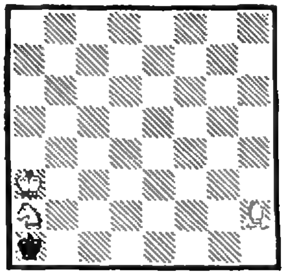
Белые: Крh8, Кb2, п. h7. Черные: Крf7.

Как ее оценить? Для победы белым нужно освободить своего короля. Если ход их, это возможно: 1.Кd3 Крf8 2.Кe5 и т. д. При ходе черных из угла не выйти: 1...Крf8 2.Кd3 Крf7 3.Кe5+ Крf8. Ход белых, и они вынуждены уступить черному королю поле f7. Ничья.

Для подобных позиций полезно запомнить следующее правило: *слабейшая сторона добивается ничьей, если при своем ходе может поставить короля на поле того же цвета, что и поле, на котором стоит неприятельский конь.*

Конкурсные задания

Первая задача серьезная, а вторая — головоломка.



5. Белые начинают и дают мат в 5 ходов.

6. На доске стоят лишь два короля — белый на a6, черный на a8. Куда следует поставить белого ферзя, чтобы белые не могли дать мат в один ход?

Срок отправки решений — 20 мая 1986 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 5, 6».

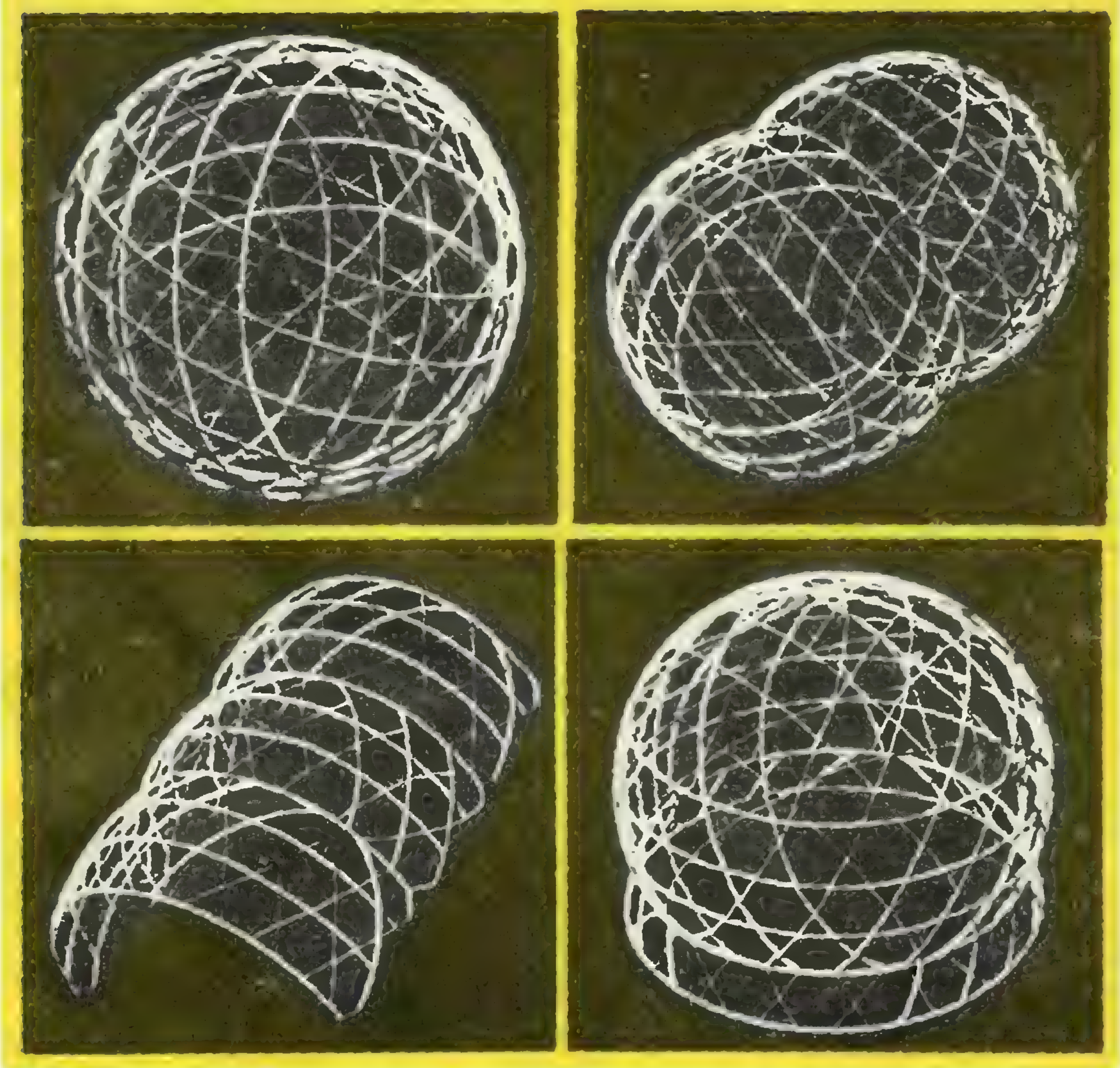
Цена 40 коп.
Индекс 70465

На этих четырех фотографиях показаны модели замкнутого сферического купола (слева вверху) и трех куполообразных конструкций, полученных стыковкой частей таких куполов.

Сферический купол реализован в виде сети из тонких плоских колец, жестко скрепленных в местах пересечения. Каждое кольцо параллельно трем кольцам; каждое такое семейство из четырех колец отвечает четырем сечениям сферы равноотстоящими параллельными плоскостями. Сосчитайте число этих семейств и сообразите, как расположены относительно друг друга непараллельные плоскости разных сечений.

Подумайте, какие еще куполообразные формы можно составить из кусков сферического купола.

О. Я. Боднар



НОМЕР
4

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

квант

4 1986

Основан в 1970 году

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	*Г. М. Гречко.* К читателям «Кванта»	*G. M. Grechko.* To the readers of Kvant
3	*Т. К. Бреус.* Снова на свидание с Марсом	*T. K. Breus.* Another date with Mars
5	*И. М. Яглом.* Генетика популяций и геометрия	*I. M. Yaglom.* Population genetics and geometry
13	*В. А. Бронштэн.* Как движется Луна?	*V. A. Bronshten.* How the Moon moves
18	*А. В. Бялко.* Полет к Солнцу	*A. V. Byalko.* Flight to the Sun
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
22	*А. А. Боровой.* Капилляры и смачивание	*A. A. Borovoy.* Capillaries and moistening
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
25	Математика 10	Mathematics 10
48	Избранные школьные задачи	Selected school problems
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
27	Задачи	Problems
28	А. П. Савин. Рисунок помогает рассуждать	*A. P. Savin.* Drawings help your reasoning
32	**Калейдоскоп «Кванта»**	**Kvant's kaleidoscope**
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
31	Задачи М976 — М980; Ф988 — Ф992	Problems M976 — M980; P988 — P992
36	Решения задач М956 — М960; Ф968 — Ф972	Solutions M956 — M960; P968 — P972
	Искусство программирования	**The art of programming**
43	*Ю. В. Котов.* Посмотрим на экран	*Yu. V. Kotov.* Looking at the display
	Полупроводниковые элементы вычислительной техники	**Semiconducting elements in computers**
46	VIII. Регистры	VIII. Registers
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
49	*А. И. Буздин, С. С. Кротов.* Тепловые процессы в газах	*A. I. Buzdin, S. S. Krotov.* Heat processes in gases
53	**Варианты вступительных экзаменов**	**Entrance examination problems**
	Информация	**Information**
58	Заочная физическая школа при МГУ	Moscow university physics correspondence school
59	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Смесь *(4)*	**Miscellaneous** *(4)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Неподвижные фигуры *(3-я с. обложки)*	Motionless pieces *(3rd cover page)*

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1986

К читателям «Кванта»
обращается летчик-космонавт СССР,
дважды Герой Советского Союза,
доктор физико-математических наук
Г. М. Гречко

Дорогие друзья!

Сегодня мы встречаем двадцатипятилетие начала эры полетов человека в космос. Четверть века назад, 12 апреля 1961 года Юрий Гагарин ступил первым на тот путь, который ныне становится все более наезженной магистралью.

25 лет — мало и много. Мало — ибо события тех лет настолько ярки и незабываемы, что кажутся совсем недавними. Много — потому что за четверть века меняются поколения и в мире техники, и среди людей.

В первых полетах космонавт был единственным в корабле, а основное занятие его — испытания корабля и самого себя в экстремальных условиях. За то время, пока космонавты первого набора ожидали своего второго полета, сама космическая техника и задачи исследований изменялись настолько, что приходилось не раз и не два проходить переподготовку. Слетать дважды по схожей программе просто не представлялось возможным. Каждый полет был полетом в неведомое. Работа в космосе, научные и технические эксперименты делали лишь первые, не всегда уверенные, шаги...

Сегодня, по прошествии четверти века, возникло новое поколение космической техники и новое поколение космонавтов. Их теперь не просто числом больше, они теперь больше летают (как дольше, так и чаще). Можно всерьез говорить о профессионализме, «многоразовости», что ли, космонавтов, об отечественной школе их подготовки.

С развитием орбитальных комплексов открылись особенно широкие возможности научного эксперимента в уникальных условиях космоса. Теперь космический экипаж — коллектив экспериментаторов, где взаимовыручка и помощь не исключают углубленной специализации по отдельным проблемам.

Как пример — исследования оптических явлений в околоземном пространстве. Серебристые и перламутровые облака, светящиеся «усы» сумеречной атмосферы и полярные сияния над горизонтом, расплющенное Солнце и мерцающие звезды на восходах и заходах — вот далеко не полная палитра любопытнейших явлений верхней атмосферы. Трижды мне посчастливилось быть участником экспедиций на орбитальные станции, и полученный за это время обширный материал наблюдений составил содержание многих научных работ. Обработка результатов этих наблюдений приносит немалую пользу.

И как радостно знать, что результат эксперимента нужен науке, так и горестно слышать, как строятся планы приспособления космоса к целям уничтожения. Досадно, что средства уходят на осуществление военных программ, что наличие оружия массового уничтожения приводит к недоверию.

Хочется верить, что люди мира преодолеют опасные планы, и мы будем свидетелями и участниками многих мирных научных экспериментов в космическом пространстве.

С уважением /Г. М. Гречко/

Снова на свидание с Марсом

Кандидат физико-математических наук
Т. К. БРЕУС

Венера и Марс — ближайшие соседи Земли. Вместе с Меркурием они составляют так называемую земную группу планет, сходных по своим свойствам (массам, размерам, составу) и, по-видимому, по происхождению и эволюции.

Пожалуй, ни с какой другой планетой солнечной системы человечество не связывало такого множества легенд, экзотических гипотез и смелых фантазий, как с планетой Марс. Из-за своего чуть красноватого цвета Марс казался нашим предкам зловещим. Собственно, с этим связано само название планеты и ее спутников: в переводе с греческого «Марс» — бог войны, «Фобос» и «Деймос» — страх и ужас. Не удивительно ли, что предсказанные сказочными лапутянскими астрономами в знаменитых «Путешествиях Гулливера» Дж. Свифта два спутника Марса были действительно обнаружены спустя полтора столетия американским астрономом А. Холлом! А обнаруженные итальянским астрономом Дж. Скиапарелли «марсианские каналы», породившие оптимистические надежды на существование «братьев по разуму» на Марсе, оказались естественными геологическими структурами — руслами «высохших рек»!

Теперь, когда число космических станций, посылаемых к Марсу, исчисляется десятками, надо признаться, что мечтатели и оптимисты разочарованы, специалисты многое узнали, но загадок и гипотез не убавилось, хотя они уже не столь экзотичны, как раньше. Первые серьезные исследования Марса советскими автоматическими межпланетными станциями серии «Марс» были проведены в 1971 году. А сейчас в Советском Союзе идет подготовка нового космического проекта исследований Марса и двух его спутников. Этот проект получил название «Фобос». Академия наук СССР пригласила участвовать в проекте научные организации социалистических стран, а также ФРГ, Австрии, Финляндии, Швеции и Европейского Космического агенства.

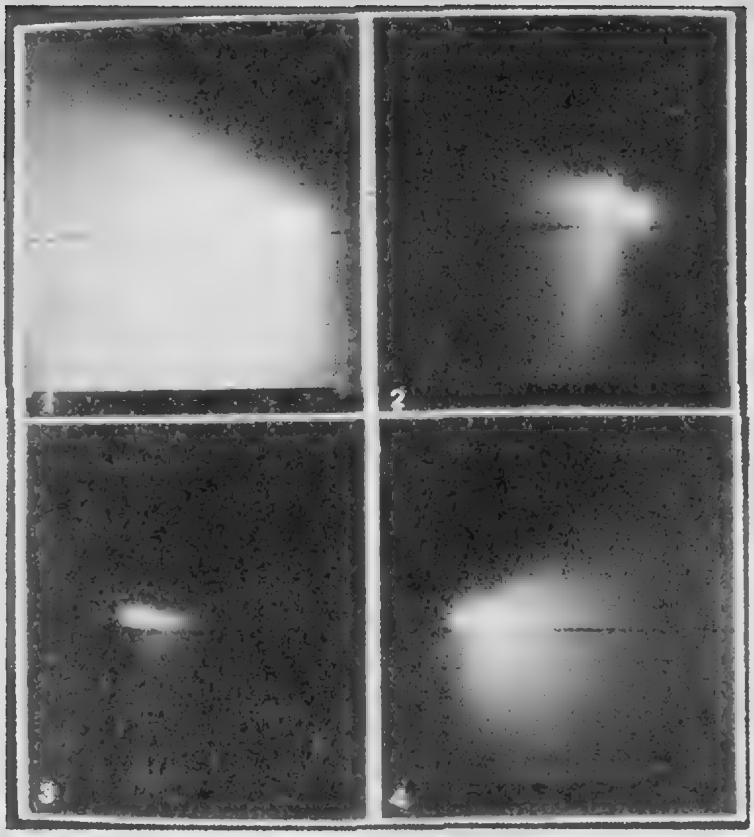
Два космических аппарата будут запущены с космодрома Байконур в июле 1988 года и в течение двухсот дней по дороге к Марсу будут исследовать Солнце и свойства межпланетной среды. Затем аппараты станут искусственными спутниками Марса и начнут «жить» на круговой орбите, по которой обращается вокруг Марса его естественный спутник Фобос. Один из аппаратов начнет «охоту» за Фобосом, постепенно приближаясь к нему, чтобы рассмотреть его с «разных точек зрения». Второй аппарат либо последует за первым, либо направится к Деймосу.

Оба спутника Марса, по-видимому, являются захваченными Марсом астероидными телами. Астероиды, так же как и кометы, не претерпели серьезных геологических изменений с момента образования солнечной системы. По этой причине исследование астероидов и комет дает возможность судить об условиях формирования тел солнечной системы и их последующей эволюции. А это очень важно для понимания происхождения и эволюции Земли, проблемы происхождения жизни.

Первый шаг на этом пути уже сделан — космические аппараты «Вега» встретились с кометой Галлея. В проекте «Фобос» будет осуществлено, по-видимому, непосредственное знакомство с астероидным телом — с Фобосом.

Можно многое рассказать об интересных задачах проекта «Фобос». С орбиты искусственного спутника Марса будут проводиться исследования самой планеты — ее рельефа, поверхности, атмосферы и т. д. Есть и задачи по изучению свойств Марса как планеты в целом. В одном из таких экспериментов, называемом условно «Плазма», будет исследоваться ионосфера Марса.

Как и у Земли, ионосфера Марса состоит из плазмы, содержащей электроны и ионы. В ионосферах Земли и других планет концентрация заряженных частиц сначала увеличивает-



Эти изображения были получены телевизионными камерами, установленными на станции «Вега 2», во время пролета станции вблизи кометы Галлея за несколько секунд до максимального сближения (1), при максимальном сближении (2, 3) и через несколько секунд (4), уже при отлете от кометы. В момент максимального сближения расстояние от «Веги 2» до кометы — примерно 8 тыс. км. Изображения были переданы на Землю в реальном времени и воспроизведены на дисплеях в Институте космических исследований АН СССР.

ся с ростом высоты, достигая максимума на некоторой высоте, а затем начинает спадать.

В проекте «Фобос» предполагается получить высотное распределение концентрации электронов в верхних слоях ионосферы Марса. Изучение ионосферы важно само по себе, так как ее свойства определяют во многом «жизнь» планеты. Кроме того, знание «устройства» ионосферы планеты поможет ответить на вопрос: есть ли у Марса собственное магнитное поле?

С тех пор, как открыли солнечный ветер — потоки плазмы, испускаемой Солнцем в межпланетное пространство, — стало ясно, что планеты существуют не в космической пустоте.

Обдувающий планеты солнечный ветер — чрезвычайно разреженная среда, содержащая всего несколько частиц или несколько десятков частиц в 1 см^3. Однако, если у планеты нет экрана — собственного магнитного поля, две плазмы — солнечная и планетная (ионосферная) — интенсивно взаимодействуют друг с другом. В результате этого взаимодействия образуется резкая верхняя граница ионосферы, разделяющая две плазмы — ионосферную и солнечную. Ионосферная плазма под «напором» солнечного ветра оказывается поджатой со стороны Солнца. Именно это происходит у Венеры, не имеющей собственного магнитного поля.

Совершенно другая картина наблюдается у Земли. Земля имеет защитный экран — собственное магнитное поле, которое «останавливает» поток солнечного ветра далеко от земной поверхности. Ионосфера Земли защищена таким образом от солнечного ветра и ведет себя в основном независимо от него.

А что происходит на Марсе? Собственное магнитное поле у Марса есть, но оно очень слабенькое, в десятки тысяч раз слабее, чем у Земли. Но все-таки оно есть! (Венера пока единственная немагнитная планета из исследованных). Однако неясно, служит ли марсианское магнитное поле таким же экраном для планеты, как земное поле для Земли. Если — да, то верхняя ионосфера Марса должна вести себя так же (или похожим образом), как земная. Если же — нет, если магнитное поле Марса настолько мало, что солнечный ветер не «ощущает» его присутствия, то ионосфера Марса должна быть похожа на венерианскую.

Ответа на этот и многие другие вопросы ждут ученые от экспедиции к Марсу и Фобосу.

Генетика популяций и геометрия

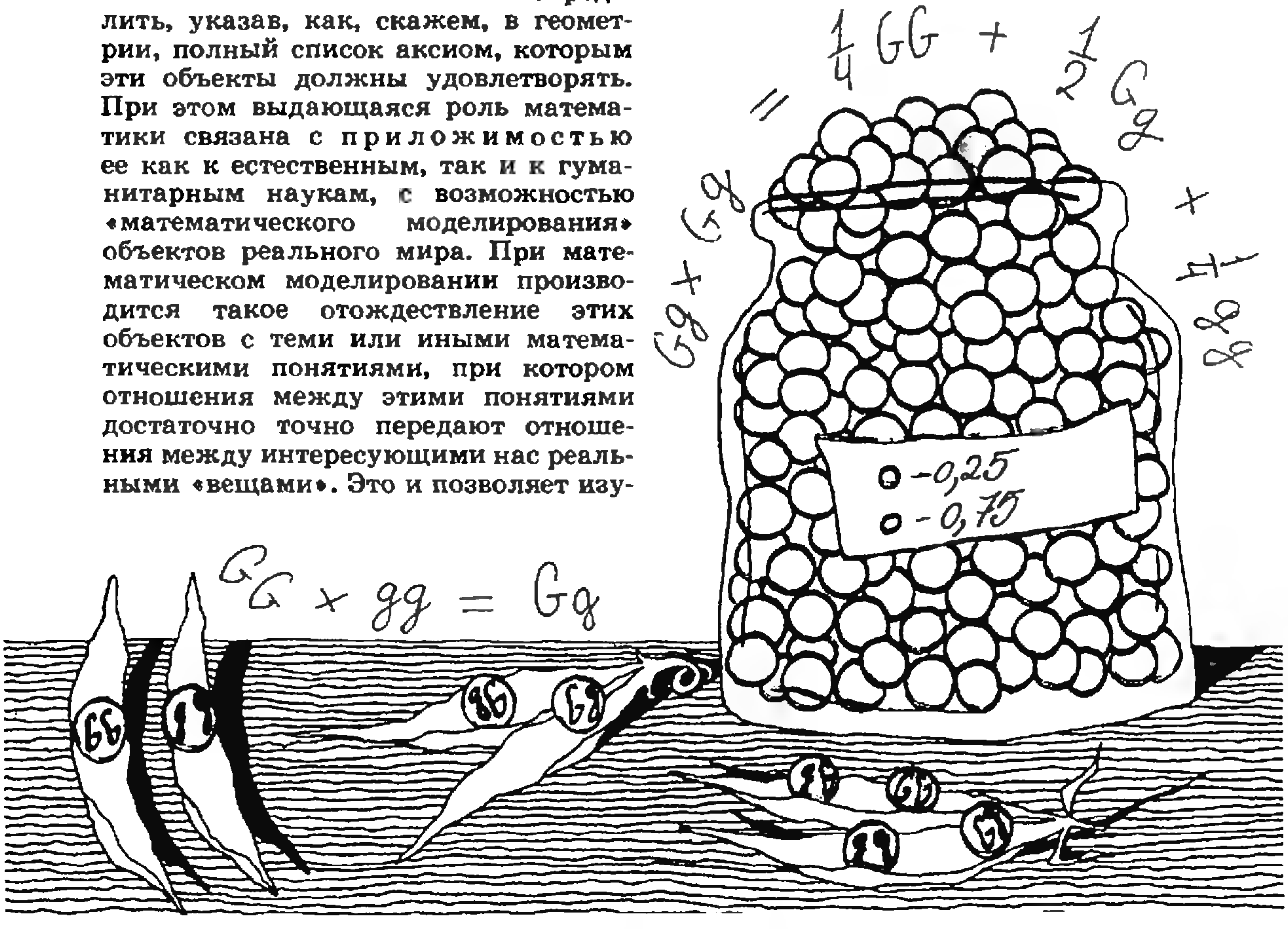
Доктор физико-математических наук
И. М. ЯГЛОМ

Математика и нематематика

В ряду всех наук математика занимает совершенно особое, принадлежащее лишь ей одной место. Естественные науки — физика, химия, астрономия, биология, геология, минералогия,...— изучают мир, в котором мы живем; гуманитарные науки — лингвистика, литературоведение, юриспруденция (право), история, этика, эстетика, социология,...— изучают человеческое общество в разных его проявлениях, то есть также нечто реально существующее, поддающееся наблюдениям и даже эксперименту. В противоположность этому математика исследует некоторые абстрактные конструкции, вроде числа $\sqrt{2}$ или (также на самом деле не существующей в природе!) линии, не имеющей ширины, а только длину; точнее всего объекты математики можно определить, указав, как, скажем, в геометрии, полный список аксиом, которым эти объекты должны удовлетворять. При этом выдающаяся роль математики связана с приложимостью ее как к естественным, так и к гуманитарным наукам, с возможностью «математического моделирования» объектов реального мира. При математическом моделировании производится такое отождествление этих объектов с теми или иными математическими понятиями, при котором отношения между этими понятиями достаточно точно передают отношения между интересующими нас реальными «вещами». Это и позволяет изучать эти «вещи» с помощью чисто математических рассуждений. Эту общую схему использования математики мы проиллюстрируем здесь на примере изучения явлений наследственности, точнее, популяционной генетики.

Наследственность

Следуя простейшей классической схеме, идущей от Г. Менделя*), мы сосредоточим внимание на каком-то одном передающемся по наследству признаке, который определяется парой *генов*; таким признаком является, например, цвет шерсти (черный или коричневый) морских свинок. Каждый из генов, ответственных за этот признак, может быть одного из двух типов — G или g: один из них, обозначаемый большой буквой G, задает *доминантный* (главенствующий) вариант признака (в нашем примере — черная окраска), другой — g — *рецессивный* (подавляемый) вариант (коричневая окраска). Это означает, что внешний вид гибридной свинки **H** со смешан-



---

*) Австрийский естествоиспытатель Грегор Иоганн Мендель (1822—1884), служивший настоятелем монастыря на территории нынешней Чехословакии, заложил основы современного учения о наследственности (генетики).

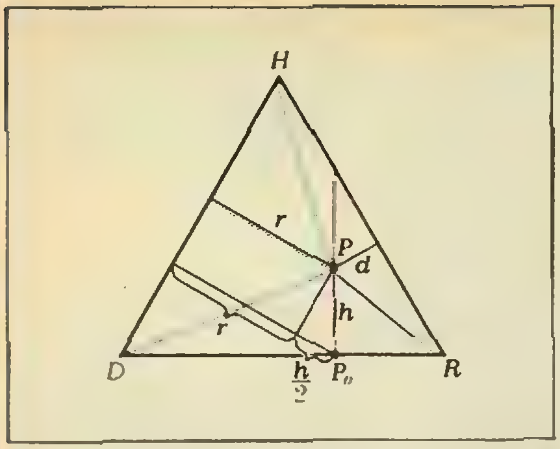


Рис. 1. Если сторона $\triangle DHR$ равна $2a$ ($a = 1/\sqrt{3}$, так как высота $\triangle DHR$ равна 1), то его площадь $S_{DHR} = a = S_{DHP} + S_{RDP} + S_{HRP} = ad + ah + ar$, поэтому $d + h + r = 1$.

ным набором генов (*генотипом*) Gg будет таким же, как у доминантной особи **D** с генотипом GG (гибридные морские свинки — черные). Напротив, *рецессивная* особь **R** с генотипом gg внешне отличается от доминантной и гибридной особей.

Закон наследования рассматриваемого признака можно сформулировать так: один из двух своих генов потомок получает от отца, другой — независимо от первого — от матери, причем оба гена отца, как и оба гена матери имеют одинаковые шансы передаться потомку. Поэтому у двух черных морских свинок могут родиться коричневые детеныши (если родители гибриды); как нетрудно понять, в достаточно большом потомстве такой пары они будут составлять примерно четверть.

Задача 1. Выясните, какие доли будут составлять доминантные, гибридные и рецессивные особи в (достаточно большом) потомстве брачной пары каждого из 6 возможных типов (D, D), (D, R), (R, R), (H, D), (H, R) и (H, H).

Биологические популяции и геометрические точки

Рассмотрим определенную биологическую популяцию, то есть (достаточно обширную) совокупность особей одного вида, такую что образование брачных пар происходит лишь внутри этой совокупности. В генетике популяций изучается изменение от поколения к поколению долей d, h и r доминантных, гибридных и рецессивных особей, где, например, d — это отношение числа доминантных особей в популяции к числу всех особей. С этой точки зрения популяция P характеризуется тройкой неотрицательных чисел (d, h, r), удовлетворяющих очевидному условию $d + h + r = 1$.

Рассмотрим правильный треугольник DHR с высотой 1. Заметим, что сумма расстояний d, h, r от любой точки P этого треугольника до его сторон HR, RD, DH постоянна и равна 1 (рис. 1). Мы будем называть числа d, h, r ***координатами точки*** P (относительно треугольника DHR) и писать, как и в случае обычных координат, $P = P(d, h, r)$. Как видно из рисунка 2, эти координаты тесно связаны с обычными прямоугольными координатами в пространстве.

Таким образом, каждой популяции P, характеризуемой долями d, h и r доминантных, гибридных и рецессивных особей, можно сопоставить обозначаемую той же буквой точку $P(d, h, r)$ треугольника DHR; в частности, популяциям, состоящим только из доминантных, гибридных или рецессивных особей отвечают, соответственно, вершины $D\,(1, 0, 0)$, $H\,(0, 1, 0,)$ и $R\,(0, 0, 1)$ нашего треугольника.

Задача 2. Выразите расстояние между точками $P\,(d, h, r)$ и $P_1\,(d_1, h_1, r_1)$ через их координаты относительно треугольника DHR. (Указание: воспользуйтесь рисунком 2.)

Очень важной генетической характеристикой популяции является относительный состав ее генофонда, то

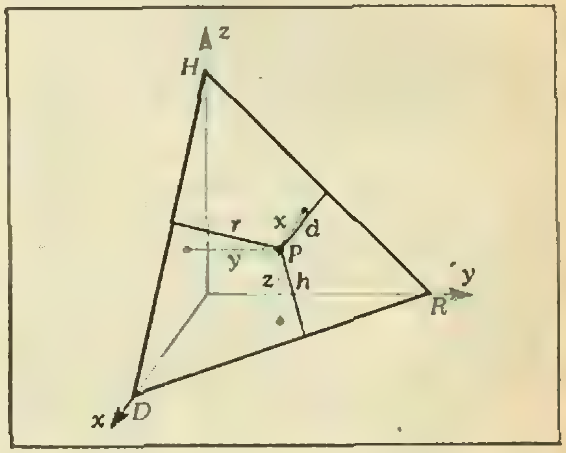


Рис. 2. Популяции $P\,(d, h, r)$ можно сопоставить точку P пространства с координатами $(x, y, z) = \sqrt{2/3} \cdot (d, h, r)$. Все эти точки принадлежат правильному треугольнику DHR — пересечению плоскости $x + y + z = \sqrt{2/3}$ с положительным октантом $\{x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$. При этом расстояния от точки P до сторон треугольника DHR будут как раз равны d, h, r.

есть доли генов G и g в совокупности генов всех особей, входящих в популяцию; эти доли мы будем обозначать буквами Γ и $\gamma=1-\Gamma$. Легко понять, что для популяции $P\,(d,\ h,\ r)$

$$\Gamma=d+h/2,\ \gamma=r+h/2.$$

Каков геометрический смысл этих величин? Из рисунка 1 видно, что Γ и γ — это d- и r-координаты проекции P_0 точки $P(d,\ h,\ r)$ треугольника DHR на сторону DR. Таким образом, популяции с заданным составом генофонда $\Gamma:\gamma$ $(\Gamma+\gamma=1)$ изображаются точками треугольника DHR, лежащими на перпендикуляре к стороне DR, проведенном из точки $P_0\,(\Gamma,\ 0,\ \gamma)$.

Теперь можно сформулировать нашу основную задачу. Возьмем некоторую популяцию P, изображаемую точкой $P=P(d,\ h,\ r)$ треугольника DHR и рассмотрим *наследственную популяцию* P', то есть совокупность всех особей, порожденных брачными парами из популяции P. Популяции P' также отвечает некоторая точка треугольника DHR. Как устроено «наследственное преобразование», переводящее точку P треугольника DHR в его точку P'?

Примеры

Скрещивание с «доминантами». Предположим, что особи популяции $P=P(d,\ h,\ r)$ скрещиваются с одними лишь доминантными особями **D**. Тогда один из генов каждого потомка заведомо будет доминантным. Второй ген, наследуемый от родителя из популяции P, выбирается как бы в два этапа: можно считать, что сначала случайным образом выбирается родитель, а затем — один из двух его генов. При этом все гены в генофонде популяции P совершенно равноправны, и следовательно, доля потомков, у которых этот второй ген будет иметь тип G, просто равна доле Γ этих генов в генофонде популяций, а ген g перейдет к γ-й части потомства. В первом случае образуются доминантные, во втором — гибридные особи. Итак, доли d', h' и r' особей типов **D**, **H** и **R** в наследственной популяции P' составят

$$d'=\Gamma=d+h/2,\ h'=\gamma=h/2+r,$$
$$r'=0.$$

Выясним, как устроено соответствующее преобразование $f_1:P\mapsto P'$ треугольника DHR. Сравнивая координаты точек $P'(\Gamma,\ \gamma,\ 0)$ и $P_0(\Gamma,\ 0,\ \gamma)$ (напомним, что P_0 — это проекция P на DR; рис. 3), мы видим, что точка P' лежит на стороне DH на расстоянии $DP'=DP_0$ от вершины D. Пусть P_1 — точка пересечения прямых P_0P и DH, то есть проекция P на прямую DH в направлении, перпендикулярном DR (в дальнейшем для краткости будем говорить просто «в направлении h»). Тогда очевидно, $DP_1=2DP_0$, то есть $DP'=DP_1/2$. Другими словами, для того, чтобы получить из P точку $P'=f'(P)$ надо *спроектировать* P *на прямую* DH *в направлении* h, *а затем приблизить вдвое полученную точку* P_1 *к точке* D.

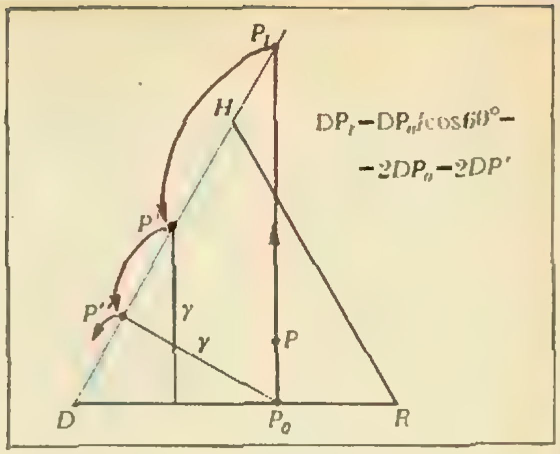


Рис. 3.

Итак, наследственное преобразование f представляет собой результат последовательного выполнения (композицию) двух преобразований: параллельного проектирования в направлении h на прямую DH и гомотетии с центром D и коэффициентом $1/2$.

Отсюда видно, что это преобразование переводит весь треугольник DHR (множество всех возможных популяций) в один отрезок — сторону DH (множество популяций без рецессивных особей). При этом единственная точка, которую наше преобразование оставляет на месте (*неподвижная точка* преобразования),— это точка D, как и должно быть с точки зрения генетики. Следующие за P' поколения потомков исходной популяции, очевидно, изображаются образами точки P' при последовательных гомотетиях с центром D и коэффициентом $1/2$ и становятся все ближе к чисто доминантной популяции D.

Скрещивание с «гибридами». Пусть теперь особи популяции $P=P(d,\ h,\ r)$ скрещиваются только с гибридными особями **H**. Рассуждая, как в первом примере, мы получим, что половина потомков получит от гибридного родителя ген G, а другая половина — g, причем в каждой из этих половин особи, у которых вторым геном (наследуемым от родителя из популяции P) будет G, составят долю Γ, а особи со вторым геном g — долю γ. Следовательно, для наследственной популяции $P'(d',\ h',\ r')$ имеем

$$d'=\frac{\Gamma}{2}=\frac{d}{2}+\frac{h}{4},\quad h'=\frac{\Gamma}{2}+\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2},$$

$$r'=\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{2}+\frac{h}{4}.$$

Сравнивая координаты точек $P'(\Gamma/2,\ 1/2,\ \gamma/2)$ и $P_0(\Gamma,\ 0,\ \gamma)$, убеждаемся, что точка P' получается из P при гомотетии с центром H и коэффициентом 1/2 (рис. 4). А это значит, что преобразование f_2, переводящее P в P', можно представить как композицию *проектирования в направлении* h на прямую, соединяющую середины M и N сторон DH и HR нашего треугольника, и гомотетии с центром в середине T отрезка MN и коэффициентом 1/2.

Из этого представления непосредственно видно, что наследственное преобразование f_2 сразу переводит треугольник DHR (множество всех популяций) в среднюю линию MN (множество популяций, наполовину состоящих из гибридов) и имеет единственную неподвижную точку (*устойчивую популяцию*, сохраняющую свой состав) — точку T (1/4, 1/2, 1/4). Последовательные поколения P', $P''=f_2(P')$, ... изображаются точками прямой MN; каждая из них переходит в следующую при гомотетии с центром T и коэффициентом 1/2 (проектировать их, конечно, уже не нужно). Поэтому популяции P', P'', ... неограниченно приближаются к устойчивой популяции T.

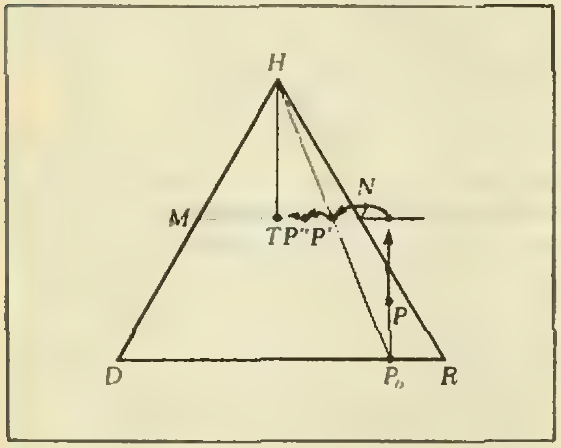


Рис. 4.

Задача 3. Пусть f_{abc} — наследственное преобразование, отвечающее скрещиванию популяции $P(d,\ h,\ r)$ с фиксированной популяцией $P(a,\ b,\ c)$ (конечно, $a,b,c\geqslant 0$ и $a+b+c=1$); например, f_{100} и f_{010} — это рассмотренные в тексте преобразования f_1 и f_2. Запишите формулы преобразования f_{abc} и выясните его геометрический смысл, найдите устойчивые популяции. Что происходит при многократном повторении преобразования f_{abc}?

Панмиксия. Закон Харди — Вейнберга

Рассмотренные выше наследственные преобразования f_1 и f_2 имеют, в первую очередь, учебный характер. Гораздо большее значение для популяционной генетики играет наследственное преобразование $P'=f(P)$, где популяция потомков P' получается в предположении чисто случайного образования пар из состава популяции P — этот метод образования брачных пар биологи называют *панмиксией* (полным смешиванием особей популяции). При этом считается, что в женской и мужской частях популяции $P\ (d,\ h,\ r)$ доли особей каждого из типов **D**, **H**, **R** одинаковы (и, конечно, равны d, h, r). Ясно, что производимый наугад выбор брачных пар и последующий выбор пары генов, передаваемой потомку (по одному гену от родителя), можно заменить *прямым случайным выбором пары генов из генофонда популяции P*. При этом частота, с которой будут возникать пары GG (то есть доля d' доминантных особей в наследственной популяции P'), будет равна Γ^2, частота пар Gg и gG (доля h' гибридных особей) — $2\Gamma\gamma$, а пар gg (доля r' рецессивных особей) — γ^2. Итак,

$$\boxed{\begin{aligned} d'&=\Gamma^2=(d+h/2)^2,\\ h'&=2\Gamma\gamma=2(d+h/2)(h/2+r),\\ r'&=\gamma^2=(h/2+r)^2 \end{aligned}}$$

(обратим внимание на то, что $d'+h'+r'=(\Gamma+\gamma)^2=1$).

Формулы в рамке выражают один из основных законов популяционной генетики — так называемый *закон Харди — Вейнберга*, с которого начинается буквально любое изложение этой столь важной сегодня дисциплины; они показывают, как меняется состав популяции при условии «чистого смешивания» — при отсутствии каких-либо дополнительных факторов, регулирующих образование брачных пар.

Выясним геометрический смысл преобразования f (то и есть закона Харди — Вейнберга). Заметим, прежде всего, что состав генофонда популяций P' и P одинаков, поскольку

$$\Gamma'=d'+h'/2=\Gamma^2+\Gamma\gamma=\Gamma(\Gamma+\gamma)=\Gamma.$$

Как мы уже знаем, это значит, что точки P и P' лежат на прямой, перпендикулярной стороне DR. Положим теперь $DP_0=x$ (рис. 5), тогда $\gamma=r_0=x\sin 60^\circ=x\sqrt{3}/2$, следовательно,

$$h'=2\Gamma\gamma=2(1-\gamma)\gamma=\sqrt{3}x(1-x\sqrt{3}/2).$$

Как известно, в обычной (прямоугольной) системе координат (рис. 5) это уравнение при $0\leqslant x\leqslant DR=2/\sqrt{3}$ задает дугу П параболы; отметим, что в наших «координатах относительно треугольника DHR «она имеет уравнение $h^2=4dr$ (поскольку $h'^2=4\Gamma^2\gamma^2=4d'r'$). Легко проверить, что эта парабола проходит через точки D, R и T (середину средней линии MN) и касается в этих точках прямых DH, RH и MN.

Таким образом, точка $P'=f(P)$ лежит на пересечении перпендикуляра к DR, проведенного через P, и указанной параболы, другими словами, преобразование f есть параллельное проектирование треугольника DHR на дугу П параболы в направлении h.

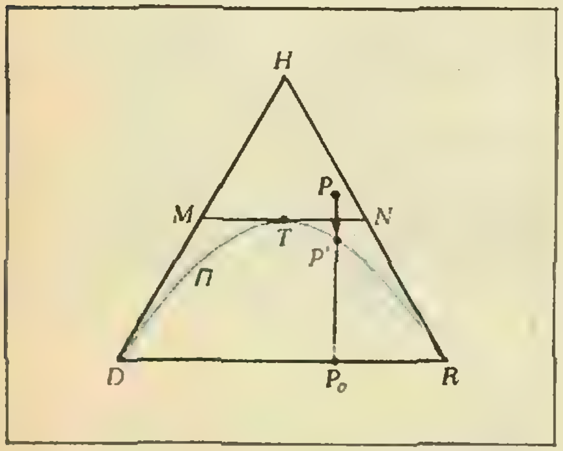


Рис. 5.

Отсюда сразу вытекает, что все точки дуги П *неподвижны*, то есть все популяции P (d, h, r) такие, что *$h^2=4dr$ устойчивы относительно* наследственного преобразования f. Последний результат, в определенном смысле, является парадоксальным: из него следует, что в достаточно большой популяции при отсутствии мутаций и (искусственного или естественного) отбора эволюция всегда осуществляется *за один шаг*. Дальнейшее скрещивание особей в таких условиях уже не меняет относительного состава популяции: если $P'=f(P)$, $P''=f(P')$, и т. д., то $P'=P''=\ldots$ Однако в реальной жизни такие идеализированные условия скрещивания никогда не имеют места: выполняются они всегда лишь более или менее приближенно. Поэтому и закон Харди — Вейнберга задает лишь первое приближение к реально протекающим в биологических популяциях процессам; степень же отличия реальных процессов биологической эволюции от этого грубого описания находится с помощью дальнейших, усложненных математических моделей (см., например, задачу 4). Разумеется, полученные с их помощью результаты надо каждый раз сравнивать с наблюдениями над живой природой.

Задача 4. Пусть брачные пары в популяции P образуются чисто случайно (как при панмиксии), но гибриды *отличаются по жизнеспособности* от доминантных и рецессивных особей; точнее, из общего числа гибридов наследственной популяции в живых остается лишь k-я часть (при $k>1$ это означает, что напротив, сохраняется лишь $(1/k)$-я часть особей типов **D** и **R**). Опишите соответствующее геометрическое преобразование треугольника DHR. Как оно устроено при $k=0$ (полное вымирание гибридов) и при $k=\infty$ (полное вымирание особей **D** и **R**)?

* * *

Закон Харди — Вейнберга был независимо открыт в 1908 г. в Кембридже молодым английским математиком Годфри Харольдом Харди и в Вене австрийским врачом Вильгельмом Вейнбергом. (Впоследствии историки науки установили, что пятью годами раньше тот же закон — в несколько другой его форме — был указан английским биологом У. Е. Кастлом, работа которого, однако, никем не была замечена.) Любопытно отметить, что выдающийся специалист в области теории чисел Г. Х. Харди являлся воинственным адептом «чистой» науки: в своей научной автобиографии «Апология математика» (к сожалению, эта интересная книга на русский язык не переведена) он с темпераментом доказывает преимущества яркой и богатой идеями «чистой» математики перед «прикладной» наукой, совершенно незаслуженно казавшейся ему скучной; хороший курс математического анализа Харди вызывающе назван «Курсом чистой математики». Однако сегодня более 90 % всех упоминаний имени Харди в научной и учебной литературе связано не с его выдающимися работами теоретико-числового содержания, а с единственным юношеским его «грехом» — с выполненной в молодости прикладной работе по популяционной генетике, содержание которой мы только что изложили.

Поговорим о дальтонизме

Выше мы рассмотрели самую простую генетическую схему, когда какой-то признак, проявляющийся внешне в двух вариантах, определяется парой генов, каждый из которых может быть двух типов. Однако и число генов, и число их различных типов, да и законы их внешнего проявления могут быть другими. Об одной из таких более сложных систем передачи наследственных признаков мы сейчас коротко расскажем.

Известны наследственные признаки, встречающиеся у женщин гораздо реже, чем у мужчин. К ним относятся, например, гемофилия (несвертываемость крови) и цветовая слепота (неспособность различать некоторые цвета, чаще всего красный и зеленый). Вторую из этих болезней впервые описал страдавший ею знаменитый английский химик Дж. Дальтон (1766—1844); по его имени она впоследствии была названа *дальтонизмом*. Сам Дальтон считал, что это чисто мужская болезнь. Здесь он ошибался, что и не удивительно: по статистике дальтоники составляют 8 % среди мужчин и только 0,5 % среди женщин. Причину этого различия объяснил один из создателей современной генетики, американский биолог Т. Г. Морган (1866—1945), следующим образом.

Ген дальтонизма, доминантный вариант G которого обеспечивает нормальное зрение, а рецессивный g — цветовую слепоту, помещается в так называемой X-хромосоме. Эта хромосома вместе с другой — Y-хромосомой — определяет пол человека*): в клетках женского организма имеется по две X-хромосомы, в клетках мужского — одна X- и одна Y-хромосома. Наследственный организм получает одну хромосому от матери (конечно, X) и одну от отца (она и определяет пол потомка). Таким образом, мужчины получают свой единственный ген дальтонизма (или любого другого признака, сцепленного с полом, то есть связанного с X-хромосомой) от матери; женщины — один ген от матери и один от отца.

Рассмотрим теперь некоторую популяцию P и ряд ее наследственных популяций P', P'', ..., возникающих при чисто случайном образовании брачных пар (панмиксии; возможно, здесь уже уместнее было бы говорить не о дальтонизме, а о розовоглазии у мушек-дрозофил — сцепленном с полом признаке, тщательно изученном Морганом). Нас интересует генетическая структура этих популяций и ее изменении, в частности, доли рецессивных женских и мужских особей — с генотипами gg и g; именно они и будут дальтониками.

Возможны три женских генотипа — GG, Gg и gg, и два мужских — G и g; их доли в женской и мужской частях популяции P обозначим через d, h, r, δ и ϱ, доли генов G и g в генофонде женской части P — через Γ и γ. Тогда аналогичные величины для популяции P' равны:

$$d'=\Gamma\delta,\ h'=\Gamma\varrho+\gamma\delta,\ r'=\gamma\varrho;$$
$$\delta'=\Gamma,\ \varrho'=\gamma;$$
$$\Gamma'=\frac{1}{2}(\Gamma+\delta),\ \gamma'=\frac{1}{2}(\gamma+\varrho)$$

(объясните, почему!).

Изучим преобразование $P\to P'$ с помощью геометрической модели. В силу соотношений $d+h+r=\delta+\varrho=\Gamma+\gamma=1$ все параметры, описывающие состав популяции, можно выразить через три, скажем, Γ, δ и h. Таким образом, каждой популяции P можно сопоставить точку пространства с координатами (Γ, δ, h) относительно некоторой прямоугольной системы координат. Поскольку должны выполняться неравенства $0\leqslant\Gamma\leqslant 1$, $0\leqslant\delta\leqslant 1$, $0\leqslant h\leqslant 2\Gamma$ и $h\leqslant 2\gamma=2(1-\Gamma)$ (последние два в силу того, что $h/2=\Gamma-d=\gamma-r$), эти точки

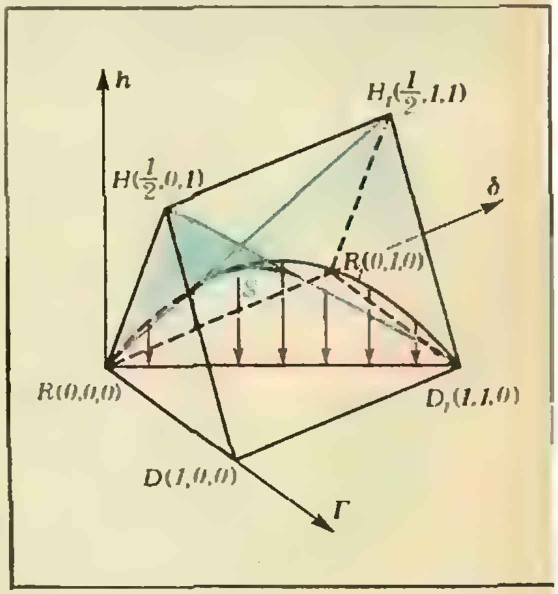


Рис. 6.

---

*) Так же обстоит дело у других млекопитающих и некоторых насекомых.

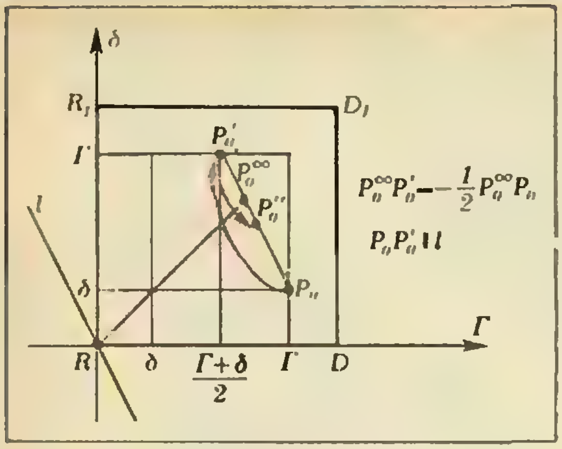

δ
R_1
D_1
P_0'
Г
P_0^∞
P_0''
$P_0^\infty P_0' = -\frac{1}{2} P_0^\infty P_0$
$P_0P_0' \parallel l$
l
δ
P_0
Г
R
δ
$\frac{\Gamma+\delta}{2}$
Г
D

Рис. 7.

лежат в треугольной призме $DHRD_1H_1R_1$, ограниченной плоскостями $\delta=0$, $\delta=1$, $h=0$, $h=2\Gamma$ и $h=2-2\Gamma$ (рис. 6). Наследственное преобразование переводит точку призмы $P(\Gamma, \delta, h)$ в точку $P'(\Gamma', \delta', h')$. Из равенств

$$h'=\Gamma(1-\delta)+(1-\Gamma)\delta=\Gamma+\delta-2\Gamma\delta=$$
$$=2\Gamma'-4\Gamma'\delta'+2\delta'^2$$

следует, что точка P' и все следующие точки P'', P''', ... лежат на поверхности S, удовлетворяющей уравнению $h=2\Gamma-4\Gamma\delta+2\delta$ (рис. 6; *подробнее об этой поверхности* рассказывается на 2-й с. обложки, см. также задачу 7), поэтому эти точки однозначно восстанавливаются по своим проекциям P_0', P_0'',... на плоскость $h=0$. Как видно из формул $\Gamma'=(\Gamma+\delta)/2$, $\delta'=\Gamma$ и рисунка 7, отрезок P_0P_0' параллелен прямой l с уравнением $\delta=-2\Gamma$ и делится диагональю R_0D_1 грани $R_0D_0D_1R_1$ нашей призмы в отношении 2 : 1; преобразование, переводящее P_0 в P_0', называется косым сжатием к прямой R_0D_1 вдоль прямой l с коэффициентом $-1/2$. Ясно, что все точки P_0', P_0'' ..., получаемые его многократным применением к точке P_0, лежат на прямой P_0P_0' и приближаются к точке P_0^∞ пересечения этой прямой с P_0D_1; точка P_0^∞, как и все точки отрезка R_0D_1, неподвижна при нашем преобразовании. «Поднимая» точки с плоскости $h=0$ на поверхность S, получаем следующий результат: *последовательные поколения потомков популяции P приближаются по своему составу* (причем очень быстро) *к устойчивой популяции* P^∞; *соответствующая ей точка, как и все точки, изображающие устойчивые популяции, лежит на линии пересечения поверхности S с плоскостью* $\Gamma=\delta$ (покажите, что эта линия — парабола!).

Для любой устойчивой популяции $\Gamma=\delta$; можно найти остальные величины, характеризующие ее генетический состав:

$$\varrho=\gamma=1-\delta,\ d=\delta^2,\ h=2\delta\varrho,\ r=\varrho^2.$$

В частности, при $\varrho=0{,}08$ найдем, что $r\approx 0{,}006$, что примерно совпадает с приведенными выше частотами распространения дальтонизма среди мужчин и женщин.

* * *

Мы пытались показать, как геометрические модели придают наглядность задачам популяционной генетики и позволяют решать эти задачи элементарно-геометрическими рассуждениями, получая «задешево» глубокие закономерности. Мы надеемся, что читатель сумеет теперь самостоятельно проводить подобные рассуждения, решая предложенные здесь задачи.

Задачи

5. Пусть за единицу масштаба по оси h принят отрезок длины $\sqrt{3}/2$ (а по осям Г и δ — длины 1), так что призма DR... ...H_1 — правильная. Докажите, что расстояния от точки $P(\Gamma, \delta, h)$ до оснований призмы равны δ и ϱ, а до боковых граней — пропорциональны соответствующим значениям d, h, r.

6. Докажите, что плоскости $\delta=\text{const}$ и $\delta-2\Gamma=\text{const}$ пересекают поверхность S по прямым, а все остальные плоскости, параллельные оси h — по параболам.

7. Выразите координаты предельной популяции P^∞ через координаты (Γ, δ, h) исходной популяции P.

8. Пусть произвольная популяция $P(\Gamma, \delta, h)$ скрещивается с фиксированной популяцией P_0 $(\Gamma_0, \delta_0, h_0)$ *по следующей схеме:* каждая женская особь из P скрещивается с взятой наугад мужской особью из P, а каждая мужская особь из P — с взятой наугад женской особью из P_0. Обозначим через $P_1=f_0(P)$ наследственную популяцию.

а) Выразите координаты Γ_1, δ_1, h_1, а также остальные параметры популяции P_1 через координаты популяций P и P_0.

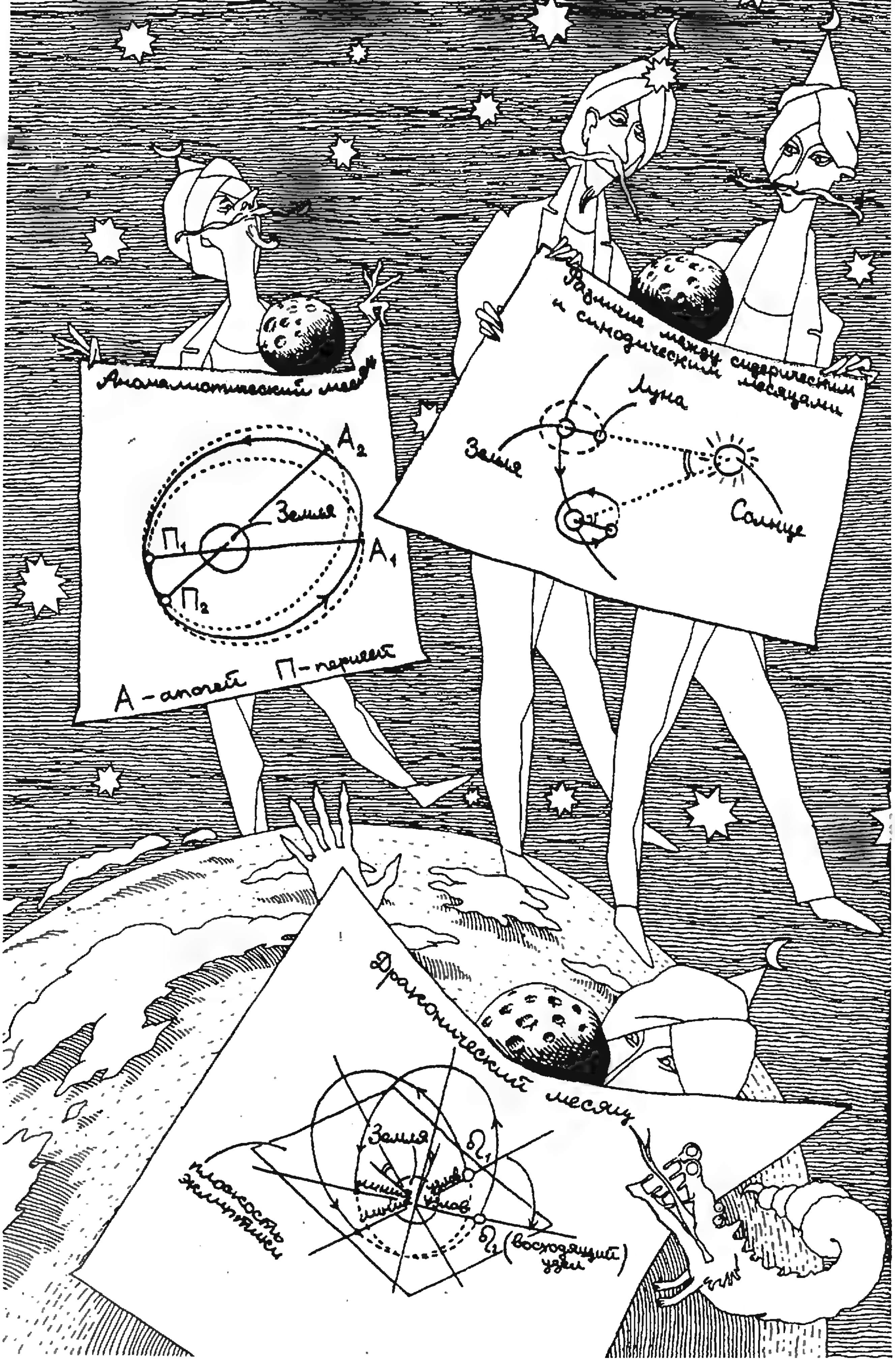
б) Пусть $P_2=f_0(P_1)$, $P_3=f_0(P_2)$ и т. д.; наконец $P_\infty=\lim\limits_{n\to\infty} P_n$. Выразите координаты популяции P_∞ через координаты популяций P и P_0.

в) Рассмотрите частные случаи, отвечающие тем или иным конкретным составам популяции P_0, например, случаю $P_0=P_0(1, 1, 0)$ (случай чисто доминантной популяции P_0) и др., а также случай, когда популяция P_0 принадлежит множеству популяций, устойчивых относительно преобразования, рассмотренного в тексте.

г) Опишите геометрически отображения $f_0: P\to P_1$ и $f_\infty: P\to P_\infty$ как преобразования призмы.

Поправка

В «Кванте» № 2 на с. 29 в задаче № 2 и рисунке к ней должно быть $(НО)^3=ВАНЯ$, $В+А+Н+Я=НО$ или, например, $(ОН)^3=ЕГОР$, $Е+Г+О+Р=ОН$.


Аномалистический месяц
A_2
Земля
$П_1$
A_1
$П_2$
А – апогей П – перигей
Разница между сидерическим и синодическим месяцами
Луна
Земля
Солнце
Драконический месяц
Земля
☊$_1$
линия узлов
линия узлов
плоскость эклиптики
☊$_2$ (восходящий узел)

Как движется Луна?

Кандидат физико-математических наук
В. А. БРОНШТЭН

Вероятно, многие читатели «Кванта» удивятся: до чего легкий вопрос! Все знают, что Луна — единственный естественный спутник Земли — движется по эллипсу, совершая один оборот за 27,3 суток. И движение это происходит в строгом соответствии с законами Кеплера, являющимися следствием закона всемирного тяготения, открытого Ньютоном. Все это верно, но...

Теория движения Луны оказалась одной из самых сложных задач небесной механики, на решение которой ушло два с половиной века (считая только от Ньютона). В разработку этой теории вложили труд такие замечательные ученые, как Эйлер, Клеро, Даламбер...

Так в чем же были трудности? Как их удалось преодолеть?

Четыре лунных месяца

Движение Луны изучали еще астрономы Древнего Вавилона. Они тщательно регистрировали моменты солнечных и лунных затмений. По этим данным древнегреческий астроном Гиппарх (II век до н. э.) определил длительность основных периодов, характеризующих движение Луны. По традиции мы будем называть их «месяцами».

Таких месяцев с древних времен было известно четыре. *Сидерический*, или *звездный, месяц* — это период обращения Луны вокруг Земли; он определяется по перемещению Луны относительно неподвижных звезд. *Синодический месяц* — промежуток времени между двумя последовательными новолуниями (или полнолуниями). *Аномалистический месяц* — это период между двумя последовательными прохождениями Луны через перигей своей орбиты. Наконец, *драконический месяц* — это промежуток времени между двумя прохождениями Луны через восходящий узел ее орбиты — точку пересечения орбиты с плоскостью эклиптики (теперь мы знаем, что это не что иное как плоскость земной орбиты, но во времена Гиппарха Земля считалась неподвижной, а плоскость эклиптики считалась плоскостью орбиты, по которой Солнце двигалось вокруг Земли).

Гиппарх рассчитал, основываясь на датах наблюдений затмений древними астрономами, что через каждые 345 лет положения Солнца, Луны, перигея и узлов лунной орбиты повторяются; иначе говоря, 345-летний цикл содержит целое число всех четырех месяцев. Выводимые из цикла Гиппарха продолжительности лунных месяцев лишь на немногие доли секунды отличаются от тех значений, которыми пользуются астрономы теперь, накопив наблюдения еще за 21 столетие (эти значения приведены на с. 14).

Почему синодический месяц длиннее сидерического, объяснить нетрудно. Смена лунных фаз зависит от положения Луны относительно Солнца. Луна вместе с Землей обращается вокруг Солнца. Направление этого движения совпадает с направлением обращения Луны вокруг Земли. В результате движение Луны по ее «околоземной» орбите происходит как бы с отставанием: повторение лунных фаз происходит не через сидерический месяц, а через более длительный период, который и назван синодическим месяцем. Нетрудно получить такое соотношение между длительностями сидерического (S) и синодического (P) месяцев:

$$\frac{1}{S}=\frac{1}{P}+\frac{1}{T},$$

где T — длительность земного года (в сутках).

Тот факт, что аномалистический месяц длиннее сидерического, по существу означает, что сама лунная орбита как целое вращается (в собственной плоскости), и линия, соединяющая перигей и апогей орбиты (то есть большая ось лунного эллипса), называемая линией апсид, поворачивается в том же направлении, в каком движется Луна. Так что Луне приходится постоянно «догонять» свой перигей.

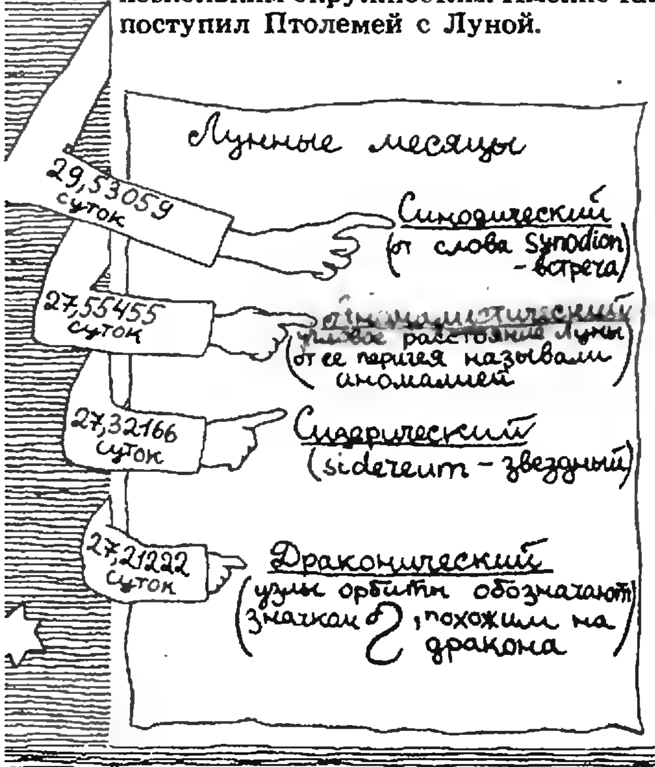
Драконический месяц, напротив, короче сидерического. Это значит, что линия узлов поворачивается навстречу движению Луны.

Причина поворота большой оси лунного эллипса и линии узлов была найдена лишь в XVIII веке, после создания Ньютоном теории всемирного тяготения. А еще через два столетия эта теория позволила рассчитать траектории движения искусственных спутников Земли, обрела, так сказать, вторую молодость. Но — обо всем по порядку.

Лунные неравенства

С именем древнегреческого астронома Клавдия Птолемея (ок. 100 — ок. 165) обычно прежде всего связывают его геоцентрическую систему мира, против которой боролись Коперник, Джордано Бруно, Галилей, Кеплер. Но Птолемей внес большой вклад в развитие астрономии, в частности, в теорию движения Луны. Правда, в тот период речь могла идти только о кинематической теории, ибо причины и истинные законы движений небесных тел известны не были.

В течение длительного периода развития астрономической науки считалось, что небесные тела могут двигаться только равномерно по окружностям. Если движение выглядело более сложным, то его можно было представлять комбинацией движений по нескольким окружностям. Именно так поступил Птолемей с Луной.

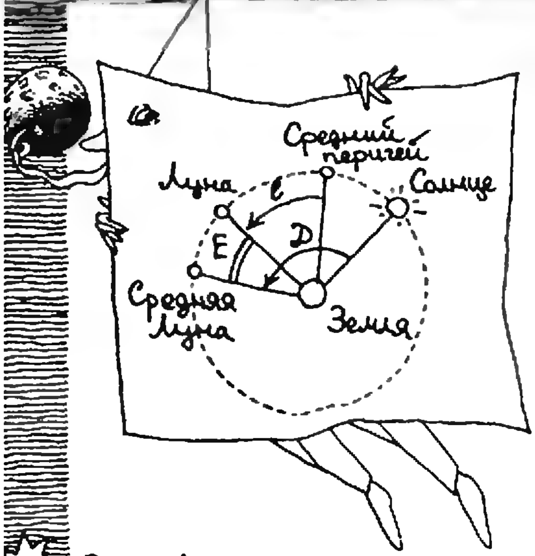

Лунные месяцы
29,53059 суток
Синодический (от слова synodion - встреча)
27,55455 суток
Аномалистический (угловое расстояние Луны от ее перигея называли аномалией)
27,32166 суток
Сидерический (sidereum - звездный)
27,21222 суток
Драконический (узлы орбиты обозначают значком ☊, похожим на дракона)

Движение Луны по небу было неравномерным. Чтобы представить его комбинацией равномерных движений по окружностям, надо было сначала определить величину отклонений от равномерного движения, или так называемых неравенств. И во времена Птолемея, и даже во времена Кеплера и много позже было принято называть «неравенствами» отдельные компоненты отклонения положения Луны от положения воображаемой точки, движущейся по эклиптике равномерно с периодом, равным сидерическому месяцу. Таким образом, слово «неравенство» в астрономии означало совсем не то, что оно означает в математике. Впрочем, в современной науке мы встречаемся с подобными примерами буквально на каждом шагу. Так, слово «элемент» означает в химии одно, а в электротехнике совсем другое. Никто не спутает ядро кометы, ядро живой клетки и ядро атома. А сейчас мы встретимся с еще одним примером употребления привычных нам терминов в ином смысле.

Все положения на небе Луны, Солнца, звезд и планет уже во времена Птолемея измерялись в системе координат, напоминавших географические долготу и широту. И назывались эти координаты почти так же: астрономическая долгота и астрономическая широта. Только широта небесных светил отсчитывалась от плоскости эклиптики (напомним, что в те времена так называлась плоскость, в которой лежала орбита Солнца, обращающегося вокруг Земли), а долгота — от точки весеннего равноденствия, в которой Солнце раз в год пересекает небесный экватор. Взявшись за определение лунных неравенств, Птолемей рассматривал в основном неравенства по долготе, выводя широту по наклону лунной орбиты, равному 5°, — именно таким определил этот угол Гиппарх, «муж трудолюбия и поклонник истины», как назвал его Птолемей. (По современным данным Гиппарх ошибся всего на 8 минут дуги).

Общее неравенство E движения Луны по долготе Птолемей представил следующей формулой (в современных обозначениях):

$$E=6^\circ 15' \sin l+1^\circ 18' \sin (2D-l)+ +19' \sin 2l.$$



Здесь l — угловое расстояние Луны от среднего перигея ее орбиты, D — угловое расстояние Луны от Солнца. Из формулы Птолемея следовало, что лунные неравенства — периодические и являются как бы суммой нескольких отдельных неравенств. Так, первый и третий члены правой части формулы зависят от положения Луны относительно перигея своей орбиты. Их сумма получила название *главного эллиптического неравенства.* Но это название было дано не Птолемеем, а учеными в XVII веке, когда уже было известно, что Луна движется по эллипсу.

Второй член, в который входит угловое расстояние Луны от Солнца, связан с влиянием Солнца на движение Луны. Много позже, уже в XVII веке, он получил название *эвекции,* а в конце того же столетия Ньютон дал ему исчерпывающее объяснение. Но об этом — чуть ниже.

Николай Коперник (1473—1543), используя свои более точные наблюдения (впрочем, он, как и Гиппарх и Птолемей, наблюдал невооруженным глазом!), уточнил коэффициенты формулы Птолемея, определил крайние и среднее значения расстояния от Земли до Луны (в единицах земного радиуса), причем ошибка в среднем расстоянии составляла всего 0,1 % (!) против современного значения.

Новый шаг вперед в создании кинематической теории движения Луны сделал замечательный датский астроном-наблюдатель Тихо Браге (1546—1601). Он открыл третье по счету неравенство, получившее название *вариации.* В формуле для E, это дополнительный член вида $40' \sin 2D$. Затем Тихо Браге обнаружил еще одно, четвертое лунное неравенство, выражаемое членом ($-11' \sin l'$), где l' — угловое расстояние Солнца от перигелия земной орбиты (Земля проходит перигелий своей орбиты 1—2 января). Так как период последнего неравенства равен году, оно получило название *годичного уравнения.* Здесь мы снова встречаемся с примером иного употребления всем привычного термина. Словом «уравнение» во времена Тихо Браге и вплоть до наших дней астрономы называли некоторые математические величины. Так, до сих пор в астрономии сохранился термин «уравнение времени», означающий разность среднего и истинного солнечного времени.

Тихо Браге открыл также, что угол наклона лунной орбиты к эклиптике может изменяться в пределах $\pm 9{,}5'$ от среднего значения $5°8'$, причем наибольшего значения наклон орбиты достигает, когда направление Земля—Солнце совпадает с линией узлов лунной орбиты, а наименьшего — когда они перпендикулярны.

Истинную форму лунной орбиты установил Иоганн Кеплер (1571—1630), доказавший, что Луна, как и планеты, движется по эллипсу. На основе трех законов планетных движений, открытых Кеплером, Исаак Ньютон (1643—1727) вывел закон всемирного тяготения, нашел ту силу, которая заставляет небесные тела двигаться по эллиптическим и иным орбитам.

От кинематики — к динамике

Развитие небесной механики, основанной на теории тяготения Ньютона, вселяло надежду, что и теория движения Луны будет построена без особого труда и все лунные неравенства получат простое объяснение. И действительно, Ньютон добился в этой области немалых успехов. Он показал, что неравенства являются следствием влияний Солнца на Луну (так называемых солнечных возмущений). Из анализа этих влияний он теоретически получил значения основных лунных неравенств.

Ньютон количественно объяснил движение узлов лунной орбиты и периодическое изменение ее наклона к эклиптике. Но когда он попытался вывести скорость смещения лунного перигея, то получил результат, вдвое меньший наблюдаемого.

Да, теория движения Луны оказалась крепким орешком и для самого Ньютона, и для длинного ряда его последователей. В чем же состояла главная трудность?

Мы знаем, что основная сила, действующая на планеты,— притяжение Солнца. Под действием этой силы планета должна описывать кеплеров эллипс. Притяжение других планет, массы которых в тысячи, сотни тысяч и миллионы раз меньше массы Солнца, приводит лишь к небольшим отклонениям от кеплерова эллипса, которые принято называть возмущениями. Эти возмущения невелики и их нетрудно вычислить. (Известно, что по возмущениям в движении Урана астрономы Дж. Адамс и У. Леверье независимо вычислили положение и орбиту неизвестной до того планеты, вызывающей эти возмущения,— ею оказался Нептун.)

В случае Луны дело обстоит совершенно иначе. Луна в своем обращении вокруг Земли постоянно подвергается возмущению со стороны самого массивного тела солнечной системы — Солнца. К тому же эти возмущения изменяются в течение аномалистического месяца (с изменением расстояния от Луны до Земли) и в течение года (с изменением расстояния от Земли до Солнца).

Конкурс Петербургской академии наук

Прошло три четверти века со времени публикации бессмертного труда Ньютона «Математические начала натуральной философии». И хотя сам Ньютон пытался разработать теорию движения Луны, его теория не давала требуемой точности. А ведь в те годы теория движения Луны имела практическое значение: по астрономической долготе Луны определяли географическую долготу места на Земле. Поскольку Луна перемещалась по небу в среднем на 13° в сутки, ее положение на небе в данный час зависело от долготы места. Мореплаватели и путешественники пользовались этим для определения географических долгот.

И вот в 1750 году Петербургская академия наук объявила конкурс на лучшее исследование по такой теме: «Показать, согласны ли все неравенства, которые наблюдаются в движении Луны, с ньютоновской теорией, и какой должна быть истинная теория всех этих неравенств, чтобы по ней можно было со всей точностью определять место Луны на любое время».

Эта формулировка была выбрана неслучайно. Мы помним, что Ньютон потерпел неудачу в теоретическом определении скорости смещения лунного перигея. В 1745 году эту же задачу попытались решить два замечательных французских математика — Алексис Клод Клеро (1713—1765) и Жан Лерон Даламбер (1717—1783). Оба они были членами Парижской академии наук, ярыми соперниками в науке, над лунной проблемой работали совершенно независимо. Решая задачу о движении лунного перигея, они оба пришли к тому же выводу, что и Ньютон: период обращения большой оси лунного эллипса теоретически должен быть в два раза больше, чем это следует из наблюдений. Оба ученых даже высказали мысль, что закон Ньютона неточен и требует поправок. Именно это заключение столь авторитетных ученых и вызвало объявление конкурса Петербургской академии наук с приведенной выше формулировкой.

Но уже за несколько месяцев до объявления конкурса, в мае 1749 года, Клеро нашел причину «расхождения» теории Ньютона с наблюдениями. Теория была не виновата. Дело в том, что даваемое теорией аналитическое (в виде формулы) выражение для смещения перигея представляло собой степенной ряд вида $k_0+k_1m+k_2m^2+\ldots+k_nm^n+\ldots$, где m — отношение суточных смещений Земли и Луны по их орбитам ($m\approx1/13$), k_n — численные коэффициенты. Значение m мало́ по сравнению с единицей, и каждый следующий член ряда много меньше предыдущего. И Ньютон, и Даламбер, и Клеро брали для вычислений значение смещения перигея, ограничиваясь лишь первым членом ряда. Это, как догадался Клеро, и приводило к резкому расхождению теоретически рассчитанной и реальной скорости смещения лунного перигея. Учтя в выражении для смещения второй член, Клеро получил обнадеживающий результат: расхождение теории с наблюдениями уменьшилось в три с лишним раза. Чем больше членов брал Клеро, тем ближе стремилось к нулю расхождение с данными наблюдений.

В 1752 году Клеро представил Петербургской академии наук большой мемуар, озаглавленный «Теория Луны, выведенная из единственного начала притяжения, обратно пропорционального квадратам расстояний». Эта работа была удостоена назначенной премии и издана в Петербурге. В ней Клеро решает задачу на вращающемся эллипсе, каким и является в сущности орбита Луны. В своей работе Клеро впервые показал, что лунные неравенства проявляются не только в долготе и широте Луны, но и в расстоянии от нее до Земли. В формулах теории Клеро каждая из величин (долгота, широта и расстояние) выражается уже суммой из 20 членов ряда.

Работа Клеро дала толчок к новым исследованиям. Даламбер решил проверить выводы Клеро и пришел к тем же результатам, хотя и другим способом. Действительный член Петербургской академии наук Леонард Эйлер (1707—1783) усовершенствовал теорию Клеро, сделав ее более удобной для составления таблиц движения Луны. Такие таблицы вскоре были составлены немецким астрономом Тобиасом Майером. Спустя 20 лет Эйлер вновь обратился к теории движения Луны. В 1772 году он издал труд, озаглавленный «Теория движения Луны, изложенная новым способом». И действительно, в этой работе был предложен принципиально новый способ построения лунной теории.

Идеи, заложенные во второй лунной теории Эйлера, позволяют в принципе достичь наиболее точного описания движения Луны. Однако эти идеи опередили свое время — развитие науки тогда было недостаточно, чтобы на их основе получить окончательное решение задачи. И лунные теории продолжали развиваться по старому, «протоптанному» пути.

Как строить теорию?

Теории Клеро, Даламбера и первая лунная теория Эйлера принадлежали к классу аналитических. В этих теориях выражения для координат небесного тела (или для элементов его орбиты) выводятся как решения уравнений движения, даваемых теорией Ньютона. Построение таких теорий требовало тогда громадного труда. Создатель одной из лучших аналитических теорий французский астроном Шарль Делоне (1816—1872) затратил на нее 20 лет непрерывной работы. Зато теория Делоне может быть применена не только к Луне, но и к любому другому спутнику планеты, в том числе и к искусственному спутнику Земли.

В численных теориях целый ряд элементов орбиты берется из наблюдений, а затем уточняется в ходе расчетов. Лучшей из численных теорий движения Луны была теория немецкого астронома П. А. Ганзена (1795—1874), на основе которой были составлены таблицы движения Луны, служившие астрономам почти полвека — до начала двадцатых годов нашего столетия.

Наибольший успех выпал на долю численно-аналитических теорий, начало которым было положено второй лунной теорией Эйлера. При этом лишь немногие величины берутся из наблюдений и подставляются в уравнения движения до их решения.

В 1888 году американский астроном Джордж Хилл (1838—1914) использовал идеи Эйлера для построения своей теории движения Луны. Ему удалось получить скорость движения перигея лунной орбиты аналитически. Все неравенства движения Луны были разделены им на классы, в зависимости от того, какие величины входили в то или иное неравенство. Тем самым вся задача была как бы «расслоена» на несколько отдельных задач, каждая из которых решалась отдельно. Теорию Хилла довел до конца американский астроном Эрнест Браун (1866—1938). Ему удалось преодолеть одну за другой все оставшиеся трудности теории и достичь точности, достаточной для удовлетворения наблюдений начала и середины двадцатого века. Выражение для долготы Луны в теории Брауна содержало 552 члена, для широты — 487, для радиуса-вектора Луны — 304 члена. Были

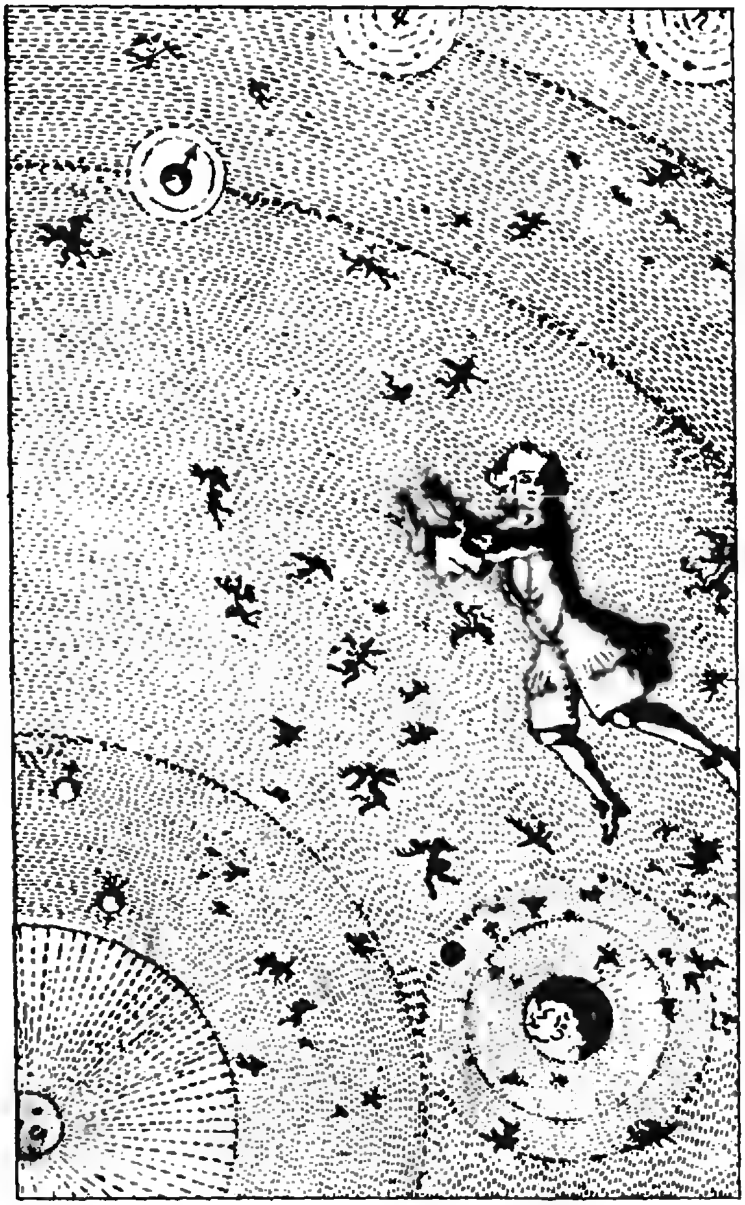
(Окончание см. на с. 48)

Полет к Солнцу

Кандидат физико-математических наук
А. В. БЯЛКО

Когда бы смертным столь высоко
Возможно было возлететь,
Чтоб к солнцу бренно наше око
Могло, приблизившись, смотреть,
Тогда б со всех открылся стран
Горящий вечно океан...
Там огненны валы стремятся
И не находят берегов.
Там вихри пламенны крутятся,
Борющись множество веков.
Там камни, как вода, кипят,
Горящи там дожди шумят...

М. В. Ломоносов



Есть высказывание: «самая интересная поверхность — это человеческое лицо». Зададимся вопросом: с какой поверхностью в природе можно сравнить лицо человека по его содержательности и непредсказуемой изменчивости? Сильный соперник есть — это поверхность Солнца.

Посмотрите на фотографию Солнца на с. 19. К сожалению, она не может дать полного представления о красоте и сложности нашего светила. Его поверхность очень неоднородна, на ней не найти двух одинаковых участков; и все это разнообразие постоянно изменяется. Кроме того, солнечная поверхность переменна по спектру — при наблюдении в свете с разными длинами волн она оказывается различной. Это происходит потому, что принимаемое нами от Солнца излучение разных длин волн формируется на разных высотах солнечной атмосферы.

Явления на поверхности Солнца — возникновение и движение пятен, их исчезновение, солнечные вспышки, мощные протуберанцы и т. д. — отражают сложные процессы, происходящие во внутренних слоях нашей звезды. Что происходит на Солнце в атомных масштабах — известно. Известно, например, как взаимодействует свет с отдельными атомами, как атомы взаимодействуют между собой. (Солнце на 99,9 % состоит из атомарного водорода и гелия.) Однако между атомными масштабами — порядка 10^{-10} м — и размерами, которые можно различить на Солнце в современный телескоп — порядка 10^6 м, — лежит огромная область. Ученые строят гипотезы, пытаются теоретически описать явления, происходящие в масштабах этого промежутка в 16 порядков. Существуют предположения о гидродинамике солнечных недр, о механизме переноса энергии из глубины к поверхности Солнца, о структуре магнитных полей. Но до настоящего понимания физики Солнца еще далеко. На сегодняшний день нет полного объяснения пятен, вспышек и множества других явлений на солнечной поверхности.

Возникает естественный вопрос. Если все так, то что же мешает подлететь к Солнцу поближе и посмотреть на его поверхность с малых расстояний? И не только посмотреть, но и исследовать ее всеми доступными средствами.

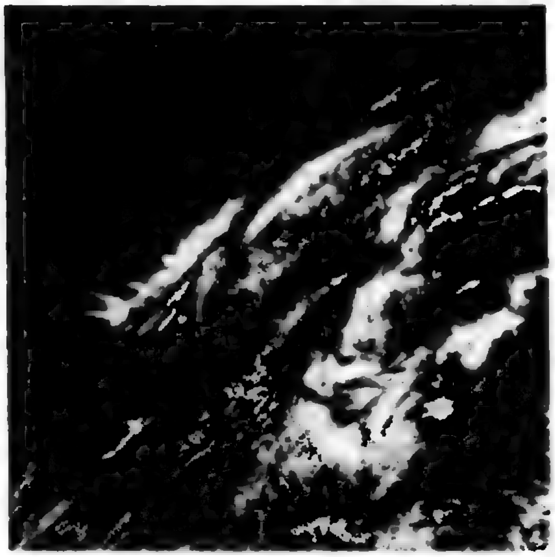
Может быть, помешает высокая температура? Для нормальной работы электронных приборов температура не должна сильно превышать привычную для них земную температуру 300 К, а аппарат попадет в область гораздо более высоких температур. Но эта проблема технически разрешима — внутри космической станции, направляющейся к Солнцу, можно устроить отсек, охлаждаемый до комнатных температур.

Конечно, пролет автоматической станции непосредственно через корону Солнца, внешнюю часть его атмосферы, может оказаться опасным для приборов не только из-за разогрева, но и по другим причинам. Например, работе электроники могут помешать мощные потоки заряженных частиц, порождающие сильные электрические и магнитные поля. Такие потоки электронов и ионов возникают при солнечных вспышках. Однако пролет с минимальным расстоянием в 4—5 радиусов Солнца относительно безопасен. Дело в том, что время пребывания автоматической станции на расстояниях, меньших 10 радиусов Солнца, при любом выборе траектории не превзойдет нескольких часов. Это время так мало потому, что велика скорость движения. На расстоянии в 4 радиуса Солнца от его центра скорость станции будет достигать 300 км/с. Так сильно разгоняет станцию гравитационное притяжение Солнца.

Человечество еще ни разу не послало разведчика к Солнцу из-за трудностей, на первый взгляд, совершенно неожиданных. Оказывается, очень трудно вывести космический аппарат на траекторию, проходящую вблизи Солнца. Это кажется удивительным: Солнце — главный источник притяжения в солнечной системе, оно, казалось бы, может само притянуть к себе любое массивное тело. Однако планеты движутся вокруг Солнца и не падают на него. Падению препятствует скорость небесных тел, перпендикулярная направлению на Солнце. В этом-то все и дело. Чтобы попасть близко к Солнцу, нужно избавиться от начальной скорости, которая при старте с Земли равна скорости обращения Земли вокруг Солнца. А как известно, Земля движется по своей орбите со скоростью около 30 км/с. Ее необходимо «погасить», остановить ракету на орбите Земли — и тогда произойдет падение на Солнце.

Но тридцать километров в секунду — это очень много. До сих пор ни одна ракета до такой скорости еще не разгонялась. (Принципиально это возможно, если сделать ракету многоступенчатой, но при этом полезная нагрузка — масса космической станции — окажется чересчур малой.)

Эта фотография солнечной поверхности сделана в свете с длиной волны 656,3 нм. Если бы этот же участок Солнца в то же самое время сфотографировали в свете с длиной волны, отличающейся всего на 0,1 нм, то он выглядел бы совсем иначе.



Вычислим все же (это нам пригодится для дальнейшего), сколько времени продолжался бы такой полет от Земли до Солнца.

Траектория падения на Солнце — отрезок прямой — это предельный случай вытянутой эллиптической орбиты с большой полуосью, равной половине радиуса земной орбиты. Согласно третьему закону Кеплера, квадраты периодов обращения тел по орбитам относятся как кубы больших полуосей орбит. Значит, время t падения на Солнце (то есть половину периода обращения по вытянутой орбите с большой полуосью $R_\oplus/2$) можно определить из условия $(2t)^2/T_\oplus^2 = (R_\oplus/2)^3/R_\oplus^3$, где $T_\oplus$, $R_\oplus$ — период обращения и радиус орбиты Земли. Поскольку $T_\oplus$ — это 1 год, $t = 1/4\sqrt{2}$ года $\approx 0{,}177$ года.

Время прямого полета оказалось невелико, но начальная его скорость, увы, пока недостижима. Как же провести полет к Солнцу с наименьшими энергетическими затратами, с наименьшей стартовой скоростью? Наиболее экономичный полет использует гравитационное поле Юпитера для торможения станции на ее орбите вокруг Солнца. Но для того, чтобы осуществить этот маневр, к Юпитеру надо подлететь с определенной скоростью. А для этого, в свою очередь, необходимо, чтобы преодолев земное притяжение, станция вышла на орбиту, имея относительно Солнца начальную скорость $v_0 = 40{,}5$ км/с; следовательно, относительно Земли скорость станции в это время будет 10,5 км/с. Итак, полет начинается с разгона ракеты в ту же сторону, куда направлена скорость движения Земли по ее орбите. Какую стартовую скорость надо сообщить ракете?

Чтобы тело могло преодолеть земное притяжение, при старте ему нужно сообщить кинетическую энергию не меньше величины $gR_\oplus$. Эта кинетическая энергия соответствует второй космической скорости $v_{II} = \sqrt{2gR_\oplus} \approx 11{,}2$ км/с.*) Но будьте внимательны — не нужно прибавлять к 10,5 км/с вторую космическую скорость, чтобы получить стартовую! Из закона сохранения энергии получаем, что стартовая скорость с поверхности Земли в нашем случае равна $v_{ст.} = \sqrt{(v_0 - v_\oplus)^2 + 2gR_\oplus} \approx 15{,}5$ км/с.

Кстати, знаете ли вы, где на земной поверхности находится наилучшее (из энергетических соображений) место старта? Это вулкан Килиманджаро в Танзании, гора высотой 5,9 км почти на экваторе. С учетом сплюснутости Земли вершина вулкана — самая удаленная от центра точка земной поверхности (дальше Эвереста!). Там наименьшее на Земле ускорение свободного падения. Вершина вулкана, однако, всегда покрыта снегом, и строить там космодром пока не собираются.

Продолжим наш полет. Он проходит по участку эллиптической орбиты, пересекающей орбиту Марса и подходящей к орбите Юпитера (рис. 1). Промежуточная цель полета — Юпитер, самая большая из планет солнечной системы. Он должен затормозить станцию, погасить ее скорость относительно Солнца — тогда станция начнет падать на Солнце. Чтобы в момент подлета станции Юпитер находился в точке пересечения орбит, в момент старта он должен находиться в точке, отмеченной на рисунке 1 нулевым временем. Позаботимся еще, чтобы в момент пересечения орбиты Марса он оказался достаточно далеко от автоматической станции и не исказил ее траектории.

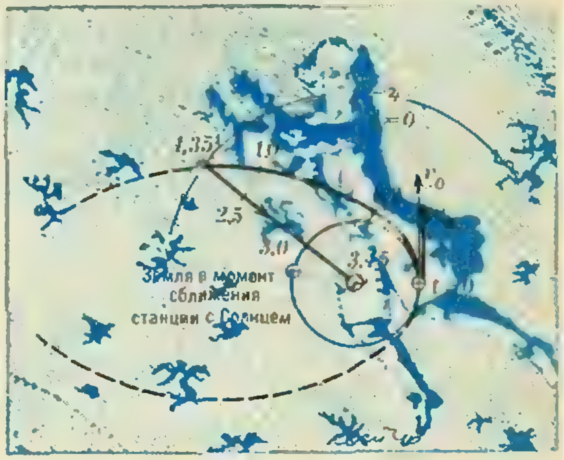


Рис. 1. Траектория полета к Солнцу с минимальной стартовой скоростью. Вдоль траектории — время полета в годах. В момент пересечения с орбитой Юпитера, через 1,35 года после старта, происходит сближение с Юпитером и торможение станции до нулевой относительно Солнца скорости. Далее космический корабль свободно падает к Солнцу.

---

*) В мартовском номере «Кванта» за этот год в разделе «Школа в «Кванте» была опубликована заметка «Вторая космическая скорость». Мы советуем читателям познакомиться с ней. *(Примеч. ред.)*

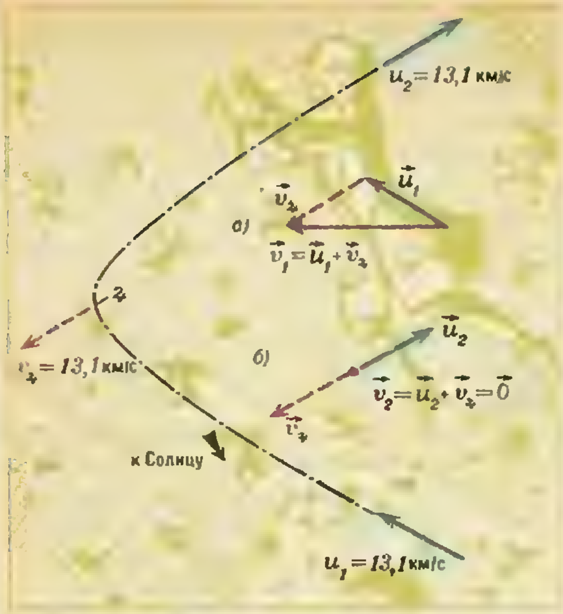


Рис. 2. Траектория корабля при сближении с Юпитером в системе отсчета, связанной с Юпитером. Справа приведена диаграмма скоростей: а) до сближения; б) после сближения.

Попав в поле тяжести Юпитера, станция будет двигаться по гиперболической траектории, огибающей эту планету (рис. 2). При этом вследствие закона сохранения энергии скорости приближения к Юпитеру и удаления от него в симметричных точках гиперболы будут по абсолютной величине одинаковы, но по направлению они могут заметно отличаться. Поэтому на траекторию облета Юпитера станция должна выйти со скоростью (относительно Юпитера) u_1, равной по абсолютной величине скорости самой планеты (относительно Солнца) $v_{♃} = 13{,}1$ км/с. Направление облета должно быть таким, чтобы при удалении от Юпитера в точке, симметричной точке начала облета, направление скорости станции $\vec{u}_2$ ($|\vec{u}_2| = |\vec{u}_1| = |\vec{u}_{♃}|$) было противоположно направлению скорости движения Юпитера по его орбите. Тогда в этой точке скорость станции относительно Солнца станет равной нулю — и под действием малого на таком большом расстоянии солнечного притяжения наш посланец начнет очень медленно приближаться к Солнцу. Эти условия выполняются в том случае, когда скорость станции относительно Солнца в начале облета Юпитера равна $v_1 = 14{,}3$ км/с (см. рис. 2). А это условие, в свою очередь, и определяет начальную скорость станции на орбите — 40,5 км/с.

Итак, в системе отсчета, связанной с Юпитером, траектория станции вблизи планеты — гипербола. А в системе отсчета, связанной с Солнцем, этот участок траектории выглядит так, как показано на рисунке 3.

Сколько времени будет продолжаться такой полет к Солнцу? Мы уже вычисляли время падения на Солнце по прямой. В данном случае, когда падение начинается с орбиты Юпитера, нужно вместо земного года взять период обращения по орбите Юпитера $T_{♃} = 11{,}86$ года (земного). В результате окажется, что падение займет время $T_{♃}/4\sqrt{2} \approx 2{,}1$ года. Прибавим к этому время полета по эллиптическому участку траектории (до «встречи» с Юпитером) — оно оказывается равным 1,35 года. Итого, весь полет к Солнцу займет почти 3,5 года.

При взгляде на траекторию полета возникает ощущение, что это как бы Юпитер направил космическую станцию к Солнцу. На самом деле, аппарат направляют, конечно, люди. Перед подлетом к Юпитеру нужно сделать коррекцию траектории — даже небольшая ошибка при выборе расстояния пролета около Юпитера или скорости сближения с ним может испортить всю программу исследований

(Окончание см. на с. 24)

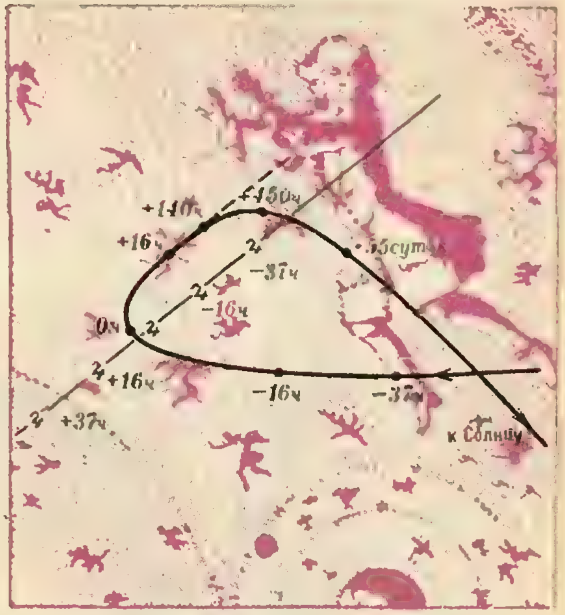
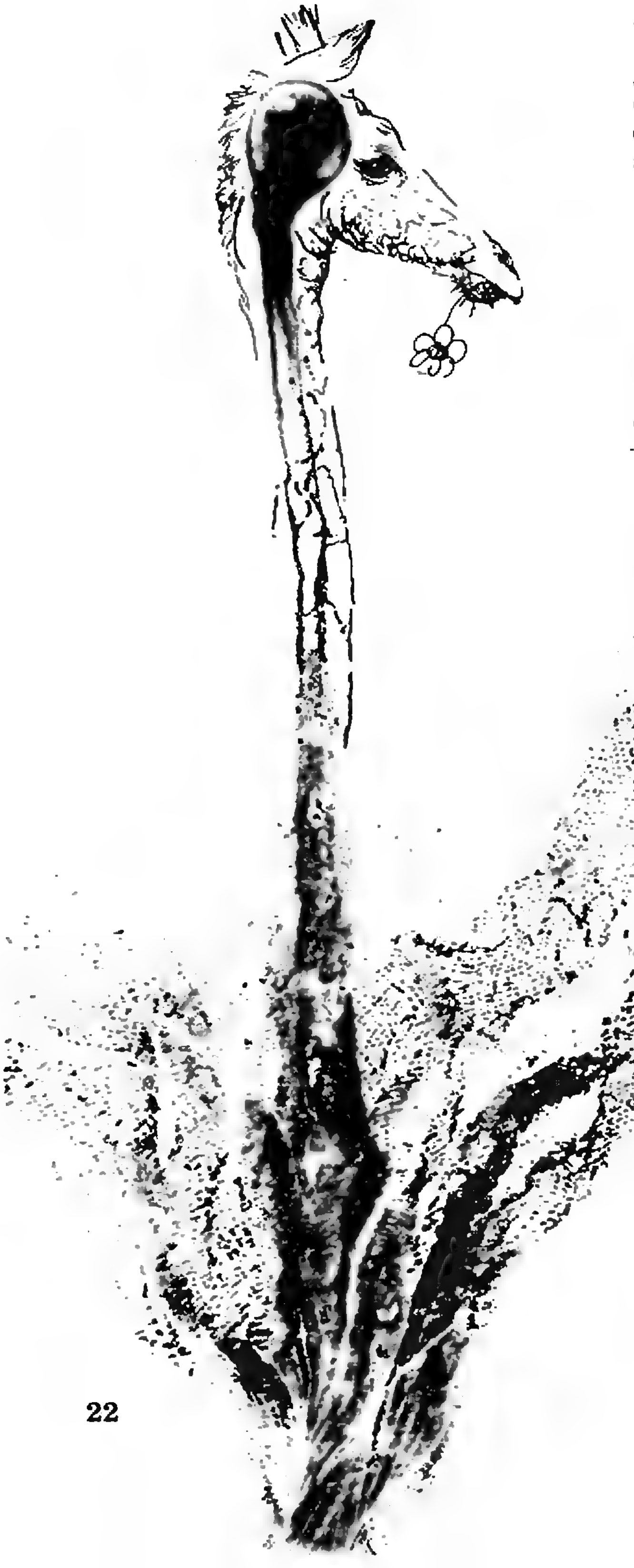


Рис. 3. Траектория корабля при сближении с Юпитером в системе отсчета, связанной с Солнцем. Вдоль кривых проставлено время относительно момента наибольшего сближения.

Капилляры и смачивание

Доктор физико-математических наук
А. А. БОРОВОЙ



Вы решили уехать загород. Собрали вещи, смотрите, не забыто ли что. И вот... на окне горшки с цветами. Захватить их с собой невозможно, и нет никого, кто мог бы поливать цветы в ваше отсутствие. Что же предпринять? Наполнить водой поддоны цветочных горшков? Такой способ поливки годится не для всех растений — многие из них не терпят переизбытка влаги. А главное, он рассчитан на небольшой срок — несколько дней, неделю.

Вопрос этот не новый. Цветоводы давно придумали самые разные конструкции «автопоилок», которые действуют надежно и долго и даже дозируют воду для поливки цветов.

Простейшую автопоилку (рис. 1) можно легко сделать самим. Воду наливают во вместительный сосуд, накрытый крышкой. В этот сосуд опускают один конец туго свернутого жгута из марли, другой его конец закапывают в землю. Вода поступает к растению по жгуту, причем скорость ее поступления можно отрегулировать, изменяя толщину жгута, его наклон и т. п. Жгут следует поместить внутрь резиновой трубки, тогда вода будет меньше проливаться и испаряться по дороге к цветку.

И в жгуте, и в земле, наполняющей горшок, и частично в самих растениях вода движется и удерживается за счет явления, которое называют капиллярностью.

Капилляр — это тонкая трубка, обычно ее внутренний диаметр меньше одного миллиметра. Если капилляр, сделанный из чистого стекла, опустить в сосуд с водой, то уровень жидкости в нем будет выше, чем в сосуде (рис. 2). Чем тоньше трубка, тем больше эта разница. Происходит это вследствие смачивания водой чистого стекла. В широком стеклянном сосуде поверхность воды лишь изгибается у самых стенок.

В почве капилляры образуются между ее частичками. Благодаря им влага может подниматься на значительную высоту: до 2 метров в песке, а в чистой глине — значительно выше. Процесс идет медленно и длится иногда несколько недель и даже месяцев. (Попробуйте самостоятельно придумать и провести эксперименты, в которых можно было бы наблюдать подъем воды в капиллярах почвы.)

Если внутренняя поверхность трубки не смачивается жидкостью, то в капилляре уровень ее ниже, чем в широком сосуде (рис. 3). Изменится и форма поверхности жидкости у стенок сосуда.

Интересно, что смачивание (или несмачивание) определяет, как поведет себя капля жидкости на поверхности другой жидкости. Например, капля подсолнечного масла или керосина растекается по воде тончайшим слоем, вплоть до мономолекулярного (то есть толщиной всего в одну молекулу)! Такое поведение смачивающих жидкостей позволило английскому физику лорду Рэлею оценить размер одной молекулы.

На большую поверхность воды он помещал капельку оливкового масла и сначала убеждался в том, что масляное пятно покрывает поверхность равномерным слоем, без масляных «бляшек» и «окошек» воды. Для этого Рэлей использовал маленькие кусочки камфары. Если такой кусочек попадает на поверхность воды, он начинает «метаться». Дело в том, что в воде камфара растворяется и при этом поверхностное натяжение воды уменьшается. Но растворение происходит неравномерно: с одной стороны частички быстрее, с другой — медленнее, и на кусочек камфары начинает действовать разность сил поверхностного натяжения, вызывающая его движение. Вы легко можете наблюдать это явление, только для того чтобы опыт прошел удачно, надо не касаться воды и кусочков камфары руками (лучше всего их соскабливать ножом прямо над поверхностью воды). А вот в масле камфара не растворяется и ведет себя спокойно.

Итак, убедившись в однородности масляной пленки, ученый определял радиус пятна R и находил его толщину l:

$$l = \frac{V}{\pi R^2},$$

где V — объем капли масла. Если предположить, что капля растеклась в мономолекулярный слой, то толщина пятна — это характерный размер молекулы масла. Получилась величина, близкая к 10^{-9} м.

Смачивание очень часто приходит нам на помощь: мы смазываем трущиеся части машин, жидкая смазка обволакивает поверхность металла и удерживается на ней; расплавленное олово смачивает чистую медь, латунь, алюминий при пайке; клей растекается по поверхности склеиваемых материалов.

Практически во всех старинных осветительных приборах, начиная от древних светильников, в которых фитилек был погружен в нефть, растительное масло или жир, и кончая керосиновыми лампами, тоже использовалось явление смачивания: горючее вещество поднималось по капиллярам фитиля и постепенно сгорало.

Наблюдение такого необычного поведения жидкости, когда она движется против сил тяжести, вдохновляло многих изобретателей на создание Perpetuum mobile — вечного двигателя, который использовал бы свойства капилляров. Проекты были весьма разнообразными и появлялись не только в древности или в средние века, но даже и в начале XX века. Чаще всего идея заключалась в следующем: по фитилю жидкость (обычно вода) должна была подниматься из нижнего сосуда в верхний, а там уже по трубке или лотку стекать вниз, приводя в

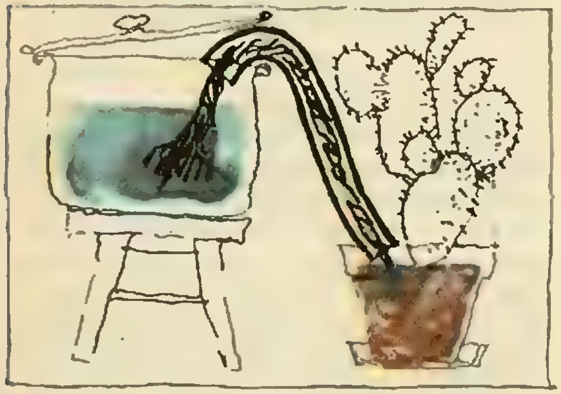


Рис. 1.

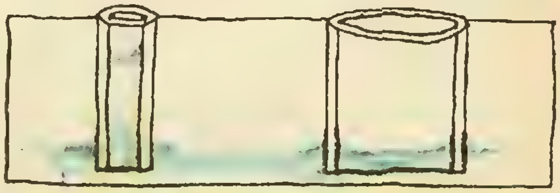


Рис. 2.

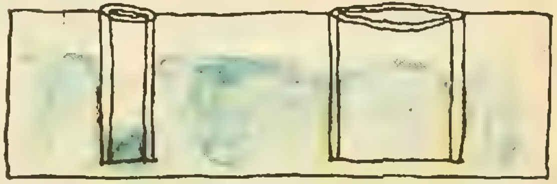


Рис. 3.

движение водяную мельницу (рис. 4). Вопрос о том, почему фитиль, сумевший поднять воду на какую-то высоту, вдруг потеряет свойство впитывать и удерживать жидкость и беспрепятственно отдаст ее в верхнем сосуде, изобретателей как-то не тревожил. Само устройство не только не работало вечно, но и вообще не работало.

Совершенно особую роль играет смачивание в условиях невесомости. Вот что рассказывал летчик-космонавт А. А. Серебров*:)

«Представьте задачу: налить жидкость в сосуд без потерь. На космическом корабле вода подается из крана порциями по 25 см^3. Предоставленные сами себе, эти порции собираются в шаровидные капли, как и положено в невесомости; эти капли в результате разных случайных воздействий потом дробятся на меньшие...

Если действовать как на Земле и наливать воду из крана в горлышко сосуда, то она станет выталкивать из сосуда воздух, в котором взвешены капли разного размера, — иными словами, будет сама же себя выталкивать.

Если же струю с малой скоростью направить сразу на стенку сосуда, то вода, смачивая стенку, прилипает к ней. Тогда взвешенных капель не будет — по крайней мере, до тех пор, пока сосуд не встряхивают. Таким способом можно без потерь налить жидкость в сосуд.

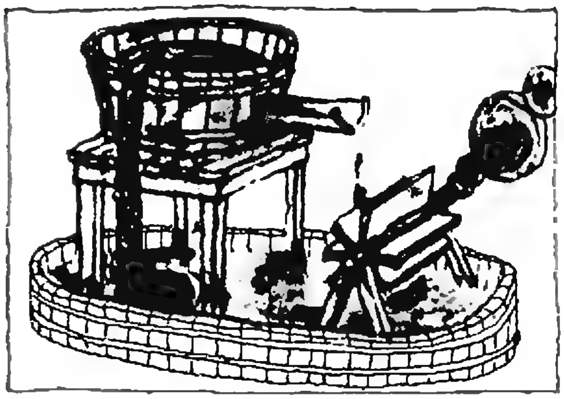


Рис. 4.

И тут же возникает второй вопрос: а как можно взять жидкость из сосуда? Ведь из-за невесомости жидкость «плавает» в сосуде в виде шаровых капель разного размера.

Конечно, если есть центрифуга, то задача решается просто: при вращении сосуда жидкость будет «прижиматься» к дальней от оси стенке, а оттуда ее можно забирать с помощью шприца. Если центрифуги нет, можно прижать жидкость к стенке, двигая сосуд с небольшим линейным ускорением. Именно так обычно и делают.

Я предложил другой способ: поместить внутрь сосуда длинный и узкий предмет, например черенок ложки, к которому капли прилипают. За счет поверхностного натяжения жидкость «расползается» по черенку и подходит к краю горловины сосуда. Слегка «помешивая» черенком, легко добиться того, чтобы жидкость постоянно находилась на черенке вблизи выходного отверстия сосуда. Задача, стало быть, решена.»

---

*) Здесь приведен отрывок из интервью А. А. Сереброва журналу «Квант» (см. апрельский номер за 1983 год).

Полет к Солнцу

(Начало см. на с. 18)

Солнца. Еще одна коррекция, уже после облета Юпитера, позволит устранить последние погрешности и точно задаст расстояние, на котором автоматическая станция пройдет около Солнца.

Одна из ключевых идей этого способа — изменение скорости космической станции при сближении с промежуточной планетой — уже использовалась в практике космических полетов. Последний тому пример — сближение с Венерой космических аппаратов «Вега», которые после этого направились к комете Галлея.

* * *

Нам нужно понимать физические явления, происходящие на Солнце. Все следствия этих знаний предсказать невозможно. Вспомним для сравнения эпоху великих географических открытий, когда человечество знакомилось со своей планетой. Не исключено, что наше время в будущем назовут эпохой великих космических открытий. Первый полет к Солнцу станет, несомненно, одним из ее украшений.

Математика 10

Эта заметка предназначена десятиклассникам. В ней излагаются некоторые весьма полезные факты, связанные с числом e.

Производная логарифма

В учебном пособии «Алгебра и начала анализа 9—10» на с. 208 выводится формула для производной логарифмической функции. Эта формула получается там с помощью теоремы о производной обратной функции и формулы для производной показательной функции. В этой заметке мы получим формулу для производной логарифмической функции непосредственно из определения производной — нахождением соответствующего предела.

Но вначале определим

Число e.

Рассмотрим *криволинейную трапецию*, ограниченную графиком функции $y=\frac{1}{x}$, отрезком $[1;\,t]$ оси Ox и прямыми $x=1$, $x=t$ (рис. 1). Площадь этой криволинейной трапеции есть функция от t — обозначим ее через $S(t)$. Эта функция на промежутке $[1;\,\infty[$ возрастает и непрерывна.

Доказательство непрерывности функции $S(t)$ неявно содержится в п. 59 учебного пособия «Алгебра и начала анализа 9—10»: там показывается, что функция $S(t)$ дифференцируема; *всякая же дифференцируемая функция является непрерывной.* Впрочем, непрерывность $S(t)$ можно вывести прямо из определения непрерывной функции. Попробуйте это сделать.

Поскольку $S(2)<1$ (рис. 2), а $S(4)>1$ (рис. 3; $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1$), *то между числами 2 и 4 существует единственное число — его обозначают буквой e, такое, что $S(e)=1$.*

На с. 200 учебного пособия «Алгебра и начала анализа 9—10» число e определяется по-другому. Можно доказать, что эти два определения эквивалентны.

Так как $e>0$ и отлично от 1, могут быть определены логарифмы по основанию e. Эти логарифмы называются *натуральными* и обозначаются ln, то есть $\ln a=\log_e a$. Так как $e>1$, функция $y=\ln x$ на промежутке $]0;\,\infty[$ возрастает.

Два важных неравенства

Докажем теперь, что *для любого натурального числа n выполнено неравенство*

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \qquad (1)$$

Из неравенства (1) непосредственно следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

(именно так определяется число e в вузовских курсах математического анализа).

Действительно, возьмем любое число $\varepsilon>0$ и положим $N=\left[\frac{e}{\varepsilon}\right]$. Тогда для любого натурального $n>N$ выполнено неравенство $n>\frac{e}{\varepsilon}$ и

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right|=e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-$$
$$-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}-1\right)<\frac{e}{n}<\varepsilon.$$

Зафиксируем любое натуральное число n, положим $q=1+\frac{1}{n}$ и рас-

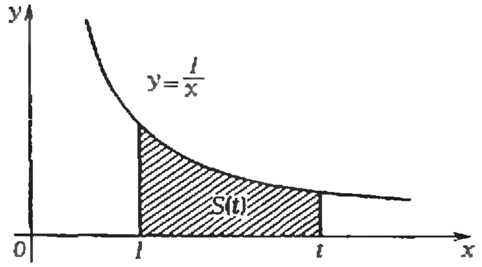


Рис. 1.

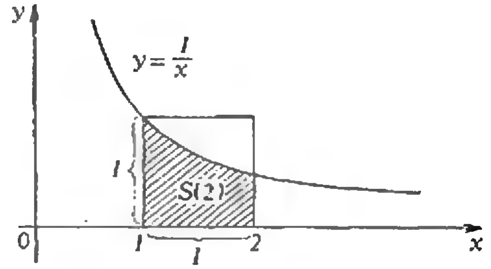


Рис. 2.

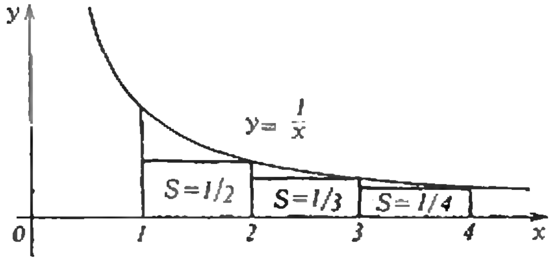


Рис. 3.

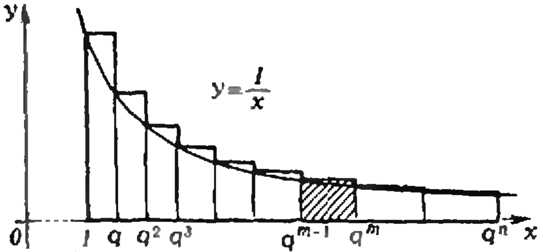


Рис. 4.

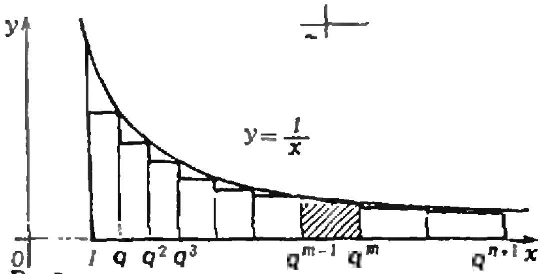


Рис. 5.

смотрим ступенчатый многоугольник с основанием $[1;\ q^n]$, содержащий рассматриваемую криволинейную трапецию с тем же основанием (многоугольник с красной границей на рисунке 4). Этот многоугольник состоит из n прямоугольников (один из них заштрихован) одинаковой площади: площадь каждого из них равна

$$\frac{1}{q^{m-1}}(q^m-q^{m-1})=q-1=\frac{1}{n}.$$

Таким образом, площадь красного ступенчатого многоугольника равна 1, так что $S(q^n)<1$, откуда $q^n<e$ — левая часть неравенства (1) доказана.

Теперь рассмотрим ступенчатый многоугольник с основанием $[1;\ q^{n+1}]$, находящийся внутри нашей криволинейной трапеции с основанием $[1;\ q^{n+1}]$ (многоугольник с синей границей на рисунке 5). Мы видим, что он состоит из $n+1$ прямоугольников, площадь каждого из которых равна $\frac{1}{n+1}$, так что площадь синего ступенчатого многоугольника также равна 1. Поскольку он находится внутри трапеции, получим $S(q^{n+1})>1$; поэтому $e<q^{n+1}$, и правая часть неравенства (1) также доказана.

Из неравенства (1) логарифмированием по основанию $e>1$ получается неравенство, которое в дальнейшем и будет для нас основным:

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}. \qquad (2)$$

Замечательный предел

Докажем, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

Чтобы доказать это соотношение, нужно по определению предела для любого числа $\varepsilon>0$ подобрать такое число δ, чтобы из неравенства $0<|x|<\delta$ следовало бы неравенство

$$\left|\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right|<\varepsilon. \qquad (3)$$

Подбор числа δ проведем так. Если число x удовлетворяет неравенству $0<|x|<0{,}5$, возьмем натуральное число $n=[1/|x|]\geqslant 2$.

При $x>0$ будет $\frac{1}{n+1}<x<\frac{1}{n}$ и потому (в силу неравенства (2))

$$\frac{\ln(1+x)}{x}>n\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)>\frac{n}{n+2}=1-\frac{2}{n+2},$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x}<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}.$$

При $x<0$ будет $-\frac{1}{n}\leqslant x<-\frac{1}{n+1}$ и потому (в силу неравенства (2))

$$\frac{\ln(1+x)}{x}>-n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=$$

$$=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x}<-(n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=$$

$$=(n+1)\ln\frac{n}{n-1}=(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)<$$

$$<\frac{n+1}{n-1}=1+\frac{2}{n-1}.$$

Таким образом, для любого x, удовлетворяющего неравенству $0<|x|<0{,}5$, выполнено неравенство

$$\left|\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right|<\frac{2}{n-1}.$$

Значит, если n таково, что $\frac{2}{n-1}<\varepsilon$, то для соответствующих x будет выполнено неравенство (3). Но тогда

$$\frac{2}{n-1}<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon}<n-1 \Leftrightarrow n+1>\frac{2}{\varepsilon}+2=$$

$$=\frac{2+2\varepsilon}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}<\frac{\varepsilon}{2+2\varepsilon}.$$

И если мы возьмем $\delta=\frac{\varepsilon}{2+2\varepsilon}$, то для любого x, удовлетворяющего неравенству $0<|x|<\delta$, имеем: $0<|x|<\frac{\varepsilon}{2+2\varepsilon}<\frac{\varepsilon}{2\varepsilon}=0{,}5$ и

$$\frac{1}{n+1}<|x|<\delta=\frac{\varepsilon}{2+2\varepsilon}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow n+1>\frac{2}{\varepsilon}+2\Rightarrow n-1>\frac{2}{\varepsilon}\Rightarrow\frac{2}{n-1}<\varepsilon,$$

и поэтому выполнено неравенство (3).

Производная логарифма

По определению производной

$$\ln' x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x},$$

(см. замечательный предел).

Итак, $\ln' x=\frac{1}{x}$. *О. С. Ивашев-Мусатов*

Квант для младших школьников

Задачи

1. Веселый турист пешком отправился на слет. В первый день пути он прошел 1/3 пути, во второй день он прошел 1/3 остатка, в третий день турист прошел 1/3 нового остатка. В результате туристу осталось пройти 32 км. Сколько километров от дома туриста до места слета?

2. В № 6 журнала «Квант» в «Задачнике «Кванта» будут опубликованы задачи по математике с номерами от М986 до М990. У первой из них номер совпадает с последними тремя цифрами года выхода журнала. А в каком номере журнала номер задачи по математике совпадает полностью с номером года? (Предполагается, что в каждом номере по-прежнему будет печататься по пять задач по математике и что журнал будет выходить ежемесячно.)

3. Пожарив на сковороде яичницу, я взялся за ручку, чтобы поставить сковороду на стол, но она была очень горячая. Я обернул ручку тряпочкой; но все равно было горячо. Тогда я намочил тряпочку водой. Что я почувствую на этот раз?

4. Пакет для молока склеивается из цилиндрического бумажного кольца (см. рисунок). Получается треугольная пирамида. Для удобства транспортировки грани пирамиды являются равнобедренными, но не равносторонними треугольниками. Предположим, что из бумаги склеен пакет, у которого все грани — правильные треугольники. Как его теперь разрезать в цилиндрическое кольцо, высота которого равна половине длины ребра пирамиды?

5. Расшифруйте числовые ребусы, написанные на рисунке.

Эти задачи нам предложили *А. П. Савин*, ученик 9 класса шк. № 2 г. Гайворона *Валерий Журавлев, С. С. Кротов, В. В. Произволов, И. Б. Алексеев-Астафьев.*

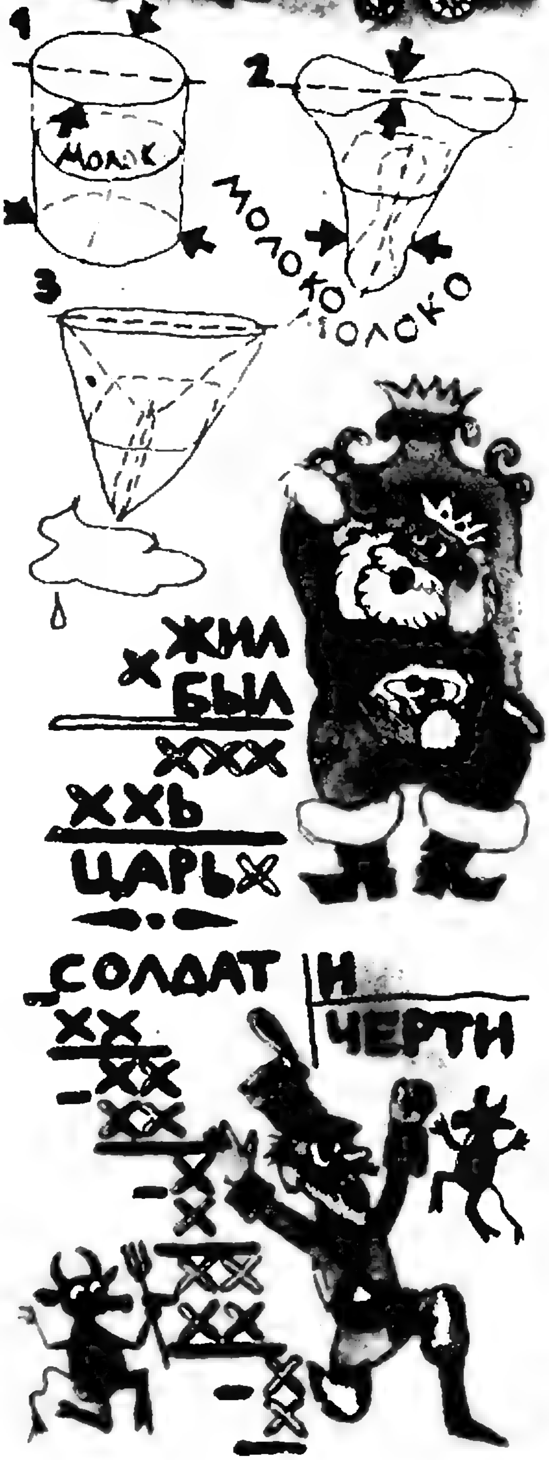


Рисунок помогает рассуждать

Кандидат физико-математических наук
А. П. САВИН

Однажды соседи попросили меня помочь переставить мебель в их квартире. Молодая хозяйка начала бодро руководить «бригадой такелажников», состоящей из ее мужа, отца и меня.

«Давайте поставим сервант к этой стенке, а рядом с ним — телевизор»,— скомандовала Наташа. Мы дружно навалились на сервант — из него со звоном посыпалась посуда. После многочисленных «Раз-два, взяли», «Давай-давай» — сервант утвердился на указанном месте. Однако тумбочка с телевизором никак не входила в предназначенное для нее пространство. Мы отодвинули сервант в сторону, чтобы поставить тумбочку с телевизором, но в результате сервант загородил проход в дверь.

Три часа мы перетаскивали мебель из комнаты в комнату. При этом возникали ситуации, когда, например, для того чтобы поставить в кабинет пианино, нужно было вытащить оттуда журнальный столик и все кресла, отправить их на кухню и вернуть обратно только после установки пианино. Радостная готовность «сдвинуть горы» сменилась крайней усталостью. Главным персонажем наших шуток стал Сизиф[*]). В некоторый момент вещи вдруг заняли свои первоначальные положения, и все мужчины дружно воскликнули: «Вот так лучше всего!»

Эта история послужила мне уроком. И когда родители решили купить еще один книжный шкаф (что означало перестановку мебели в квартире), я начертил на бумаге план квартиры, вырезал прямоугольнички, соответствующие по размерам имеющейся мебели и новому шкафу, и начал экспериментировать. Изучив новую расстановку мебели, я установил последовательность перестановки:

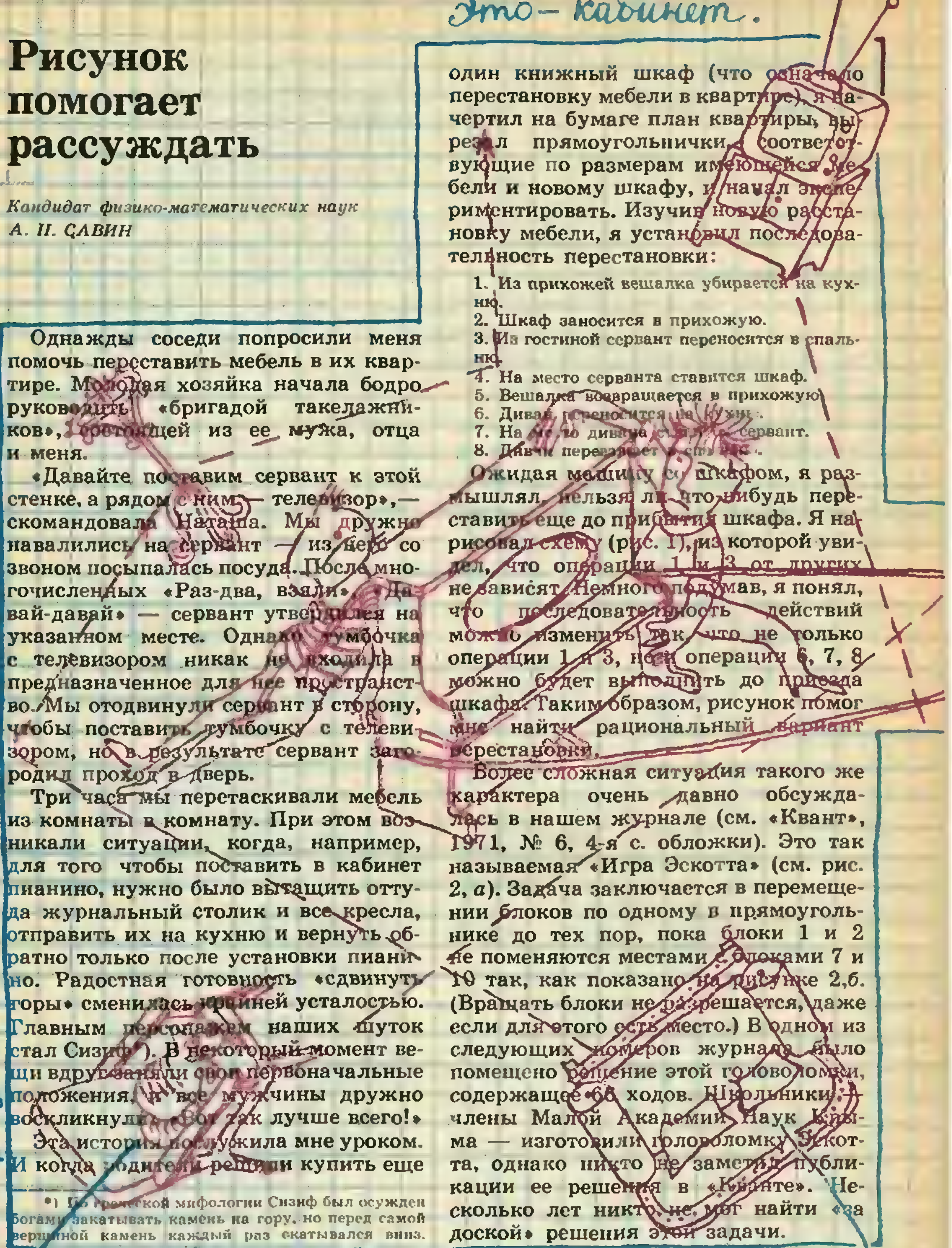
1. Из прихожей вешалка убирается на кухню.
2. Шкаф заносится в прихожую.
3. Из гостиной сервант переносится в спальню.
4. На место серванта ставится шкаф.
5. Вешалка возвращается в прихожую.
6. Диван переносится на кухню.
7. На место дивана ставится сервант.
8. Диван переезжает в спальню.

Ожидая машину со шкафом, я размышлял, нельзя ли что-нибудь переставить еще до прибытия шкафа. Я нарисовал схему (рис. 1), из которой увидел, что операции 1 и 3 от других не зависят. Немного подумав, я понял, что последовательность действий можно изменить так, что не только операции 1 и 3, но и операции 6, 7, 8 можно будет выполнить до приезда шкафа. Таким образом, рисунок помог мне найти рациональный вариант перестановки.

Более сложная ситуация такого же характера очень давно обсуждалась в нашем журнале (см. «Квант», 1971, № 6, 4-я с. обложки). Это так называемая «Игра Эскотта» (см. рис. 2, *а*). Задача заключается в перемещении блоков по одному в прямоугольнике до тех пор, пока блоки 1 и 2 не поменяются местами с блоками 7 и 10 так, как показано на рисунке 2,*б*. (Вращать блоки не разрешается, даже если для этого есть место.) В одном из следующих номеров журнала было помещено решение этой головоломки, содержащее 66 ходов. Школьники — члены Малой Академии Наук Крыма — изготовили головоломку Эскотта, однако никто не заметил публикации ее решения в «Кванте». Несколько лет никто не мог найти «за доской» решения этой задачи.

---

[*]) По греческой мифологии Сизиф был осужден богами закатывать камень на гору, но перед самой вершиной камень каждый раз скатывался вниз.


Это — кабинет.
Это — бригада „такелажников": муж соседки, отец соседки и я.
Это — кошка, которая никак не хотела уходить с кресла.
Это — диван, который не раскладывается.

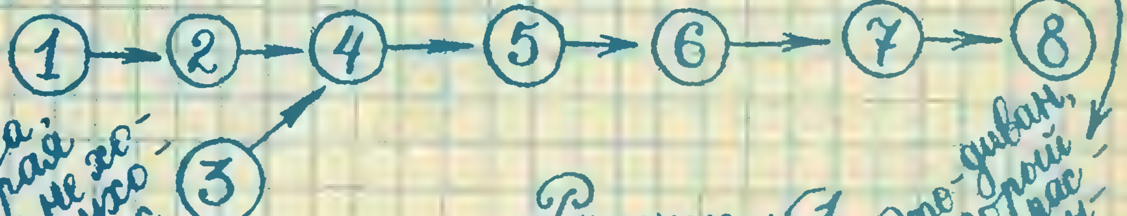
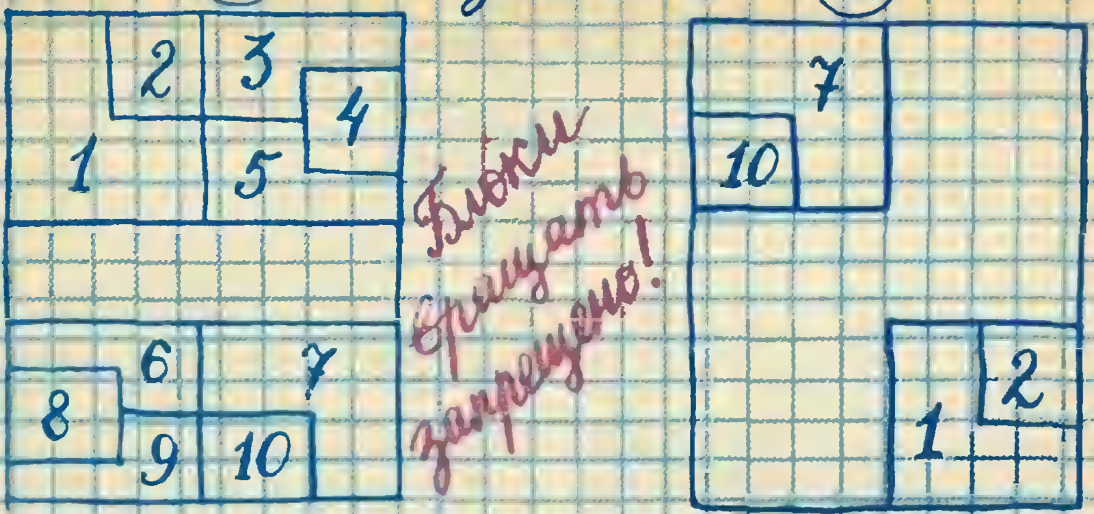


Рисунок №1.



Это - коридор. А кухня -

Хотя «Игра Эскотта» и называется игрой, мы все же привыкли к играм, в которых участвуют по крайней мере два человека. Каждый из вас, конечно же, играл в «крестики-нолики» — когда в квадрат 3×3 двое игроков поочередно пишут один игрок — знак ×, а другой — знак 0. Выигрывает тот, после хода которого образуется *три его знака, идущие* подряд.

Я думаю, вы настолько хорошо знакомы с этой игрой, что можете сыграть вничью с любым противником, играя как «крестиками», так и «ноликами» (то есть, начиная игру или играя вторым). Поэтому рассмотрим немного другой вариант «крестиков-ноликов».

Пусть каждый из двух игроков может при любом своем ходе ставить как «крестик», так и «нолик» (конечно же, только один значок). Кто выигрывает в этом случае?

Поиграйте с приятелями в эту игру. Она доставит вам удовольствие. Здесь при правильной игре выигрывает начинающий. Как? Сначала он ставит какой-нибудь значок в центр (скажем, «крестик»). Затем... Взгляните на рисунок 3 и вы увидите, как должен иг-

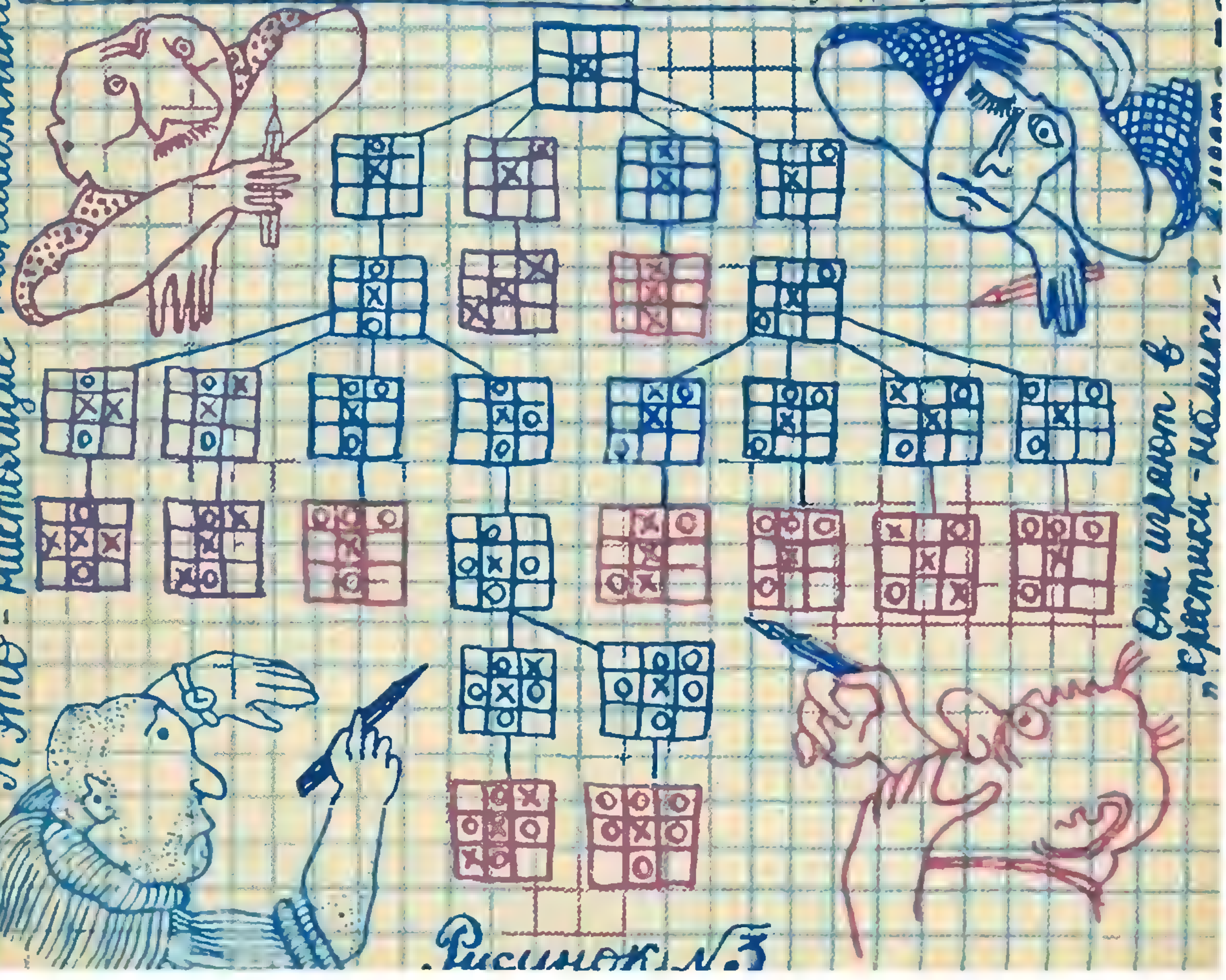
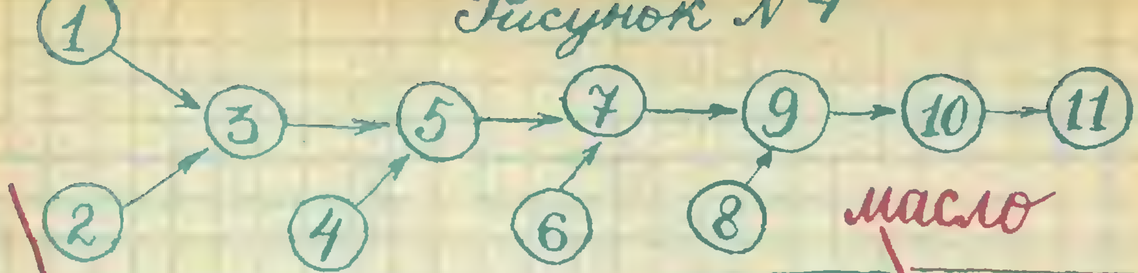


Рисунок № 3

А это - настоящие такелажники.

Эти играют в „крестики-нолики"

Рисунок № 4



рать первый игрок, чтобы выиграть при любых ответах второго. (Мы немного сократили рисунок, убрав позиции, которые отличаются от приведенных на рисунке поворотом доски или симметрией.) Теперь вы можете выиграть у любого противника, если ходите первым. Математики говорят, что задан *алгоритм решения*.

Алгоритмы окружают нас повсюду. Раскроем поваренную книгу. Здесь каждый рецепт есть перечисление последовательности действий (алгоритм), которые нужно совершить, чтобы приготовить то или иное блюдо.

Вот, например, рецепт картофельного пирожного.

1. Картофель испечь (а не отварить), чтобы пюре было совершенно сухое.
2. Растопить сливочное масло.
3. Тщательно растереть с горячим сливочным маслом картофельное пюре.
4. Взбить 4 яйца.
5. Добавлять их по одному в пюре, не переставая растирать.
6. Отдельно растереть 4 желтка с сахаром добела.
7. Соединить их с картофельной массой.
8. Оставшиеся белки взбить в твердую пену.
9. Соединить их с картофельно-яичной смесью, стараясь взбить пышнее.
10. Добавить пекарский порошок*).
11. Запечь на огнеупорном блюде в духовке.

На 10 крупных картофелин 300 г сливочного масла, 8 яиц, 3 столовых ложки сахара, 0,5 чайной ложки пекарского порошка.

Рисунок этого рецепта удобно изобразить в виде схемы (см. рис. 4). Здесь отчетливо видно, что операции 2, 4, 6 и 8 могут быть выполнены независимо от других. Можно сэкономить время приготовления этого блюда, если выполнить эти операции, пока печется картофель.

Подобные рисунки последовательности проведения отдельных операций получили широкое распространение во многих областях жизни, особенно в строительстве. Там они называются *сетевыми графиками*. Использование сетевых графиков позволяет сокращать время строительства, указывать точное время проведения каждой строительной операции, проводить расчеты потребности в машинах, людях, материалах.

Расчеты сейчас выполняют электронно-вычислительные машины (ЭВМ) по заранее намеченной программе — алгоритму; эти действия и здесь удобно изображать графически в виде кружочков и стрелочек. Такие рисунки называются *«блок-схемами»*.

Рассмотрим последовательность действий при решении квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

1. Вычислим $A=b^2$.
2. Вычислим $B=ac$.
3. Вычислим $C=4B$.
4. Вычислим $D=A-C$.
5. Вычислим $E=\sqrt{D}$.
6. Вычислим $F=-b+E$.
7. Вычислим $G=-b-E$.
8. Вычислим $H=2a$.
9. Вычислим $x_1=F/H$.
10. Вычислим $x_2=G/H$.
11. Печатаем x_1, x_2.

Блок-схема этого алгоритма представлена на рисунке 5.

На большинстве современных ЭВМ операции проводятся последовательно: 1-я, 2-я и т. д. Но уже есть ЭВМ, которые могут одновременно совершать несколько операций. И таким образом ускорять работу.

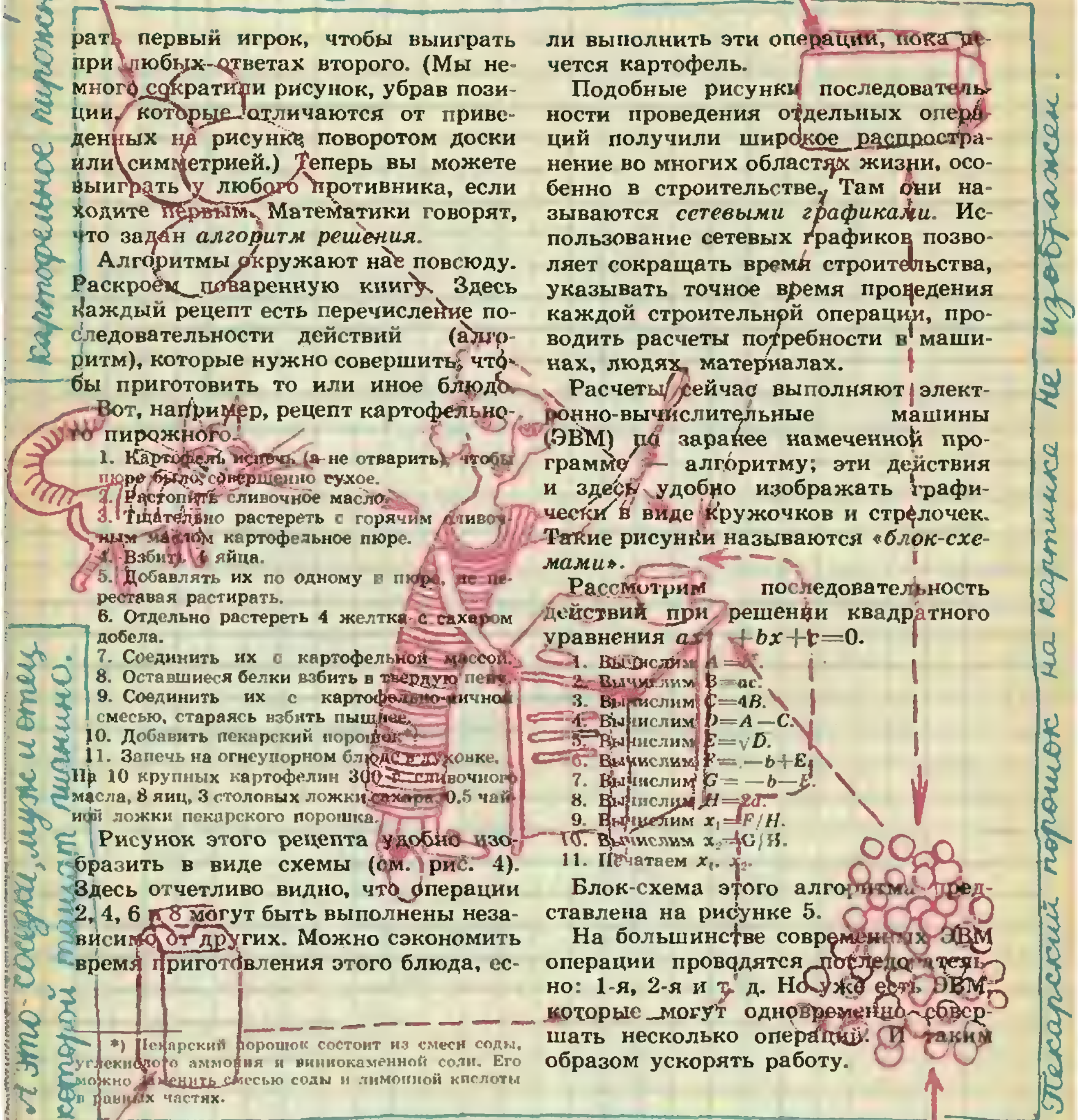
---

*) Пекарский порошок состоит из смеси соды, углекислого аммония и виннокаменной соли. Его можно заменить смесью соды и лимонной кислоты в равных частях.

картофельное пирожное.

Пекарский порошок на картинке не изображен.

А это соседки, муж и отец, который тащит пианино.



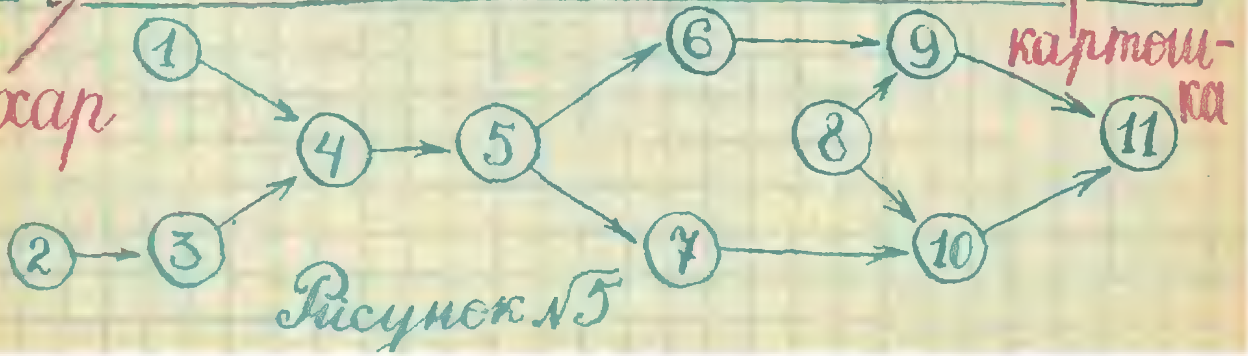


Рисунок №5

задачник кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 июня 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4 — 86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М976, М977 или «Ф988». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию и имя пишите печатными буквами.

Задачи

М976—М980; Ф988—Ф992

М976. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведены два луча, образующие между собой угол 45°. Один пересекает сторону BC в точке E, диагональ BD — в точке P, другой — сторону CD в точке F, диагональ BD — в точке O. Докажите, что площадь треугольника AEF вдвое больше площади треугольника APO.

Э. Г. Готман

М977. Можно ли с помощью операций сложения, вычитания и умножения из многочленов $f(x)$ и $g(x)$ получить x, если а) $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^2+2$; б) $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^2-2$; в) $f(x)=2x^2+x$, $g(x)=2x$; г) $f(x)=2x^2+x$, $g(x)=x^2$.

С. И. Кублановский

М978. Можно ли в квадрате со стороной 1 расположить два правильных треугольника со сторонами больше $\sqrt{2/3}$, не налегающих друг на друга?

Е. А. Карлов, И. К. Димитров
(Болгария)

М979. Пусть k и n — натуральные числа, $k\leqslant n$. Назовем набор k положительных чисел $a_1,a_2,\ldots,a_k$ меньших 1 *исключительным*, если для любого разбиения $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$ числа n на неотрицательные целые слагаемые хотя бы одно из чисел a_in_i — целое ($i=1,2,\ldots,n$).

а) Для каких k и n существуют исключительные наборы?

б) Каковы эти наборы?

Е. А. Горин

М980. Внутри выпуклого а) многоугольника, б) многогранника с вершинами $A_1,A_2,\ldots,A_n$ взята точка O. Докажите, что среди $n(n-1)/2$ углов A_iOA_k ($i, k=1,2, \ldots, n$) не менее, чем $n-1$ имеют величину от 90° до 180°.

В. Г. Болтянский

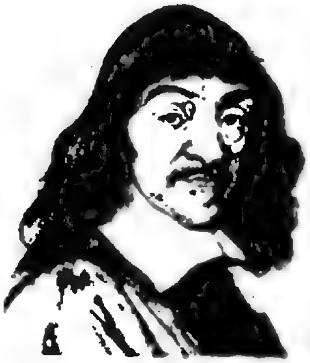
Ф988. Хоккеист скользит по льду на одном коньке. Известно, что лед тает под коньком на глубину $h=0{,}03$ мм. Ширина конька $d=2$ мм. Найти силу трения между коньком и льдом. Удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}3\cdot10^5$ Дж/кг, плотность льда $\rho=0{,}9$ г/см³. Считать теплопроводность льда малой.

М. Г. Гаврилов

(Окончание см. на с. 34)

Видя, что все математические науки — хотя предметы их и различны — согласуются между собой в том, что рассматривают не что иное, как разные отношения и пропорции, я думал, что наилучше будет, если я стану рассматривать только эти отношения вообще..., чтобы потом приложить их ко всем другим предметам, к которым они подойдут.

Рене Декарт



Французский математик и естествоиспытатель Рене Декарт (1596—1650) — один из основоположников европейской науки и философии нового времени. Декарту принадлежит честь создания аналитической геометрии, он — один из творцов современной алгебры, механики, оптики. Декарт первым в новое время поставил космогоническую проблему.

В лице Декарта органически соединился гений великого ученого и глубокого философа. Будучи создателем рационалистического метода в науке, Рене Декарт подчеркивал, что «подлинную науку можно найти в себе самом или в великой книге мира».

О круге

В древней Греции круг и окружность считались венцом совершенства. Действительно, в каждой своей точке окружность «устроена» одинаковым образом, что позволяет ей двигаться «по себе». На плоскости этим свойством обладает еще лишь прямая. Одно из интереснейших свойств круга состоит в том, что круг при заданном периметре ограничивает максимальную площадь.

В русском языке слово «круглый» также означает высокую степень чего-либо: «круглый отличник», «круглый сирота» и даже «круглый дурак».

С кругом связана и классическая задача, ставшая символом неразрешимой проблемы. Это — задача *квадратуры круга*, то есть *построения с помощью циркуля и линейки квадрата, равновеликого данному кругу*. Задачу эту не могли решить на протяжении более двух тысячелетий. Лишь в XIX веке усилиями нескольких выдающихся математиков — Ламберта, Лиувилля, Эрмита и Вейерштрасса — была установлена невозможность построения при помощи циркуля и линейки квадрата, равновеликого данному кругу, и выяснена природа числа π.

Циркуль и линейка — это классические инструменты геометров с древнейших времен до наших дней. Ими можно проводить лишь прямые и окружности. Однако сколько интересных задач связано именно с циркулем и линейкой! В каждой из них выявляется то или иное свойство круга по отношению к другим кругам, прямым и многоугольникам.

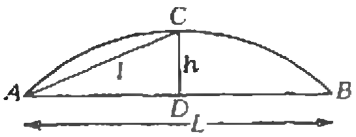
Приведем три теоремы, доказанные в разное время, но очень похожие по формулировке.

Первая теорема носит название *«поризм Штейнера»* в честь швейцарского геометра Якоба Штейнера (1796—1863) (поризмами называют утверждения, промежуточные между задачами на построение и теоремами):

Пусть на плоскости даны две непересекающиеся окружности. Построим еще одну окружность так, чтобы она касалась двух данных. Назовем ее первой. Затем нарисуем еще одну окружность, касающуюся двух данных и первой окружности. Ее назо-

Полезные формулы

Не очень трудно найти длину дуги сегмента и его площадь, если известен радиус окружности и угол, стягиваемый дугой сегмента. Но как быть, если эти величины неизвестны, а из инструментов у нас лишь одна линейка? В этом случае удобно использовать следующие приближенные формулы:



$$p \approx \frac{8l-L}{3}, \quad S \approx \frac{2}{3}hL.$$

Здесь p — длина дуги сегмента, S — его площадь, L — длина хорды, h — высота сегмента, l — длина отрезка AC (см. рисунок). (При углах, стягиваемых дугой сегмента, меньших 60°, эти формулы дают ошибку, не превышающую 1,5 %.)

вем второй. Третья окружность будет касаться двух данных и второй окружности и т. д. Может случиться, что на некотором шаге очередная окружность коснется первой окружности, как на рисунке 1. Утверждение Штейнера состоит в том, что если для некоторой начальной (первой) окружности получится такая цепочка, то подобная цепочка образуется при любом другом выборе первой окружности. При этом и количество окружностей в цепочке не будет зависеть от того, какую окружность мы взяли в качестве первой.

Вторая теорема принадлежит французскому математику и механику Ж. Виктору Понселе (1788—1867) и утверждает следующее:

Пусть снова имеются две непересекающиеся окружности. Будем считать, что одна из них находится внутри другой. Выберем на внешней окружности некоторую точку и проведем из нее касательную к внутренней окружности. Из новой точки пересечения этой касательной с внешней окружностью проведем еще одну касательную к внутренней окружности и т. д. (рис. 2). И вновь: если на некотором шаге мы попадем в начальную точку, то такой процесс «замкнется» при выборе в качестве начальной точки любой другой точки внешней окружности.

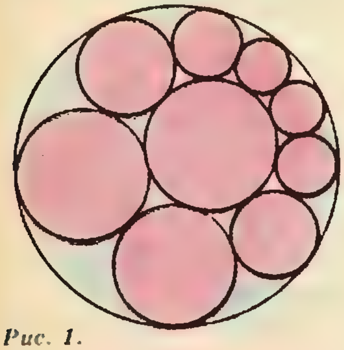


Рис. 1.

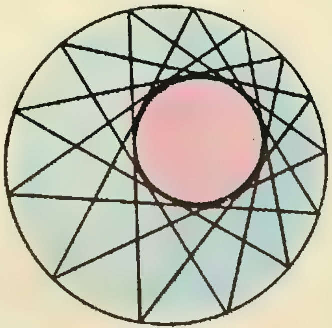


Рис. 2.

Третья теорема была доказана совсем недавно американскими математиками В. Л. Блеком, Г. К. Хаулендом и Б. Хаулендом и носит название *«теоремы о зигзагах»*:

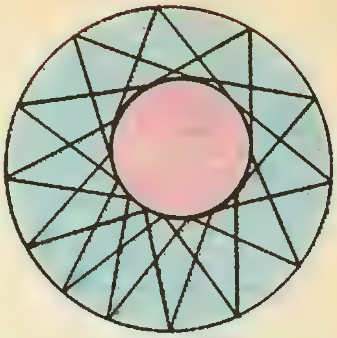


Рис. 3.

Вновь возьмем некоторую точку на внешней окружности и, поставив ножку циркуля в выбранную точку, сделаем на внутренней окружности засечку. Поставим ножку циркуля в получившуюся точку внутренней окружности и тем же раствором циркуля сделаем засечку на внешней окружности. Из полученной точки снова «шагаем» тем же радиусом на внутреннюю окружность, затем снова на внешнюю и т. д. Соединив последовательно получаемые точки, мы образуем зигзагообразную ломаную (рис. 3). И вновь оказывается, что если эта ломаная на некотором шаге замкнется, то она замкнется при любом другом выборе начальной точки (раствор циркуля оставляем прежним). Сохранится и число отрезков ломаной.

А. П.

Задачи и головоломки

1. Возьмем прямоугольный листок бумаги, который можно накрыть кругом радиуса 1. Перегнем листок (рис. 1). Можно ли теперь накрыть его тем же кругом?

В. В. Произволов

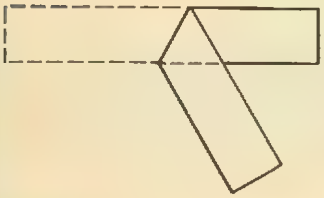


Рис. 1.

2. К двум окружностям проведена внешняя касательная AB и две внутренние касательные, пересекающие отрезок AB в точках C и D (рис. 2). Докажите, что $AC=DB$.

Г. А. Гальперин

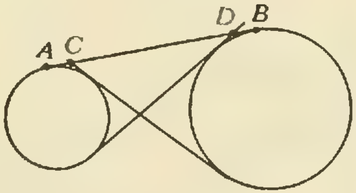


Рис. 2.

3. Решите числовой ребус:

радиус
+ дуга
фигуры

Н. К. Антонович

(Начало см. на с. 31)

Ф989. Модель тележки на гусеничном ходу поставили на наклонную плоскость с углом наклона $\alpha=30°$ и отпустили. Найти ускорение модели. Длина модели $l=50$ см, высота $h=2$ см. Гусеницы сделаны из резины, их масса составляет 80 % всей массы модели. Трение в механизме модели пренебрежимо мало.

А. И. Буздин

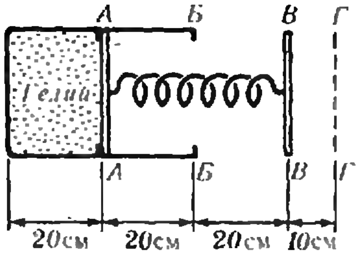


Рис. 1.

Ф990. Тепловой двигатель представляет собой наполненный газом цилиндр с поршнем, движение которого ограничено упорами *АА* и *ББ* (рис. 1). Газ медленно нагревают, пока поршень не коснется упоров *ББ*, после чего основание пружины смещают из положения *ВВ* в положение *ГГ*. Затем сосуд медленно охлаждают до тех пор, пока поршень не коснется упоров *АА*. Тогда основание пружины смещают назад до *ВВ*, цилиндр снова нагревают, и т. д. Найти КПД этого двигателя. Цилиндр заполнен гелием; площадь поршня $S=10$ см^2; жесткость пружины $k=10$ Н/м, длина ее в нерастянутом состоянии $l_0=60$ см. Внешнее давление принять равным нулю.

А. Р. Зильберман

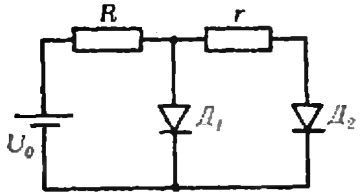


Рис. 2.

Ф991. В схеме, приведенной на рисунке 2, $U_0=2{,}4$ В, $R=600$ Ом, $r=200$ Ом, диоды $Д_1$ и $Д_2$ имеют одинаковые вольтамперные характеристики (рис. 3). Найти ток через диод $Д_2$.

Р. З. Александров

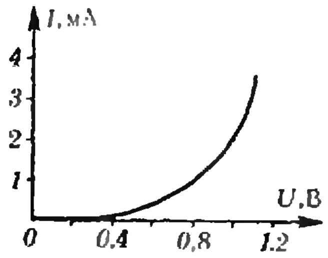


Рис. 3.

Ф992. При съемке кадра из фильма «Гулливер в стране лилипутов» актера, играющего роль Гулливера, поместили на расстоянии 4 м от кинокамеры с короткофокусным объективом, а актера, исполняющего роль лилипута,— на расстоянии 40 м. На какое расстояние нужно навести объектив камеры, чтобы изображения обоих героев на киноленте были одинаково четкими?

Почему при такой съемке используется короткофокусный объектив? Оцените фокусное расстояние такого объектива, если известно, что обычная (некомбинированная) съемка людей с расстояния 5 м проводится объективом с фокусным расстоянием 50 см и глубина резкости при этом 0,5 м.

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Problems

M976—M980; P988—P992

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the

M976. Two rays, forming an angle of 45°, are drawn from the vertex *A* of the square *ABCD*. One intersects side *BC* at the point *E* and the diagonal *BD* at the point *P*, the other intersects side *CD* at the point *F* and the diagonal *BD* at the point *O*. Prove that the area of triangle *AEF* is twice that of *APO*.

E. G. Gotman

scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than June 15th, 1986 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

M977. Is it possible to obtain the polynomial x from the polynomials $f(x)$ and $g(x)$ by means of additions, substractions and multiplications if a) $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^2+2$; b) $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^2-2$; c) $f(x)=2x^2+x$, $g(x)=2x$; d) $f(x)=2x^2+x$, $g(x)=x^2$?

S. I. Kublanovski

M978. Can one find two non-overlapping equilateral triangles of sides greater than $\sqrt{2/3}$ in a square of side 1?

E. A. Karlov, I. K. Dimitrov (Bulgaria)

M979. Let k and n be positive integers, $k\leqslant n$. Any k-tuple of positive numbers $a_1, a_2, \ldots, a_k$ less than 1 will be called *exceptional* if for any decomposition of n into k summands $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$, where all the n_i are non-negative integers, at least one of the numbers $a_i \cdot n_i$ is an integer ($i=1,2,\ldots, n$).
a) For what k and n do exceptional k-tuples exist?
b) Find them.

E. A. Gorin

M980. The point O is chosen inside a) a polygon, b) a polyhedron with vertices $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Prove that among the $n(n-1)/2$ angles A_nOA_k ($n,k=1,2,\ldots,n$) no less than $n-1$ are between 90° and 180°.

V. G. Boltyanski

P988. An ice hockey player slides on one skate so that the ice under the skate melts to the depth $h=0{,}03$ mm. The width of the skate is $d=2$ mm. Find the force of friction between skate and ice if the specific heat of ice melting is $\lambda=3{,}3\cdot10^5$ J/kg, the density of ice $\rho=0{,}9$ g/cm^3. Heat conductivity of ice is negligible.

M. G. Gavrilov

P989. A track vehicle model is placed on an inclined plane forming an angle of $\alpha=30°$ to the horizon and then released. Find the acceleration of the vehicle. Its length is $l=50$ cm, its height $h=2$ cm. The tracks are made of rubber, their mass is 80 % of the vehicle's total mass. Inner friction in the vehicle is negligible.

A. I. Buzdin

P990. A heat engine is constituted by a cylinder with piston whose motion is limited by the blocks AA and $ББ$ (see figure Рис. 1). The cylinder contains gas. The gas is slowly heated until the piston reaches the blocks $ББ$ and then the base of the piston is moved from the position BB to the position $ГГ$. Then the system is slowly cooled until the piston moves back and touches the blocks AA. At this point the base of the spring is moved back to BB, then the cylinder is heated again, and so on. Find the efficiency of this engine. The area of the piston is $s=10$ cm^2, the elasticity of the spring is $k=10$ N/m. The length of the spring in unstretched state is $l_0=60$ cm. The exterior pressure may be assumed equal to zero.

A. R. Zilberman

P991. In the circuit shown on figure Рис. 2, the diodes have identical voltampere characteristics (Рис. 3). Find the current through the diode $Д_2$ if $U_0=2{,}4$ V; R=600 Ohms; $r=200$ Ohms.

R. Z. Alexandrov

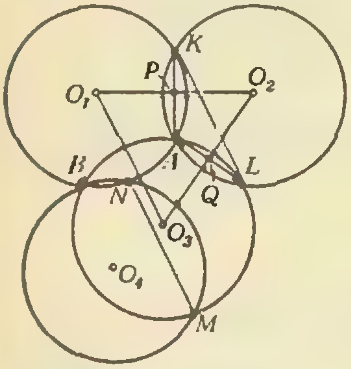
P992. While filming one of the scenes of the movie "Gulliver in the country of lilliputs", the movie actor playing the role of Gulliver was placed 4 m from the short focal distance camera lens, while the actor playing one of the lilliputs was standing 40 m from the lens. To what distance should the lens be focused to ensure that both actors come out equally clear on the film?
Why is a camera with short focal distance used for such filming? Estimate the focal distance of the lens if it is known that ordinary filming of people from a distance of 5m is carried out with lenses of focal distance 50 cm, yielding a depth of clarity of 0,5 m.

E. N. Yunosov, I. V. Yaminski

Решения задач

М956—М960; Ф968—Ф972

М956. *На плоскости проведены четыре окружности одинакового радиуса так, что три из них проходят через одну точку A, и три — через точку B. Докажите, что четыре точки их попарного пересечения, отличные от A и B,— вершины параллелограмма.*



Приведем одно из многих решений задачи. Обозначим центры окружностей через O_1, O_2, O_3, O_4, точки их попарного пересечения — через K, L, M, N (см. рисунок). Поскольку окружности равны, точка P пересечения общей хорды AK окружностей O_1 и O_2 с их линией центров O_1O_2 делит оба отрезка AK и O_1O_2 пополам. Аналогично, отрезки O_3O_2 и AL имеют общую середину Q. Следовательно, отрезок PQ является средней линией двух треугольников — $O_1O_2O_3$ и AKL, то есть $\overrightarrow{O_1O_3}=2\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{KL}$. Точно также доказывается, что $\overrightarrow{O_1O_3}=\overrightarrow{NM}$, а из равенства $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{O_1O_3}=\overrightarrow{NM}$ следует, что $KLMN$ — параллелограмм.

Докажите самостоятельно, что A и B — точки пересечения высот треугольников BKL и AMN: этот факт можно использовать для другого решения задачи (ср. с заключительным замечанием в решении задачи М951 в прошлом номере «Кванта»).

В. Н. Дубровский

◆

М957. *Докажите, что из 1985 различных натуральных чисел, все простые делители которых содержатся среди первых 9 простых чисел 2, 3, ..., 23, можно выбрать четыре числа, произведение которых — четвертая степень целого числа.*

Докажем, что из данных чисел можно выбрать достаточно много таких пар (a, b), что произведение ab — квадрат целого числа; точнее: из N *чисел* (с 9 простыми множителями) *можно выбрать не менее* $(N-2^9)/2$ *таких пар*. В нашей задаче $N=1985$, так что можно выделить не менее $(1985-512)/2$, то есть по крайней мере 737 пар (a, b). Затем к $N=737$ целым числам $\sqrt{ab}$ можно применить еще раз то же рассуждение и получить такую пару $(\sqrt{ab}, \sqrt{cd})$ — даже $(737-512)/2+1/2=113$ таких пар,— что произведение $\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}$ квадрат целого числа, то есть $abcd$ — четвертая степень целого числа.

Осталось доказать сформулированный факт. По основной теореме арифметики каждое натуральное число однозначно представляется в виде произведения простых множителей. Произведение ab двух целых чисел

$$a=2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}\ldots23^{\alpha_9} \text{ и } b=2^{\beta_1}3^{\beta_2}\ldots23^{\beta_9}$$

будет точным квадратом в том и только том случае, если показатели α_i и β_i имеют одинаковую четность (для каждого i от 1 до 9); в этом случае наборы $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_9)$ и $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_9)$ показателей мы будем называть сравнимыми. Будем из N наборов показателей, соответствующих N данным числам (с множителями 2, 3, ..., 23), выделять одну за другой пары сравнимых наборов, до тех пор, пока это возможно. Наборов без пары останется не более 2^9, поскольку существует всего 2^9 попарно несравнимых наборов показателей (на каждом из 9 мест может стоять либо четное, либо нечетное число — всего 2^9 вариантов).

Эта задача, предложенная Монголией на последней международной олимпиаде,— частный случай следующей, видимо, очень трудной проблемы. Пусть заданы натуральные числа a и m. Для какого N можно утверждать, что *из N любых наборов* $(a_1,a_2,\dots,a_d)$, *где* a *— целые числа, можно выбрать m наборов, сумма i-х координат которых делится на m* (для каждого $i=1,2,\dots,d$)? Естественно, что N должно быть больше $(m-1)/2^d$ (по крайней мере, уменьшить эту оценку нельзя: достаточно взять все наборы из нулей и единиц, каждый по $(m-1)$ раз). Интересно было бы доказать или опровергнуть гипотезу, что наименьшее $N=N(d,\ m)$, для которого верно сформулированное выше утверждение, равно $(m-1)2^d+1$, или хотя бы получить оценки для $N(d,\ m)$. Для $d=1$ — то есть для целых чисел a — эта гипотеза доказана: $N(1,m)=2m-1$ (см. «Квант», 1971, № 7, с. 30 и № 8, с. 43). Она верна также для $m=2^k$: из факта, доказанного в решении задачи М957, эквивалентного неравенству $N(d,\ 2m)\leqslant 2N(d,\ m)+2^d-1$, и очевидного неравенства $N(d,\ 2)\leqslant 2^d+1$ вытекает, что

$$N(d,4)\leqslant 2^d+2^{d+1}+1,\ N(d,\ 8)\leqslant 2^d+2^{d+1}+2^{d+2}+1,\dots,$$
$$N(d,\ 2^k)\leqslant 2^d+2^{d+1}+\dots+2^{d+k-1}+1=(2^k-1)2^d+1;$$

таким образом, $N(d,\ 2^k)=(2^k-1)2^d+1$.

Не менее интересна (довольно близкая) проблема, предложенная нашим читателем *Д. Флейшманом:* в той же ситуации требуется выбрать из N наборов несколько (не обязательно ровно m), сумма которых «делится на m».

Н. Б. Васильев, Д. Б. Фукс

◆

М958*. *Пусть* $0\leqslant i_1<i_2<\dots<i_n$ *— целые числа. Докажите, что количество нечетных коэффициентов у многочлена* $(1+x)^{i_1}+(1+x)^{i_2}+\dots+(1+x)^{i_n}$ *не меньше, чем у многочлена* $(1+x)^{i_1}$.

Будем называть два многочлена $F(x)$ и $G(x)$ с целыми коэффициентами *эквивалентными*, если все коэффициенты их разности $F(x)-G(x)$ четны, и записывать эту эквивалентность так: $F(x)\equiv G(x)$. Например, $(1+x)^2\equiv 1+x^2$ (см. также формулы (1) — (4) на полях). Ясно, что если $F_1\equiv G_1$, $F_2\equiv G_2$, то $F_1+G_1\equiv F_2+G_2$, $F_1G_1\equiv F_2G_2$ $(F_1F_2-G_1G_2=F_1(F_2-G_2)+G_2(F_1-G_1))$ и $F_1^m\equiv G_1^m$ для любого натурального m. Число нечетных коэффициентов многочлена $F(x)$ будем обозначать через $W(F(x))$ или $W(F)$ и называть *весом* многочлена $F(x)$; положим $W((1+x)^i)=w(i)$. Многочлен $(1+x)^{i_1}+(1+x)^{i_2}+\dots+(1+x)^{i_n}$ в условии задачи обозначим коротко через $P(x)$. Требуемое неравенство $w(i_1)\leqslant W(P)$ можно доказать методом математической индукции. Вот одно из таких доказательств — индукцией по i_n (предложенное авторами из Нидерландов, представившими эту задачу на международную олимпиаду).

$$(1+x)^2\equiv 1+x^2, \qquad (1)$$

$$(1+x)^{2j}\equiv(1+x^2)^j, \qquad (2)$$

$$(1+x)^{2j+1}\equiv(1+x^2)^j+x(1+x^2)^j, \qquad (3)$$

$$(1+x)^{2j}+(1+x)^{2j+1}\equiv x(1+x^2)^j, \qquad (4)$$

формула (4) используется в случае $i_s=2j_s$, $i_{s+1}=i_s+1=2j_s+1$ $(s=1,2,\dots,m)$.

Из формулы (1) на полях следует, что для любого многочлена с целыми коэффициентами степени меньше $q=2^k$

$$W(F(x)(1+x)^q)=2W(F(x)). \qquad (*)$$

При $i_n=0$ и $i_n=1$ нужное неравенство $W(P)=w(i_1)$ очевидно. Предположим, что оно верно для $i_n<2^k$ $(k\geqslant 1)$ и докажем его для $2^k\leqslant i_n<2^{k+1}$. Положим $q=2^k$ и рассмотрим два случая.

Если $i_1\geqslant q$, то, полагая $F(x)=(1+x)^{i_1-q}+\dots+(1+x)^{i_n-q}$, по формуле $(*)$ и предположению индукции получим:

$$W(P)=2W(F)\geqslant 2w(i_1-q)=w(i_1).$$

Если $i<q$, запишем $P(x)$ в виде

$$P_1(x)+(1+x)^qP_2(x)\equiv P_1(x)+P_2(x)+x^qP_2(x),$$

где $P_1(x)$ — сумма многочленов $(1+x)^{i_s}$ с показателями $i_s<q$. Тогда каждый нечетный коэффициент многочлена P_1, который «убивается» не-

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1											
1	1	1										
2	1	0	1									
3	1	1	1	1								
4	1	0	0	0	1							
5	1	1	0	0	1	1						
6	1	0	1	0	1	0	1					
7	1	1	1	1	1	1	1	1				
8	1	0	0	0	0	0	0	0	1			
9	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1		
10	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	
11	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1

четным коэффициентом P_2 при той же степени x, возникает вновь в члене степени на q большей многочлена $x^qP_2(x)$, поэтому $w(i_1)\leqslant W(P_1)\leqslant W(P)$.

Приведем еще одно рассуждение — индукцией по i_1. Для $i_1=0$ наше утверждение очевидно ($w(0)=1$).

Докажем, что если оно верно для некоторого $i_1=j_1$, то оно также верно для $i_1=2j_1$ и $i_1=2j_1+1$. Для этого, пользуясь предположением индукции и формулами (2), (3) и (4) на полях, учтем отдельно коэффициенты при четных и нечетных степенях x в многочленах $(1+x)^{i_s}$ и $P(x)$. Положив, в зависимости от четности i_s, $i_s=2j_s$ или $i_s=2j_s+1$ и применяя формулы на полях, запишем многочлен $P(x)$ в виде $F_1(x^2)+xF_2(x^2)$.

Если $i_1=2j_1$, то, согласно (2), $w(i_1)=w(j_1)$. При этом, если $i_2>i_1+1$, то запись $P(x)$ начинается с $(1+x^2)^{j_1}$ и вклад коэффициентов при четных степенях x в вес $P(x)$ (то есть вес $F_1(x)$) уже не меньше $w(j_1)$. Если же $i_2=i_1+1$, то, используя (4), мы начнем запись $P(x)$ с $x(1+x^2)^{j_1}$ и по предположению индукции вклад $W(F_2)$ коэффициентов при нечетных степенях x в вес $P(x)$ не меньше $w(j_1)$.

Если $i_1=2j_1+1$, то, согласно (3), $w(i_1)=2w(j_1)$ и вклад в вес $P(x)$ и четных, и нечетных степеней x не меньше $w(j_1)$, так что $W(P)\geqslant 2w(j_1)=w(i_1)$.

Наконец, наметим наиболее поучительное решение, использующее общее правило описания всех нечетных коэффициентов многочлена $(1+x)^i$. Представим i в виде

$$i=2^{m_1}+2^{m_2}+\ldots+2^{m_r},\ m_1<m_2<\ldots<m_r; \qquad (*)$$

такое представление всегда существует и единственно ($m_1,\ldots,m_r$ — это номера разрядов двоичной записи числа i, в которых стоят 1). Тогда по формуле (1) на полях $(1+x)^i\equiv(1+x^{q_1})\ldots$ $\ldots(1+x^{q_r})$, где $q_i=2^{m_i}$. Поэтому *коэффициент C_i^k многочлена $(1+x)^i$ при x^k нечетен тогда и только тогда, когда k равно некоторой подсумме суммы* (*). Обозначая через $M(i)$ множество показателей $\{m_1,\ldots,m_r\}$ в двоичном разложении i, это условие можно записать в виде $M(k)\subset M(i)$. Следовательно, коэффициент при x^k многочлена $P(x)$ нечетен тогда и только тогда, когда множество $B=M(k)$ содержится в нечетном числе множеств $A_s=M(i_s)$, $s=1,2,\ldots,n$; такие множества B будем называть *нечетными*. Итак, нужно доказать такой чисто комбинаторный факт: *число всех подмножеств множества A_1 не меньше числа всех нечетных множеств.* Для этого достаточно сопоставить всем $C\subset A_1$ различные нечетные подмножества $F(C)$.

Если C само нечетно, положим $F(C)=C$. В противном случае добавим к C множество, выбранное следующим образом. Рассмотрим все A_s, содержащие C ($s\geqslant 2$) — их число нечетно, — и множества D_s, состоящие из всех элементов A_s, не входящих в A_1. Среди этих множеств могут встретиться одинаковые; оставим лишь те, которые представлены нечетным числом копий, из них выберем некоторое наибольшее (не содержащееся в других) D_h и положим $F(C)=C\cup D_h$. Легко видеть, что все множества $F(C)$ нечетны и различны ($F(C)\cap A_1=C$).

Если выписать коэффициенты $(1+x)^i$, заменяя четные на 0, а нечетные — на 1, и составить из таких строчек таблицу, получится «двоичный треугольник Паскаля», показанный на полях. Попробуйте разобраться в его структуре и проследить с его помощью за последним решением.

Н. Б. Васильев, Д. Б. Фукс

◆

М959*. *В стране между некоторыми парами городов установлено авиационное сообщение. Докажите, что можно закрыть не более, чем $1/(k-1)$-ю часть авиалиний таким образом, что среди любых k городов найдутся два, не соединенные между собой авиалинией, если*

а), б) Рассмотрим сразу общий случай. Разобьем все города каким-то образом на $k-1$ групп. Авиалинии, соединяющие два города из одной группы, назовем *внутренними* (для данного разбиения). Выберем из всех разбиений то, для которого число $N_{вн}$ внутренних авиалиний минимально, и докажем, что *общее число N авиалиний не меньше $(k-1)N_{вн}$.*

а) $k=3$;
б) k — любое натуральное число, $k>1$.

Для этого заметим, что число n внутренних авиалиний (для выбранного «минимального» разбиения), выходящих из любого города A, не больше числа n_i авиалиний, ведущих из этого города в любую группу городов G_i ($i=1,\dots,k-1$): если бы оказалось, что $n>n_i$, мы перевели бы город A в группу G_i и тем самым уменьшили бы число внутренних авиалиний на $n-n_i$. Следовательно, общее число авиалиний, выходящих из города A, не меньше $(k-1)n$. Суммируя такие неравенства по всем городам и учитывая, что каждая авиалиния соединяет два города, получим, что $2N \geqslant 2(k-1)N_{вн}$. Закроем теперь все внутренние авиалинии нашего «минимального» разбиения. Тогда из любых k городов хотя бы два попадут в одну группу и не будут соединены между собой, причем закрыты будут не более $N/(k-1)$ авиалиний.

А. А. Разборов

◆

М960. *Если разность между кубами двух последовательных натуральных чисел — квадрат некоторого натурального числа n, то число n представляется в виде суммы квадратов двух последовательных натуральных чисел.*
а) Докажите это утверждение.
б) Вот один пример таких чисел: $8^3-7^3=(2^2+3^2)^2$; приведите еще хотя бы один пример.
в) Докажите, что их существует бесконечно много.

а) Пусть $(m+1)^3-m^3=n^2$. Раскрывая скобки и умножая обе части равенства на 4, получим, что $3\cdot 4m^2+3\cdot 4m+4=4n^2$ или

$$3(2m+1)^2=(2n+1)(2n-1). \qquad (1)$$

Поскольку числа $2n+1$ и $2n-1$ взаимно простые, равенство (1) возможно, только когда одно из этих чисел — квадрат натурального, а другое — утроенный квадрат. Но число n нечетно (n^2 — это разность чисел разной четности), поэтому $2n+1$ дает при делении на 4 остаток 3, а квадрат целого числа либо делится на 4, либо дает при делении на 4 остаток 1; следовательно, точным квадратом является $2n-1$; то есть $2n-1=(2l+1)^2$ или $n=2l^2+2l+1=l^2+(l+1)^2$.

б), в) Полагая в равенстве (1) $2n=a$, $2m+1=b$, перепишем его в виде

$$a^2-3b^2=1.$$

Очевидно, каждому решению (a, b) этого уравнения с нечетным b (и, следовательно, четным a) отвечает пара (m, n), удовлетворяющая условию задачи. Покажем, как по одному решению (a, b) можно построить бесконечную последовательность решений. Мы воспользуемся общим методом построения решений так называемого *уравнения Пелля* $x^2-dy^2=1$, о котором подробно рассказывалось в статье Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Пары чисел и действия с ними» (Квант, 1985, № 1, с. 20).

Пусть (a_1, b_1) — какое-то решение (2). Определим числа a_k и b_k равенством $(a_1+b_1\sqrt{3})^k=a_k+b_k\sqrt{3}$. Ясно, что тогда $(a_1-b_1\sqrt{3})^k=a_k-b_k\sqrt{3}$, поэтому

$$a_k^2-3b_k^2=(a_k+b_k\sqrt{3})(a_k-b_k\sqrt{3})=$$
$$=((a_1+b_1\sqrt{3})(a_1-b_1\sqrt{3}))^k=(a_1^2-3b_1^2)^k=1$$

Следовательно, пары (a_k, b_k) при всех k также удовлетворяют уравнению (2). При этом, если b_1 нечетно (а a_1 четно), то при нечетном k число b_k представляется в виде $a_1\cdot A+b_1^k 3^{(k-1)/2}$ и тоже нечетно.

Таким образом, начав, скажем, с $(a_1, b_1)=(2, 1)$ и последовательно вычисляя нечетные степени

$(2+\sqrt{3})^3=26+15\sqrt{3}$, $(2+\sqrt{3})^5=362+209\sqrt{3}$,..., мы получим бесконечный набор решений (2): $(a_3, b_3)=(26, 15)$, $(a_5, b_5)=(362, 209)$,... а из них — решения исходной задачи: $(m, n)=(7, 13)$, $(104, 181)$, ..., которым отвечают соотношения $8^3-7^3=(2^2+3^2)^2$ (пример из условия задачи б)), $105^3-104^3=(9^2+10^2)^2$ (ответ к задаче б)) и т. д.

А. П. Савин, В. Н. Дубровский

◆

Ф968. *На три параллельных оси, соединенных жесткими стержнями, насажены три зацепленных шестеренки с радиусами r_1, r_2 и r_3 (рис. 1). Оси B и C вращаются вокруг неподвижной оси A с угловой скоростью ω_0; при этом размеры треугольника ABC остаются неизменными, а шестеренка радиуса r_1 движется поступательно. С какой угловой скоростью вращается шестеренка радиуса r_3?*

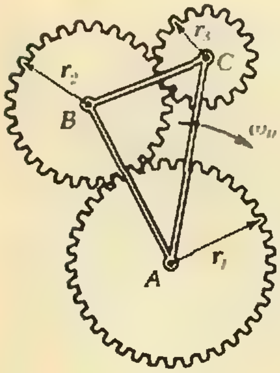


Рис. 1.

На рисунке 2 показано положение системы через время t. За это время точки B и C повернутся на угол $\varphi=\omega_0 t$. Шестеренка радиуса r_3, согласно условию, движется поступательно. Это значит, что за время t эта шестеренка повернулась как целое вокруг оси A на угол φ. И вокруг собственной оси C — тоже на угол φ. Значит, все дуги, отмеченные на рисунке 2, равны φr_3, и угловая скорость ω вращения шестеренки радиуса r_1 определяется условием

$$\omega_0 t=\omega t+\varphi\frac{r_3}{r_1}.$$

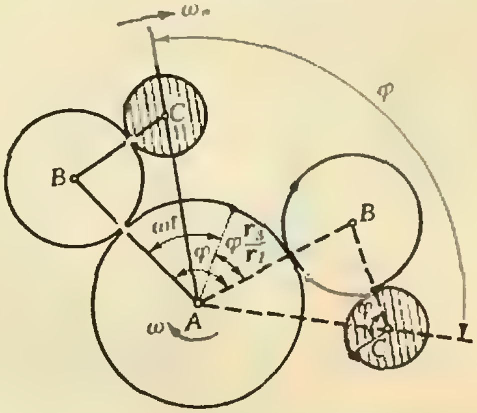


Рис. 2.

Отсюда

$$\omega=\omega_0\left(1-\frac{r_3}{r_1}\right).$$

В. Вангелов (Болгария)

◆

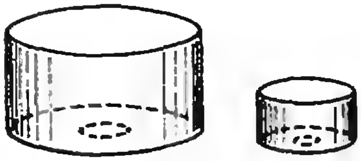
Ф969. *Две банки, сделанные из одного и того же материала, имеют одну и ту же геометрическую форму, причем все линейные размеры одной банки в k раз меньше, чем другой (см. рисунок). В дне каждой банки сделано отверстие. Банки одновременно опускают на воду. Какая банка утонет скорее? Во сколько раз?*

Из-за того что банки, которые погружаются в воду, сделаны из одного и того же материала, в первый момент глубина погружения каждой из них линейно связана с размером. То есть, если размеры банок различаются в k раз $l_2=kl_1$, то в k раз различаются расстояния от поверхности воды до отверстий $h_2=kh_1$.

Так как перепад давления по обе стороны отверстия зависит от глубины погружения $\Delta p=\rho_{\text{воды}}gh$, а скорость воды, заполняющей банку через отверстие, связана с перепадом давления — $\Delta p=\frac{1}{2}q_{\text{воды}}v^2$, то

$$v^2=2gh. \qquad (*)$$

В свою очередь, скорость определяет время t, за которое банка наполнится водой и пойдет ко дну.



Таким образом, зависимость (*) является ключевым соотношением, связывающим время с линейными размерами через ускорение свободного падения g, которое в этой задаче играет роль единственной размерной константы, определяющей динамику процесса. То есть величины, имеющие размерность м/с^2, например l/t^2, выражаются только через g и поэтому не зависят от l:

$$l_2/t_2^2=l_1/t_1^2.$$

Следовательно,

$$t_2=\sqrt{k}\;t_1.$$

И. К. Соболев

◆

Ф970. *В тонкостенной непрозрачной сферической оболочке находится шар, радиус которого в несколько раз меньше радиуса оболочки. Предложите способ определения плотности вещества, из которого сделан шар. Масса оболочки неизвестна.*

Измеряем вес сферы с шаром $P=(M+m)g$, где M и m — массы сферы и шара соответственно. Прикладываем к сфере силу F (силу измеряем), направленную вертикально вниз, и в момент $t=0$ убираем опору из-под сферы. Сфера начнет двигаться вниз с ускорением

$$g+a=\frac{Mg+F}{M}.$$

Масса m в формулу не входит, поскольку шар в момент $t=0$ отрывается от сферы и с ускорением a (относительно сферы) движется вверх. Измерив ускорение a, находим массу сферы $M=F/a$. Измерение ускорения a надо закончить до момента удара шара о сферу в ее верхней точке. Отметив этот момент времени (по звуку удара или по скачку показаний динамометра, измеряющего силу F), рассчитываем радиус r шара. Из $S=a(\Delta t)^2/2$, где Δt — время движения шара, находим:

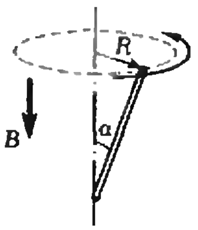
$$r=R-\frac{a(\Delta t)^2}{4}.$$

Здесь R — радиус сферы, который можно измерить непосредственно, а путь $S=2(R-r)$. Теперь мы знаем и радиус шара, и его массу $\left(m=\frac{P}{g}-\frac{F}{a}\right)$, что позволяет решить задачу.

С. А. Хорозов

◆

Ф971. *В магнитном поле, индукция $\vec{B}$ которого вертикальна, вращается около вертикальной оси так, как показано на рисунке, металлический стержень. Угловая скорость вращения равна ω. R и α заданы. Найти разность потенциалов на концах стержня.*



Для решения воспользуемся выражением для ЭДС в виде

$$\mathscr{E}=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Прежде всего отметим, что ЭДС будет постоянной в любой момент времени, так как стержень всегда находится в одинаковых условиях. Поэтому мы имеем право рассмотреть его полный оборот:

$$-\Delta\Phi=\pi R^2B,$$

$$\Delta t=\frac{2\pi}{\omega}$$

и

$$\mathscr{E}=\frac{\pi R^2B}{2\pi}\omega=\frac{1}{2}BR^2\omega,$$

то есть зависит только от R, а не от α.

Л. Г. Маркович

Ф972. *В высокоскоростном киносъемочном аппарате, применяемом для съемки быстропротекающих процессов, пленка движется непрерывно со скоростью v. Для предотвращения смазывания изображения между пленкой и объективом установлена четырехгранная стеклянная призма с показателем преломления n, вращающаяся с постоянной угловой скоростью (рис. 1). Пренебрегая расфокусировкой изображения, определите, при какой угловой скорости изображение на пленке не смазывается. Определите толщину призмы при условии, что экспонирование изображения одного кадра проводится в пределах $(-\alpha_0, \alpha_0)$ ее угла поворота, а минимальный размер различимых деталей изображения равен δ.*

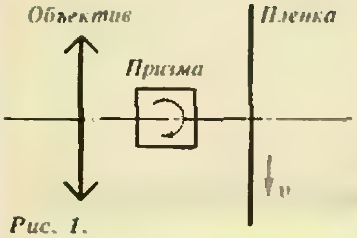


Рис. 1.

Рассмотрим точку A на оптической оси. Ее изображение A' также расположено на оптической оси при положении призмы, изображенном на рисунке 1. При повороте призмы на угол α изображение A' смещается по горизонтали на $\xi(\alpha)$ от плоскости, в которой со скоростью v движется кинопленка, и на величину $\Delta(\alpha)$ в направлении движения пленки (рис. 2). Смещение по горизонтали приводит к расфокусировке изображения. По условию этим эффектом можно пренебречь.

Рассмотрим, к чему приводит смещение $\Delta(\alpha)$. Относительно пленки изображение A' движется со скоростью $u=\frac{\Delta(\alpha)}{t}-v$. Скорость ω вращения призмы подбирают такой, что при малых углах α скорость u близка к нулю, и изображение A' неподвижно относительно пленки. Это объясняет назначение вращающейся призмы — она компенсирует смещение пленки. Зависимость $\Delta(\alpha)$ от α имеет вид (h — толщина призмы)

$$\Delta(\alpha)=h\sin\omega t\left(1-\frac{\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right)$$

(выведите эту формулу самостоятельно, пользуясь законом преломления).

Мгновенная скорость изображения A' в тот момент, когда оно находится на оптической оси, равна

$$\left.\frac{d\Delta(\alpha)}{dt}\right|_{t=0}=\frac{d\Delta(\alpha)}{d\alpha}\cdot\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{\alpha=0}=h\,\frac{n-1}{n}\,\omega$$

и по условию

$$h\,\frac{n-1}{n}\,\omega=v. \qquad (*)$$

С ростом α мгновенная скорость уменьшается, и точка A' за время поворота призмы на угол α $(t=\alpha/\omega)$ экспонирует на пленке отрезок длиной $\Delta=\left(v-\frac{\Delta(\alpha)}{\alpha}\omega\right)\frac{\alpha}{\omega}$. Изображение на пленке не смазано, если за время экспозиции кадра длина этого отрезка не больше δ, то есть при $\alpha=\alpha_0$ $\Delta=\delta$, или

$$-\alpha_0\,h\sin\alpha_0\left(1-\frac{\cos\alpha_0}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right)+h\,\frac{n-1}{n}\,\alpha_0=\delta.$$

Отсюда находим h:

$$h=\frac{\delta}{\alpha_0}\left(\frac{n-1}{n}-\sin\alpha_0\left(1-\frac{\cos\alpha_0}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right)\right)^{-1}.$$

С учетом этого из (*) находим, при какой угловой скорости призмы изображение на пленке не смазано:

$$\omega=\frac{vn}{n-1}\cdot\frac{\alpha_0}{\delta}\left(\frac{n-1}{n}-\sin\alpha_0\left(1-\frac{\cos\alpha_0}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha_0}}\right)\right).$$

А. А. Лапидес

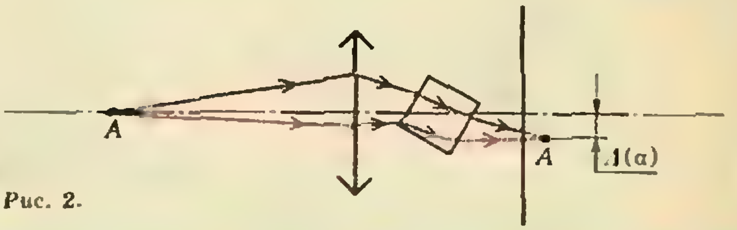


Рис. 2.

Посмотрим на экран

Ю. В. КОТОВ

Пожалуй, самым популярным устройством современных ЭВМ, особенно среди непрофессионалов, стали электронно-лучевые экраны, придающие машинам некоторое сходство с телевизорами. Дополненные клавиатурой и такими приспособлениями, как «световые перья», «визиры» и «мышки», они облегчают ввод в ЭВМ, чтение и редактирование информации, управление вычислительным процессом. К крупным ЭВМ подключают по несколько таких устройств, что позволяет одновременно работать большому числу пользователей. Даже маленькие настольные ЭВМ (так называемые персональные компьютеры) снабжаются экранами, либо подключаются к обычным бытовым телевизорам.

К сожалению, знатоки русского языка не смогли предложить для таких экранов с клавиатурой термина с русским корнем, и их называют английским словом «дисплей», иногда — «терминал». Дисплеи бывают алфавитно-цифровые и графические. Первые могут показывать на своих экранах только буквы, цифры, знаки и то, что из них состоит — тексты, программы, числовые данные. Графические же дисплеи универсальны в том смысле, что отображают как графическую информацию (схемы, графики, чертежи), так и алфавитно-цифровую. Современные графические дисплеи делят на две большие группы — *векторные* и *растровые*. Если у векторных электронный луч последовательно высвечивает запрограммированные элементы изображения — отрезки, символы и иногда дуги,— то в растровых устройствах он, как и в телевизоре, «заштриховывает» экран последовательными строками, изменяя при этом свою яркость. На простейших растровых экранах изображение складывается из множества расположенных по рядам точек, и если этих рядов недостаточно много,— например, 200, 300, качество изображения невысокое. Более совершенные растровые экраны позволяют получать полутоновые и цветные изображения. Среди них есть и такие, где качество «картинки» заметно лучше, чем в бытовом телевизоре, поскольку изображение разлагается на 1000 и более строк, к тому же нет неизбежных помех, приходящих с эфира.

Графические экраны делают общение с машиной особенно наглядным и, при наличии соответствующих программ, доступным для всех возрастов. Для повышения спроса на «бытовые» персональные компьютеры на западе развивается целая индустрия «компьютерных игр». Компьютерные игры, конечно, вещь неплохая, развивают глазомер, быстроту реакции, сообразительность, они пользуются популярностью и у нас. Но с большей пользой графические, как, впрочем, и алфавитные, терминалы применяют в учебном процессе, сочетая наглядность обучения с игровыми моментами. Мы не говорим уже об автоматизированном проектировании, научных исследованиях и других серьезных занятиях.

Цель этой заметки — показать читателям «Кванта», не имеющим доступа к подобному оборудованию, как реально выглядит экран дисплея в учебном процессе.

На фотографиях представлены примеры изображений, получаемых на экране графического терминала «ЕС-7064», подключенного к ЭВМ серии ЕС, в Московском архитектурном институте и Московском институте радиотехники, электроники и автоматики.

На первой фотографии видим — в левой части экрана — орнамент, набранный световым пером из типовых элементов, высвеченных программой в правой части экрана. В начальный момент в левой части экрана светятся только точки, помечающие узлы квадратной сетки 5×5 ячеек. Учащийся выбирает пером приглянувшуюся ему типовую фигурку из *«меню»* и затем «припаивает» ее в нужную ячейку сетки, указав пером два диагонально-расположенных узла. При этом можно «припаять» фигурку не только в исходной ориентации, но и с поворотом на угол, кратный прямому. В одну ячейку можно «впаять» две или три различные фигурки, с помощью специальных кнопок терминала можно стирать неправильно введенные

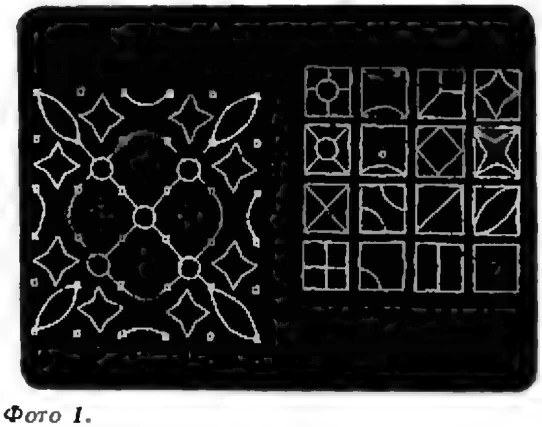


Фото 1.

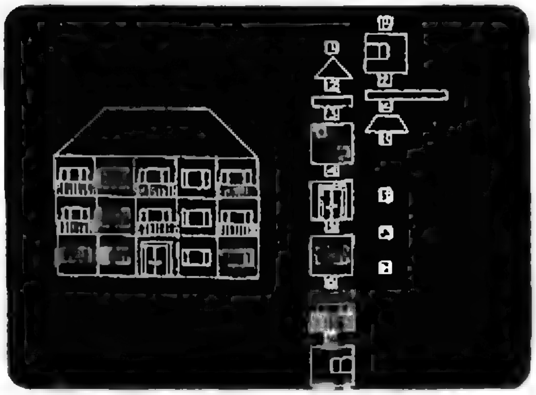


Фото 2.

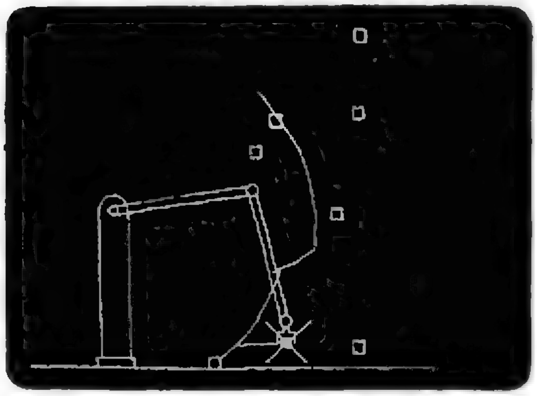


Фото 3.

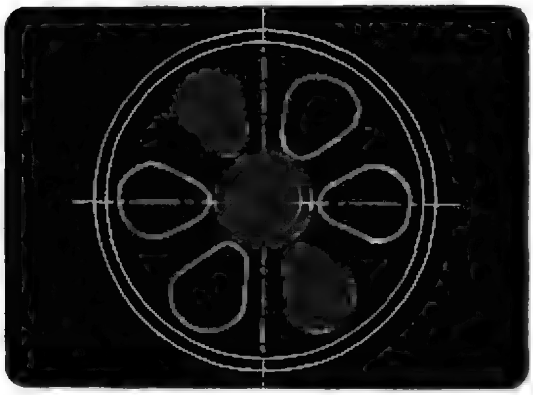


Фото 4.

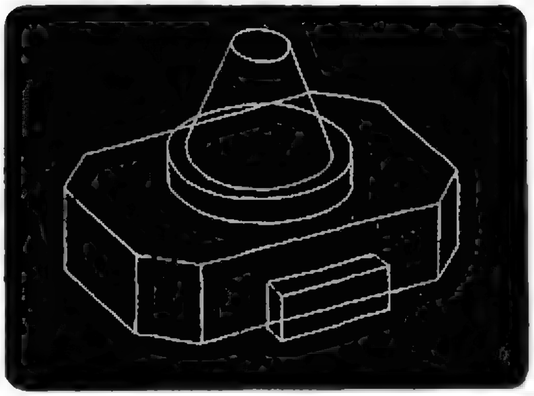


Фото 5.

фигурки, убирать после формирования орнамента опорные узловые точки, выводить информацию на перфоленту или магнитную ленту для вычерчивания орнамента на графопостроителе. Эта «игра» позволяет освоить режим «графической компоновки», понятие «графической клавиатуры» или «меню», к тому же повторить понятия переноса и поворота. С этой программой успешно развлекаются не только студенты-первокурсники, но и школьники младших классов.

На второй фотографии показана более профессиональная задача — с использованием того же принципа «спроектировать дом». Здесь сочетаются тренировка в работе с ЭВМ и архитектурно-эстетические вопросы.

На третьей фотографии мы видим изображение несложного механизма (подобие робота-манипулятора), захват которого может взять или отпустить квадратный предмет. С помощью кнопок клавиатуры управляют движением механизма и работой захвата. При одном нажатии соответствующей кнопки повернуть можно тот или другой рычаг в ту или другую сторону на «большой», «средний» или «малый» шаг. Задача состоит в том, чтобы за возможно меньшее число шагов поставить несколько предметов рядом или друг на друга. Чтобы можно было следить за работой учащегося, контрольная точка захвата оставляет на экране след. Интересно, что при очевидной простоте задачи даже профессора, впервые севшие за экран, не сразу овладевают искусством управления роботом. А есть более сложные механизмы, смоделированные в пространстве!

Теперь попробуйте представить себе, как на специальном графическом языке задать фигуры, показанные на следующих двух фотографиях. Фигура «колеса» состоит из отрезков, окружностей и дуг. Но при этом используются также повторения («цикл») и преобразования координат (поворот вокруг заданной точки). Для изображения детали надо числами и специальными кодами задать размеры и нужное положение составляющих ее частей — таких, как параллелепипеды, призмы и конусы, а кроме того — задать и уточнить ракурс, под которым видна деталь (другими словами — задать аксонометрическую или перспективную проекцию).

На шестой фотографии мы видим изображение пересекающихся тел — в данном случае конуса и эллипсоида. Построение и исследование линий пересечения поверхностей — одна из традиционных тем институтского курса начертательной геометрии. Многие поколения студентов строят такие линии с помощью циркулей и линеек. Здесь же линии строит машина, но размеры тел (поверхностей) и их положение студент должен задать определенными числами. Когда тела заданы, с помощью кнопок клавиатуры объект можно просмотреть в различных ракурсах и с изменением масштаба. Можно также изменять положение или размеры заданных тел. На фотографии мы видим, что линия пересечения состоит из двух овальных частей. Можете ли вы сообразить, каким образом надо передвинуть конус, чтобы линия пересечения содержала лишь одну часть?

На седьмой фотографии — графики различных синусоид. Каждая синусоида задана несколькими числами, среди которых коэффициенты, входящие в ее уравнение. Изменяя тот или иной коэффициент, учащийся может проследить, как он влияет на форму кривой. Конечно, синусоида — простейший пример, но даже при небольшом усложнении аналитического представления функции, математик и то не всегда скажет, как меняется форма графика при изменении различных величин. Здесь новую, измененную линию ЭВМ позволяет получить за несколько секунд!

На восьмой фотографии показано изображение проектируемой типовой детали. Ее параметры заданы в виде нескольких чисел в двух строках в нижней части экрана. В процессе автоматизированного проектирования подобных деталей конструкторы проверяют на экране, как будут выглядеть создаваемые детали и их рабочие чертежи. Здесь мы видим зубчатое колесо. Если некоторые его параметры получаются в результате расчетов кинематики машины, прочностных расчетов, то другие (например ширина бобышки) определяются конструктивно. Проектировщик также проверяет, правильно ли программа расставила размеры и обозначения; в случае необходимости он может по предусмотренным в программе правилам внести коррективы. Окончательно изображение выводится на графопостроитель.

Наконец, на девятой фотографии — более сложный объект, нарисованный графопостроителем. Между прочим, мощности машин, недавно считавшихся большими, уже не хватает, чтобы быстро формировать и высвечивать на экране изображения такой сложности. Приходится ждать перед темным экраном минуту, две... и надеяться на дальнейший быстрый прогресс электроники. Все же и сейчас ценность таких изображений очевидна. Изменив одно или несколько чисел в описании объекта, можно получить для сравнения вариант, отличающийся композицией, пропорциями. Нетрудно просмотреть объект с разных сторон и расстояний. Выбранные «кадры» с большей точностью и подробностью переносятся на бумагу и полученные машинные чертежи могут быть доработаны вручную (раскрашены, детализированы) художниками и архитекторами.

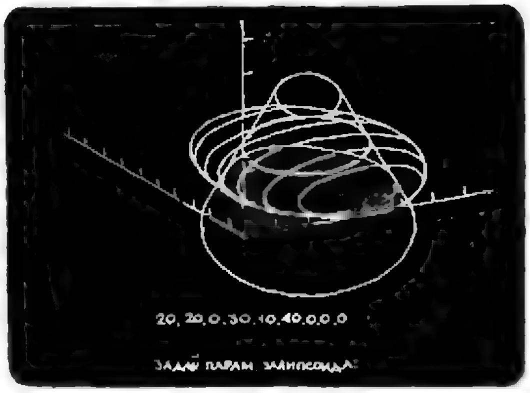


Фото 6.

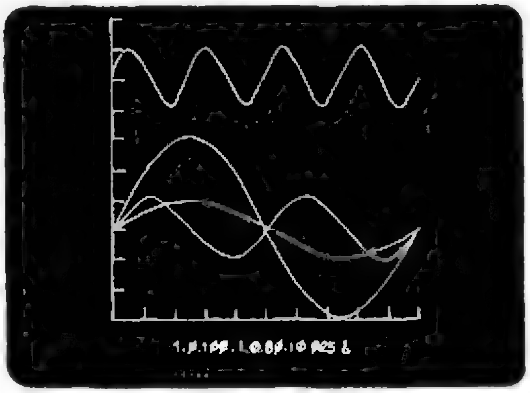


Фото 7.

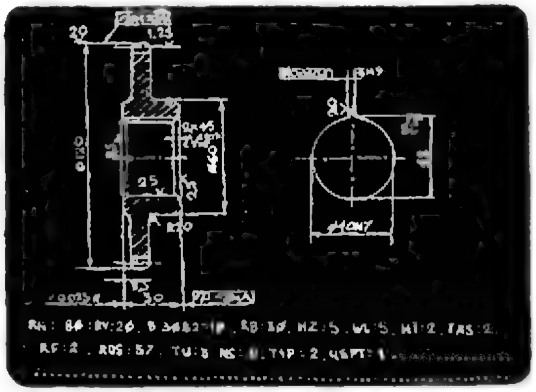


Фото 8.

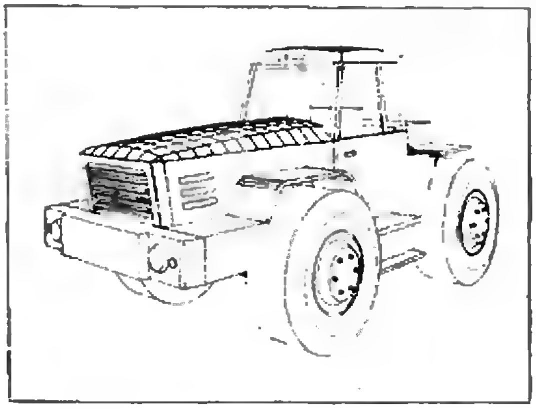


Фото 9.

VIII. Регистры

*Доктор физико-математических наук М. Е. ЛЕВИНШТЕЙН,
кандидат физико-математических наук Г. С. СИМИН,
В. Я. СИНДАЛОВСКИЙ*

ЭВМ часто сравнивают с живым организмом. В этом сложном организме роль сердца играет тактовый генератор, задающий ритм работы машины, роль мозга — процессор, управляющий всеми операциями, производимыми ЭВМ. «Глаза» и «уши» ЭВМ — устройства ввода информации, «нервная система» — сложнейшая сеть проводников, объединяющая в единое целое элементы ЭВМ, «речь» — устройства вывода полученных результатов.

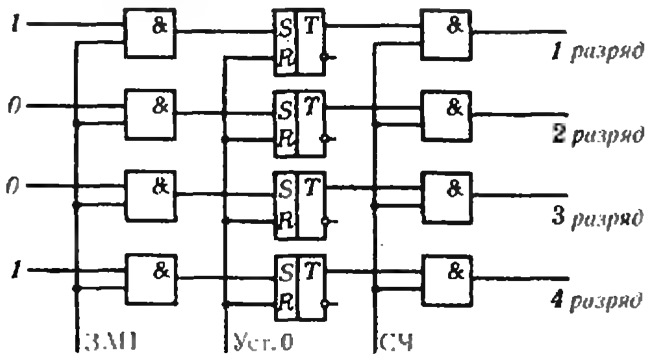
В этом сложном организме мы изучили работу одиночных клеток — транзисторов. Именно из таких «клеток» — биполярных или полевых транзисторов состоят почти все части ЭВМ. Не изучив, как устроена клетка и как она работает, нельзя глубоко понять работу организма. Но с другой стороны, ясно, что ограничившись только знакомством с одиночной клеткой, особенно далеко в исследовании сложного организма тоже не продвинешься.

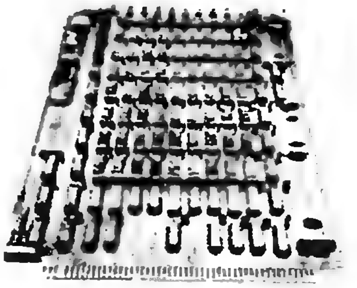
В этой и следующей заметках мы расскажем, в качестве примера, как на основе уже изученных нами простейших логических схем и триггеров на транзисторах создаются более сложные радиоэлектронные схемы, непосредственно служащие узлами ЭВМ,— регистры и сумматоры.

Вся информация, хранящаяся и перерабатываемая в ЭВМ, представлена, как мы знаем, в форме чисел, записанных в двоичной системе. Регистры используются в ЭВМ для записи, хранения и считывания чисел.

На рисунке показана упрощенная схема регистра для записи чисел, имеющих четыре двоичных разряда (в действительности регистры современных ЭВМ могут содержать до 64 разрядов). Регистр состоит из запоминающих элементов — триггеров, входных схем «И», разрешающих запись, и выходных схем «И», разрешающих считывание числа.

Обратите внимание на условное обозначение триггера. Оно похоже на условное обозначение других логических схем, но содержит в правом верхнем углу значок «Т». Два входа триггера обозначают буквами S (от английского слова set — установить) и R (от слова reset — возвратить, восстановить). Различие между входами чисто условное — электрически они совер-





Так выглядит оперативная память современной ЭВМ. На печатной плате видны кремниевые интегральные микросхемы. Время записи и считывания в регистры такой памяти составляет в среднем 50—100 нс.

При выполнении действий с большими числами мы пользуемся представлением числа в следующем виде:

$$\underset{\text{мантисса}}{0{,}123826}\cdot \underset{\text{основание системы счисления}}{10}^{3 \leftarrow \text{порядок}}$$

В регистрах ЭВМ используется аналогичное представление чисел с той только разницей, что основанием системы счисления служит 2 (двоичная система), а мантисса и порядок также записаны в двоичной системе.

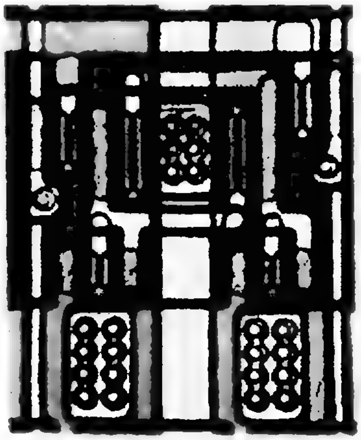
Запись в девятиразрядном регистре ЭВМ числа —4,5:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	1	1	1	0	0	1
знак мантиссы	знак порядка	порядок			мантисса			

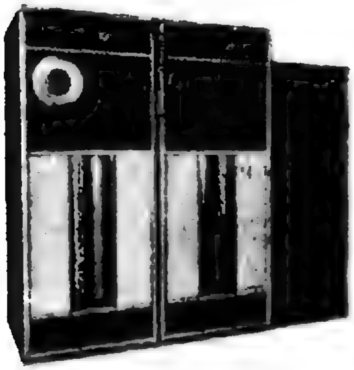
Первый разряд регистра отводится для записи знака числа (мантиссы). Число 1 в разряде соответствует минусу, 0 — плюсу. Второй разряд показывает знак порядка. В данном примере порядок имеет знак плюс. Разряды с 3 по 5 отведены для записи порядка; в данном примере порядок равен +3. Разряды с 6 по 9 служат для записи двоичной мантиссы. Единица в 6-м разряде соответствует 2^{-1}, в 7-м — 2^{-2}, в 8-м — 2^{-3} и т. д. Таким образом, записано число $-\left(1\cdot\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{4}+0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{1}{16}\right)\cdot 2^{3}=-4{,}5.$

В приведенном примере мантисса может изменяться от

$-\frac{15}{16}$ до $+\frac{15}{16}$, а порядок от -7 до $+7$. В ЭВМ серии ЕС в 32-разрядных регистрах хранятся числа от $\approx 5{,}4 \cdot 10^{-79}$ до $\approx 7{,}2 \cdot 10^{75}$.



В ЭВМ ближайшего будущего на смену кремниевым БИС придут ИС оперативной памяти на основе полупроводникового материала арсенида галлия. На фотографии показана ячейка такой ИС, имеющая размер 62×65 мкм. Полевые транзисторы, входящие в состав схемы, имеют затворы длиной 1 мкм. Кристалл с объемом памяти 4 кбит содержит 26600 полевых транзисторов и имеет размер 5,6×6 мм. Быстродействие ИС — 2 нс.



Объем оперативной памяти недостаточен для решения сложных задач на ЭВМ. Основная часть информации хранится во внешней памяти, имеющей гораздо больший объем, хотя и меньшее быстродействие. На фотографии изображено устройство внешней памяти на магнитной ленте, немного похожее на обычный катушечный магнитофон. На ленте длиной 750 м может храниться до 6 млн. 32-разрядных чисел. Время считывания всей такой ленты составляет 6—7 минут.

шенно эквивалентны. Вход R используется для установки начального «нулевого» состояния триггера, а вход S — для подачи сигнала, который необходимо запомнить. Выход триггера, напряжение на котором устанавливается равным «1» при подаче «1» на S, называется основным (верхний вывод на рисунке 1), а второй вывод, напряжение на котором инверсно по отношению к входному сигналу, называется дополнительным. Инверсия, так же как и в схемах типа «НЕ», обозначается кружком.

Входы «установка нуля» R всех триггеров соединены; на них перед записью подается сигнал «1», в результате чего на всех основных выходах триггеров устанавливается «0».

Проследим, как происходит запись числа в регистр. Каждая из входных схем «И» имеет два входа. Один из них (нижний на рисунке 1) — общий для всех схем. Проводник, соединяющий эти общие входы, называется шиной записи (ЗАП). Если на шину записи подано нулевое напряжение, то на всех выходах схем «И» также будет нулевое напряжение, независимо от сигналов на вторых, «сигнальных» входах — таково свойство схем типа «И» (см. заметки в № 1, 2 «Квант», 1986). Однако, если на шину записи ЗАП подается сигнал «1» — разрешение записи,— то напряжение на выходах схем «И», а следовательно, и на S — входах триггеров будет зависеть от того, какой сигнал поступает в этот момент на вторые, сигнальные входы схем «И».

На рисунке 1 для примера показана запись числа 9 (1001). В первом и четвертом разрядах на сигнальных входах сигнал «1». Если на шине ЗАП также сигнал «1», то на вход S триггеров 1-го и 4-го разрядов поступит сигнал «1», который «перевернет» эти триггеры. В 1-м и 4-м разрядах запишется «1». В разрядах 2 и 3, где на сигнальных входах «0», на выходах схем «И» также будет «0» и в триггерах останется записанным «0».

Действие выходных схем «И» аналогично действию входных. Как только на шину считывания (СЧ) будет подан сигнал «1», на выходах схем «И» появятся сигналы «1» в тех разрядах, в которых на основном выходе триггера была записана «1».

В схемах реальных регистров используются и дополнительные выходы триггеров. На этих выходах создается так называемый «обратный код» записанного числа, в котором на месте «1» находятся «0» и наоборот. Обратный код используется в ЭВМ для осуществления некоторых арифметических операций с двоичными числами.

Совокупность регистров, используемых ЭВМ для запоминания программы работы, исходных и промежуточных данных математических действий, называется оперативной памятью. Оперативная память одной из больших отечественных ЭВМ «БЭСМ-6» содержит 32768 ($32768=2^{15}$) регистров, каждый из которых позволяет хранить 48-разрядные двоичные числа.

От оперативной памяти требуется высокое быстродействие, потому что она должна успевать записывать и считывать числа с такой же скоростью, с какой машина производит вычисления. Среди современных промышленных интегральных схем наибольшим быстродействием обладают ИС на основе кремниевых биполярных транзисторов. Поэтому оперативная память больших ЭВМ выполняется из логических схем и триггеров на биполярных транзисторах.

Регистры микрокалькуляторов изготавливаются на основе полевых МДП-транзисторов. Быстродействие такой памяти значительно ниже, но зато МДП-транзисторы потребляют гораздо меньше энергии. Благодаря этому микрокалькуляторы могут десятки часов работать от миниатюрной батарейки.

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Найдите наименьшее значение выражения

$$2x^2-2xy+5y^2+2x+2y.$$

2. Найдите сумму

$$1\cdot 3+3\cdot 5+5\cdot 7+7\cdot 9+\ldots+999\cdot 1001.$$

3. Известно, что $n-1$ делится на 15, а 1001 делится на $n+1$. Найдите n.

4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90°$) проведена высота CD. Найдите: а) радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, если радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны r_1 и r_2; б) периметр треугольника ABC, если периметры треугольников ACD и BCD равны P_1 и P_2.

5. На окружности, описанной около правильного треугольника ABC, взята точка. Найдите сумму квадратов расстояний от этой точки до вершин треугольника, если сторона треугольника равна a.

Девятый класс

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\ldots+9x_9+10x_{10}=55, \\ x_2+2x_3+\ldots+9x_{10}+10x_{11}=55, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{10}+2x_1+\ldots+9x_8+10x_9=55. \end{cases}$$

7. Докажите неравенство

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}>x+y+z \text{ при } xyz>0.$$

8. Пусть AD — биссектриса угла A в треугольнике ABC. Докажите, что

$$AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD.$$

9. Докажите, что произвольную треугольную пирамиду можно рассечь плоскостью так, чтобы в сечении получился ромб.

10. Решите уравнение

$$4x^2-4x-3=4\left[\frac{2x-1}{2}\right].$$

(Здесь квадратные скобки означают целую часть числа.)

Десятый класс

11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3=7x+2y, \\ y^3=2x+7y. \end{cases}$$

12. На стороне BC треугольника ABC найдите такую точку D, чтобы окружности, вписанные в треугольники ABD и ACD, касались друг друга.

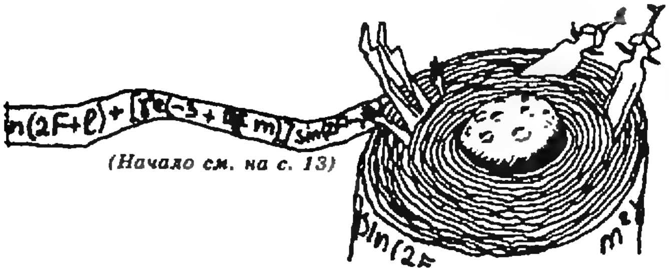
13. Решите уравнение

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}.$$

14. Сколькими разными способами из листа клетчатой бумаги $m\times n$ можно вырезать прямоугольник со сторонами, идущими по линиям сетки?

15. При каком положении в пространстве спичечной коробки площадь ее тени будет наибольшей? (Тень — это ортогональная проекция на горизонтальную плоскость.)

Публикацию подготовил А. А. Егоров



(Начало см. на с. 13)

учтены не только солнечные возмущения, но и влияние несферичности Земли, притяжение планет, небольшая релятивистская поправка. И все же теория Брауна обнаруживала странные неувязки, давала хотя и очень малые, но заметные расхождения с наблюдениями. Уже в 40-х годах нашего столетия было установлено, что теория здесь опять не виновата, а имеет место неравномерность вращения Земли, а значит, и неравномерность времени, которое определяется по вращению нашей планеты. С переходом к эфемеридному времени, текущему равномерно (оно определяется с помощью атомных часов), все неувязки отпали.

Развитие космических полетов, в том числе к Луне, установка на поверхности Луны уголковых отражателей для лазерной локации существенно повысили требования к точности лунной теории. Теперь расстояние до Луны мы можем определять с точностью до 25 см. Совершенствование ЭВМ открыло новые возможности.

Группа французских ученых сумела с помощью ЭВМ проверить теории Делоне и Хилла — Брауна и получила все нужные величины с потрясающей точностью: до 1″ по углам и с «лазерной» точностью по расстоянию. Для этого пришлось брать в разложениях уже много тысяч членов. Впрочем, для ЭВМ это особого труда не составило. Созданная таким образом теория была затем с успехом применена и к изучению движения искусственных спутников Земли.

Так завершилась многовековая история построения теории движения Луны. Теперь мы знаем, что скрывается за столь, казалось бы, простой фразой: «Луна движется вокруг Земли по эллипсу...»

Тепловые процессы в газах

Кандидат физико-математических наук
А. И. БУЗДИН,
кандидат физико-математических наук
С. С. КРОТОВ

При переходе от раздела «Механика» к разделу «Молекулярная физика и тепловые явления» учащиеся не всегда достаточно ясно представляют себе принципиальные изменения в подходе к описанию изучаемых систем.

Во всех существующих в природе телах происходит движение составляющих эти тела мельчайших частиц (атомов и молекул). Оно, как известно, называется тепловым движением, и его характерная черта — беспорядочность. В механике мы отвлекаемся от этого внутреннего движения частиц и изучаем движение тела как целого. Часто можно вообще пренебречь размерами тела при описании его движения и считать тело материальной точкой. Материальная точка — основной объект механики.

В физике тепловых явлений, напротив, надо учитывать хаотическое движение гигантского числа частиц, из которых состоят газы, жидкости, твердые тела (порядка числа Авогадро $N_A \sim 10^{23}$ 1/моль). При этом главный интерес представляет нахождение усредненных величин, описывающих состояние системы в целом,— температуры, давления, плотности и т. п.

Наибольшее внимание в школе уделяется идеальным газам, подчиняющимся уравнению Менделеева — Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

где p — давление, V — объем, m — масса, M — молярная масса газа, R — универсальная газовая постоянная, T — температура газа.

Тепловым процессом можно считать любой процесс, при котором изменяется хотя бы один параметр, характеризующий состояние газа. Так, например, при изотермическом процессе над заданным количеством газа температура поддерживается постоянной, а давление и объем изменяются (но pV=const, соответственно закону Бойля — Мариотта).

Вспомните, что происходит с параметрами газа при изохорическом и изобарическом процессах.

Задача 1. *Тепловой процесс, который совершается с газом в замкнутом сосуде, на V—T-диаграмме имеет вид окружности (рис. 1). В каких точках максимальны и минимальны температура газа, его объем и давление?*

Точки, где максимальны и минимальны объем и температура, указать совсем легко. Это точки касания данной окружности соответствующими горизонтальными и вертикальными прямыми — изохорами и изотермами. Для ответа на вопрос о давлении построим на этой же диаграмме изобары.

При изобарическом процессе объем газа прямо пропорционален его температуре:

$$V = \frac{mR}{Mp}T,$$

следовательно, изобары представляют собой прямые линии, проходящие через начало координат, причем наклон их тем меньше, чем больше давление. Теперь ясно, что мы должны провести из начала координат касательные к окружности. При этом нижняя касательная будет отвечать максимальному давлению, а верхняя — минимальному.

Задача 2. *На p—V-диаграмме изображен процесс расширения газа, при котором газ переходит из состояния 1 с давлением p_0 и объемом V_0 в состояние 2 с давлением $p_0/2$ и объемом*

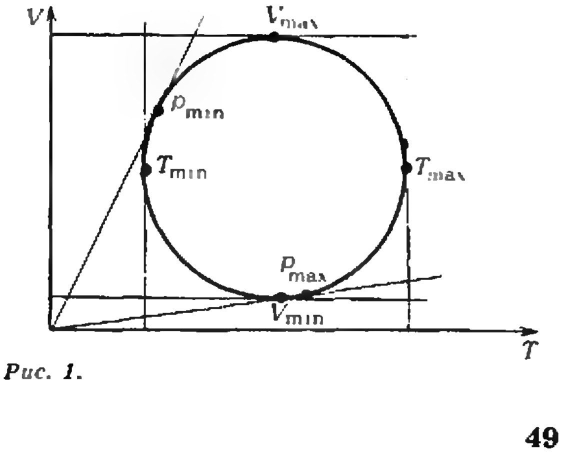


Рис. 1.

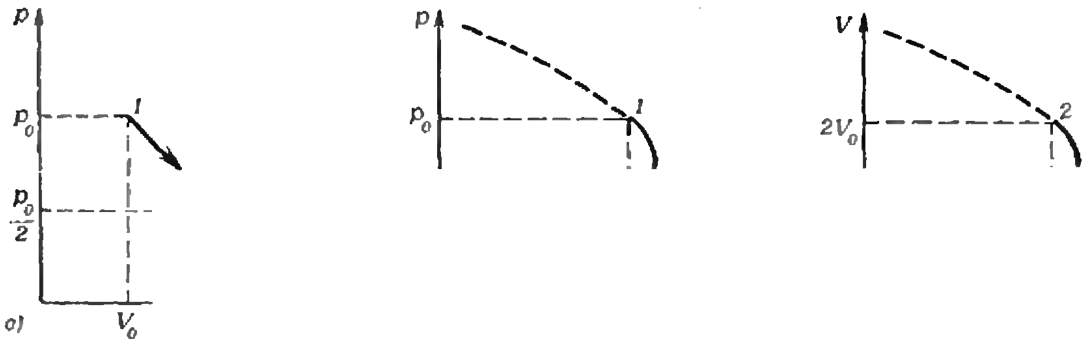


Рис. 2.

$2V_0$ (рис. 2. а). Изобразите соответствующий процесс на p—T- и V—T-диаграммах.

Поскольку на p—V-диаграмме процесс изображается отрезком прямой, давление и объем связаны соотношением $p=\alpha V+\beta$, где α и β — константы. Для их определения учтем взаимосвязь параметров p и V в состояниях *1* и *2* соответственно:

$$p_0=\alpha V_0+\beta,\ \frac{p_0}{2}=2\alpha V_0+\beta.$$

Отсюда

$$\alpha=-\frac{p_0}{2V_0},\ \beta=\frac{3}{2}p_0.$$

Таким образом, уравнение теплового процесса в переменных p, V имеет вид

$$p=-p_0\frac{V}{2V_0}+\frac{3}{2}p_0.$$

Учитывая уравнение Менделеева — Клапейрона, записанное в виде $pV=AT$ ($A=mR/\text{M}=\text{const}$), найдем уравнение процесса в переменных p, T:

$$\left(\frac{3}{2}p_0-p\right)p=\frac{Ap_0}{2V_0}T$$

и переменных V, T:

$$V\left(3-\frac{V}{V_0}\right)=\frac{2A}{p_0}T.$$

Так как произведение pV для состояний *1* и *2* одно и то же, конечная и начальная температуры совпадают и равны $T_0=p_0V_0/A$. В переменных p, T и V, T графики процесса будут участками парабол, изображенных на рисунках 2, *б* и *в*.

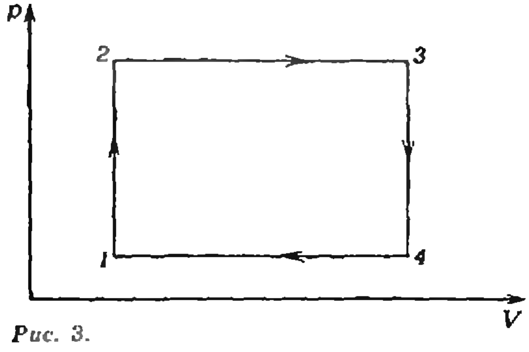


Рис. 3.

Задача 3. *Как меняется температура газа при тепловом процессе 1—2—3—4—1 (рис. 3)?*

На участке *1—2* давление растет при постоянном объеме, значит (в соответствии с законом Шарля), растет и температура. На участке *2—3* температура также увеличивается, поскольку происходит рост объема газа при постоянном давлении (закон Гей-Люссака). Аналогичные рассуждения позволяют заключить, что на участках *3—4* и *4—1* температура падает. Ответ легко получить также, проведя соответствующие изотермы на p—V-диаграмме.

При решении данной задачи подразумевалось, что масса газа оставалась все время постоянной. Ответьте самостоятельно на такой вопрос: как должна меняться масса газа, чтобы при постоянной температуре тепловой процесс на p—V-диаграмме изображался так же, как на рисунке 3?

Задача 4. *На рисунке 4 представлены две изотермы разных газов одинаковой массы. Чем отличаются эти газы, если их температуры одинаковы?*

В соответствии с законом Менделеева — Клапейрона,

$$p=\frac{mR}{\text{M}V}T,$$

поэтому единственной причиной тому, почему газ *1* имеет всегда большее давление (при одном и том же объеме), является его меньшая по сравнению с газом *2* молярная масса.

Вопрос: Могут ли пересекаться какие-либо изотермы двух произвольных газов?

Задача 5. *Моль идеального газа участвует в тепловом процессе 1—2—3—4—1, изображенном в p—V-координатах на рисунке 5, а. Продолжения отрезков прямых 1—2 и 3—4 проходят через начало координат, а кривые 1—4 и 2—3 являются изотерма-*

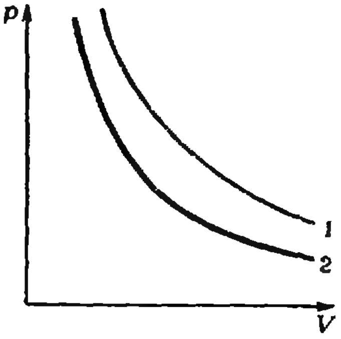


Рис. 4.

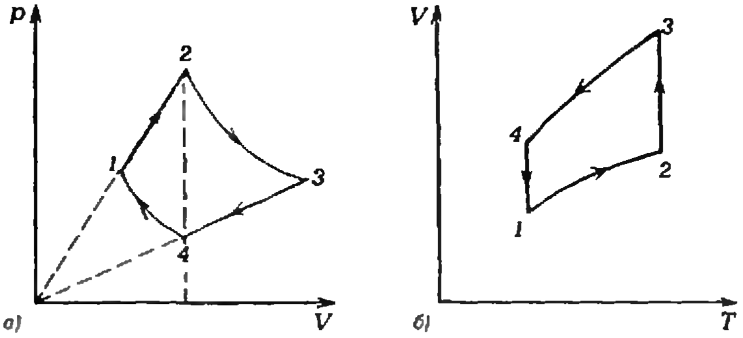


Рис. 5.

ми. Изобразите этот процесс в V—T-координатах и найдите объем V_3, если известны объемы V_1 и $V_2=V_4$.

На участке *1—2* параметры p и V связаны соотношением $p=\alpha_1 V$, на участке *3—4* $p=\alpha_2 V$, причем $\alpha_1>\alpha_2$. Тогда в переменных V, T процесс можно описать следующими равенствами: на участке *1—2* $\alpha_1 V^2=RT$, на участке *2—3* $T=T_2=\mathrm{const}$, на *3—4* $\alpha_2 V^2=RT$ и на *4—1* $T=T_1=\mathrm{const}$. Соответствующий график изображен на рисунке 5, *б*.

Так как $T_1=T_4$, то $\alpha_1 V_1^2=RT_1$ и $\alpha_2 V_2^2=RT_1$, откуда

$$\alpha_1 V_1^2=\alpha_2 V_2^2.$$

Кроме того,

$$\frac{p_1 V_1}{T_1}=\frac{p_3 V_3}{T_2}.$$

Поэтому

$$\frac{V_1^2}{T_1}=\frac{V_2^2}{T_2}, \qquad \frac{\alpha_2 V_3^2}{T_2}=\frac{\alpha_1 V_1^2}{T_1}$$

и

$$V_3=\frac{V_2^2}{V_1}.$$

* * *

Важнейшей характеристикой газа является его внутренняя энергия U. С точки зрения молекулярно-кинетической теории внутренняя энергия идеального газа представляет собой среднюю кинетическую энергию хаотического движения его молекул. Важно отметить, что внутренняя энергия однозначно связана с состоянием газа.

Изменение внутренней энергии при переходе газа из одного состояния в другое не зависит от способа перехода (от вида теплового процесса), а определяется *лишь* значениями параметров конечного и начального состояний системы. Так, для одноатомного идеального газа

$$U=\frac{3}{2}\frac{m}{M}RT, \text{ и } \Delta U=\frac{3}{2}\frac{m}{M}R\Delta T.$$

При любом тепловом процессе изменение внутренней энергии ΔU равно сумме подведенного к системе количества теплоты Q и совершенной над газом работы A:

$$\Delta U=Q+A.$$

Это — первый закон термодинамики, а по существу — закон сохранения энергии при тепловых процессах. Его можно сформулировать несколько по-другому:

$$Q=\Delta U+A',$$

где A' — работа, совершаемая самой системой.

То, как изменяется температура газа при подводе к нему тепла, определяется теплоемкостью газа. Теплоемкость C измеряется отношением количества теплоты Q, подведенного к газу, к изменению температуры газа ΔT: $C=Q/\Delta T$. При проведении конкретных расчетов бывает удобно пользоваться как полной теплоемкостью, так и удельной (в расчете на единицу массы) или молярной (в расчете на один моль). Отметим, что теплоемкость зависит не только от свойств газа, но также и от того, при каких условиях ему сообщают тепло, то есть от вида теплового процесса, совершаемого над газом.*) Так, например, теплоемкость газа при изобарическом процессе C_p всегда больше теплоемкости при изохорическом процессе C_V.

Подумайте: Чему равна теплоемкость газа при адиабатном процессе? А при изотермическом? Возможен ли процесс, при котором теплоемкость отрицательна?

Задача 6. *В горизонтальном неподвижном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем массы M, находится один моль идеального газа. Газ нагревают; при этом поршень,*

---

*) Подробнее о теплоемкости газа можно прочитать в статье С. М. Козела и А. А. Шеронова «Теплоемкость идеального газа» («Квант», 1984, № 4). *(Примеч. ред.)*

двигаясь равноускоренно, приобретает скорость v. Найдите количество теплоты, сообщенное газу. Внутренняя энергия моля газа $U=CT$. Теплоемкостью сосуда и поршня, а также внешним давлением пренебречь.

Единственная сила, сообщающая поршню ускорение, есть сила давления газа. Раз поршень движется равноускоренно, значит, давление газа поддерживается постоянным. Пусть это давление равно p_0, тогда работа газа

$$A'=p_0\Delta V=\frac{Mv^2}{2}.$$

Из уравнения состояния моля газа

$$p_0\Delta V=R\Delta T,$$

а из первого закона термодинамики

$$Q=\Delta U+A'=C\Delta T+\frac{Mv^2}{2}.$$

Откуда получаем

$$Q=\frac{Mv^2}{2}\left(\frac{C}{R}+1\right).$$

Задача 7. *В вертикальном сосуде объемом V под тяжелым поршнем находится газ при температуре T. Масса поршня M, его площадь S. Для повышения температуры газа на ΔT градусов ему было сообщено количество теплоты Q. Найдите изменение внутренней энергии газа. Атмосферное давление p_0, ускорение свободного падения g. Трение не учитывать.*

Поскольку сообщенное газу количество теплоты известно, чтобы воспользоваться первым законом термодинамики и узнать изменение внутренней энергии газа, мы должны найти работу A, совершаемую над газом. На газ давит поршень с силой F, численно равной сумме силы тяжести поршня Mg и силы атмосферного давления на поршень p_0S. При нагревании газ расширяется, поршень движется вверх, то есть против действия внешней силы, поэтому работа A отрицательна и равна

$$A=-Fx=-(Mg+p_0S)x,$$

где x — перемещение поршня.

Во время нагревания сила F не меняется, следовательно, остается постоянным и давление газа, а тогда, в соответствии с законом Гей-Люссака,

$$\frac{V'}{V}=\frac{T'}{T},$$

где $V'=V+\Delta V$ — объем газа после нагревания, а $T'=T+\Delta T$ — его температура. Отсюда находим изменение объема ΔV и перемещение поршня x:

$$\Delta V=V\frac{\Delta T}{T},\ x=\frac{\Delta V}{S}=\frac{V\Delta T}{TS}.$$

Теперь мы можем определить работу, совершаемую над газом:

$$A=-Fx=-(Mg+p_0S)\frac{V\Delta T}{TS}$$

и изменение его внутренней энергии:

$$\Delta U=Q+A=Q-(Mg+p_0S)\frac{V\Delta T}{TS}.$$

Задача 8*. *Над идеальным двухатомным газом совершают процесс, в котором давление и объем газа связаны соотношением $p=\alpha V$. Чему равна молярная теплоемкость газа при его расширении в таком процессе? Молярная теплоемкость при постоянном объеме $C_V=5/2\ R$.*

Рассмотрим процесс с одним молем идеального газа. Если его объем не меняется, то работа не совершается и $Q=\Delta U=C_V\Delta T$, то есть знание теплоемкости при постоянном объеме сразу же позволяет найти изменение внутренней энергии газа:

$$\Delta U=\frac{5}{2}R\Delta T.$$

Теперь определим совершаемую газом работу A'.

Пусть в результате расширения газа от объема V до $V+\Delta V$ его температура изменилась от T до $T+\Delta T$ (мы считаем ΔV и ΔT малыми). Давление газа при этом увеличилось от p до $p+\Delta p$, где $\Delta p=\alpha\Delta V$. Поскольку ΔV мало, работу газа можно считать равной

$$A'=p\Delta V.$$

Затем запишем уравнение Менделеева — Клапейрона для моля газа при температурах T и $T+\Delta T$:

$$pV=RT,\quad (p+\Delta p)(V+\Delta V)=R(T+\Delta T).$$

Вычитая из второго уравнения первое и пренебрегая произведением малых величин $\Delta p\Delta V$ по сравнению с Δp и ΔV, получим

$$p\Delta V+V\Delta p=R\Delta T.$$

Поскольку $V=p/\alpha$ и $\Delta p=\alpha\Delta V$, произведение $V\Delta p=(p/\alpha)(\alpha\Delta V)=p\Delta V$ и

$$p\Delta V+V\Delta p=2p\Delta V=R\Delta T.$$

Отсюда находим работу газа

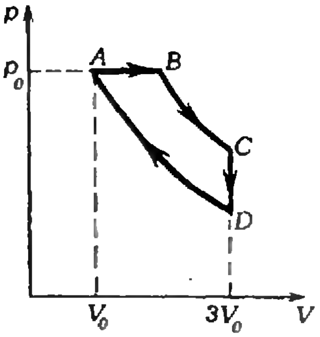
$$A'=p\Delta V=\frac{R\Delta T}{2}$$

и подведенное к газу количество теплоты

$$Q=\Delta U+A'=\frac{5}{2}R\Delta T+\frac{1}{2}R\Delta T=3R\Delta T.$$

Таким образом, молярная теплоемкость газа в данном процессе будет равна

$$C=\frac{Q}{\Delta T}=3R.$$



	p	V	T
A	p_0	V_0	T_0
B	p_0		$2T_0$
C		$3V_0$	$2T_0$
D		$3V_0$	T_0

Рис. 6.

Упражнения

1. Состояние идеального газа изменяется по циклу $ABCDA$, изображенному на рисунке 6. В таблице указаны некоторые параметры газа в соответствующих точках цикла. Определите недостающие параметры и заполните таблицу до конца.

2. Процесс, происходящий в цилиндре теплового двигателя с идеальным газом, изображен в $p-V$-координатах на рисунке 3. Известно, что $T_1=300$ К, $T_3=500$ К, $T_4=450$ К. Найдите, на сколько градусов температура в точке 2 отличается от температуры в точке 4.

3. Процесс с идеальным газом сначала идет так, что давление и объем связаны равенством $p\sqrt{V}=B$. Когда температура газа достигает значения T, процесс продолжается при ином характере зависимости давления от температуры: $p=D/V^2$. Найдите упомянутую температуру T, если константы B и D, а также количество вещества ν заданы.

4. Какая часть воздуха выйдет из аудитории при повышении температуры в ней на 10 градусов?

5*. Найдите теплоемкость одного моля идеального одноатомного газа при тепловом процессе, в котором $p=\alpha V^n$ (α и n — константы).

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(Математико-механический факультет)

1. Для каких действительных значений a каждое решение неравенства

$$(0,4)^{x^2+1}>(6,25)^{a-3x}$$

является решением неравенства $x^2-6x+4<a^2$?

2. Решите уравнение

$$1+\log_{x-2}(4x-11)=2\log_{4x-11}(4x^2-19x+22).$$

3. Решите уравнение

$$2\sin x=\sqrt{4+\cos 3x}.$$

4. В равнобедренной трапеции, описанной около окружности радиуса R, отношение длин боковой стороны и большего основания есть заданное число k. Найдите длину меньшего основания.

5. Две секущие плоскости расположены симметрично относительно центра шара радиуса R. Найдите множество возможных значений отношения площади полной поверхности части шара, заключенной между обеими плоскостями к площади поверхности шара. Считая, что это отношение равно $7/8$, определите расстояние от центра шара до секущей плоскости.

Вариант 2

(Факультет прикладной математики — процессов управления)

1. В математической модели экономического роста хозяйства, производящего некоторый продукт для потребления и увеличения запасов основных фондов, P (ежегодное потребление продукта на душу занятых в производстве) и x (число занятых в производстве рабочих) связаны функциональной зависимостью

$$P=\frac{x(M-x)-b}{x},$$

где M, b — постоянные, характеризующие производственные возможности хозяйства. При $M=250$, $b=8464$ определите число рабочих, соответствующее наибольшему значению P, в хозяйствах с 80, 90, 120 и 150 рабочими местами.

2. Решите неравенство

$$x>\log_{1/2}(4-x)+\log_2(6^x+(x-1)2^x).$$

3. Решите неравенство

$$2+\sin x=\frac{3(1+\cos x)}{\sin x}.$$

4. Средняя линия трапеции делится одной из диагоналей в отношении k и делит трапецию на две части, меньшая из которых — площади S. Найдите площадь трапеции.

5. В правильной шестиугольной пирамиде угол между смежными боковыми гранями равен β, а сторона основания равна a. Найдите площадь диагонального сечения пирамиды, содержащего центр основания. (Диагональным сечением называется сечение пирамиды плоскостью, проходящей через два боковых ребра, не лежащих в одной грани.)

Вариант 3

(Физический факультет)

1. Определите a так, чтобы сумма квадратов всех решений уравнения

$$2\log_a|x-1|-\log_a x=1$$

равнялась 34.

2. Решите неравенство

$$4x+\sqrt{(6-x)(7-3x)}>0.$$

3. Решите уравнение

$$\sin^2 2x-2\cos 2x=1+4\sin^4\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

4. В равнобедренной трапеции боковая сторона равна c, а диагональ, равная l, делит площадь трапеции в отношении $3/5$. Найдите основания трапеции.

5. В правильной треугольной пирамиде боковая грань образует угол α с плоскостью

основания. Найдите величину двугранного угла, образованного двумя боковыми гранями.

Вариант 4

(Химический факультет)

1. В лаборатории имеется смесь, общий вес которой на 3,3 кг больше веса содержащегося в ней титана. Определите общий вес смеси и процентное содержание титана, если известно, что при добавлении 2 кг новой смеси, содержащей 25 % титана, получается смесь, содержащая 20 % титана.

2. Вычислите отрицательный коэффициент b и корни уравнения $x^2+bx-1=0$, если известно, что с увеличением каждого из этих корней на 1 они становятся корнями уравнения $x^2-b^2x-b=0$.

3. Решите уравнение

$$\sin 2x+\sin 4x=\sin x+2\cos x\sin 4x.$$

4. Три круга радиусов r, $\frac{3}{2}r$, $\frac{3}{2}r$ расположены на плоскости так, что каждые два из них касаются друг друга внешним образом (имеют только одну общую точку). Определите радиус круга, в который вписана данная система трех кругов.

5. Основанием пирамиды является прямоугольник с меньшей стороной a и углом между диагоналями α. Найдите объем пирамиды, если все боковые ребра образуют с плоскостью основания угол β.

Вариант 5

(Геологический и географический факультеты)

1. Пешеход и велосипедист отправляются из пункта A в пункт B. Скорость пешехода равна 5 км/ч. После того как он прошел 8 км, его догоняет велосипедист, выехавший на 1 час 16 минут позднее. Новая встреча происходит через 24 минуты с момента, когда пешеход, пройдя еще 8 км, остановился на отдых, а велосипедист, доехав до пункта B, после 20-минутной остановки в B возвращается из B в A. Найдите расстояние между A и B и скорость велосипедиста.

2. Решите уравнение

$$\cos^2 5x+\cos^2 x+\cos 6x=1.$$

3.1. *(геологический факультет).* Решите уравнение $18x^2+2/x^2=16-3x-1/x$.

3.2. *(географический факультет).* Решите неравенство $18x^2+2/x^2\leqslant 16-3x-1/x$.

4. Изобразите на плоскости множество точек $M(x;\ y)$, для которых

$$|x+y|\geqslant 2,\quad x^2+y^2\leqslant 2(1+x+y),$$

и вычислите его площадь.

5. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен 90°, а площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через одну из вершин основания и середины противолежащих этой вершине боковых ребер, равна 6 см². Найдите объем пирамиды.

Вариант 6

(Биолого-почвенный факультет)

1. В совхозе имеются две теплицы общей площадью в 160 кв. метров. В 1-ой теплице собрали 1800 кг огурцов, а во 2-й — 1320 кг, причем во 2-ой теплице с 1 кв. метра собрали на 4 кг огурцов больше, чем с 1 кв. метра в 1-ой теплице. Сколько собрали огурцов с 1 кв. метра в той и другой теплице?

2.1. Решите уравнение

$$\log_{2\cos x}(7-3\operatorname{tg}^2 x-6\cos 2x)=2.$$

2.2. *(отделение почвоведения).* Решите уравнение

$$7-3\operatorname{tg}^2 x-6\cos 2x=4\cos^2 x.$$

3.1. Решите неравенство

$$\sqrt{3^{1-x}-\frac{24}{1-3^x}}<\sqrt{9-\frac{8}{1-3^x}}.$$

3.2. *(отделение почвоведения).* Решите уравнение

$$\sqrt{3^{1-x}-\frac{24}{1-3^x}}=\sqrt{9-\frac{8}{1-3^x}}.$$

4. В квадрате $ABCD$ со стороной a точки E и F являются серединами сторон AB и CD соответственно. Точка K лежит на CF, точка N — на AD, а отрезки EF и KN пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника KFM, если известно, что $\frac{|CK|}{|KF|}=\frac{1}{5}$, а площадь трапеции $EMNA$ составляет $\frac{3}{10}$ площади квадрата.

5. Угол между прямой и плоскостью равен α, а проекция прямой на плоскость образует угол β с другой прямой, лежащей в этой плоскости. Найдите угол между прямыми.

Вариант 7

(Факультет психологии)

1. Определите год рождения одного из основоположников науки нового времени, если известно, что сумма цифр его года рождения равна 21, а если к году рождения прибавить 5355, то получится число, написанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

2. В зависимости от a расположите в порядке возрастания числа 4, 1 и корни уравнения $x^2-2ax+2a^2-4a+3=0$.

3. На отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ решите неравенство

$$\sin 4x+\sin 3x<\sin 2x-2\sin x.$$

4. Найдите длину стороны квадрата, вписанного в равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной b так, что две его вершины лежат на основании, а две другие вершины — на боковых сторонах.

5. В правильной треугольной пирамиде по стороне основания a и величине α двугранного угла, образованного двумя боковыми гранями, определите длину бокового ребра.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Вариант 1

1. Небольшой шар массой M, подвешенный на невесомой и нерастяжимой нити длиной l, совершает гармонические колебания с амплитудой A. В тот момент, когда шар максимально удален от положения равновесия, из точки, находящейся на одной высоте с точкой подвеса на расстоянии L по горизонтали от нее, вылетает пуля массой m. Траектория пули лежит в плоскости колебаний шара. С какой скоростью должна вылететь пуля, чтобы она попала в шар в тот момент, когда он проходит через положение равновесия, причем после застревания пули в шаре и мгновенного обрыва нити оба тела упали бы вертикально вниз? Сопротивлением воздуха пренебречь.

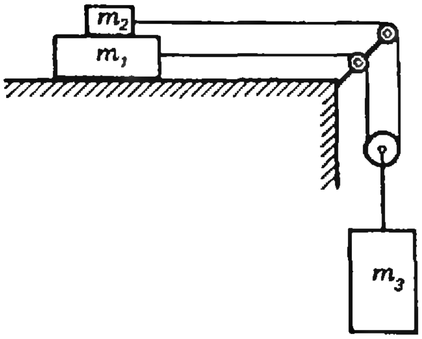


Рис. 1.

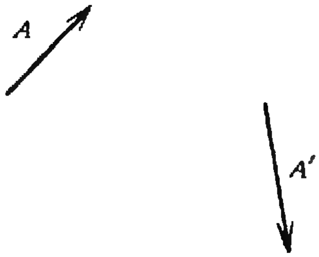


Рис. 2.

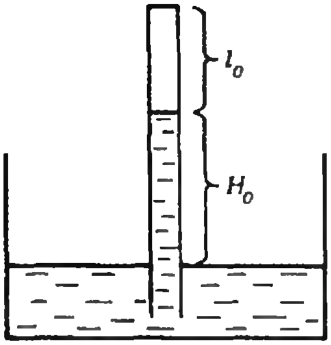


Рис. 3.

2. В закрытом цилиндрическом сосуде, расположенном вертикально, поршень разделяет две равные массы газа. Если температура газа везде одинакова, объем нижней части в 3 раза меньше объема верхней части сосуда. Во сколько раз нужно изменить температуру газа внизу, оставив неизменной температуру вверху, чтобы объем нижней части был в 4 раза меньше объема верхней части? Газ считать идеальным.

3. Какое минимальное число батареек с ЭДС $\mathscr{E}=10$ В и внутренним сопротивлением $r=4$ Ом нужно соединить параллельно и каким должно быть сопротивление шунта, чтобы обеспечить работу нагрузки, рассчитанной на напряжение $U=2$ В и мощность $P=25$ Вт?

4. Узкий параллельный пучок лазерного излучения распространяется в среде с показателем преломления n_1 на расстоянии l от оси, проходящей через центр прозрачного шара радиуса R. Ширина пучка много меньше радиуса шара. Найдите угол отклонения пучка от первоначального направления, если шар изготовлен из оптически менее плотного вещества с показателем преломления n_2.

5. Теоретический вопрос. Постулаты Бора. Излучение и поглощение энергии атомами.

Вариант 2

1. На горизонтальной поверхности лежит брусок массой m_1, а на нем находится брусок массой m_2. Через систему невесомых блоков на них действует груз массой $m_3=m_1+m_2$ (рис. 1). Коэффициент трения между брусками равен μ, между нижним бруском и поверхностью трение отсутствует. Найдите, при каком соотношении масс бруски движутся с одинаковыми ускорениями. Нити нерастяжимы и невесомы.

2. Два поршня, скользящих без трения внутри горизонтально расположенного цилиндрического сосуда, делят его объем на 3 части. В одной части находится идеальный газ с молярной массой M_1, в другой — с молярной массой M_2, в третьей — с молярной массой M_3. Массы газов равны m_1, m_2, m_3 соответственно, а их температуры T_1, T_2, T_3. Найдите соотношения между объемами частей сосуда.

3. Батарея аккумуляторов, соединенных последовательно, подключается один раз к нагрузке с сопротивлением R_1, а другой раз — к нагрузке с сопротивлением R_2. Сколько аккумуляторов соединено в батарею и какова ЭДС одного аккумулятора, если в обоих случаях на нагрузке выделялась одна и та же мощность? Внутреннее сопротивление одного аккумулятора равно r.

4. На рисунке 2 даны: A — предмет, A' — его изображение. Найдите положения линзы и ее фокусов.

5. Теоретический вопрос. Фотоэффект.

Задачи устного экзамена

Математико-механический факультет, факультет прикладной математики — процессов управления, химический и геологический факультеты

1. Тело свободно падает с высоты $h=270$ м. Разделите эту высоту на три части, такие, чтобы на прохождение каждой из них потребовалось бы одно и то же время.

2. Веревка выдерживает груз массой $m_1=90$ кг при вертикальном подъеме его с некоторым ускорением и груз массой $m_2=110$ кг при движении вниз с таким же ускорением. Груз какой максимальной массы можно поднимать с помощью этой веревки с постоянной скоростью?

3. Два шара подвешены на тонких параллельных нитях, касаясь друг друга. Меньший шар отводится на некоторый угол от первоначального положения и отпускается. После удара шары поднимаются на одинаковую высоту. Определите массу меньшего шара, если масса большего $M=0{,}6$ кг, а удар — абсолютно упругий.

4. В чашечный ртутный барометр попал воздух, в результате чего при нормальных условиях барометр показывает $H_0=740$ мм рт. ст., а расстояние от уровня ртути в трубке до запаянного конца $l_0=10$ см (рис. 3). Чему равно истинное значение атмосферного давления при температуре $t=20$ °C, если в этом случае барометр показывает $H=730$ мм рт. ст.? Тепловым расширением ртути и трубки пренебречь.

5. Некоторое тело находится в воздухе при нормальных условиях. При увеличении температуры воздуха на $\Delta t_1=10$ °C (но постоянном давлении) вес тела увеличивается на $\Delta P_1=0{,}02$ Н. Как изменится вес тела при увеличении температуры воздуха до $t_2=50$ °C и увеличении давления до $p_2=800$ мм рт. ст.? Расширением тела пренебречь.

6. После того как в комнате протопили печь, температура поднялась с $t_1=15$ °C до $t_2=27$ °C. На сколько процентов изменилось число молекул воздуха в этой комнате?

7. Два одинаковых резистора с сопротивлением R каждый подключаются к источнику с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r сначала параллельно, а затем последовательно. В каком случае потребляется бóльшая мощность во внешней цепи?

8. Вольтметр со шкалой на $U=100$ В имеет сопротивление $R=10$ кОм. Какую наибольшую

разность потенциалов можно измерить этим прибором, если присоединить к нему добавочное сопротивление $R_x=90$ кОм?

9. Перемещая линзу между предметом и экраном, нашли два положения, при которых линза дает на экране четкое изображение предмета. Найдите высоту предмета, зная, что высота первого изображения h_1, а второго h_2.

10. Источник света расположен на расстоянии, равном 1,5 F от собирающей линзы (F — ее фокусное расстояние). На каком расстоянии от линзы необходимо поместить плоское зеркало, чтобы лучи, отраженные от зеркала, вторично пройдя линзу, собрались на двойном фокусном расстоянии от нее?

Публикацию подготовили *В. Ф. Осипов, В. Н. Скребов, Г. А. Федотов*

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(Факультеты физико-механический, технической кибернетики, радиофизический)

1. Найдите $\operatorname{tg} 2\alpha$, если известно, что $\sin(\alpha-90^\circ)=\frac{5}{13}$ и $\sin\alpha<0$.

2. В конус вписана правильная шестиугольная пирамида так, что их вершины и плоскости оснований совпадают. Найдите объем и боковую поверхность конуса, если боковые грани пирамиды составляют угол $\frac{\pi}{3}$ с основанием, а длина стороны основания равна 2.

3. Решите неравенство $\frac{\lg^2 x-3\lg x+3}{\lg x-1}<1$.

4. Найдите период функции $y=f'(x)$ и нарисуйте ее график, если

$$f(x)=\frac{\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin(3\pi-4x)-\cos\left(\frac{5\pi}{2}+6x\right)}{4\sin(5\pi-3x)\cos(x-2\pi)}-\frac{3}{4}x.$$

5. Известно, что многочлен

$$p(x)=x^4+(\beta+2)x^3+(\alpha+2\beta)x^2+(3\alpha+\beta-4)x+2\alpha-3$$

имеет корень, не зависящий от α и β. Найдите этот корень. Найдите все такие числа α, β, что $p(x)$ равен квадрату квадратного трехчлена.

Вариант 2

(Факультет технической кибернетики)

1. Найдите x, если числа $\lg 2$, $\lg(2^x-1)$, $\lg(2^x+3)$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

2. Решите уравнение $2(1-\cos 2x)=\sqrt{3}\operatorname{tg} x$.

3. Решите уравнение $2-4\log_3\sqrt[3]{x-1}=\log_3(5x+3)$.

4. В параллелограмме $ABCD$ точка M — середина стороны BC, точка N — середина CD. Пусть E — точка пересечения AM и BD, а F — точка пересечения AN с BD. Выразите вектор $\overrightarrow{NE}$ через $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, если они имеют единичную длину и сонаправлены с $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ соответственно, а $|AB|=4$, $|AD|=7$.

5. Найдите область определения функции

$$f(x)=\lg\frac{4\cos^2 x-6e^{\cos 2x}+2}{30x^2-x-1}.$$

Вариант 3

(Факультеты физико-механический и радиофизический)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=9,\\ xy=324.\end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\frac{x}{x-3}-1>\frac{1}{x+2}.$$

3. Решите уравнение

$$\log_3(4\cdot 3^x-1)=2x-1.$$

4. Диагонали разбивают выпуклый четырехугольник на четыре треугольника. Радиусы окружностей, описанных около этих треугольников, одинаковы и равны 2. Найдите длины сторон четырехугольника.

5. Для функции $F(x)=(\sin x)^{-1/3}\cos x+x+1$ найдите область определения и промежутки возрастания и убывания. Исходя из найденного установите, что больше: $A=\cos 3\times\sqrt[3]{\sin 2}-\cos 2\cdot\sqrt[3]{\sin 3}$ или $B=\sqrt[3]{\sin 2\cdot\sin 3}$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Тело подвешено на нити длиной l. Какую скорость надо сообщить этому телу, чтобы оно, двигаясь по окружности, смогло только-только достигнуть верхней точки своей траектории?

2. Твердое тело движется в воздухе со скоростью v, превышающей среднюю скорость движения молекул воздуха. Покажите, что сила сопротивления пропорциональна $S v^2$, где S — площадь лобового сечения тела.

3. Одноатомный газ массой $m=5$ кг (молярная масса газа $M=4\cdot10^{-3}$ кг/моль) нагревают на $\Delta T=150$ К при постоянном объеме. Найдите количество теплоты, сообщенное газу.

4. Электрон движется в магнитном поле по круговой орбите с угловой скоростью $\omega=2\cdot10^{10}$ рад/с. Индукцию магнитного поля увеличили в $n=1{,}5$ раза. С какой угловой скоростью теперь вращается электрон?

5. Упругая пружина жесткостью $k=40$ Н/м подвешена вертикально. К ее нижнему концу прикреплено тело массой $m=0{,}8$ кг. В некоторый момент тело оттягивается вниз на $a=0{,}15$ м и освобождается. а) На какую максимальную высоту поднимется после этого тело? б) Определите максимальную скорость тела.

6. Шар массой m падает с высоты h на вертикальную пружину с жесткостью k и сжимает ее на величину x. Выразите максимальное сжатие пружины через m, h и k. Масса пружины пренебрежимо мала по сравнению с массой шара.

7. Две тонкие собирающие линзы с фокусными расстояниями F_1 и F_2 расположены рядом (вплотную друг к другу). Найдите оптическую силу этой системы.

Публикацию подготовили *Ю. Д. Максимов, Б. П. Попов, С. П. Преображенский, Н. Б. Русанов*

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Из водоема с глубины $h=11$ м подъемным краном равномерно поднимают бетонный куб массой $m=2200$ кг. Определите механическую работу по подъему этого куба до касания его верхней грани поверхности воды. Плотность бетона $\rho=2200$ кг/м^3.

2. К закрепленному вертикально в штативе динамометру подвесили некоторый груз. При этом груз пришел в колебание с частотой $\nu=5$ Гц. На сколько окажется растянутой пружина динамометра после полного прекращения колебаний груза? Массу пружины не учитывать.

3. Точка расположена в фокальной плоскости рассеивающей линзы, фокусное расстояние которой $F=10$ см, на расстоянии $a=2$ см от главной оптической оси линзы. Найдите положение изображения этой точки в линзе. Результат получите аналитически и графически.

Математический факультет

1. Тело движется из состояния покоя равноускоренно. Определите, во сколько раз путь, пройденный этим телом за восьмую секунду, будет больше пути, пройденного за третью секунду.

2. Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них вода в чайнике закипает через $t_1=15$ мин, при включении другой — через $t_2=30$ мин. Через сколько минут закипит вода в чайнике при одновременном параллельном включении обеих обмоток?

Индустриально-педагогический факультет

1. Колбу наполнили наполовину горячей водой, закрыли и стали выкачивать из нее воздух. Опишите, какие процессы при этом будут наблюдаться.

2. При ремонте электроплитки ее спираль укоротили на 0,1 ее первоначальной длины. Во сколько раз при этом изменится мощность плитки?

Естественный факультет

1. Снаряд разорвался при падении на поверхность земли через $t_1=10$ с после выстрела. Второй снаряд разорвался через $t_2=5$ с после выстрела. На какой высоте разорвался второй снаряд, если условия стрельбы не менялись?

2. Какую работу совершит воздух, масса которого $m=200$ г, при изобарном нагревании на $\Delta T=20$ К? Какое количество теплоты при этом будет передано воздуху? Удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении равна $c=14$ кДж/(кг · К).

3. Какую энергию надо израсходовать, чтобы при электролизе раствора медного купороса выделить $m=1$ г меди? Электролиз ведется при напряжении $U=4$ В. Электрохимический эквивалент меди $k=0{,}33$ мг/Кл. Потери на нагревание не учитывать.

Публикацию подготовил *Л. А. Бирюков*

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

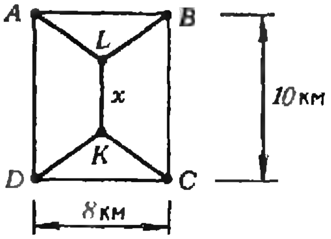
1. Дана функция $f(x)=3x(x-1)^2$.

1.1. Найдите экстремумы функции f при $x<1$.

1.2. Решите неравенство $f(x)<6(x-1)$.

1.3. Сколько различных корней имеет уравнение $f(x)=kx$ в зависимости от k?

1.4. Есть ли на графике функции $f(x)$ пары различных точек, симметричных относительно прямой $3x=1$?



2. Четыре поселка A, B, C и D находятся в вершинах прямоугольника 8×10 км (см. рисунок). Предполагается соединить их сетью дорог по схеме, указанной на рисунке ($|AL|=|BL|=|CK|=|DK|$).

2.1. Докажите, что общая длина всех пяти участков дороги равна $L(x)=x+2\sqrt{164-20x+x^2}$.

2.2. Найдите x, если $L(x)=24$.

2.3. При каком значении x общая длина дорог минимальна?

3. Даны функции $f(x)=x^2$, $g(x)=\ln x$.

3.1. Найдите промежутки монотонности функции $f-g$.

3.2. Решите уравнение $f(g(x))=g(f(x))$.

3.3. При каких значениях k уравнение $f(x)=kg(x)$ имеет единственное решение?

Вариант 2

1. Дана функция $f(x)=\log_3(9-3^x)-1$.

1.1. Найдите область определения функции f.

1.2. Решите уравнение $f(x)=0$.

1.3. Решите неравенство $f(x)<2x$.

1.4. При каких значениях параметра a уравнение $f(x)=a-x$ имеет хотя бы один корень?

2. В равнобедренный треугольник ABC с углом α при основании AC вписана окружность радиуса 1 с центром в точке O.

2.1. Найдите площадь $S(\alpha)$ треугольника ABC.

2.2. Пусть $t=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Докажите, что $S(\alpha)=\frac{2}{t-t^3}$.

2.3. Найдите наименьшее значение величины $S(\alpha)$.

2.4. Какие значения может принимать периметр треугольника ABC?

3. Цилиндр объема 1 имеет радиус основания R. Второй цилиндр имеет на 0,1 больший радиус, и на 0,2 большую высоту, чем первый.

3.1. Найдите $V(R)$ — объем второго цилиндра.

3.2. При каком R величина $V(R)$ минимальна?

Публикацию подготовил *С. В. Фомин*

Заочная физическая школа при МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова объявляет прием учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения и в первую очередь — на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать *до 1 сентября* по адресу: 119899 Москва ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ. В письмо вложите два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество	*Сидоров Иван Петрович*
Класс ЗФШ	*9-й*
Профессия родителей	*мать — врач, отец — инженер*
Подробный домашний адрес	*240816 г. Калуга, ул. К. Либкнехта, д. 4, кв. 73*
Номер и адрес школы	*школа № 10, ул. Пушкина, д. 3.*

Решение приемной комиссии о зачислении будет сообщено до 20 октября. Проверенные вступительные задания не возвращаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания по разделам физики, изучаемым в средней школе. Решенные задания оцениваются, рецензируются и высылаются обратно. Учащиеся 9 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 10 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно окончившие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ.

Вступительное задание

Поступающие в 9 класс ЗФШ решают задачи 1—4, а поступающие в 10 класс — задачи 4—7.

1. «Сила». Какая сила действует в сечении, находящемся на расстоянии x от конца однородного стержня длиной l, к которому приложена сила $\vec{F}$, направленная вдоль стержня?

2. «Удар». Шарик налетает на стенку со скоростью v под углом α к ее нормали. Определите модуль скорости шарика после упругого удара о стенку, если: а) стенка неподвижна; б) движется со скоростью u по своей нормали навстречу шарику; в) движется со скоростью u под углом β к своей нормали навстречу шарику.

3. «Отскок». Какое расстояние по горизонтали пролетит мяч, брошенный со скоростью $v=10$ м/с под углом $\alpha=60°$ к горизонту, если он ударится о потолок? Высота потолка $h=3$ м, удар упругий. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. «Автобус». По прямому шоссе идет автобус. Вы можете бежать со скоростью в два раза меньшей, чем скорость автобуса. Вы заметили автобус в точке A. Из какой области около шоссе можно успеть на автобус?

5. «Кобра». С какой силой давит на землю кобра, когда она, готовясь к прыжку, поднимается вертикально вверх с постоянной скоростью v? Масса змеи m, ее длина l.

6. «Вакуум». Две полусферы соединены в сферу, из которой частично откачан воздух, и подвешены в точке полюса. Полусферы оторвутся друг от друга, если к точке противоположного полюса подвесить груз массой M. До какой температуры нужно нагреть воздух внутри сферы, чтобы она развалилась без дополнительного груза? Масса каждой полусферы m, наружный радиус r, атмосферное давление p_0, начальная температура воздуха и сферы T_0. Тепловым расширением сферы пренебречь.

7. «Напряжение». Какую наибольшую разность потенциалов можно получить, имея батарейку с ЭДС $\mathscr{E}$ и два одинаковых конденсатора?

Поправка

(см. «Квант» № 2, 1986 г.)

На с. 52 в 4-й строке правого столбца неправильно напечатан знак корня. Должно быть $\sqrt{3x^2-2\sqrt{3}(\cos \pi y+\cos \pi z)\,x+4}$.

На с. 61 в решении задачи 5 варианта 8 вместо $x+by$ следует читать $2x+by$. Система уравнений поэтому будет иметь вид

$$\begin{cases} 18-16/(1-b^2)=A,\ 2x+by=B, \\ y\sqrt{1-b^2}+4/\sqrt{1-b^2}=C. \end{cases}$$

На с. 62 рисунок 8 не соответствует задаче 3 варианта 10. Для понимания указания без чертежа: E и H — точки пересечения BP и BQ с AC, точка K лежит на AC.

Далее в задаче 4 того же варианта ответ должен быть 12 ч, а первое неравенство должно быть $s/(2v+u)+s/(2v-u)\geqslant 16$.

Калейдоскоп «Кванта»

Задачи и головоломки

1. Можно. Согните вместе с бумажной полоской и накрывающий ее круг (рис. 1).

2. $DE=DA$ как касательные к одной окружности (рис. 2). Аналогично $CF=CB$, $CA=CG$ и $DH=DB$. Отсюда $DE+DB=AB=CF+CA=$ $=2AC+GF=2BD+HE$. Но $GF=HE$. Отсюда $AC=BD$.

3. $496018+6129=502147$.

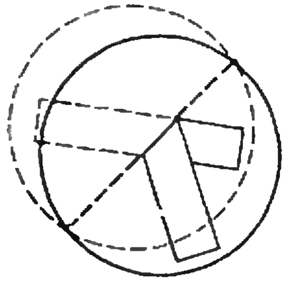


Рис. 1.

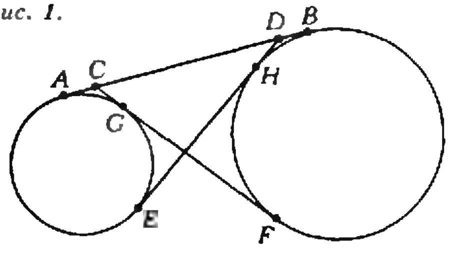


Рис. 2.

Тепловые процессы в газах

1. $V_B=2V_0$; $p_C=\frac{2}{3}p_0$; $p_D=p_0/3$.

2. $T_2-T_4=(T_1T_3-T_4^2)/T_4\approx -117$ К.

3. $T=\sqrt[3]{B^2D/(\nu R)}$.

4. $\frac{\Delta m}{m}\approx\frac{\Delta T}{T}\approx\frac{1}{30}=3\ \%$.

5. $C=\frac{3n+5}{2(n+1)}R$.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Вариант 1

1. $a\in\,]-\infty;\,-3[\,\cup\,]1,\,+\infty[$. Указание. При $a\leqslant 4$ должно быть $[3-\sqrt{8-2a},\,3+\sqrt{8-2a}]\subset$ $\subset\,]3-\sqrt{5+a^2},\,3+\sqrt{5+a^2}[$, откуда $a<-3$ или $a>1$, поэтому $a<-3$ или $1<a\leqslant 4$. При $a>4$ множество решений 1-го неравенства есть пустое множество.

2. $\{5\}$. Указание. После преобразований получим

$$\log_{x-2}(4x^2-19x+22)=$$
$$=\log_{\sqrt{4x-11}}(4x^2-19x+22),$$

откуда $4x^2-19x+22=1$ или $x-2=\sqrt{4x-11}$. Корни первого уравнения являются посторонними.

3. $x_1=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $x_2=\frac{\pi}{3}+2l\pi$ $(k,l\in\mathbf{Z})$. Указание. Возведя в квадрат, получим для новой переменной $z=\cos x$ уравнение $z(4z^2+4z-3)=0$, откуда $z=0$, $\frac{1}{2}$ или $-\frac{3}{2}$. Если $\cos x=0$, то $x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ и $\sin x=$ $=(-1)^k$, поэтому необходимо ограничиться четными k. Если $\cos x=\frac{1}{2}$, то $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ и $\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, но из первоначального уравнения следует, что $\sin x\geqslant 0$.

4. $2\sqrt{2k-1}R$ $\left(\frac{1}{2}<k<1\right)$.

5. $\left[\frac{1}{2},1\right]$; $\frac{R}{2}$. Указание. Отношение площадей $k=\frac{x}{R}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{x^2}{R^2}\right)$ $(0\leqslant x\leqslant R)$. Если $k=\frac{7}{8}$, то $x=\frac{R}{2}$.

Вариант 2

1. 80; 90; 92; 92 (рабочих). Указание. Найдите наибольшее значение функции $P=250-x-\frac{8464}{x}$ на отрезке $[1,N]$. При $N=80$, 90 ее наибольшее значение достигается на правом конце отрезка, а при $N=120$, 150 — в критической точке $x_0=92$.

2. $]0,1[$. Указание. После преобразований получим неравенство $5-2x>3^x$, откуда $x<1$. С учетом области определения это дает $0<x<1$.

3. $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$. Указание. После преобразований получим уравнение $2+3\cos x+$ $+\cos^2x=2\sin x$. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим для новой переменной $z=\cos x$ уравнение $z(z+1)(z^2+5z+12)=0$, откуда $z=0$ или -1. Сделайте проверку.

4. $\frac{4(1+k)}{3k+1}S$, если $0<k<1$; $\frac{4(1+k)}{k+3}S$, если $k>1$.

5. $\frac{\sqrt{3}\cos\beta/2}{\sqrt{-(1+2\cos\beta)}}a^2$ $\left(\frac{2\pi}{3}<\beta<\pi\right)$.

Вариант 3

1. $a=4$. Указание. После преобразований получим уравнение $x^2-(2+a)x+1=0$ с положительным дискриминантом. Для вычисления $x_1^2+x_2^2$ воспользуйтесь теоремой Виета.

2. $]-3,\,7/3]\cup[6,\,+\infty[$.

3. $x_1=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x_2=\frac{\pi}{2}+l\pi$ $(k,l\in\mathbf{Z})$.

4. $\sqrt{\frac{3}{5}(l^2-c^2)}$; $\sqrt{\frac{5}{3}(l^2-c^2)}$ $(l>c)$.

5. $\arccos\frac{1-3\cos^2\alpha}{2}$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

Вариант 4

1. 4 кг; 17,5 %.

2. $b=-2$; $x_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$. Указание. По теореме Виета, $x_1+x_2=-b$, $x_1\cdot x_2=-1$, и $(x_1+1)+(x_2+1)=b$, $(x_1+1)(x_2+1)=-b$.

3. $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5},\ \frac{2k\pi}{3}\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

4. 3 г. 5. $\frac{\cos\alpha/2\ \mathrm{tg}\,\beta}{6\sin^2\alpha/2}a^3$.

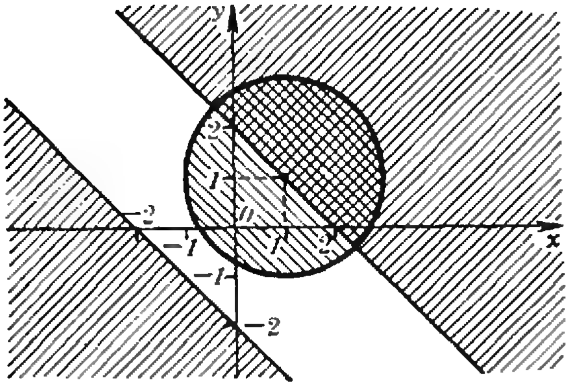


Рис. 3.

Вариант 5

1. 32 км; 24 км/ч.

2. $x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{6}$ $(k\in\mathbf{Z})$. **Указание.** После преобразований получите уравнение $\cos 6x\times\times(\cos 4x+1)=0$.

3.1. $\left\{-1;\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\right\}$. **Указание.** Выполните замену $z=3x+\frac{1}{x}$.

3.2. $\left[-1;\ -\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\right]$.

4. 2π (см. рис. 3).

5. $\frac{32}{3}$ см^3.

Вариант 6

1. 18 кг; 22 кг.

2.1. $x=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi$ $(K\in\mathbf{Z})$. 2.2. $x_1=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$; $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+8\pi$ $(k, l\in\mathbf{Z})$.

3.1. $]1;\ +\infty[$. 3.2. $\{-2;\ 1\}$.

4. $\frac{5}{96}a^2$. 5. $\arccos(\cos\alpha\cos\beta)$.

Вариант 7

1. 1596 год. (В 1596 году родился Рене Декарт.) **Указание.** Записав искомый год в виде $1xyz$, где x — число сотен, y — число десятков, z — число единиц, получим $(1000+100x+10y+z)+5355=1000z+100y+10x+1$. Число $z+5$ оканчивается на 1. Поэтому $z=6$.

2. $x_1=a-\sqrt{-a^2+4a-3}$, $x_2=a+\sqrt{-a^2+4a-3}$ $(1\leqslant a\leqslant 3)$. Если $1\leqslant a\leqslant 2$, то $x_1\leqslant 1\leqslant x_2\leqslant 4$; если $2<a\leqslant 3$, то $1\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant 4$.

3. $\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$. **Указание.** Неравенство можно записать в следующем виде: $2\sin x\left(\cos 3x+\cos 2x+\frac{3}{2}\right)\leqslant 0$. Но $\cos 3x+\cos 2x+\frac{3}{2}=2\left(\frac{3}{4}+\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\geqslant 2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)>0$ для $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, так как для таких x имеем $\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{3\pi}{4}$, поэтому $\left|\cos\frac{x}{2}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству $\sin x\leqslant 0$.

4. $\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{\sqrt{4b^2-a^2}+2a}$ $\left(b>\frac{a}{2}>0\right)$.

5. $\frac{a\sin\alpha/2}{\sqrt{1-2\cos\alpha}}$ $\left(\frac{\pi}{3}<\alpha<\pi\right)$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Введем систему координат так, как показано на рисунке 4. Введем обозначения: v_0 — начальная скорость пули; α — угол наклона к горизонту, под которым вылетает пуля; B — точка, в которой находится шар при прохождении положения равновесия; C и D — точки максимального удаления шара от положения равновесия.

Пусть пуля вылетает из точки O в момент времени $t_0=0$ и попадает в точку B в момент времени t. Пуля движется по параболе и попадет в точку B при выполнении условий:

$x(t)=L=v_0\cos\alpha\cdot t,$

$y(t)=-l=v_0\sin\alpha\cdot t-gt^2/2.$

Чтобы шар с застрявшей пулей упал вертикально вниз, необходимо, чтобы сразу после обрыва нити горизонтальная составляющая импульса шара с пулей была равна нулю. Из закона сохранения импульса следует, что в этом случае

$$mv_0\cos\alpha-Mv=0,$$

где $v=\omega A=\sqrt{g/l}\,A$ — модуль скорости шара в точке B. Горизонтальная составляющая скорости пули и скорость шара в точке B направлены навстречу друг другу при выполнении условия

$$t=n\frac{T}{4},$$

где $T=2\pi\sqrt{l/g}$, $n=1, 5, 9, \ldots$, если в момент $t_0=0$ шар находится в точке C и $n=3, 7, 11, \ldots$, если в начальный момент шар находится в точке D.

Из полученных выражений следует система трех уравнений с тремя неизвестными v_0, α, t:

$$\begin{cases} v_0\cos\alpha\cdot t=L,\\ gt^2-2v_0\sin\alpha\cdot t-2l=0,\\ \frac{m}{M}=\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{A}{v_0\cos\alpha}\end{cases}$$

и условие «квантования» времени

$$t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,n.$$

Решение системы дает:

$$v_0=\sqrt{gl\left(\left(\frac{M}{m}\frac{A}{l}\right)^2+\left(\frac{M}{m}\frac{A}{L}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{m}{M}\frac{L}{A}\right)^2-1\right)},$$

$$\alpha=\operatorname{arctg}\left(\frac{l}{L}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{L}{A}\frac{m}{M}\right)^2-1\right)\right),$$

тогда условие «квантования» принимает вид

$$\frac{m}{M}\frac{L}{A}=\frac{\pi}{2}n.$$

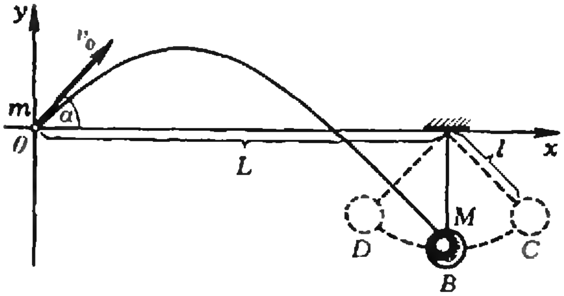


Рис. 4.

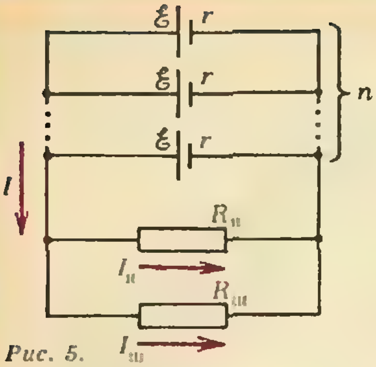


Рис. 5.

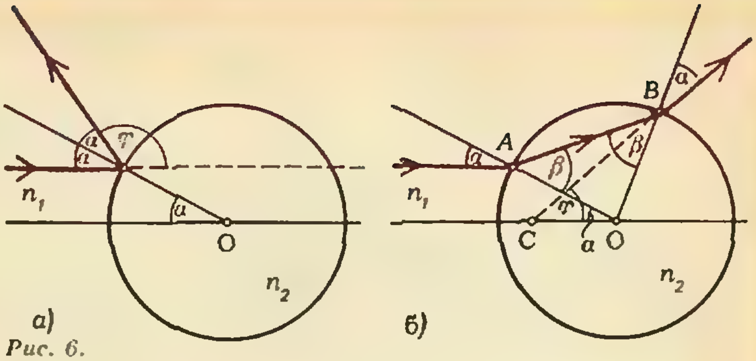


Рис. 6.

Таким образом, если выполняется это условие, то решение задачи дается выражениями для v_0 и α, а если нет, то задача не имеет решения. Нетрудно показать также, что задача может иметь решение только при $\alpha>0$.

2. Обозначим через T_0 начальную температуру газа, а через T — конечную температуру газа в нижней части сосуда. Пусть М — молярная масса газа, m — масса газа в каждой части сосуда.

Запишем уравнения состояния идеального газа:

$$p_в V_в = \frac{m}{М} RT_0,$$

$$p_н V_н = \frac{m}{М} RT_0,$$

$$p'_в V'_в = \frac{m}{М} RT_0,$$

$$p'_н V'_н = \frac{m}{М} RT,$$

где индексы «в» и «н» относятся к верхней и нижней частям сосуда соответственно, «штрих» обозначает величины, соответствующие конечному состоянию газа; $V_в/V_н=3$, $V'_в/V'_н=4$. Условия равновесия поршня имеют вид:

$$p_в+p_0=p_н,$$
$$p'_в+p_0=p'_н,$$

где $p_0=F/S$, F — сила тяжести поршня, S — площадь поршня.

Из полученных равенств найдем

$$\frac{T}{T_0}=\frac{47}{60}.$$

3. Схема включения и обозначения токов и сопротивлений показана на рисунке 5, где индекс «н» относится к нагрузке, а «ш» — к шунту. Для нормального режима работы нагрузки требуется

$$I_н=\frac{P}{U}.$$

По закону Ома

$$I=\frac{ℰ}{\dfrac{r}{n}+\dfrac{R_н R_ш}{R_н+R_ш}},$$

где $n\geqslant 1$ — натуральное число.

Очевидно, что

$$I=I_н+I_ш=\frac{U}{\dfrac{R_н R_ш}{R_н+R_ш}},$$

$$R_н=\frac{U^2}{P}.$$

Из полученных равенств следует

$$R_ш=\frac{U^2}{P}\frac{1}{n/b-1},$$

где

$$b=\frac{Pr}{U^2}\frac{1}{ℰ/U-1}.$$

Так как $R_ш>0$, то $n\geqslant b$, то есть n_{min} — это ближайшее к b натуральное число (если b — натуральное число, то $n=b$, $R_ш\to\infty$ и для нормального режима работы нагрузки шунт не требуется). При заданных условиях $b=6\frac{1}{4}$. Следовательно, $n_{min}=7$ и $R_ш=1\frac{1}{3}$ Ом.

4. Введем обозначение: $n_2/n_1=n$. Так как по условию задачи $n<1$, то возможно полное внутреннее отражение. Ход луча в этом случае показан на рисунке 6, *а*. Предельный угол падения определяется из соотношения $\sin\alpha_{пр}=n$. Но $l/R=\sin\alpha$. Поэтому для предельного значения «прицельного параметра» l имеем

$$l_{пр}=R\sin\alpha_{пр}=Rn.$$

Таким образом, если $n_2/n_1\leqslant l/R\leqslant 1$, то имеет место полное внутреннее отражение и искомый угол

$$\varphi=\pi-2\arcsin\frac{l}{R} \qquad (1)$$

(при $l>R$ имеем тривиальный случай $\varphi=0$). Ход луча при $l/R<n$ показан на рисунке 6, *б*. Из треугольников BOC и AOB имеем

$$\varphi+\alpha+(\alpha+(\pi-2\beta))=\pi,$$

откуда

$$\varphi=2(\beta-\alpha).$$

Так как $\alpha=\arcsin(l/R)$ и $\beta=\arcsin(\sin\alpha/n)=\arcsin(l/(Rn))$, то при $l/R<n_2/n_1$ искомый угол

$$\varphi=2\left(\arcsin\frac{ln_1}{Rn_2}-\arcsin\frac{l}{R}\right). \qquad (2)$$

Если $l/R=n_2/n_1$, то формулы (1) и (2) дают одинаковые результаты.

Вариант 2

1. Бруски движутся с одинаковыми ускорениями, если

$$1-4\mu\leqslant\frac{m_1}{m_2}\leqslant 1+4\mu.$$

2. Отношение объемов частей сосуда равно

$$V_1:V_2:V_3=\frac{m_1T_1}{М_1}:\frac{m_2T_2}{М_2}:\frac{m_3T_3}{М_3}.$$

3. Если $\sqrt{R_1R_2}/r$ — натуральное число и $R_1\neq R_2$, то число аккумуляторов в батарее

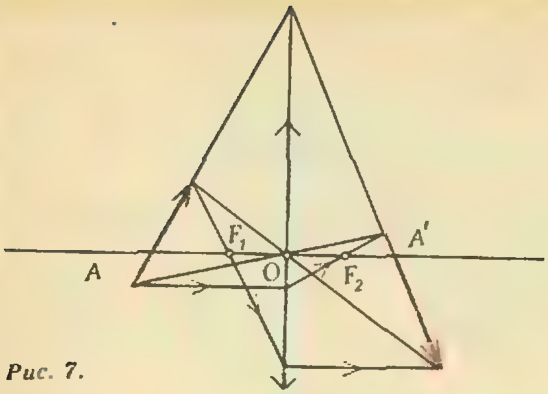


Рис. 7.

равно

$$n=\frac{\sqrt{R_1R_2}}{r}.$$

Если $\sqrt{R_1R_2/r}$ — не натуральное число, то задача не имеет решения. При $R_1\neq R_2$ получаем тривиальный случай: n — любое натуральное число.

4. Построение ясно из рисунка 7.

Задачи устного экзамена

1. $h_1=h/9=30$ м; $h_2=3h/9=90$ м; $h_3=5h/9=150$ м.
2. $m_3=2m_1m_2/(m_1+m_2)=99$ кг.
3. $m=M/3=0{,}2$ кг.
4. Атмосферное давление, выраженное в мм рт. ст., равно $H_a=H+l_0\dfrac{H_{a0}-H_0}{H_0+l_0-H}\dfrac{T}{T_0}\approx$ ≈ 750 мм рт. ст. (здесь $H_{a0}=760$ мм рт. ст. и $T_0=273$ К — давление и температура при нормальных условиях).
5. $\Delta P_2=\Delta P_1\left(1-\dfrac{p_2}{p_0}\dfrac{T_0}{T_2}\right)/\left(1-\dfrac{T_0}{T_0+\Delta T_1}\right)\approx$ $\approx 0{,}06$ Н.
6. Число молекул воздуха в комнате уменьшилось на $(T_2-T_1)\cdot 100\%/T_2=4\%$.
7. Если $R>r$, то бо́льшая мощность выделяется при параллельном соединении резисторов, если $R<r$ — при последовательном.
8. $U_{max}=U(1+R_д/R)=1000$ В.
9. $H=\sqrt{h_1h_2}$.
10. Зеркало следует поместить на расстоянии $l=2{,}5F$ от линзы.

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Вариант 1

1. $-\dfrac{120}{119}$. 2. $V=4\pi$, $S=2\pi\sqrt{13}$. 3. $]0;\ 10[$.

4. $T=\pi$; $f'(x)=-2\sin 2x-\dfrac{3}{4}$, $x\neq\dfrac{\pi}{3}k$, $x\neq\pi k+\dfrac{\pi}{2}$; $k\in Z$. 5. $x=-1$; при $\alpha=2$, $\beta=2$, $p(x)=(x^2+2x+1)^2$; при $\alpha=2$, $\beta=-2$, $p(x)=(x^2-1)^2$. **Указание.** При $\alpha=2$, $\beta=-2$, получаем многочлен $(x^2-1)^2$. Его корень $x=-1$ является корнем многочлена $p(x)$ при любых α и β. Если многочлен $p(x)$ квадрат квадратного трехчлена, то $p(x)=(x+1)^2(x^2+ax+b)$ при некоторых a, b, причем x^2+ax+b — тоже полный квадрат.

Вариант 2

1. $\log_2 5$. 2. $x_1=\pi/k$, $x_2=\dfrac{\pi}{6}(-1)^m+\dfrac{\pi}{2}m$, $k,\ m\in Z$. 3. $(1+\sqrt{61})/5$. 4. $\overrightarrow{NE}=\dfrac{2}{3}\vec{e}_1-\dfrac{14}{3}\vec{e}_2$. **Указание.** Диагональ BD делится точками E и F на 3 конгруэнтных отрезка. 5. $D(f)=\left]-\dfrac{1}{6};\ \dfrac{1}{5}\right[$. **Указание.** Докажите, что наибольшее значение функции $4\cos^2x-6e^{\cos 2x}+2$ отрицательно.

Вариант 3

1. $\{(9,36);\ (36,9)\}$.
2. $\left]-\dfrac{9}{2};\ -2\right[\cup\,]3;\ +\infty[$.
3. $\{\log_3(6-\sqrt{33});\ \log_3(6+\sqrt{33})\}$.
4. 4. **Указание.** Докажите, что четырехугольник является ромбом.
5. $D(f)=R\setminus\{\pi k : k\in Z\}$; f убывает на каждом промежутке $]\pi k;\ \pi(k+1)[$; $A<B$. **Указание.** $f'(x)$ отрицательна при всех $x\in\,]\pi k;\ \pi(k+1)[$, $k\in Z$. Поэтому $f(2)>f(3)$, откуда следует, что $A<B$.

Физика

1. $v_0=\sqrt{5gl}$.
2. **Указание.** Работа, совершаемая телом против силы сопротивления воздуха, равна изменению кинетической энергии воздуха, увлекаемого телом при его движении.
3. $Q=3mR\Delta T/(2M)\approx 2{,}3\cdot 10^6$ Дж (здесь $R=8{,}31$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная).
4. $\omega'=n\omega=3\cdot 10^{10}$ рад/с.
5. $h_{max}=a=0{,}15$ м; $v_{max}=a\sqrt{k/m}\approx 1{,}1$ м/с.
6. $\Delta l_{max}=\dfrac{mg}{k}+\sqrt{\left(\dfrac{mg}{k}\right)^2+\dfrac{2mgh}{k}}$.
7. $D=\dfrac{1}{F_1}+\dfrac{1}{F_2}$.

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Физика

Физический факультет

1. $A=(m-m\varrho_в/\varrho)g(h-(m/\varrho)^{1/3})=117{,}6$ кДж.
2. $\Delta l=g/(4\pi^2\nu^2)=0{,}01$ м.
3. Изображение точки находится на расстоянии $f=F/2=5$ см от линзы и на расстоянии $b=a/2$ от главной оптической оси.

Математический факультет

1. $l_в/l_3=3$.
2. $t_3=t_1t_2/(t_1+t_2)=10$ мин.

Индустриально-педагогический факультет

1. Давление воздуха в колбе будет понижаться, процесс испарения воды усилится, вода будет интенсивно охлаждаться. Однако, если в какой-то момент давление воздуха окажется равным давлению насыщенных водяных паров, вода в колбе закипит.
2. Мощность плитки увеличится в 10/9 раза.

Естественный факультет

1. $h=gt_2^2/2=125$ м (здесь $g=10$ м/с^2).
2. $A=mR\Delta T/M\approx 1146$ Дж (здесь $R=8{,}31$ Дж/(моль·К) — универсальная газовая постоянная, $M=29\cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воздуха); $Q=cm\Delta T=56000$ Дж.
3. $W=Um/k\approx 1{,}2\cdot 10^4$ Дж.

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Вариант 1

1.1. $f_{max}=f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{9}$.

1.2. $x\in\,]-\infty;\ -1[\,\cup\,]1;\ 2[$.

1.3. При $k<0$ — один корень, при $k\in\{0;\ 3\}$ — два, при $k>0$, $k\neq 3$ — три.

1.4. Таких точек нет. **Указание.** Решите систему: $f(x_1)=f(x_2)$, $x_1+x_2=\frac{2}{3}$, $x_1\neq x_2$. Для этого в первом уравнении системы перенесите $f(x_2)$ в левую часть и разложите ее на множители (один из множителей x_1-x_2).

2.2. $x=4$ или $x=6\frac{2}{3}$.

2.3. $x=10-\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

3.1. При $0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ убывает, при $x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ возрастает.

3.2. $x\in\{1;\ e^2\}$.

3.3. $k<0$ или $k=2e$. **Указание.** Введите функцию $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ и исследуйте ее с помощью производной, постройте график. Изучаемое уравнение равносильно уравнению $h(x)=k$.

Вариант 2

1.1. $x<2$.

1.2. $x=\log_3 6$.

1.3. $x>\log_5\left(\frac{\sqrt{109}-1}{6}\right)$.

1.4. $a\leqslant 3-\log_3 4$.

2.1. $S(\alpha)=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$.

2.3. $S_{\min}=3\sqrt{3}$. **Указание.** Используйте результат п. 2.2.

2.4. $6\sqrt{3}\leqslant P<\infty$. **Указание.** $S(\alpha)=\frac{1}{2}P\cdot r=\frac{1}{2}P$.

3.1. $V(R)=(R+0{,}1)^2(R^{-2}+0{,}2\pi)$.

3.2. $R=(2\pi)^{-1/3}$.

Избранные школьные задачи
(см. «Квант» № 3)

1. $x=1$. **Указание.** Заметив, что $x=1$ — корень уравнения, разложите многочлен $x^3-9x^2+27x-19$ на множители:

$$x^3-9x^2+27x-19=(x-1)(x^2-8x+19).$$

2. Обозначим 1984 через n. Тогда $1984\cdot1985\times1986\cdot1987+1=n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n)(n^2+3n+2)+1$.
Положив теперь $n^2+3n+1=m$, получим $1984\times1985\cdot1986\cdot1987+1=(m-1)(m+1)+1=m^2$.

3. **Указание.** Площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника (кстати, отметим, что это параллелограмм), равна половине площади исходного четырехугольника.

4. Заметим, что $6(x+7y)=(6x+11y)+31y$. Поэтому из условия следует, что число $6(x+7y)$ делится на 31.

5. 70 км. **Решение.** Велосипедисты до встречи ехали 2 часа. За это время муха-слепень пролетела 100 км, а от пункта A сместилась на 40 км. Если обозначить через x количество километров, которое она пролетела в направлении от A к B, и через y — количество километров, которое муха пролетела в направлении от B к A, то получим систему $x+y=100$, $x-y=40$. Поэтому $x=70$.

6. Область определения данной функции — промежуток $[1;+\infty]$. Заметим, что ее квадрат, то есть y^2, равен

$$\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right)\right]^2=$$

$$=\frac{1}{4}\left(2x-2\sqrt{x^2-4x+4}\right)=\frac{1}{2}(x-|x-2|)=$$

$$=\begin{cases}x-1 \text{ при } x\leqslant 2,\\ 1 \text{ при } x>2.\end{cases}$$

Теперь легко построить график функции

$$y=\begin{cases}\sqrt{x-1} \text{ при } 1\leqslant x\leqslant 2,\\ 1 \text{ при } x>2\end{cases}$$

— см. рисунок 8.

7. $\lg^2 11$. **Решение.** $\lg^2 11=(1+\lg 1{,}1)^2>1+2\lg 1{,}1=1+\lg 1{,}21=\lg 12{,}1>\lg 12$.

8. Пусть M и N — середины сторон BC и AD соответственно (рис. 9). Отрезок MP параллелен стороне AB и $MP=AB$, а отрезок MQ параллелен стороне CD и $MQ=CD$. Рассмотрим треугольники ANP и DNQ. Они равны, ибо $AN=ND$, а отрезки AP и QD равны и параллельны. Поэтому $PN=NQ$. Следовательно, отрезок MN — медиана в треугольнике MPQ. Отрезок PK параллелен отрезку MQ и $PK=MQ$. Поэтому $MPKQ$ — параллелограмм. По условию $MN=\frac{1}{2}(AB+CD)$. Поэтому $MK=2\cdot MN=AB+CD=MP+MQ=MP+PK$. Следовательно, точки P, M и K лежат на одной прямой. А это означает, что отрезки AB и CD параллельны.

9. Не существуют. **Решение.** Поскольку $f(0)\cdot g(0)=1$, получаем $f(0)\neq0$. Аналогично, поскольку $f(1)\cdot g(-1)=1$, $g(-1)\neq0$.
Но это противоречит тому, что $f(0)g(-1)=0$.

10. **Указание.** Воспользуйтесь следующим фактом: *если точки M, N, P, K лежат на сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ и отрезок MP перпендикулярен отрезку NK, то $MP=NK$.*

11. $\cos\sin 1$. **Решение.** Поскольку

$$\sin 1+\cos 1=\sqrt{2}\cdot\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}<\frac{\pi}{2},$$

получаем

$$\cos\sin 1=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin 1\right)>\sin\cos 1.$$

12. 27. **Решение.** Положим $x-y=n$. Тогда $x+y=n^2$, откуда $x=\frac{n(n+1)}{2}$, $y=\frac{n(n-1)}{2}$.
Это — целые числа при любом n. Мы получаем, что целочисленные решения нашего уравнения имеют вид $\left(\frac{n(n+1)}{2};\ \frac{n(n-1)}{2}\right)$.

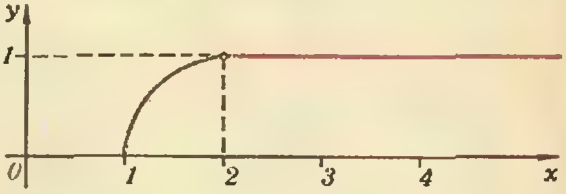


Рис. 8.

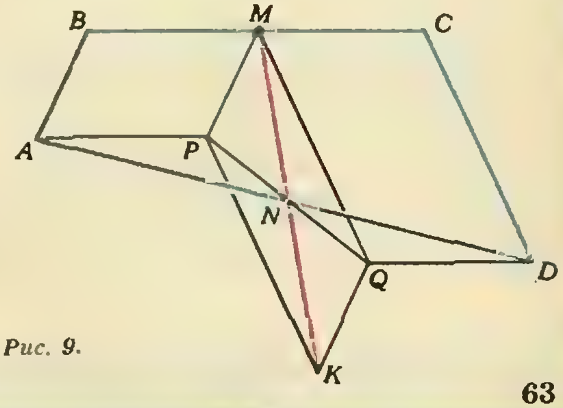


Рис. 9.

Неравенства $|x|<100$, $|y|<100$ выполняются при $|n|\leqslant 13$.

13. Обозначим основания трапеции через a и b, высоты соответствующих треугольников — через h_a и h_b. Тогда

$$s=\frac{a+b}{2}(h_a+h_b);\ s_1=\frac{ah_a}{2};\ s_2=\frac{bh_b}{2}.$$

Из подобия $\frac{b}{a}=\frac{h_b}{h_a}$. Обозначим $\frac{b}{a}=t$. Итак, $b=ta$, $h_b=th_a$. В таком случае

$$s=(t+1)^2\cdot\frac{bh_b}{2};\ s_1=t^2\cdot\frac{bh_b}{2};\ s_2=\frac{bh_b}{2}.$$

Отсюда следует искомое равенство.

14. $a=5$. Решение. Выражение

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(a-1)^2-\\-2(a^2-7a+14)=-a^2+12a-27 \quad (1)$$

как функция от a представляет собой квадратный трехчлен, определенный для тех a, для которых существуют действительные x и y, удовлетворяющие условию задачи. Эти значения x и y определяются системой

$$\begin{cases} x+y=a-1, \\ xy=a^2-7a+14, \end{cases}$$

а значит, x и y удовлетворяют квадратному уравнению $t^2-(a-1)t+a^2-7a+14=0$, дискриминант которого равен $-3a^2+26a-55$. Этот дискриминант неотрицателен при $11/3\leqslant a\leqslant 5$. Следовательно, действительные значения x и y существуют только для тех a, которые принадлежат промежутку $[11/3;\ 5]$. Наша задача состоит в том, чтобы на отрезке $[11/3;\ 5]$ найти такое a, при котором трехчлен (1) принимает наибольшее значение. Вершина параболы $b=-a^2+12a-27$ имеет абсциссу $a=6$, что расположено правее отрезка $[11/3;\ 5]$. Наибольшее значение выражения (1) достигается, следовательно, на правом конце этого промежутка, то есть при $a=5$.

15. Если n четно, то правильный $(n+2)$-угольник получиться может, если n нечетно, то не может. Указание. Достаточно заметить, что в правильном $(n+2)$-угольнике в случае нечетного n нет пары параллельных сторон.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 1)

Задание 1 (Л. Куббель, 1941 г.). **1. Фh1! f1Ф(Л, С) 2.Фe4×; 1...f1К 2.Фh5×; 1...С — любой ход 2.Фd1×.**

Задание 2 (Л. Куббель, 1941 г.) **1. d7 Крc7 2. b8К! Кр:b8 3. d8Ф×; 2...Крd8 3. Сb6×.**

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, А. А. Варламов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, В. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев.

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Е. В. Винодарова, М. Б. Дубах, С. Г. Захаров,
С. В. Иванов, Д. А. Крымов, В. Г. Марковский,
И. Е. Смирнова, Е. К. Темчурина,
П. И. Чернуский, В. Б. Юдин
Фото представили:
В. Е. Пермитин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Т. С. Вайсберг

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

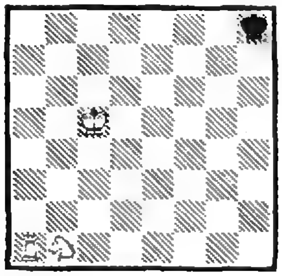
Сдано в набор 20.2.86. Подписано к печати 24.3.86
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,39. Т-07631
Тираж 201 349 экз.
Цена 40 коп. Заказ 388

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300, г. Чехов Московской области

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

НЕПОДВИЖНЫЕ ФИГУРЫ

Первый русский шахматный мастер А. Петров в прошлом веке придумал задачу, в которой белому королю запрещалось ходить.



А. Петров, 1841 г.
Мат в 25 ходов
(не двигая белого короля).

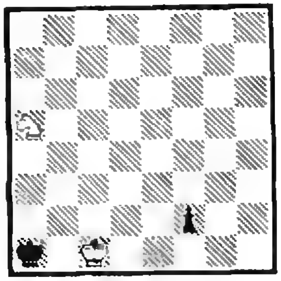
Белым надо заставить черного короля приблизиться к белому. **1. Кс3 Крg7 2. Лa6 Крf7 3. Ке4 Крg7 4. Кg3 Крh7 5. Кf5 Крg8 6. Лg6+ Крh7 7. Лh6+ Крg8 8. Лh1 Крf7 9. Лg1 Крf6 10. Кd6 Кре5 11. Лf1 Кре6 12. Кf7 Кре7 13. Кg5 Кре8 14. Лf7 Крd8 15. Кh7 Кре8 16. Лg7 Крd8 17. Кf6 Крс8 18. Лd7 Крb8 19. Ке8 Крс8 20. Лd6 Крb8 21. Лс6 Крb7 22. Кd6+ Крb8 23. Лс8+ Крa7 24. Лh8 Крa6 25. Лa8×.**

Удивительное дело — прошло сто тридцать лет, и подобная задача с неподвижным королем вошла в историю ... программирования на ЭВМ.

У белых король на поле с3 и ферзь, у черных один король. Могут ли белые выиграть, не делая ходов своим королем?

Эта задача стала первой шахматной задачей, которую машина решила раньше, чем человек. Подробно о том, как справился с ней компьютер, можно прочитать в вышедшей недавно книге А. Л. Брудно и Л. И. Каплана «Олимпиады по программированию для школьников» (М., 1985, с. 73). Для тех, кто наивно полагает, что эту задачу можно решить полным перебором вариантов, авторы книги приводят несложный расчет, который показывает, что подобный анализ (на ЭВМ!) займет миллиарды лет. Задача решается при помощи так называемого ретроспективного анализа — расчет производится не вперед, а назад. Сначала находятся заключительные позиции, в которых черный король заматован. Затем берутся позиции, из которых заключительные получаются в 1 ход, и т. д. В результате все позиции на доске ранжируются, ранг позиции — это число ходов, которые должны сделать белые, чтобы объявить мат (при наилучших действиях обеих сторон). Таким способом авторы программы А. Брудно и И. Ландау установили, что при белом короле на с3 мат всегда дается не позднее 23-го хода. Подробное решение приведено в «Кванте» № 11 за 1981 год, с. 58.

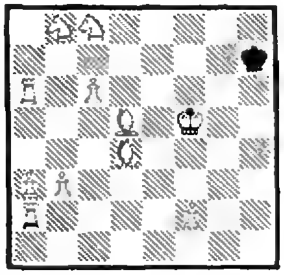
В сказочной шахматной композиции есть необычный жанр задач, в которых все фигуры одной из сторон вообще не ходят или делают лишь один ход — последний, ставя мат королю противника. Решение такой задачи содержит серию ходов лишь одной стороны (белых или черных), поэтому такие задачи называются серийными. При этом обязательным условием является единственность серии ходов, т. е. при любой другой последовательности ходов мат ставится позднее, чем требуется в задании.



Т. Доусон, 1947 г. Серийный кооперативный мат в 17 ходов.

Это задание означает, что ходят только черные, а когда они сплетут матовую сеть своему королю, белым разрешается сделать один ход (поставить мат).

1—7. Крa2—a3—b4—с3—d3—е2—е1. 8. f1Л 9. Лf2 10—16. Кре2—d3—с3—b4—a3—a2—a1 17. Лa2. Теперь белые, наконец, могут сыграть — **Кb3×**. Решение обычно записывается в сокращенном виде: **7. Kре1 8. f1Л 9. Лf2 16. Крa1 17. Лa2 Кb3×.** Очевидно, серия черных ходов является единственной.



П. Кате, 1965 г. Серийный кооперативный мат в 60 ходов.

Рекордная задача! Не сразу разберешься, как черному королю свить матовое гнездо. **1. Крh6 12. Кр:a2 16. Кр:d4 19. Кр:f2 29. Кр:b8 44. Кр:a6 60. Крa8 с7×.**

Вот еще три серийные кооперативные задачи.

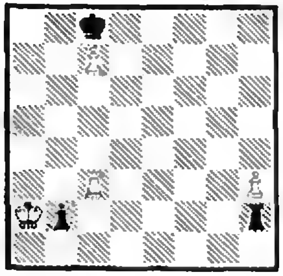
Белые: Крa6, Фе1, Се6; черные: Крh2. Мат в 14 ходов. 14. Крa4 Фa5×.

Белые: Крс6, Лс1, Сс3, п.a3; черные: Крa6. Мат в 24 хода. 12. Кр:a3 24. Крa6 (король забрал пешку a3 и тем же маршрутом вернулся на исходное место) **Лa1×.**

Белые: Крf5, Фс2, Кg6, Кh5, п.h3; черные: Крg3. Мат в 36 ходов. 12. Кр:h5 24. Кр:h3 36. Крh5 Фh2×.

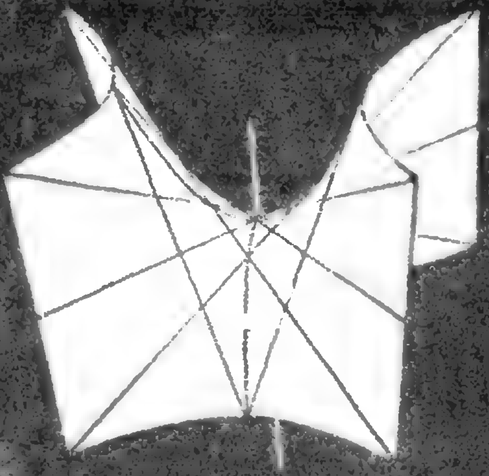
Конкурсные задания

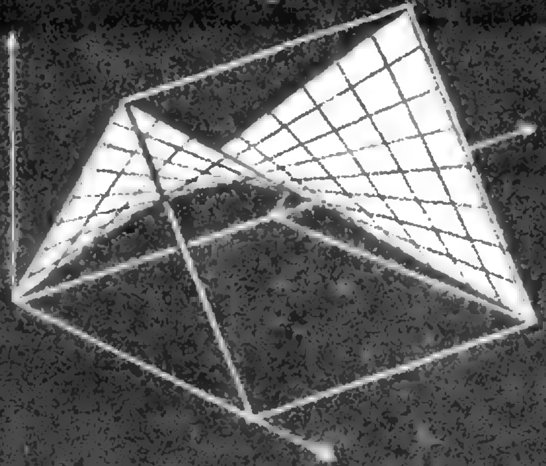
7. Доска имеет форму прямоугольника 4×16. Белые: Крd15, Лс16; черные: Крa8. Белая ладья может сделать лишь один ход. Могут ли белые выиграть?



8. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 20 июня 1986 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 7, 8».



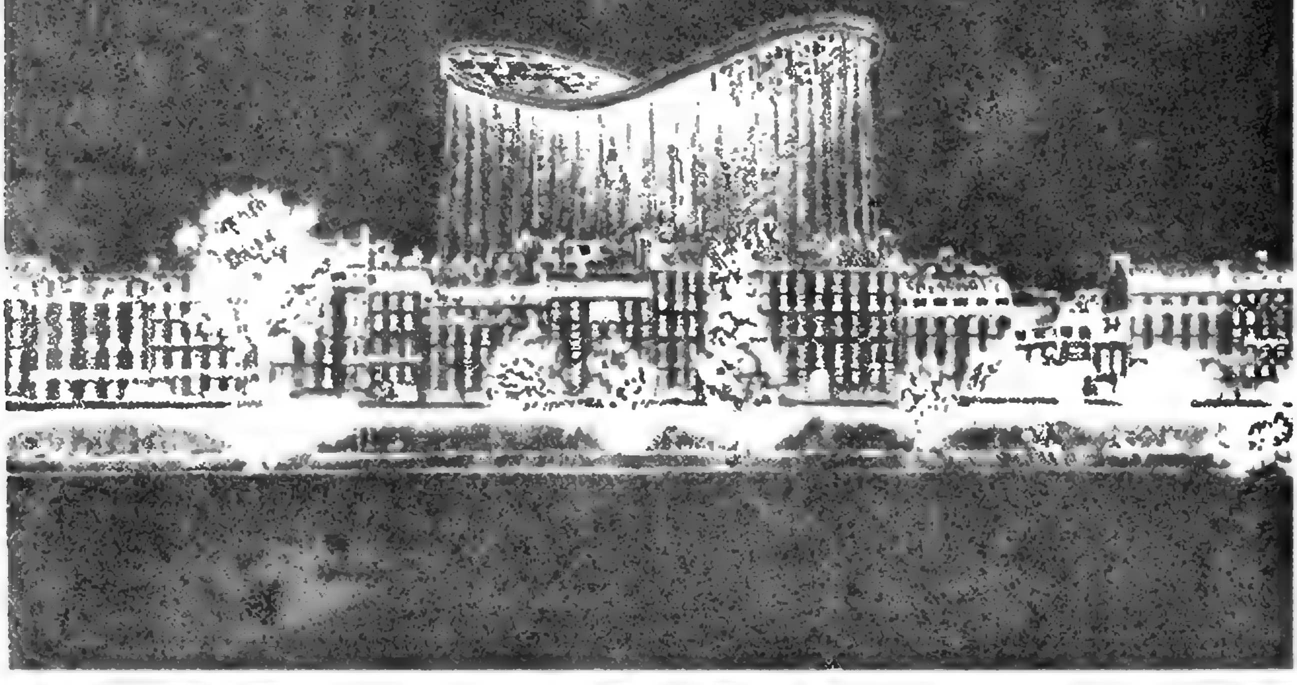


На этой страничке в разных видах показана седлообразная поверхность, известная математикам под названием гиперболический параболоид. Ее можно задать в пространственной системе координат Oxyz уравнением z=xy — тогда она выглядит так, как показано на рисунке слева вверху. Этот рисунок заимствован из замечательной книги Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена «Наглядная геометрия» (М.: «Наука», 1981 г., с. 23), которую мы рекомендуем приобрести всем любителям геометрии.

Обратите внимание, разглядывая портрет поверхности z=xy, на прямые, лежащие на ней (например на координатные оси Ox и Oy). Можно доказать, что через каждую точку поверхности проходят ровно две прямые, целиком с ней совпадающие. Более того, эта поверхность образована бесконечным семейством прямых, пересекающих две фиксированные скрещивающиеся прямые. Таких семейств — два; составляющие их прямые называются прямолинейными образующими, их можно рассмотреть на рисунке справа вверху.

Однако гиперболический параболоид — не только развлечение для любителей геометрии. Он очень часто используется в архитектуре для создания крыш и перекрытий: наличие прямолинейных образующих позволяет составить красивую, необычно искривленную поверхность из обыкновенных (прямолинейных) элементов. Здание с такой крышей показано на рисунке внизу. Такая же крыша имеется у здания плавательного бассейна спорткомплекса «Олимпийский» в Москве.

У гиперболического параболоида есть и другие, менее известные приложения. Например, в биологии. Так, рисунок справа вверху взят из статьи И. М. Яглома о популяционной генетике из этого номера «Кванта».

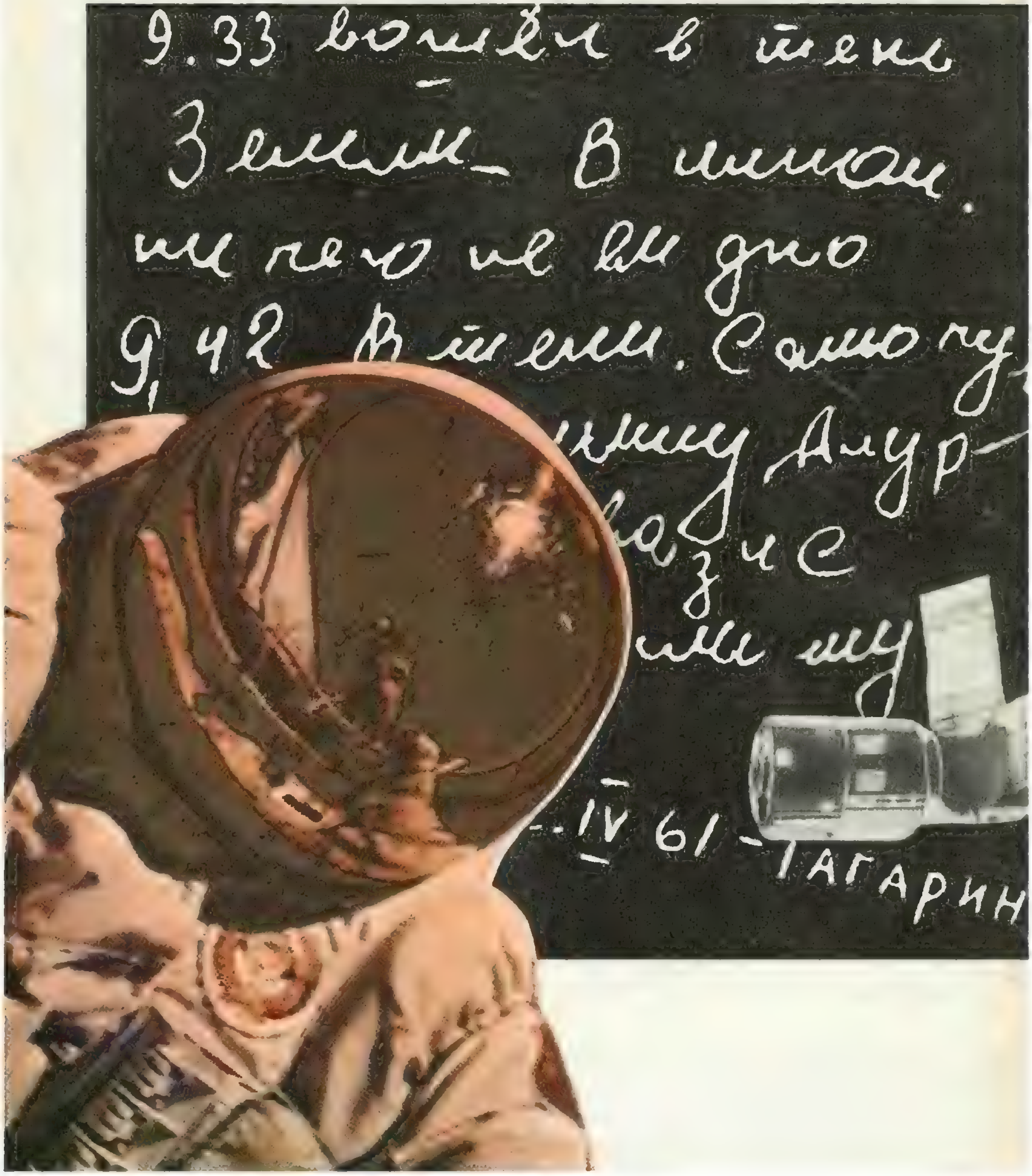


Индекс 70465

25 лет назад гражданин Советского Союза коммунист Юрий Алексеевич Гагарин открыл человечеству дорогу в космос.

С тех пор проделана огромная работа; год от года растет роль космических исследований в нашей жизни. Космонавты всесторонне исследуют нашу планету, помогая решать важные задачи народного хозяйства.

Советский Союз прилагает огромные усилия к тому, чтобы космос всегда оставался ареной международного сотрудничества, мирных исследований и разработок. По иному относятся к этой пробмеме в США, где администрация и военно-промышленный комплекс упорно пытаются вовлечь человечество в подготовку к «звездным войнам», которые могут погубить цивилизацию. Понимая чудовищные масштабы грозящей опасности, народы разных стран активно включаются в борьбу за мирный космос. И в первых рядах борцов за мир и всеобщее разоружение последовательно выступает советский народ.



НОМЕР
5

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант **5** **1986**

Основан в 1970 году

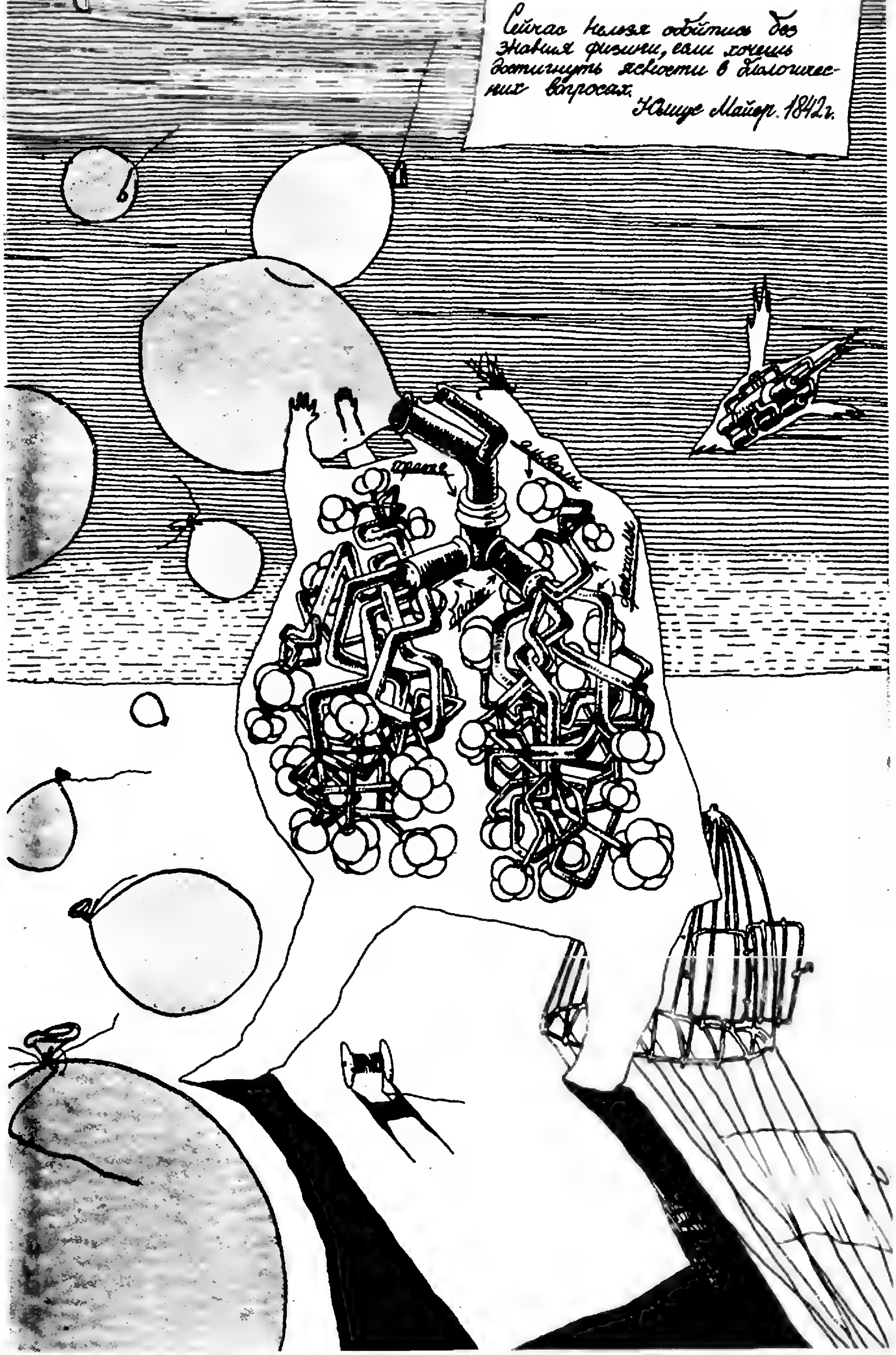
Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

	В НОМЕРЕ:	**IN THIS ISSUE:**
2	*К. Ю. Богданов.* Как мы дышим?	*K. Yu. Bogdanov.* How do we breathe?
9	*А. П. Веселов.* О математике гармонических колебаний	*A. P. Veselov.* On the mathematics of harmonic oscillations
14	*Ю. Г. Павленко.* Парадокс спутника	*Yu. G. Pavlenko.* The sputnik paradox
	Математический кружок	**Mathematics circle**
16	*В. В. Прасолов.* Используя площадь...	*V. V. Prasolov.* Using area...
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
20	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
25	Задачи	Problems
26	*А. И. Буздин.* Немного о термометре и о термоскопе Фердинанда	*A. I. Buzdin.* A little about thermometers and Ferdinand's thermoscope
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
28	Задачи М981—М985; Ф993—Ф997	Problems M981—M985; P993—P997
30	Решения задач М961—М965; Ф973—Ф977	Solutions M961—M965; P973—P977
32	**Калейдоскоп «Кванта»**	**Kvant's kaleidoscope**
	Искусство программирования	**The art of programming**
39	*Л. Ф. Штернберг.* Зачем микрокалькулятору стек	*L. F. Shternberg.* Why the pocket calculator has a stack
	Полупроводниковые элементы вычислительной техники	**Semiconducting elements in computers**
44	IX. Сумматор	IX. Summators
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
46	*М. Р. Либерзон.* Вспомогательный куб	*M. R. Liberson.* Auxilliary cubes
51	**Варианты вступительных экзаменов**	**College entrance examination problems**
	Олимпиады	**Olympiads**
57	Первая Всесоюзная олимпиада по математике учащихся средних профессионально-технических училищ	First All-Union mathematics olympiad for secondary professional-technical institutions
58	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	«Квант» улыбается (*8*)	**Kvant smiles** (*8*)
	Смесь (*58*)	**Miscellaneous** (*58*)
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Бесконечная доска (*3-я с. обложки*)	Infinite chessboard (*3rd cover page*)

Ответ на вопрос, заданный на первой странице обложки, вы найдете в статье Л. Ф. Штернберга (см. с. 39).

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1986



Сейчас нельзя обойтись без знания физики, если хочешь достигнуть ясности в биологических вопросах.

Юлиус Майер. 1842 г.

трахея
бронхи

Как мы дышим?

Кандидат физико-математических наук
К. Ю. БОГДАНОВ

О чем рассказывает электрокардиограмма? Как летучие мыши в полной темноте ловят мошкару? Как почтовые голуби находят дорогу домой? Ответы на эти и многие другие вопросы дает биофизика — наука, изучающая физические явления в живых организмах, лежащая на стыке физики и биологии, использующая новейшие достижения физики в биологических исследованиях. Попробуем и мы, вооружившись школьными знаниями физики, ответить на, казалось бы, простой вопрос: как мы дышим?*)

Наша дыхательная система

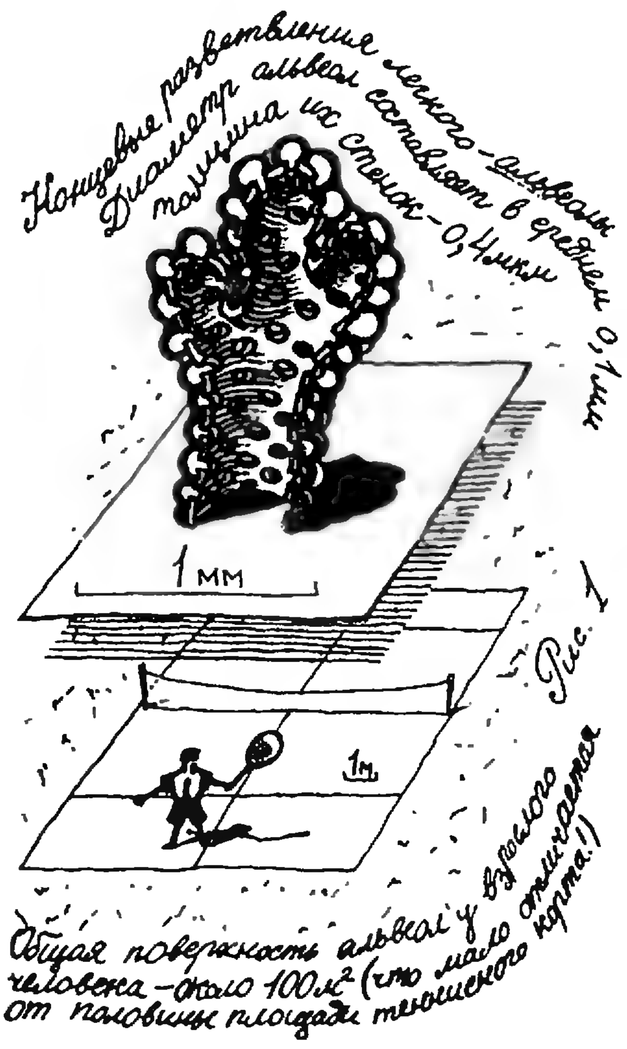
При нормальном дыхании наш организм потребляет в день около 0,5 кг кислорода и выделяет почти такое же количество углекислого газа. И поступление кислорода, и выход углекислого газа осуществляются через легкие.

Внутреннее пространство легких сообщается с атмосферой посредством воздухоносных путей. Воздухоносные пути состоят из носовой полости, где вдыхаемый воздух подогревается и увлажняется, глотки, гортани, трахеи и двух главных бронхов, подводящих воздух к правому и левому легкому. Каждый бронх дробится на более мелкие бронхи (бронхиолы) и заканчивается микроскопическими легочными пузырьками — альвеолами, окруженными со всех сторон густой сетью кровеносных сосудов. Альвеолы, которых у взрослого человека насчитывается около 700 миллионов, представляют собой соединенные друг с другом пузырьки, наполненные воздухом (рис. 1). В каждый момент времени в кровеносных сосудах, оплетающих альвеолы, находится примерно 70 мл крови, из которой в альвеолы диффундирует углекислый газ, а в обратном направлении — кислород. Огромная поверхность альвеол позволяет менее чем за одну секунду насытить эту кровь кислородом и освободить ее от избытка углекислого газа.

Дыхание и мыльные пузыри

Легко ли нам сделать вдох? На сколько давление воздуха внутри легких (внутри альвеол) при вдохе превышает давление снаружи (в плевральной полости)?

Если считать, что каждая альвеола — это полый шарик из эластичной мембраны, то давление, необходимое для поддержания такого шарика в раздутом состоянии, при заданном внешнем давлении должно полностью определяться диаметром шарика и упругими свойствами мембраны. Так ли это?



Концевые разветвления легкого — альвеолы

Диаметр альвеол составляет в среднем 0,1 мм

толщина их стенок — 0,4 мкм

Рис. 1

Общая поверхность альвеол у взрослого человека — около 100 м² (что мало отличается от половины площади теннисного корта!)

---

*) От редакции. Скоро выйдет в свет 49 выпуск «Библиотечки «Квант» — книга К. Ю. Богданова «Физик в гостях у биолога». Прочитать эту книгу мы советуем всем, кто любит физику, биологию; всем, кто любит задавать вопросы, глядя на окружающий нас мир.

В 1929 году швейцарский ученый Карл фон Нииргард обнаружил, что давление, необходимое для раздувания легких, можно значительно уменьшить, если заполнить легкие физиологическим раствором. Это никак не вязалось с представлением об альвеолах как о полых эластичных шариках: если бы при вдохе нам надо было преодолевать только силы упругости, то наши усилия не зависели бы от того, заполнено легкое раствором или нет — ведь силы упругости от этого не зависят. Данные, полученные Нииргардом, стали объяснимы, когда выяснилось, что каждая альвеола изнутри покрыта тонким слоем жидкости. Это обстоятельство существенно влияет на механические свойства альвеолы. В частности, давление, необходимое для раздувания альвеолы, оказывается больше, чем в случае полого шарика из легочной ткани. И вот почему.

Известно, что поверхность жидкости ведет себя подобно растянутой пленке — обладает поверхностным натяжением. Чтобы оценить роль сил поверхностного натяжения в механике альвеолы, рассмотрим пленку жидкости, имеющую форму сферы (простейший пример такой пленки — мыльный пузырь).*) Давление воздуха внутри пузыря из-за поверхностного натяжения жидкости всегда оказывается больше внешнего давления. Величина избыточного давления внутри сферы радиуса R определяется соотношением Лапласа $\Delta p=2\sigma/R$, где σ — коэффициент поверхностного натяжения пленки. Это избыточное давление тем больше, чем меньше радиус сферы. В пленке мыльного пузыря и внутренняя, и внешняя поверхности соприкасаются с воздухом, и σ пленки равно удвоенному значению коэффициента поверхностного натяжения жидкости. В альвеолах контакт воздух — жидкость осуществляется лишь с одной стороны, изнутри.

Давайте оценим величину Δp. Для межклеточной жидкости $\sigma=5\cdot10^{-2}$ Н/м; примем это значение и для жидкости, выстилающей внутреннюю поверхность альвеолы. Полагая $R=50$ мкм$=5\cdot10^{-5}$ м, получаем: $\Delta p=2\cdot10^{3}$ Н/м^2.

На рисунке 2 приведена зависимость объема легких от давления внутри них (точнее, от того, на сколько это давление превышает внешнее). Из графиков видно, что если не всё, то по крайней мере значительная часть давления, растягивающего легкие при вдохе, идет на преодоление сил поверхностного натяжения. Когда же легкие заполнены физиологическим раствором, дополнительное давление необходимо лишь для преодоления упругих свойств легочных тканей. Очевидно, что разница между двумя кривыми на рисунке 2 и представляет вклад сил поверхностного натяжения в эластичность легкого. При обычном вдохе объем легких человека составляет около 50 % их максимального объема. Как следует из рисунка 2, в этом диапазоне вклад сил поверхностного натяжения составляет более 30 %.

Не всё так просто

Привлечение сил поверхностного натяжения для объяснения механических свойств легкого приводит к следующему «парадоксу» при объяснении взаимодействия между соседними альвеолами. На рисунке 3 схематически показаны две соседние альвео-

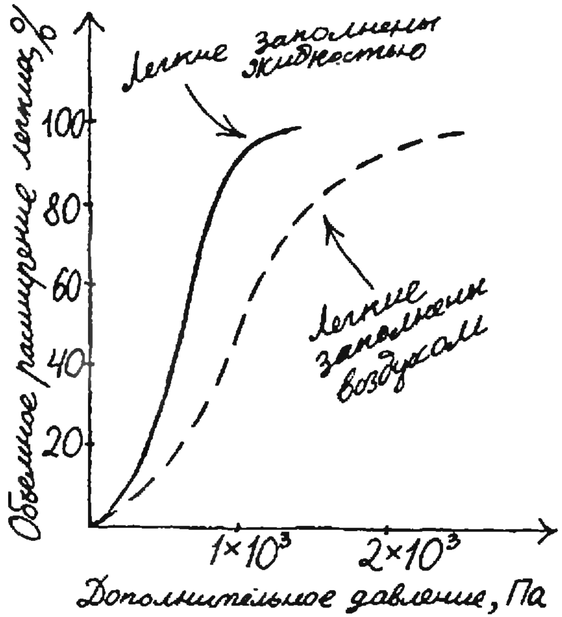


Рис 2 Зависимость объема легких от давления воздуха (или жидкости) в них.

---

*) В серии «Библиотечка «Квант» в 1985 году (46 выпуск) вышла книга Я. Е. Гегузина «Пузыри». В ней читатель найдет подробное объяснение поведения мыльных пузырей в разных условиях и вообще много интересного из жизни пузырей (*Примеч. ред.*)

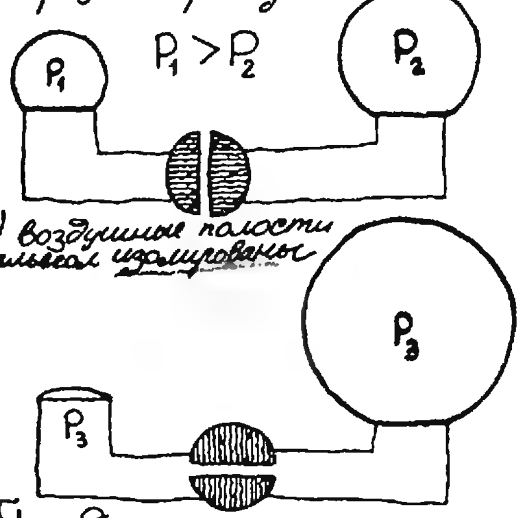


Рис. 3 Схематическое изображение двух соседних сферических альвеол, имеющих разные радиусы

а) воздушные полости альвеол изолированы

б) соединены

лы, имеющие разные размеры. Предположим сначала, что воздушные полости альвеол не сообщаются друг с другом (рис. 3, *а*). Давление воздуха p_1 в левой альвеоле больше, чем давление p_2 в правой (поскольку $R_1 < R_2$). Поэтому, как только мы откроем «кран», соединяющий воздушные полости альвеол, воздух из левой альвеолы начнет перетекать в правую, пока давление в обеих альвеолах не станет одинаковым (рис. 3, *б*). Таким образом, при соединении воздушных полостей двух неодинаковых альвеол бо́льшая всегда будет раздуваться, а меньшая — спадать. Очевидно, что такое взаимодействие между соседними альвеолами привело бы к спадению всех мелких альвеол легкого и к разрыву крупных; в результате легкое уже не могло бы выполнять своей функции. Как же мы все-таки дышим?

Рассматривая взаимодействие между соседними альвеолами, мы заранее считали, что поверхностное натяжение одинаково у различных альвеол и не зависит от того, в каком состоянии — раздутом или спавшемся — они находятся. У чистых жидкостей поверхностное натяжение действительно не зависит от размеров поверхности. Но у жидкостей, содержащих различные примеси, σ зависит от величины поверхности, по которой они граничат с газом.

Опять Природа все предусмотрела. Вещество, содержащееся в виде примеси в жидкости, смачивающей изнутри поверхность альвеол, так регулирует величину поверхностного натяжения, что σ минимально в начале вдоха (минимальная поверхность) и максимально в его конце (максимальная поверхность). Поэтому, несмотря на то, что радиус альвеол в начале вдоха очень мал, вклад сил поверхностного натяжения невелик. Это позволяет раздуть спавшиеся альвеолы относительно малым давлением. В то же время, увеличение σ с увеличением радиуса альвеолы препятствует ее чрезмерному раздуванию в конце вдоха. Кроме того, такая зависимость σ от размера альвеолы регулирует взаимоотношения между соседними альвеолами, не давая проявляться механизму, проиллюстрированному рисунком 3.

Почему примеси делают поверхностное натяжение зависимым от площади поверхности? Как правило, примеси, понижающие σ, по своей химической структуре очень близки к обычному мылу и при растворении образуют тонкую пленку на поверхности воды. Если концентрация примеси высока, так что пленка может покрыть непрерывным слоем всю поверхность воды, то σ такой жидкости равняется определенному для данной примеси значению. Когда же концентрация примеси недостаточна, чтобы покрыть пленкой всю поверхность, поверхностное натяжение жидкости будет находиться между соответствующими значениями σ для воды и примеси. В этих случаях увеличение поверхности жидкости ведет к уменьшению поверхностной концентрации примеси и вызывает увеличение σ, приближая его значение к σ для воды. При уменьшении поверхности жидкости σ будет уменьшаться.

Теперь посмотрите на рисунок 4. На нем приведены зависимости поверхностного натяжения от площади поверхности контакта жидкости с воздухом. Обратите внимание: при одной и той же площади поверхности контакта величина σ на «вдохе» всегда больше, чем на «выдохе». Связано это вот с чем. Примесь, понижающая поверхностное натяжение, находится не только на поверхности жидкости, но и в ее объе-

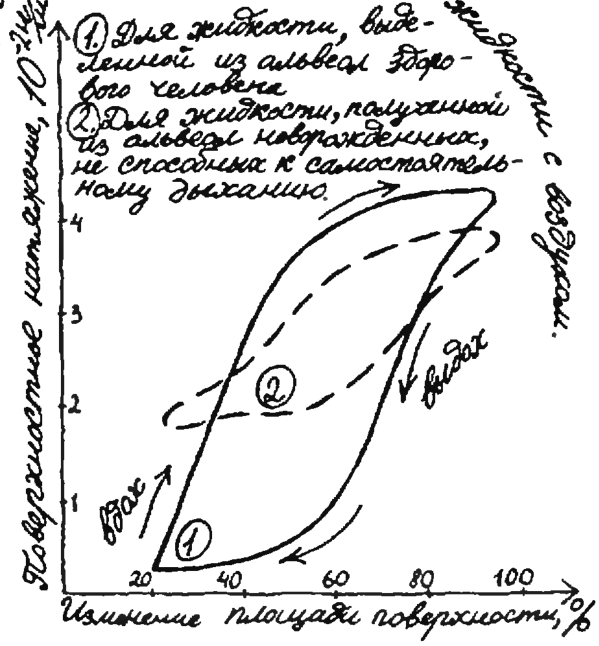


Рис 4. Зависимость σ от площади поверхности контакта жидкости с воздухом.

ме. При увеличении площади поверхности, то есть при уменьшении концентрации примеси на поверхности, часть молекул примеси из глубины жидкости устремляется к поверхности. Однако равновесие устанавливается не мгновенно. Поэтому, например, в начале «вдоха» быстрое увеличение поверхности жидкости сопровождается резким ростом σ, так как растворенные в объеме примеси не успевают выйти на поверхность; равновесие между примесными молекулами наступает лишь в конце «вдоха». Точно также, только в конце «выдоха» σ соответствует равновесному состоянию. Этим и объясняется зависимость σ от площади поверхности, показанная на рисунке 4.

Откуда берутся в легких вещества, понижающие поверхностное натяжение и этим облегчающие наше дыхание? Оказалось, что их синтезируют специальные клетки, находящиеся в стенках альвеол. Синтез этих веществ, называемых поверхностно-активными веществами (ПАВ), идет в течение всей жизни человека — от его рождения до смерти. Кривая 2 на рисунке 4 соответствует легочной жидкости с пониженным содержанием ПАВ. Видно, что минимальное значение σ почти в восемь раз увеличено по сравнению с нормой. В тех редких случаях, когда у новорожденного отсутствуют в легких клетки, производящие ПАВ, ребенок не может самостоятельно сделать первого вдоха. К сожалению, до сих пор много новорожденных во всем мире умирает, так и не сделав своего первого вдоха, из-за недостатка или отсутствия в их альвеолах ПАВ.

Исключение из правил

Однако многие животные, дышащие легкими, совсем не страдают от того, что в их альвеолах нет ПАВ. В первую очередь это относится к холоднокровным — лягушкам, ящерицам, змеям, крокодилам и т. д. Так как этим животным не надо тратить энергию на обогрев собственного организма, их потребности в кислороде в среднем в десять раз меньше, чем у теплокровных. Поэтому и поверхность легких, через которую происходит газообмен между кровью и воздухом, у холоднокровных меньше, чем у теплокровных. Относительное уменьшение площади поверхности легкого, приходящейся на единицу его объема, у холоднокровных связано с увеличением приблизительно в десять раз диаметра их альвеол по сравнению с альвеолами теплокровных. Относительно большой радиус альвеол позволяет легко раздувать их даже в отсутствие на их внутренней поверхности ПАВ (ведь $\Delta p \sim 1/R$).

Второй группой животных, в легких которых отсутствуют ПАВ, являются птицы. Птицы — теплокровные и ведут довольно бойкий образ жизни. Энергетические затраты птиц и млекопитающих одинакового веса близки между собой. Высоки и потребности птиц в кислороде. Причем легкие птиц обладают уникальной способностью насыщать кровь кислородом при полете на большой высоте (около 6000 м), где его концентрация в воздухе падает в два раза по сравнению с концентрацией на уровне моря. Любое млекопитающее (в том числе и человек) на такой высоте начинает испытывать недостаток кислорода, резко ограничивает свою двигательную активность, а иногда даже впадает в полуобморочное состояние. Как же удается легким птицы, не имеющим ПАВ, дышать и насыщать кровь кислородом? Почему это не получается у млекопитающих?

Займемся самокритикой. Чем плохи наши легкие? Во-первых, не весь вдыхаемый воздух участвует в газообмене с кровью: воздух, оказавшийся в конце вдоха в трахее и бронхах, не сможет отдать кислород в кровь и взять оттуда углекислый газ, так как в этих местах легкого практически отсутствуют кровеносные сосуды. Поэтому часть объема легких, занимаемую трахеей и бронхами, принято называть «мертвым пространством». Обычно «мертвое пространство» легких человека имеет объем около 150 см^3. Можно искусственно увеличить объем «мертвого пространства», если заставить себя дышать через длинную трубку. Каждый, кто пытался так делать, наверное, заметил, что при этом необходимо увеличивать глубину дыхания (объем вдыхаемого воздуха). Очевидно, что если объем «мертвого пространства» сделать равным максимально возможному вдоху (около 4,5 дм^3), то человек начнет задыхаться, так как свежий воздух вообще перестанет поступать в альвеолы. Таким образом, существование «мертвого пространства» в дыхательной системе млекопитающих является «ошибкой» Природы.

Создавая легкие млекопитающих, Природа, по нашему мнению, сделала и вторую «ошибку». Этот недостаток связан с тем, что движение воздуха в легких меняет свое направление при переходе от вдоха к выдоху. Поэтому почти половину времени легкие практически бездействуют — во время выдоха свежий воздух в альвеолы не поступает.

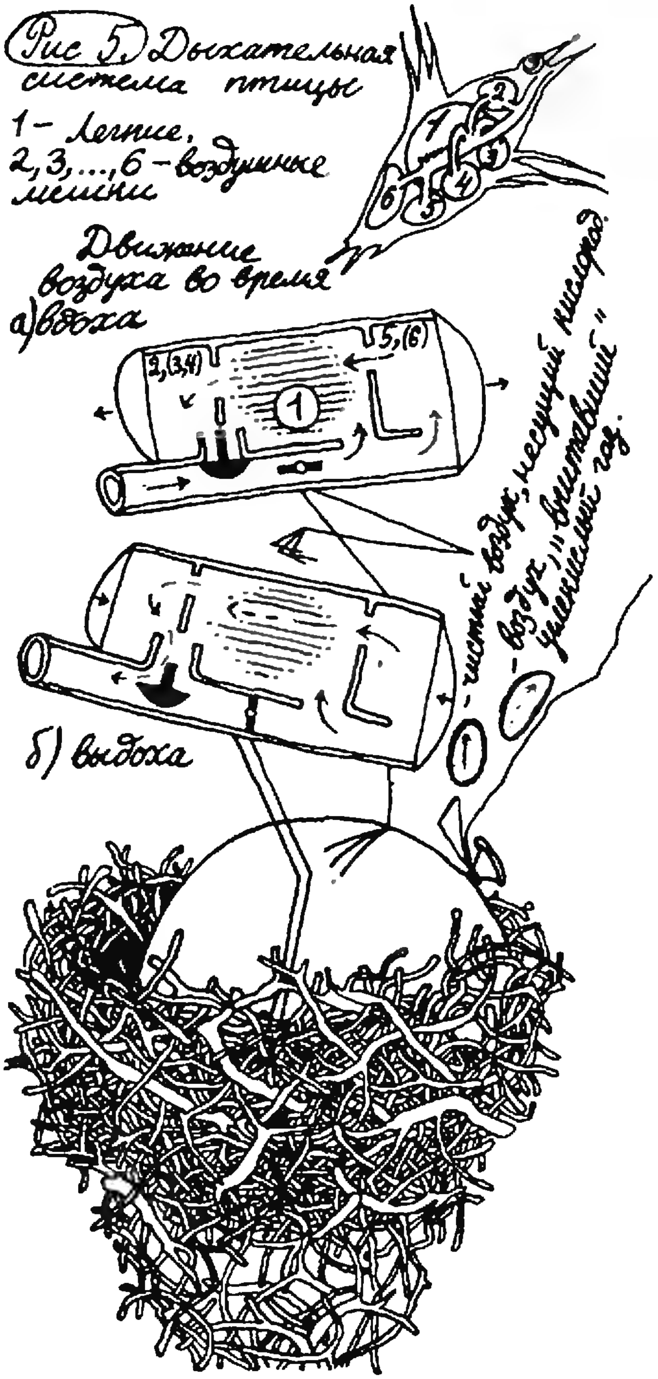


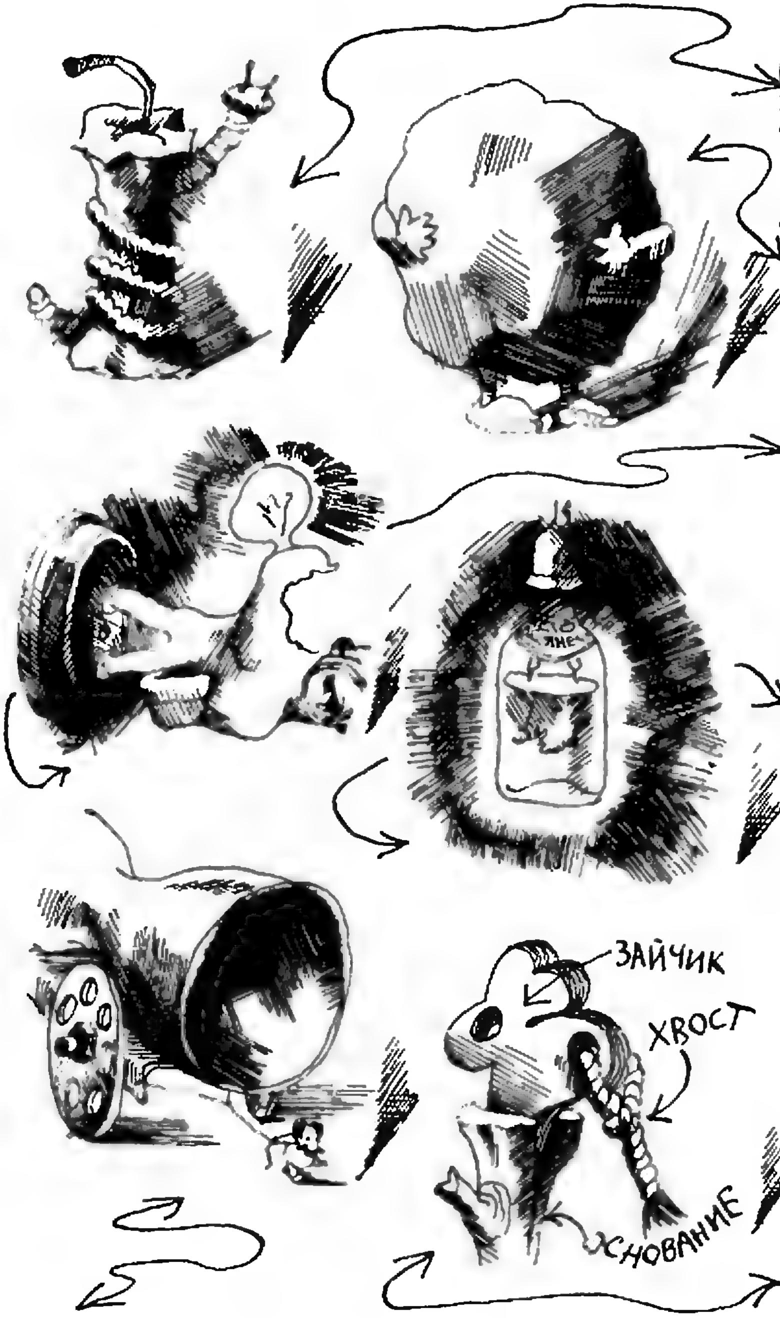
Рис 5. Дыхательная система птицы
1 – легкие,
2, 3, ..., 6 – воздушные мешки
Движение воздуха во время
а) вдоха
2, (3,4)
5, (6)
1
б) выдоха
2
3
4
5
6
– "чистый" воздух, несущий "кислород"
– "воздух", "впитавший" углекислый газ.

А вот у птиц Природа вновь достигла совершенства. Помимо обычных легких, у птиц есть дополнительная система, состоящая из пяти и более пар воздушных мешков, связанных с легкими (рис. 5). Полости этих мешков широко разветвляются в теле и заходят в некоторые кости, иногда даже в мелкие кости фаланг пальцев. В результате дыхательная система утки занимает около 20 % объема тела (2 % — легкие и 18 % — воздушные мешки), в то время как у человека — лишь 5 %. Легкое птицы, в отличие от легкого млекопитающего, представляет собой совокупность параллельно соединенных открытых с двух сторон тоненьких трубочек, окруженных кровеносными сосудами. Соединение мешков с легкими таково, что во время вдоха воздух через легкое птицы течет в том же направлении, что и при выдохе. Поэтому во время дыхания у птиц изменяются только объемы воздушных мешков, а объем легкого остается практически постоянным. А раз нет необходимости раздувать легкое, то не нужны и поверхностно-активные вещества в птичьих легких.

Вот как много интересного можно рассказать в ответ на, казалось бы, простой вопрос — как мы дышим.

У нас в гостях стенгазета «Андромеда» ФАЛТа МФТИ

ФАЛТ — это факультет аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института. Подробно о нем рассказано в «Кванте» №5 за 1975 год. А сегодня мы предоставляем страницу нашего журнала отделу юмора студенческой стенгазеты этого факультета.



О целых и дробях

В надкушенном яблоке лучше обнаружить целого червяка, чем его половину.

Объявление

Меняю один большой камень на два маленьких. *Сизиф.*

Об электричестве

Если Вы хотите включить электрическую лампочку, то:

1. Вставьте вилку от лампочки в штепсельную розетку.
2. Нажмите на кнопку выключателя.
3. Убедитесь, что свет зажегся.
4. Подождите несколько минут, а затем, поплевав на палец, дотроньтесь им до лампочки — при правильном включении она должна быть горячей.

Совет

Электрическая лампочка долго не перегорает, если смазать вольфрамовую нить подсолнечным маслом.

Как сделать барометр

Материалы:
1. Березовый кол. 2. Фанера (12 мм). 3. Веревка. 4. Гвозди.

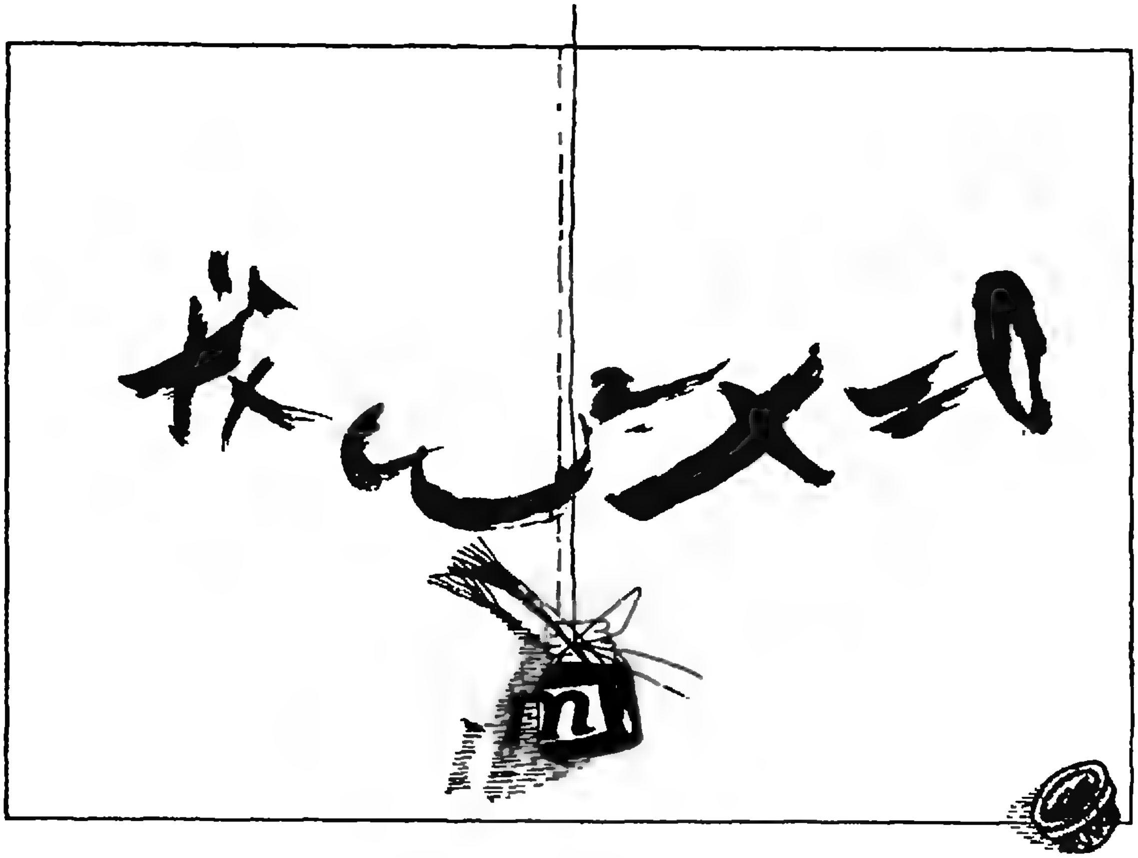
Изготовление:
согласно прилагаемому чертежу.

Принцип действия.

1. Хвост дрожит — ветер.
2. Хвост не дрожит — нет ветра.
3. Хвост стоит дыбом — перед грозой.
4. С хвоста капает — дождь.
5. От хвоста падает тень — солнечно.
6. Тени от хвоста нет — пасмурно.
7. На хвосте иней — мороз.
8. Хвоста не видно — туман.

Новости

В магазин «Детский мир» местного горпромторга поступили в продажу малогабаритные аэродинамические трубы на $M=20$ непрерывного действия с Re до 10^{n}. Игра заинтересует старших и младших научных сотрудников. (Примечание для незнающих: M — число Маха, равно отношению скорости течения газа к скорости звука в этом газе; Re — число Рейнольдса, см. физический энциклопедический словарь.)



О математике гармонических колебаний

Кандидат физико-математических наук
А. П. ВЕСЕЛОВ

> ***Колебания и волны являются основным, по представлению физика-теоретика, средством познания реального мира. Колебаться может все — любые предметы, жидкость и газы; свет, звук, нервные импульсы в конечном итоге являются видами колебаний.***
>
> Академик С. П. Новиков

Маятниковые часы, океанские волны, качели, смена дня и ночи, сезонные изменения в природе — каждый из вас может добавить к этому списку массу других примеров колебательных явлений. Подобно многим эволюционным процессам *), они допускают описание на математическом языке дифференциальных уравнений. Среди всех дифференциальных уравнений, описывающих колебания той или иной системы, простейшим (а поэтому и важнейшим) является *уравнение линейного осциллятора* (от латинского oscillatio — колебания) (или гармонического осциллятора, или гармонических колебаний, или малых колебаний маятника):

$$\boxed{\ddot{x}+\omega^2 x=0.} \qquad (*)$$

Здесь $\ddot{x}$ обозначает вторую производную $\ddot{x}=x''(t)$ по времени t от функции $x=x(t)$, описывающей отклонение системы от положения равновесия, а ω^2 — некоторый (разумеется, положительный) параметр.

Мы расскажем здесь, откуда и как получается уравнение линейного осциллятора — хотя десятиклассники уже знают об этом из курса физики («Физика 10», п. 4) — а затем займемся его исследованием с математической точки зрения.

Где появляется уравнение линейного осциллятора?

Где только это уравнение не появляется! Посудите сами.

1. Малые колебания маятника. Пусть на тонкой нерастяжимой нити длины l подвешен грузик массы m, размерами которого (а со-

---

*) См. статью В. И. Арнольда в «Кванте» № 2 этого года.

ответственно и сопротивлением воздуха) можно пренебречь. Такая система называется *математическим маятником*. Рассмотрим его качания при небольших отклонениях нити от вертикали, то есть малых α (рис. 1). Обозначим через x длину дуги BA: $x=l\alpha$ (α — величина угла BOA в радианах). Тогда, разлагая силу тяжести $P=mg$ на две составляющие T и F (см. рис. 1), находим, что величина F равна $mg\sin\alpha$, а уравнение движения по закону Ньютона дает

$$ml\ddot{\alpha}=-mg\sin\alpha,$$

или

$$\ddot{\alpha}=-\frac{g}{l}\sin\alpha.$$

Получим (нелинейное) уравнение относительно отклонения $\alpha=\alpha(t)$. Воспользуемся теперь малостью α, пределом $\lim\limits_{\alpha\to 0}(\sin\alpha/\alpha)=1$ и заменим в правой части $\sin\alpha$ на α, то есть проведем *линеаризацию*. В результате получим (линейное) уравнение вида (*) с $\omega=\sqrt{g/l}$.

2. Тело на пружинке (рис. 2). При отклонении от положения равновесия на некоторое x тело испытывает по закону Гука со стороны пружины силу $F=-kx$, где k — величина, называемая *жесткостью* пружины. Уравнение движения совпадает с (*) при $\omega=\sqrt{k/m}$. Конечно же, и здесь выражение для силы (а значит, и уравнение (*)) будет точным лишь для не очень больших отклонений от положения равновесия.

3. Колебательный контур (рис. 3), состоящий из конденсатора емкости C и индуктивности L. Заряд конденсатора q меняется при отсутствии активного сопротивления по закону $L\ddot{q}+\frac{1}{C}q=0$ («Физика 10», п. 15), что отвечает уравнению (*) для $\omega=1/\sqrt{LC}$.

4. Сообщающиеся сосуды. Если в трубке, имеющей форму буквы U (рис. 4), уровень жидкости (например, ртути) отклонить на некоторую величину от положения равновесия, то жидкость начнет поочередно подниматься (и опускаться) в каждом из вертикальных участков трубки. Если начальное отклонение мало (как и трение), отклонение $x=x(t)$ уровня жидкости подчиняется уравнению (*).

5. Ареометр (рис. 5). Если этот прибор, используемый для измерения плотности жидкости, отклонить немного вглубь от положения равновесия, то он, вследствие закона Архимеда, начнет колебаться вверх-вниз. Эти колебания тоже достаточно точно описываются уравнением (*) (во всяком случае, пока не начнет сказываться трение).

Упражнение (для любителей физики). Найдите вывод уравнения (*) для предпоследнего примера (4), выразив ω через подходящие параметры.

Что общего во всех приведенных примерах? Состояние системы описывается одним параметром x, который меняется около своего положения равновесия $x=0$; на систему действует сила $F(x)$, зависящая только от параметра x. В пренебрежении потерями энергии изменение параметра, согласно второму закону Ньютона, имеет вид $\ddot{x}=F(x)$. При этом $F(0)=0$, поскольку $x=0$ — положение равновесия. Если у функции $F(x)$ суще-

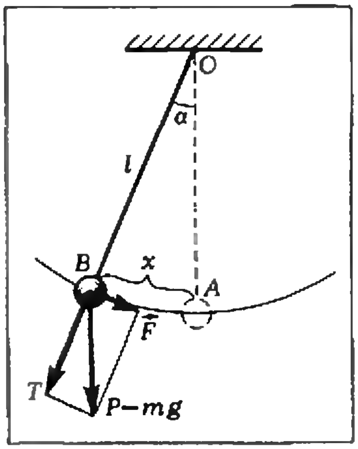


Рис. 1.

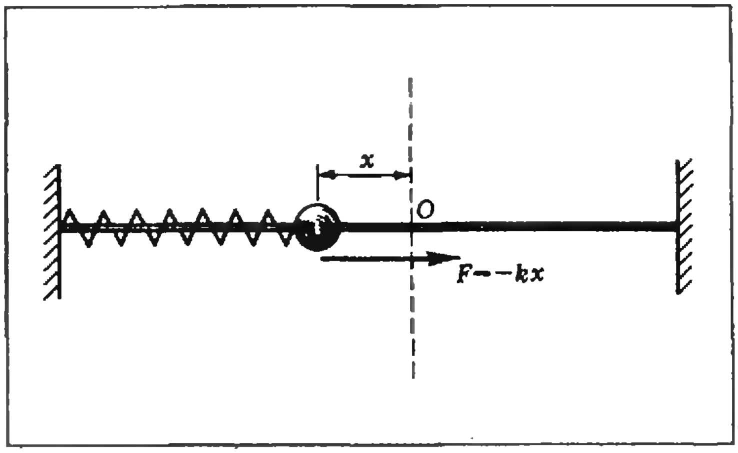


Рис. 2.

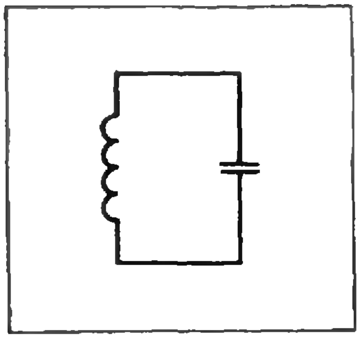


Рис. 3.

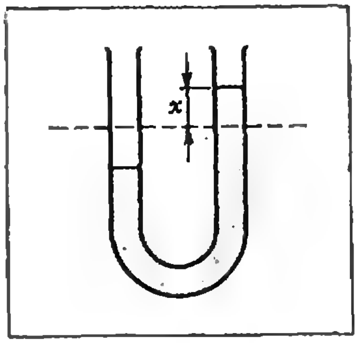


Рис. 4.

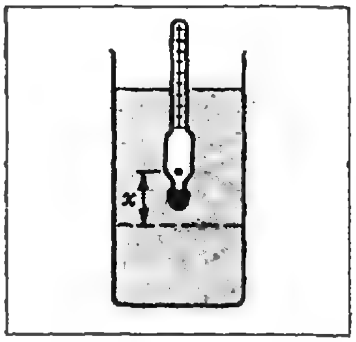


Рис. 5.

ствует ненулевая производная в нуле: $F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}(F(x)/x)=a$, то для малых x мы можем заменить правую часть ($F(x)$) на ax. При этом a обязательно должно быть отрицательным, иначе никакие колебания в окрестности нуля невозможны! Таким образом, мы приходим к линейному уравнению (*), где $\omega=\sqrt{-a}=\sqrt{-F'(0)}$.

Указанная процедура линеаризации, конечно же, приводит к неэквивалентному дифференциальному уравнению, которое тем не менее правильно описывает качественную картину движения вблизи положения равновесия. Этим объясняется универсальность уравнения линейного осциллятора (*), а также его название.

Существование и единственность решения

Как нетрудно проверить, уравнению (*) удовлетворяют функции $x=\cos\omega t$ и $x=\sin\omega t$, а следовательно, и их *линейные комбинации*, то есть выражения вида

$$\boxed{x(t)=a\cos\omega t+b\sin\omega t}\qquad (**)$$

(проверьте это!) *). Покажем, что других решений у этого уравнения нет.

Воспользуемся тем, что в процессе движения сохраняется следующая величина

$$E=\frac{1}{2}(\dot x^2+\omega^2x^2)=\text{const}$$

(*закон сохранения энергии*).

В самом деле, $\dot E=\dot x\ddot x+\omega^2x\dot x=\dot x(\ddot x+\omega^2\dot x)=0$, откуда следует, что $E=\text{const}$.

Рассмотрим теперь произвольное решение уравнения (*): $x=x_1(t)$ и его *начальные данные* $\alpha=x_1(0)$ и $\beta=\dot x_1(0)$. Подберем коэффициенты a и b в выражении $x_2=a\cos\omega t+b\sin\omega t$, так что $x_2(0)=\alpha$, $x_2(0)=\beta$. Для этого достаточно положить $a=\alpha$, $b=\beta/\omega$. Соствим теперь разность $x(t)=x_1(t)-x_2(t)$, которая тоже будет решением (*) (проверьте это). Ее начальные данные будут нулевыми: $x(0)=\dot x(0)=0$. В силу закона сохранения энергии

$$E=\frac{1}{2}(\dot x^2(t)+\omega^2x^2(t))=\frac{1}{2}(\dot x^2(0)+\omega^2x^2(0))=0,$$

откуда $\dot x(t)\equiv x(t)\equiv 0$, то есть

$$x_1(t)\equiv x_2(t)\equiv\alpha\cos\omega t+\frac{\beta}{\omega}\sin\omega t.$$

Мы показали, что любое решение $x_1(t)$ имеет вид (**), где a и b однозначно определяются начальными данными. В процессе доказательства мы получили и формулу для решения через начальные данные.

Бег по кругу на фазовой плоскости

Обратим внимание на следующее обстоятельство, достойное удивления. В уравнении (*) совершенно неожиданным образом оказалось запрятано число π, хотя ни о какой окружности в постановке задачи речи не было. В самом деле, все решения уравнения (*) (за исключением $x(t)\equiv 0$) оказались периодическими функциями времени, причем произведение периода их на ω равно 2π! Раз уж возникло число π, то попробуем поискать и окружность.

Где ее искать? Мы будем ее искать на *фазовой плоскости*, то есть на плоскости с координатами (u; v), где $u=x$, $v=\dot x$. Точки (u; v) этой плоскости называются *фазовыми точками*; они описывают состояние системы: координата $u=x$ указывает отклонение системы от положения равновесия, а координата $v=\dot x$ — скорость ее движения в данный момент времени. С течением времени положение фазовой точки $(u;\ v)=(x(t);\ \dot x(t))$ меняется, и она описывает некоторую линию на фазовой плоскости, называемую *фазовой траекторией*. Какую?

---

*) В связи с этим уравнение (*) иногда называют уравнением синуса и косинуса.

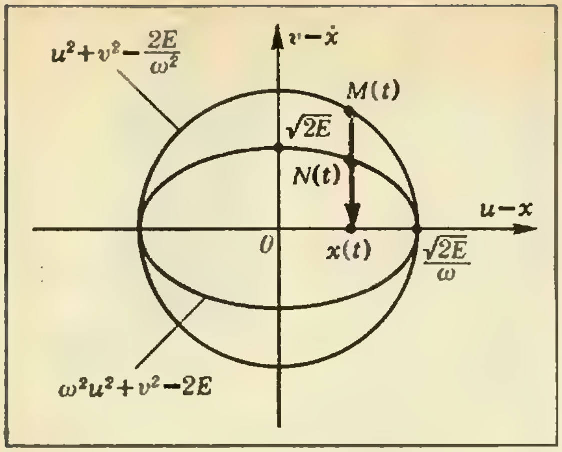


Рис. 6.

Догадливый читатель наверняка подумал — не окружность ли?

Не будем опережать события. Пока у нас есть лишь эллипс — линия уровня энергии $E=\text{const}$, то есть линия

$$\omega^2 u^2+v^2=2E \tag{1}$$

(на двойку мы умножили, чтобы не возиться с ненужными дробями), показанная на рисунке 6. В силу закона сохранения энергии фазовая точка $N(t)=(x(t);\ \dot{x}(t))$, имеющая в момент времени t энергию E, будет всегда оставаться на эллипсе (1), то есть будет двигаться по эллипсу. Построим на его горизонтальной *оси как на диаметре окружность* и проведем через фазовую точку $N(t)$ прямую, параллельную оси Ov, до пересечения с окружностью в точке $M(t)$. Тогда координата по оси x точки $N(t)$ будет совпадать с координатой по оси x точки $M(t)$, то есть будет равна $x(t)$.

Преобразуем выражение (**) для $x(t)$, пользуясь формулами дополнительного аргумента:

$$x(t)=a\cos\omega t+b\sin\omega t=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\omega t+\varphi), \tag{2}$$

где φ определяется из условий

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi=\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{3}$$

Обозначив $A=\sqrt{a^2+b^2}$, можно заметить, что

$$A=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2/\omega^2}=$$

$$=\frac{1}{\omega}\sqrt{\beta^2+\omega^2\alpha^2}=$$

$$=\frac{1}{\omega}\sqrt{\dot{x}^2(0)+\omega^2x^2(0)}=\sqrt{2E}/\omega.$$

Поэтому $x(t)$ можно записать в виде

$$x(t)=\frac{2E}{\omega}\cos(\omega t+\varphi). \tag{4}$$

Величина $A=\sqrt{2E}/\omega$, характеризующая размах гармонических колебаний, называется *амплитудой*, ω — *циклической частотой*, $T=2\pi/\omega$ — *периодом*, φ — *фазой*.

Теперь легко установить, что точка $M(t)$ будет вращаться равномерно с угловой скоростью ω по окружности с центром O радиуса A. Действительно, если через φ обозначить угол uOM в момент времени $t=0$, то угол $uOM(t)$ равен $\omega t+\varphi$ в силу того, что проекция на ось Ou точки $M(t)$ задана формулой (4). Мы установили, что гармонические колебания представляют собой проекцию на прямую равномерного вращения по окружности, радиус которой равен амплитуде колебаний, а угловая скорость вращения равна циклической частоте.

Эквивалентный взгляд состоит в том, что гармоническое колебание есть одна из координат равномерно вращающегося вектора (в данном случае — $\vec{OM}$). Длина этого вектора совпадает с амплитудой, а начальное положение определяется фазой. Такое представление колебания называется его *векторной диаграммой* и часто бывает полезным. Попробуйте с его помощью решить следующие задачи.

Задача 1. Докажите, что сумма двух ненулевых гармонических колебаний есть гармоническое колебание тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую частоту (или, как говорят, *когерентны*). При каком соотношении фаз сумма двух когерентных колебаний имеет максимальную амплитуду? Минимальную? Что можно сказать о произведении гармонических колебаний?

Задача 2. Докажите, что сумма трех гармонических колебаний одинаковой амплитуды и частоты, фазы которых суть φ, $\varphi+(2\pi/3)$ и $\varphi+(4\pi/3)$, равна нулю.

Последнее обстоятельство играет важную роль при использовании трехфазного тока, поскольку именно такие колебания дает трехфазный генератор переменного тока. Кстати, на векторной диаграмме вы найдете объяснение, почему отношение стандартных напря-

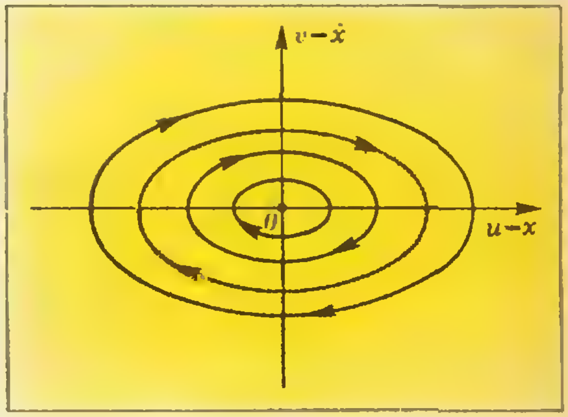


Рис. 7.

жений 220 вольт и 127 вольт приблизительно равно $\sqrt{3}$.

Задача 3. Сколько корней на отрезке [0, 2] имеет уравнение

$$\cos x+\frac{1}{2}\cos(x+a_1)+\frac{1}{4}\cos(x+a_2)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{2^n}\cos(x+a_n)=0$$

($a_1, \ldots, a_n$ — произвольные параметры)?

Итогом нашего исследования уравнения (*) является рисунок 7. Такие рисунки математики называют фазовыми портретами или фазовыми диаграммами дифференциального уравнения. На нашей диаграмме видно, что каждая фазовая точка бегает по своему эллипсу (отвечающему ее уровню энергии), при этом отклонение от положения равновесия $x(t)$ меняется периодически, также как и скорость $\dot{x}(t)$, достигающая своих максимальных значений в положении равновесия. Обратим внимание на следующее замечательное свойство гармонического осциллятора: период его колебаний не зависит от амплитуды! Это свойство является исключительным, что можно видеть уже на примере математического маятника, к которому мы и перейдем.

О математике математического маятника

Остановимся на теории математического маятника, отказавшись теперь от предположения малости колебаний (но по-прежнему считая, что трения нет). Уравнение движения в этом случае нам уже известно:

$$\boxed{\ddot{x}+\omega^2\sin x=0.}\qquad(***)$$

Хотя по виду уравнение (***) не сильно отличается от уравнения (*) линейного осциллятора, оно уже нелинейно, и решить его совсем не так просто. Более того, выписать его решение с помощью известных в школе функций вообще нельзя,— для этого требуются специальные функции, называемые эллиптическими. Как быть?

Получить представление о решениях уравнения (***) и о поведении математического маятника можно с помощью его фазового портрета (рис. 8), который строится с помощью закона сохранения энергии. Рассмотрим этот портрет.

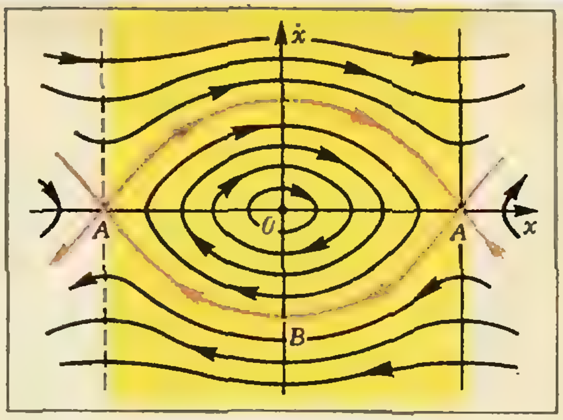


Рис. 8.

Три жирные точки на оси Ox отвечают положениям равновесия — устойчивому (начало координат) и неустойчивому (точка A (π; 0)), то есть крайнему нижнему и крайнему верхнему положениям маятника. Расширяющиеся овалы около точки O устойчивого равновесия отвечают различным режимам колебания маятника (с различной амплитудой); вблизи точки O они на глаз не отличимы от эллипсов — фазовых траекторий уравнения (*)). Обход такого овала (большого или малого) отвечает целому периоду колебания маятника, его пересечения с осью $O\dot{x}$ — проход через устойчивое положение равновесия с максимальной скоростью, пересечения с осью Ox — крайнее отклонение маятника (нулевая скорость). Волнистые траектории в нижней и верхней частях рисунка — это неравномерные вращения маятника, получающиеся, когда начальный толчок настолько силен, что маятник достигает верхнего положения равновесия с ненулевой скоростью, проскакивает его и продолжает вращаться, достигая экстремальных значений скорости при проходе через положения равновесия. Красным цветом показаны фазовые траектории, отделяющие колебательные движения от вращательных. Эти траектории отвечают движению с уровнем энергии E_0, равным потенциальной энергии маятника в верхнем (неустойчивом) положении равновесия $A(\pi;\ 0)$. При таком движении маятник проходит нижнее положение равновесия $B(0;\ v_0)$ с максимальной скоростью $v_0=\sqrt{2E_0/m}$ и, постепенно замедляясь, подходит к верхнему положению равновесия; можно доказать, что он его достигает (с нулевой скоростью) лишь за бесконечный промежуток времени.

Заключение

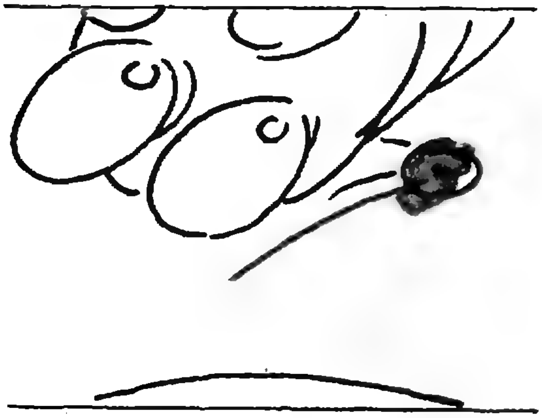
Мы немного познакомились со свойствами линейного и нелинейного осцилляторов. Пожалуй, самое удивительное в осцилляторе — это его многоликость и универсальность: трудно перечислить все те простые и разнообразные физические системы, которые описываются уравнениями (*) и (***). Осциллятор входит и во многие сложные системы. Например,

(Окончание см. на с. 43)

Парадокс спутника

Кандидат физико-математических наук
Ю. Г. ПАВЛЕНКО

При движении искусственных спутников Земли в верхних слоях атмосферы они испытывают тормозящее действие воздуха. До запусков ИСЗ сведения о плотности атмосферы на высотах до 200 км были получены благодаря полетам геофизических ракет. Позднее анализ движения ИСЗ позволил уточнить эти данные (они приведены в «таблице» на развороте).



Сила сопротивления, действующая на спутник в верхних слоях атмосферы, обусловлена столкновениями с молекулами воздуха. Эта сила направлена противоположно скорости, и ее можно записать в виде

$$\vec{F}_c = -k\vec{v},$$

где коэффициент k положительный и, вообще говоря, сам зависит от скорости. Он тем больше, чем больше площадь поперечного сечения тела S и плотность атмосферы ρ.

Сравним величины ускорений, сообщаемых спутнику силой сопротивления и силой притяжения. Предположим, что спутник массы $m=100$ кг имеет форму шара с сечением $S=1$ м^2 и движется по круговой орбите на высоте $h=160$ км со скоростью $v=8$ км/с. Для приближенных расчетов можно считать, что $k=S\rho v$. В этом случае абсолютное значение ускорения, обусловленного силой сопротивления,

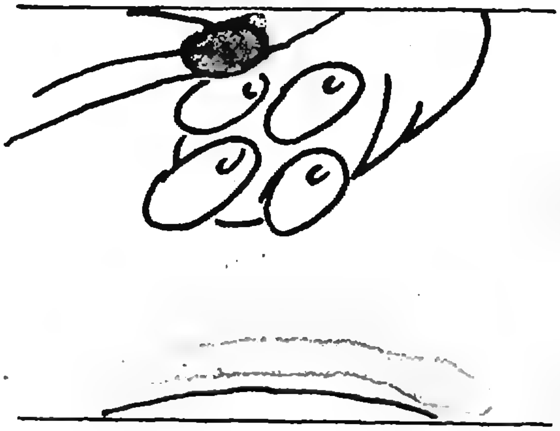
$$a_c = \frac{kv}{m} \approx \frac{S\rho v^2}{m} \approx 6{,}4\cdot 10^{-4}\ \text{м/с}^2.$$

Сила притяжения $F = G\frac{Mm}{(R+h)^2}$, действующая на спутник со стороны Земли ($M=5976\cdot 10^{21}$ кг — масса Земли, $R=6371$ км — ее средний радиус), сообщает ему ускорение, направленное к центру Земли и равное

$$a_n = G\frac{M}{(R+h)^2} \approx 9{,}33\ \text{м/с}^2.$$

Как видно, «тормозное» ускорение составляет примерно одну пятнадцатитысячную часть от центростремительного. И тем не менее влияние атмосферы на высоте 160 км оказывается настолько существенным, что, совершив один-два оборота, спутник начинает быстро снижаться.

Первый советский ИСЗ имел форму шара диаметром 58 см и массу 83,6 кг. Ракета-носитель была значительно больше по размерам. Казалось бы, поскольку ракета испытывает большее сопротивление (у нее больше S), после выхода на орбиту она должна отставать от спутника. Однако наблюдения показали, что ракета-носитель значительно опережала спутник. Попробуем разобраться в этом «парадоксе».



Движение спутников в настоящее время рассчитывают на ЭВМ, исходя из законов Ньютона. Для решения этой задачи в случае, когда сила сопротивления зависит от скорости тела, школьных знаний математики недостаточно. Мы объясним «парадокс» спутника на основе энергетических соображений. Если бы сопротивление отсутствовало, то полная механическая энергия спутника E оставалась бы постоянной:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \left(-G\frac{Mm}{r}\right) = \text{const} \qquad (1)$$

(здесь $\left(-G\frac{Mm}{r}\right)$ — потенциальная энергия спутника, находящегося на

1000
500
200
160
120
0

ρ кг/м³

10^{-15}

10^{-12}

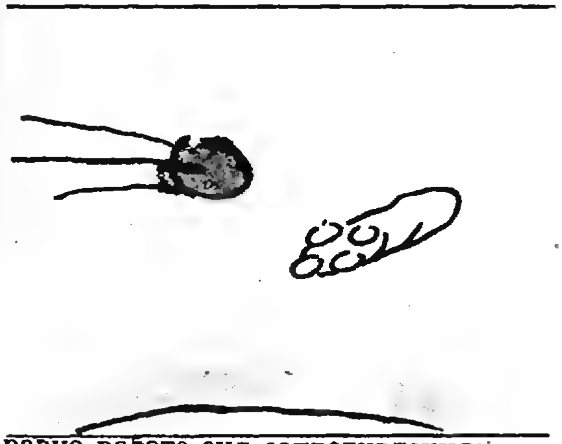
$5\cdot10^{-10}$

10^{-9}

10^{-8}

1,225

расстоянии r от центра Земли*)). При наличии сопротивления механическая энергия уже не остается постоянной величиной, а зависит от времени: $E=E(t)$. Ее приращение



равно работе сил сопротивления:

$$\Delta E=\Delta A_c. \qquad (2)$$

Работа силы сопротивления на малом перемещении $\Delta\vec{s}=\vec{v}\cdot\Delta t$ равна $-kv^2\times\times\Delta t$. Подставляя это выражение в (2) и переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим закон изменения механической энергии спутника:

$$E'=-kv^2 \qquad (3)$$

(E' — производная энергии по времени).

Итак, спутник выведен на круговую орбиту радиуса r. Если сопротивление отсутствует, то из второго закона Ньютона можно найти скорость спутника на круговой орбите радиуса r:

$$m\frac{v^2}{r}=G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow v^2=G\frac{M}{r}. \qquad (4)$$

Влияние атмосферы приводит к тому, что траектория спутника становится не окружностью, а спиралеобразной кривой. Если эта траектория незначительно отличается от окружности, то можно считать, что в любой момент времени связь скорости $v(t)$ и расстояния до спутника $r(t)$ имеет форму (4). Однако теперь скорость и «радиус окружности» являются функциями времени.

Учитывая выражение (4), потенциальную энергию спутника можно записать в виде $\Pi=-G\frac{Mm}{r}=-mv^2$. Следовательно, полную механическую энергию (см. (1)) можно представить в виде

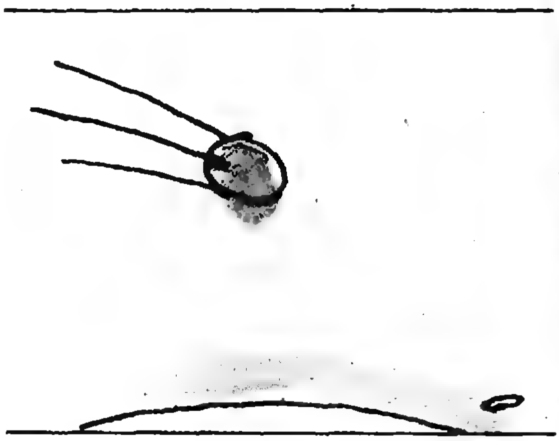
$$E=\frac{mv^2}{2}+(-mv^2)=-\frac{mv^2}{2}.$$

Найдем отсюда производную энергии по времени: $E'=(-mv)v'$; подставив это выражение в (3), получим

$$mv'=kv.$$

Отсюда видно, что скорость спутника со временем растет по величине (производная $v'>0$). Она растет тем быстрее, чем больше отношение k/m. Оказывается, что для ракеты-носителя эта величина больше, чем для спутника, и, следовательно, скорость ракеты увеличивается быстрее. Вот почему ракета-носитель после вывода спутника на орбиту обогнала его.

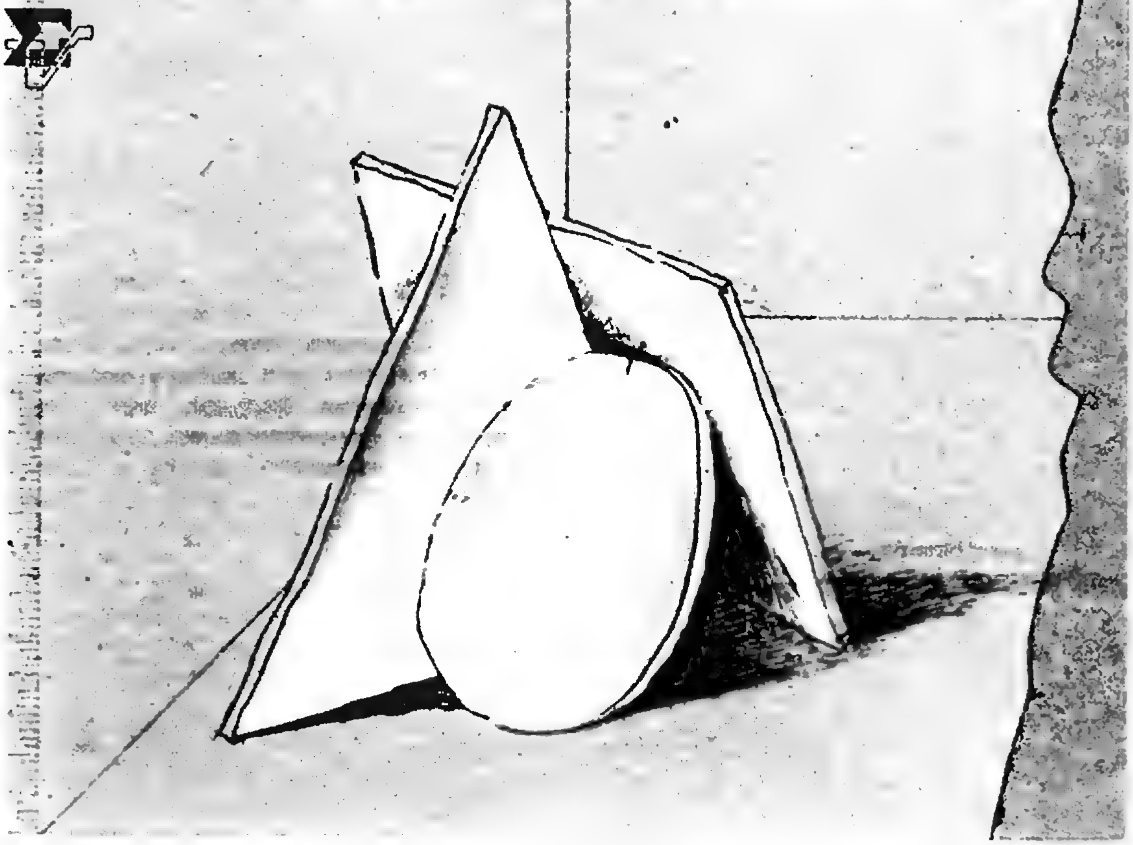
Из рассмотренных нами соотношений можно сделать вывод о том, как под влиянием атмосферы происходит изменение энергии спутника на орбите. Действие силы сопротивления приводит к тому, что спутник начинает «падать». При этом его скорость, а следовательно, и кинетическая энергия растут по мере приближения к Земле, а потенциальная энергия убывает (оставаясь отрицательной). Из выражения (3) видно, что полная механическая энергия также уменьшается. Следовательно, убывание потенциальной энергии идет быстрее, чем рост кинетической.



Таким образом, в результате взаимодействия с атмосферой ИСЗ, не имеющие специальной системы посадки, при снижении ускоряют свое движение. Попадая в плотные слои атмосферы, они сгорают. Вот почему теперь на небе чаще можно увидеть падающую звезду и ... загадать желание.

---

*) Вывод выражения для потенциальной энергии в поле тяготения приведен в заметке «Вторая космическая скорость» раздела «Школа в «Кванте» в мартовском номере журнала. (*Примеч. ред.*)



Используя площадь...

В. В. ПРАСОЛОВ

При решении различных математических задач часто бывает полезно рассмотреть какой-либо вспомогательный элемент, не присутствующий в формулировке задачи. Мы разберем основные приемы решения геометрических задач при помощи площади.

Прием 1. *Если многоугольник разрезан на несколько многоугольников, то сумма их площадей равна площади исходного многоугольника.*

Наиболее знаменитым применением этого приема является одно из многочисленных доказательств теоремы Пифагора.

Пример 1 (теорема Пифагора). Докажите, что сумма квадратов длин катетов прямоугольного треугольника равна квадрату длины гипотенузы.

Решение. Пусть a, b — длины катетов, c — длина гипотенузы. Докажем, что сумма площадей квадратов со сторонами a и b равна площади квадрата со стороной c. Рассмотрим для этого квадрат со стороной $a+b$ и разрежем его двумя способами, как показано на рисунке 1. В первом случае этот квадрат распадается на 4 прямоугольных треугольника с катетами a и b и два квадрата со сторонами a и b (это достаточно очевидно), а во втором — на 4 прямоугольных треугольника с катетами a и b и квадрат со стороной c (это требует некоторого обоснования, например, такого: ясно, что все стороны полученного четырехугольника равны c, а углы легко вычисляются).

Пример 2. Из точки O, лежащей внутри правильного треугольника ABC, опущены перпендикуляры OA_1, OB_1, OC_1 на стороны BC, AC, AB соответственно. Докажите, что сумма $OA_1+OB_1+OC_1$ не зависит от положения точки O и равна высоте треугольника.

Решение. Пусть длина стороны треугольника ABC равна a, а длина высоты — h. Ясно, что $S_{ABC}=S_{BCO}+S_{ACO}+S_{ABO}$, то есть $\frac{1}{2}ah=$

$=\frac{1}{2}aOA_1+\frac{1}{2}aOB_1+\frac{1}{2}aOC_1$. Поэтому $h=OA_1+OB_1+OC_1$.

Пример 3. Многоугольник, описанный около окружности радиуса r, разрезан произвольным образом на треугольники. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей этих треугольников больше r.

Решение. Обозначим радиусы вписанных окружностей полученных треугольников через $r_1, \ldots, r_n$, их периметры — через $P_1, \ldots, P_n$, площади — через $S_1, \ldots, S_n$. Площадь и периметр исходного многоугольника обозначим через S и P. Поскольку $P_i<P$,

$$r_1+\ldots+r_n=\frac{2S_1}{P_1}+\ldots+\frac{2S_n}{P_n}>$$

$$>\frac{2S_1}{P}+\ldots+\frac{2S_n}{P}=\frac{2S}{P}=r.$$

Прием 2. *Отношение длин отрезков можно заменить на отношение площадей треугольников.*

Пример 4. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки C_1 и B_1 соответственно. Пусть O — точка пересечения отрезков BB_1 и CC_1 (рис. 2). Вычислите $\frac{BO}{B_1O}$, если $\frac{BC_1}{AC_1}=\alpha$ и $\frac{CB_1}{AB_1}=\beta$.

Решение. Прежде чем приступить к решению этой весьма часто применяющейся задачи, отметим ее некоторую странность. В самом деле, для любого треугольника ABC можно взять точки B_1 и C_1, делящие его стороны AC и AB в заданных отношениях. Почему же в условии не задан вид треугольника ABC, а заданы лишь $\frac{BC_1}{AC_1}$ и $\frac{CB_1}{AB_1}$?

Переходим к решению. Ясно, что $\frac{BO}{B_1O}=\frac{S_{BOC}}{S_{B_1OC}}$. Вычислим теперь $\frac{S_{AOC}}{S_{B_1OC}}$ и $\frac{S_{BOC}}{S_{AOC}}$. Ясно, что $\frac{S_{AOC}}{S_{B_1OC}}=$ $=\frac{AC}{B_1C}=\frac{AB_1+B_1C}{B_1C}=1+\frac{AB_1}{B_1C}$. Поскольку треугольники BOC и AOC имеют общую сторону OC, отношение их площадей равно отношению длин высот, опущенных на OC. Отношение высот равно, в свою очередь, $\frac{BC_1}{AC_1}$. Поэтому $\frac{S_{BOC}}{S_{AOC}}=\frac{BC_1}{AC_1}$. В итоге получаем, что $\frac{BO}{B_1O}=\frac{S_{BOC}}{S_{B_1OC}}=\frac{S_{BOC}}{S_{AOC}}\cdot\frac{S_{AOC}}{S_{B_1OC}}=$ $=\alpha\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$.

Пример 5 (теорема Чевы). На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC взяты точки C_1, A_1, B_1 соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$.

Решение. Пусть сначала прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Как и в предыдущей задаче, получаем $\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{S_{ACO}}{S_{ABO}}$, $\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{S_{BCO}}{S_{ACO}}$ и $\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{S_{ABO}}{S_{BCO}}$.

Перемножая эти равенства, получаем

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.$$

Предположим теперь, что $\frac{AB_1}{B_1C}\times$ $\times\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$, и путь O — точка

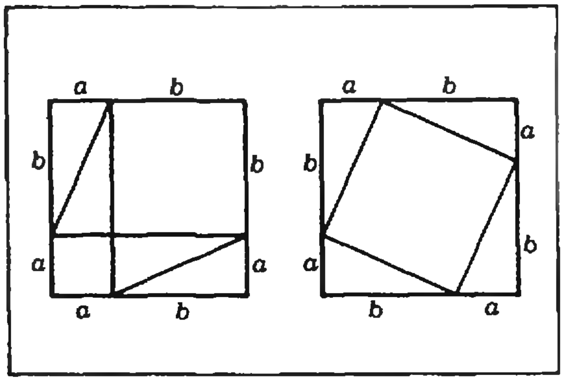


Рис. 1.

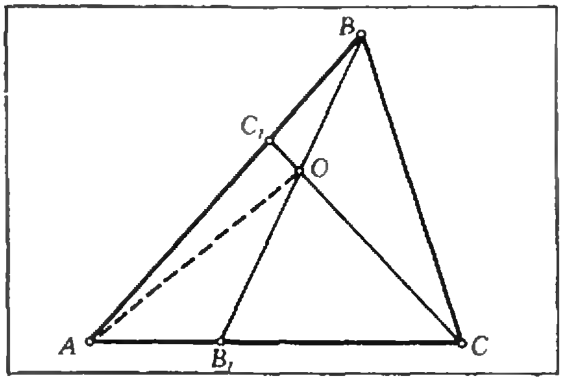


Рис. 2.

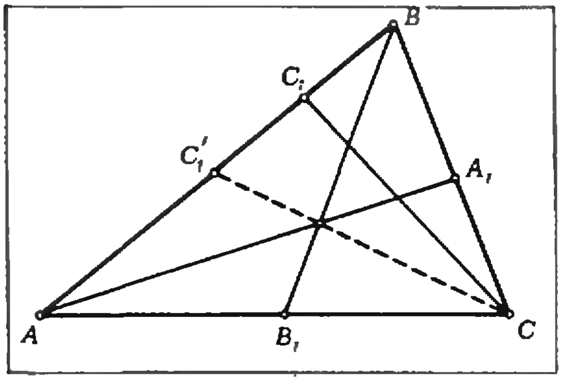


Рис. 3.

пересечения отрезков AA_1 и BB_1. Обозначим через C_1' точку пересечения прямой OC с отрезком AB (рис. 3). Тогда, как мы только что доказали,

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1'}{C_1'A}=1=\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}.$$

Следовательно, $\frac{BC_1'}{C_1'A}=\frac{BC_1}{C_1A}$. Остается заметить, что если точка X движется по отрезку AB (не выходя за его пределы), то величина $\frac{BX}{XA}$ изменяется монотонно, и поэтому $C_1'=C_1$, то есть прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Эта замечательная теорема заслуживает того, чтобы сделать по ее поводу некоторые комментарии. Читатели, знающие, что все медианы треугольника пересекаются в одной точке, а также и все биссектрисы, и все высоты, могли заподозрить, что все эти факты — следствия какой-то более общей теоремы. Это действительно так: они являются следствиями теоремы Чевы, получающимися из нее достаточно простыми вычислениями. Легко также доказать, что в одной точке пересекаются отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания вписанной окружности со сторонами.

С высотами есть, впрочем, одна сложность: если угол C треугольника ABC тупой, то высота, опущенная из C, попадает не на сторону AB, а на ее продолжение. Оказывается, что теорему Чевы можно переформулировать (и, конечно, доказать) так, чтобы она оставалась верной и в том случае, когда точки A_1, B_1, C_1 берутся не на сторонах BC, CA, AB, а на прямых BC, CA, AB. Для этого нужно отношениям длин отрезков приписать знаки ± в зависимости от того, в одну или в разные стороны направлены соответствующие векторы (в формулировке теоремы Чевы участвуют лишь отношения длин отрезков, лежащих на одной прямой). Мы советуем читателям самостоятельно придумать нужную формулировку.

Пример 6. Дан выпуклый многоугольник $A_1A_2...A_n$. На стороне A_1A_2 взяты точки B_1 и D_2, на стороне A_2A_3 — точки B_2 и D_3 и т. д. таким образом, что если построить параллелограммы $A_1B_1C_1D_1$, ..., $A_nB_nC_nD_n$, то прямые A_1C_1, ..., A_nC_n пересекутся в одной точке O. Докажите, что $A_1B_1\cdot A_2B_2\cdot ...\cdot A_nB_n=$ $=A_1D_1\cdot A_2D_2\cdot ...\cdot A_nD_n$.

Решение. Так как $A_iB_iC_iD_i$ — параллелограмм и точка O лежит на продолжении его диагонали A_iC_i, из равенства площадей треугольников $A_iB_iC_i$ и $A_iC_iD_i$ и соображений подобия следует, что $\frac{A_iB_i}{A_iD_i}=\frac{h_i}{h_{i-1}}$, где h_i — расстояние от точки O до стороны A_iA_{i+1}. Нам остается перемножить эти равенства для $i=1$, ..., n.

Прием 3. *Различные формулы для площади позволяют получить соотношения между сторонами, высотами, периметром и т. д.*

Пример 7. Длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что радиус вписанной окружности этого треугольника равен 1/3 одной из высот.

Решение. Пусть длины сторон a, b, c образуют арифметическую прогрессию. Тогда полупериметр p равен $\frac{3}{2}b$. Поскольку $\frac{1}{2}h_b\cdot b=S=$ $=r\cdot p=\frac{3}{2}r\cdot b$, получаем $r=b/3$.

Пример 8. Внутри треугольника ABC взята точка M. Обозначим расстояния от точки M до вершин A, B, C через R_a, R_b, R_c, а расстояния от точки M до сторон BC, CA, AB — через d_a, d_b, d_c соответственно.

а) Докажите, что $a\cdot R_a\geqslant c\cdot d_c+$ $+b\cdot d_b$.

б) (Неравенство Эрдёша — Морделла.) Докажите, что

$$R_a+R_b+R_c\geqslant 2(d_a+d_b+d_c).$$

Решение. а) Опустим из точек B и C перпендикуляры BK и CL на пря-

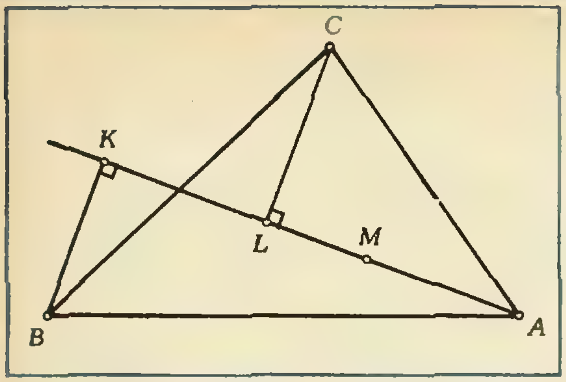


Рис. 4.

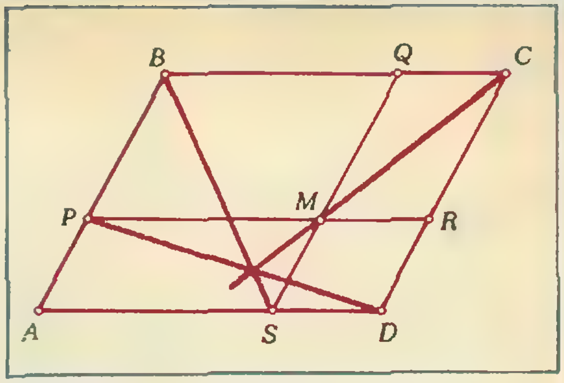


Рис. 5.

мую MA (рис. 4). Пусть $a_1=BK$, $a_2=CL$. Ясно, что $a_1+a_2\leqslant a$. Поэтому

$$\frac{1}{2}aR_a\geqslant\frac{1}{2}a_1R_a+\frac{1}{2}a_2R_a=$$
$$=S_{ABM}+S_{ACM}=$$
$$=\frac{1}{2}bd_b+\frac{1}{2}cd_c.$$

Заметим, что при доказательстве мы использовали только то, что точка M лежит внутри угла BAC, а не то, что точка M лежит внутри треугольника.

б) Применяя неравенство пункта а) к точке, симметричной M относительно биссектрисы угла A (это правомерно ввиду замечания к пункту а)), получаем неравенство

$$R_a\geqslant\frac{c}{a}d_b+\frac{b}{a}d_c.$$

Аналогично,

$$R_b\geqslant\frac{c}{b}d_a+\frac{a}{b}d_c\ \text{и}$$
$$R_c\geqslant\frac{a}{c}R_b+\frac{b}{c}R_a.$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$R_a+R_b+R_c\geqslant\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)d_a+$$
$$+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)d_b+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)d_c\geqslant$$
$$\geqslant 2(d_a+d_b+d_c),$$

поскольку $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$.

Неравенство Эрдёша — Морделла имеет довольно длинную историю. В 1935 году известный венгерский математик П. Эрдёш выдвинул предположение о том, что справедливо неравенство

$$R_a+R_b+R_c\geqslant 2(d_a+d_b+d_c),$$

однако доказать его не смог. Первым доказал это неравенство английский математик Л. Дж. Морделл в том же 1935 году, но его доказательство было довольно сложным, и лишь усилия многих математиков привели доказательство неравенства Эрдёша — Морделла к такому простому виду, в каком оно здесь изложено.

Прием 4. *Если через точку E, лежащую внутри параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные сторонам и разбивающие его на четыре параллелограмма, то параллелограммы, прилегающие к вершинам B и D, равновелики тогда и только тогда, когда точка E лежит на диагонали AC.*

Мы предлагаем читателям самостоятельно доказать это несложное утверждение.

Пример 9. Через точку M, лежащую внутри параллелограмма $ABCD$, проведены прямые PR и QS, параллельные сторонам BC и AB (точки P, Q, R, S лежат на сторонах AB, BC, CD, DA соответственно). Докажите, что прямые BS, PD и MC пересекаются в одной точке (рис. 5).

Решение. Через точку N пересечения прямых BS и CM проведем прямые Q_1S_1 и P_1R_1, параллельные прямым QS и PR (точки P_1, Q_1, R_1, S_1 лежат на сторонах AB, BC, CD, DA соответственно). Обозначим точки пересечения прямых PR и Q_1S_1, P_1R_1 и QS через F и G. Поскольку точка M лежит на диагонали NC параллелограмма NQ_1CR_1, $S_{PQ_1QM}=S_{MRR_1G}$, то есть $S_{NQ_1QG}=S_{NFRR_1}$. Точка N лежит на диагонали BS параллелограмма $ABQS$, поэтому $S_{AP_1NS_1}=S_{NQ_1QG}=S_{NFRR_1}$. Следовательно, точка N лежит на диагонали PD параллелограмма $APRD$.

(Окончание см. на с. 43)

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «О судьбе некоторых понятий механики» предназначена восьмиклассникам, «Энергия электрического поля» — девятиклассникам, «Капельная модель ядра» — десятиклассникам. Материалы подготовил И. К. Белкин.

О судьбе некоторых понятий механики

Еще в глубокой древности люди пытались найти количественные характеристики механического движения тел. Однако прошло не одно столетие, пока сформировались «удобные» физические понятия.

Так, в XVII веке, когда фактически создавалась классическая механика, с особой остротой встал вопрос о том, какую величину целесообразно использовать как меру движения. Р. Декарт предложил в качестве такого понятия «количество движения», которое, говоря современным языком, означало произведение массы тела на модуль его скорости, и сформулировал «закон сохранения количества движения».

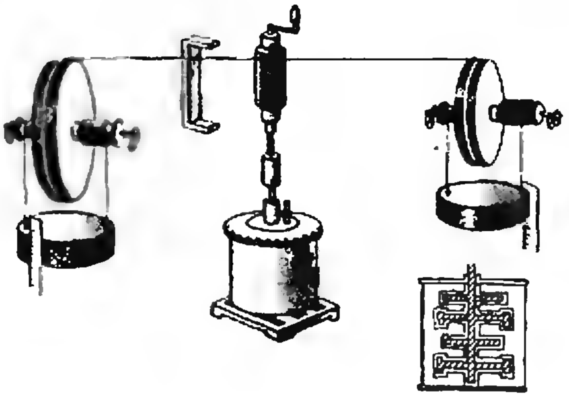
То, что Декарт не учитывал векторного характера скорости, привело к ряду ошибок. В частности, при рассмотрении важной для того времени практической задачи об упругом соударении тел. По Декарту, например, получалось, что если сталкиваются два тела, движущиеся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями, и одно тело слегка массивнее другого, то после упругого удара оба тела будут двигаться в направлении первоначального движения более массивного тела. В действительности при упругом соударении шаров с близкими массами они разлетаются в разные стороны.

Ошибка Декарта впоследствии была исправлена Х. Гюйгенсом и И. Ньютоном.

Г. Лейбниц, критикуя теорию Декарта, высказал мнение, что более удобной мерой движения является произведение массы на квадрат скорости тела. Эту величину он назвал «живой силой» и установил «закон сохранения живой силы». Спор о преимуществе того или иного понятия продолжался на протяжении более полувека, пока исследователи не пришли к выводу, что и «количество движения», и «живая сила» необходимы для полного описания явлений, происходящих при взаимодействии тел.

Следующим механическим понятием, вошедшим в науку, было понятие «работы силы», введенное Ж. Понселе в 1826 году. Его появление способствовало и рождению величины, которая теперь называется кинетической энергией, равной половине «живой силы» (Г. Кориолис, 1829 г.): работа силы, действующей на материальную точку, равна разности значений кинетической энергии в конечной и начальной точках пути.

Самый тернистый путь в науку был у понятия «потенциальная энергия». По существу оно возникло вместе с законом сохранения энергии, сформулированным независимо в работах Дж. Джоуля, Р. Майера и Г. Гельмгольца. Интересно, что двое последних по образованию не были физиками — Майер занимался медициной, а Гельмгольц специализировался в области физиологии. Судьбы работ этих



Установка для определения соотношения между совершенной механической работой и выделившимся количеством теплоты в опытах Дж. Джоуля. Грузы, привязанные к концам нити, навитой на барабан, при падении приводят его во вращение. На ось барабана насажен стержень с лопатками, который вращается в калориметре с водой и таким образом нагревает воду. Справа внизу показан разрез калориметра по вертикали.

ученых тоже оказались сходными: и ту, и другую издатель ведущего немецкого физического журнала отказался публиковать, считая их слишком «теоретическими».

Потенциальная энергия впервые появилась в работе Гельмгольца под именем «силы напряжения». Однако автор не дал этому понятию наглядной физической интерпретации, и поэтому вокруг него разгорелись споры. Суть проблемы очень ясно сформулировал А. Пуанкаре: «...чтобы *материализовать* энергию, нужно ее *локализовать;* в отношении кинетической энергии — это просто ⟨она приписывается движущемуся телу⟩, но не так дело обстоит с энергией потенциальной. Где локализовать потенциальную энергию, вызванную притяжением двух небесных тел? В одном из двух? В обоих? В промежуточном пространстве?».

Предлагались различные решения этой проблемы. Г. Герц, например, считал необходимым ... вообще отказаться от понятия «потенциальной энергии» и пытался свести этот вид энергии к кинетической энергии скрытых движений частиц тела. Однако эта попытка оказалась неудачной. Позднее было выяснено, что потенциальная энергия является мерой *взаимодействия* и что глубокая и полная интерпретация этого понятия невозможна без привлечения представления о поле. (Этот вопрос подробно обсуждается в следующей заметке на примере электростатического взаимодействия заряженных тел.— *Примеч. ред.*)

Так постепенное развитие понятий механики привело ученых к идеям, далеко выходящим за рамки этого раздела физики. Взаимное обогащение различных областей физической науки — характерная черта ее истории.

Энергия электрического поля

Как известно («Физика 9», § 55), чтобы зарядить конденсатор, необходимо совершить некоторую работу. Эта работа требуется для преодоления сил электростатического притяжения, возникающих при разделении положительных и отрицательных зарядов. За счет совершенной работы в конденсаторе запасается потенциальная электростатическая энергия

$$W = \frac{1}{2}UQ = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2, \qquad (1)$$

где U — разность потенциалов между обкладками, C — емкость конденсатора, Q — заряд на его обкладках.

Ясно, что для того чтобы зарядить любое уединенное тело, то есть создать в нем избыток зарядов одного знака, также следует совершить определенную работу. В этом случае она совершается против сил электростатического отталкивания, которые действуют между одноименными зарядами, накапливающимися на теле. Вычислим эту работу.

Рассмотрим уединенный проводник. Пусть нам уже удалось сосредоточить на нем заряд q. Потенциал создаваемого этим зарядом электрического поля на бесконечности условимся считать равным нулю, а потенциал самого проводника обозначим через $\varphi(q)$. Теперь будем переносить на проводник из бесконечности дополнительный малый заряд Δq. Для этого потребуется совершить работу

$$\Delta A = \varphi(q)\Delta q.$$

Понятно, что потенциал электростатического поля всегда пропорционален величине создающего это поле заряда. В данном случае потенциал проводника пропорционален заряду на нем:

$$\varphi(q) \sim q, \text{ или } \varphi(q) = \frac{1}{C}q.$$

Входящая в коэффициент пропорциональности величина C называется емкостью уединенного проводника. Она зависит от формы, размеров проводника и диэлектрической проницаемости окружающей среды.

Построим график линейной зависимости φ от q (рис. 1). Работа ΔA, совершаемая при перенесении заряда Δq из бесконечности на проводник, на этом графике представляется площадью заштрихованного столбика. Полная же работа A по зарядке уединенного проводника до заряда Q определяется суммой площадей всех аналогичных столбиков, то есть площадью фигуры под графиком зависимости φ от q. В данном случае — площадью треугольника. Поэтому работа по зарядке уединенного провод-

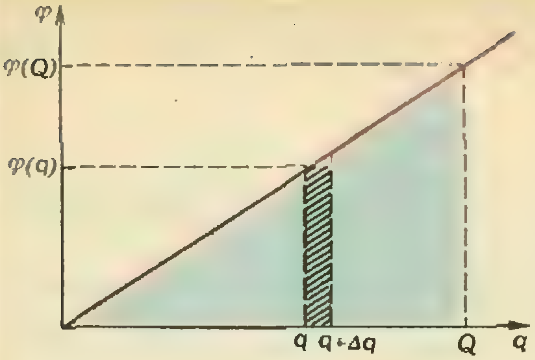


Рис. 1.

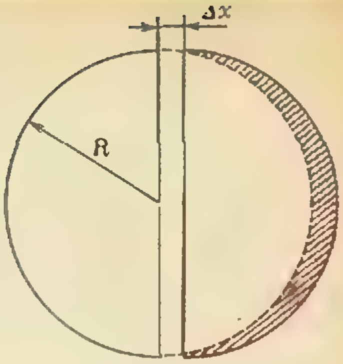


Рис. 2.

ника, равная запасаемой им потенциальной электростатической энергии, определяется формулой

$$A=W=\frac{1}{2}\varphi(Q)\,Q=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}C(\varphi(Q))^2. \tag{2}$$

Формула (2) по виду совпадает с формулой (1), однако входящие в нее величины имеют несколько иной смысл: $\varphi(Q)$ — это потенциал уединенного проводника, а не разность потенциалов (U) между обкладками конденсатора, C — емкость проводника, а не конденсатора.

Но *где именно* запасается энергия? На этот вопрос существуют два равноправных ответа. Первый основывается на том, что запасенная энергия — это энергия взаимодействия зарядов, находящихся на проводнике. Согласно второй точке зрения носителем запасенной энергии является электрическое поле, так что энергия распределена в окружающем проводник пространстве. В случае плоского конденсатора созданное им электрическое поле однородно и сосредоточено в области между пластинами. Тогда легко показать («Физика 9», § 55), что плотность энергии — энергия, приходящаяся на единицу объема,— определяется выражением

$$w=\frac{\varepsilon\varepsilon_0E^2}{2}, \tag{3}$$

где E — напряженность поля, ε — диэлектрическая проницаемость среды внутри конденсатора.

Оказывается, этой же формулой можно воспользоваться для подсчета полной энергии электрического поля и в общем случае, когда поле неоднородно. Так, например, в пространстве вокруг заряженного тела напряженность электрического поля уменьшается по мере удаления от тела. Тем не менее в любом месте пространства мы всегда можем выбрать такой небольшой объемчик ΔV, что напряженность поля в нем практически не изменяется. Тогда, согласно формуле (3), мы можем вычислить соответствующую плотность энергии и найдем, что в выбранном объемчике заключена энергия

$$\Delta W=w\Delta V=\frac{\varepsilon\varepsilon_0E^2}{2}\Delta V.$$

Если теперь весь объем, где имеется электрическое поле, разбить на маленькие объемчики, подсчитать указанным способом энергию каждого из них, а затем все просуммировать, то мы получим полную энергию электрического поля. Как это ни удивительно, но для полной энергии получится уже известное выражение (2).

Красивым примером, показывающим плодотворность такого подхода вычисления энергии, может служить задача о нахождении силы отталкивания между двумя половинками заряженной проводящей сферы, находящейся в вакууме.

Прежде всего вспомним, что поле внутри проводящей сферы, как и внутри любого проводника («Физика 9», § 44), равно нулю. Вне сферы напряженность поля такая же, как у точечного заряда, равного заряду сферы и находящегося в ее центре:

$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2},$$

где Q — заряд сферы, r — расстояние от ее центра до рассматриваемой точки. У поверхности сферы радиусом R, таким образом, напряженность поля оказывается равной

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}.$$

Давайте теперь мысленно разрежем сферу пополам и позволим искомой силе отталкивания F отдалить одну половинку от другой на малое расстояние Δx. Совершенная при этом работа

$$\Delta A=F\,\Delta x$$

равна уменьшению полной энергии электрического поля, запасенной, как мы знаем, во всем окружающем сферу пространстве. Действительно, до нашего мысленного сдвига в области пространства (объемом ΔV), заштрихованной красным на рисунке 2, была запасена энергия

$$\Delta W = w\,\Delta V = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\Delta V = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}\Delta V.$$

После сдвига эта область оказалась уже внутри сферы, и напряженность поля в ней стала равной нулю. В образовавшийся зазор между полусферами поле практически не проникло, а в остальном пространстве оно почти не изменилось. Нетрудно убедиться в том, что объем заштрихованной области совпадает с объемом образовавшегося зазора, который легко вычисляется:

$$\Delta V = \pi R^2 \Delta x.$$

Таким образом, согласно закону сохранения энергии, можно записать $\Delta A = \Delta W$, или

$$F\Delta x = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4}\pi R^2 \Delta x.$$

Отсюда сила отталкивания между двумя полусферами оказывается равной

$$F = \frac{Q^2}{32\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Итак, можно считать, что энергия заряженного тела — это энергия взаимодействия его зарядов, а можно приписывать ее создаваемому телом в пространстве электрическому полю. Какой из этих точек зрения отдать предпочтение — в рамках электростатики это «дело вкуса». Однако при изучении переменных полей единственно возможным оказывается именно второй подход, связывающий энергию с электрическим полем.

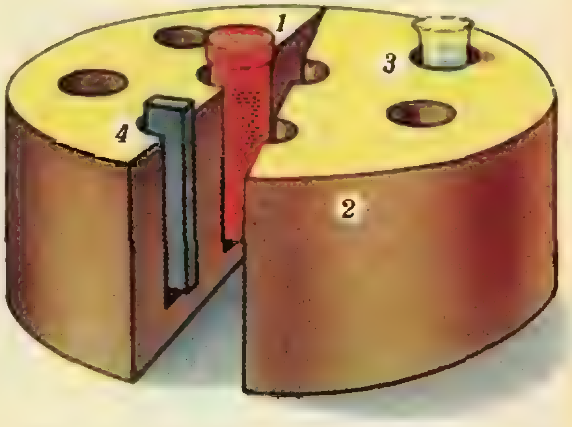
Капельная модель ядра

Однажды великого английского физика Э. Резерфорда, основоположника ядерной физики, спросили, какой практический интерес могут иметь его открытия в области радиоактивности. Ученый ответил, что ровно никакого. В то время действительно невозможно было даже вообразить способ использования внутриядерных процессов и явлений. Сегодня же каждый представляет, какое значение в жизни человечества имеет атомная энергетика.

Важнейшую роль в открытии возможностей использования атомной энергии сыграла способность некоторых тяжелых ядер к делению («Физика 10», § 110). В 1938 году было обнаружено, что при бомбардировке ядер урана нейтронами образуются ядра-осколки более легких элементов. Этот процесс всегда сопровождается испусканием нескольких новых нейтронов.

Почему же ядра могут делиться? Первую теорию деления ядер создали в 1939 году физики-теоретики датчанин Н. Бор и американец Дж. Уилер и независимо от них советский физик-теоретик Я. И. Френкель. Данное ими объяснение основывалось на капельной модели атомного ядра. Согласно этой модели ядро, представляющее собой сгусток нуклонов, ведет себя подобно капле электрически заряженной жидкости. Разберемся в этом подробнее и прежде всего выясним, от чего и как зависит энергия связи ядра — энергия, которую необходимо затратить для разделения ядра на составляющие его нуклоны.

Ядерные силы, притягивающие нуклоны друг к другу, проявляются лишь на очень малых расстояниях (они обладают ограниченным радиусом действия, порядка 10^{-15} м), поэтому каждый нуклон взаимодействует практически только со своими ближайшими соседями, а не со всеми имеющимися в ядре нуклонами. Так же обстоят дела и в обычной капле — поскольку силы межмолекулярного притяжения действуют на расстояниях, не превышающих расстояния между молекулами, приходится считаться лишь с взаимодействием ближайших соседей. Число соседей у каждого нуклона можно считать постоянным. Таким образом, вклад в



Модель экспериментальной установки, с помощью которой было осуществлено открытие деления тяжелых ядер: 1 — источник нейтронов; 2 — парафиновый блок для замедления нейтронов; 3 — облучаемый препарат (раствор соли урана); 4 — металлическая мишень.

энергию связи, обусловленный ядерными силами, оказывается пропорциональным числу нуклонов в ядре, то есть массовому числу $A: E_я \sim A$.

Однако у нуклонов на поверхности «ядерной капли» соседей меньше, чем внутри ядра, поэтому в энергию связи они дают несколько меньший вклад, чем мы им уже приписали. Это можно учесть, вычтя из $E_я$ поверхностную энергию $E_{пов}$, пропорциональную числу нуклонов на поверхности ядра, а следовательно, и площади его поверхности: $E_{пов} \sim \sim S_{пов} \sim R_я^2 \sim A^{2/3}$ (здесь мы воспользовались тем, что, как показывает опыт, радиусы ядер довольно точно пропорциональны кубическому корню из массового числа). Как видим, и тут имеется полная аналогия с каплей обычной жидкости — молекулы, находящиеся на поверхности, стремятся уйти вглубь и создают силы поверхностного натяжения, с которыми связана поверхностная энергия жидкости.

Чтобы получить окончательное выражение для энергии связи ядра, нам осталось учесть, что часть нуклонов (протоны) заряжены. А это означает, что, помимо ядерного притяжения к ближайшим соседям, они испытывают еще действие сил обычного электростатического отталкивания, подчиняющегося закону Кулона. Взаимное отталкивание протонов стремится разорвать ядро и, таким образом, уменьшает его энергию связи. В отличие от ядерных, кулоновские силы дальнодействующие — каждый протон взаимодействует со всеми протонами этого ядра. Энергия взаимодействия двух протонов $\sim e^2/R_я$. Если в ядре имеется Z протонов, то каждый из них взаимодействует с $(Z-1)$ остальными и число взаимодействующих пар равно $^1/_2 Z(Z-1)$ (для больших Z можно считать, что это число пропорционально Z^2). Таким образом, находим, что энергия электростатического отталкивания протонов в ядре $E_{эл} \sim Z^2 \cdot e^2/R_я \sim \sim Z^2e^2/A^{1/3}$.

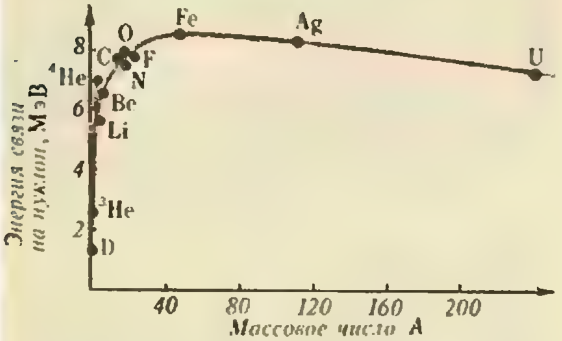


График зависимости удельной энергии связи (в расчете на нуклон) от массового числа.

Итак, окончательно для энергии связи ядра получаем

$$E_{св} = E_я - E_{пов} - E_{эл} = \alpha A - \beta A^{2/3} - \gamma Z^2/A^{1/3},$$

где α, β и γ — некоторые постоянные. Эта формула неплохо описывает экспериментальную кривую зависимости удельной энергии связи от массового числа («Физика 10», § 108). Сначала с ростом A энергия связи растет. Где-то в средней части таблицы Менделеева $E_{св}$ достигает максимума, а затем начинает уменьшаться.

Рассмотрим теперь процесс деления ядра. Пусть ядерная «капля», поглотив попавший в нее нейтрон, начинает колебаться и в какой-то момент вытягивается. Минимальную поверхность при заданном объеме имеет сферическая капля. У вытянутой капли поверхностная энергия увеличивается, а энергия связи ядра соответственно уменьшается. С другой стороны, при растяжении ядра возрастает среднее расстояние между нуклонами, и энергия их электростатического отталкивания уменьшается, в результате чего энергия связи должна увеличиться. Если в этой борьбе победит электростатическое взаимодействие, ядро разорвется; если же поверхностное — ядро вернется в исходное состояние.

Из полученного выражения для $E_{св}$ понятно, что судьба ядра во многом зависит от числа протонов (Z) и общего числа нуклонов (A). С ростом порядкового номера элемента энергия электростатического отталкивания возрастает быстрее поверхностной энергии, поэтому делиться могут только тяжелые ядра.

Как уже говорилось, в процессе деления ядра всегда испускается еще несколько нейтронов, которые могут вызвать деление других ядер (для урана обычно 2—3). Именно эти нейтроны и позволяют, опровергнув пессимистическое предсказание Резерфорда, реализовать на практике цепную ядерную реакцию деления, которая сопровождается выделением огромного количества энергии.

КВАНТ для младших школьников

Задачи

USA
+USSR
PEACE

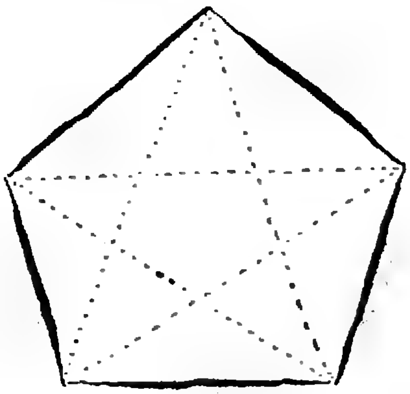
1. У Пети три брата. Первый старше его на три года, второй моложе его на три года, третий моложе Пети втрое. Зато отец втрое старше Пети. Всем вместе им 95 лет. Сколько лет каждому?

2. Решите числовой ребус

$$\mathrm{USA} + USSR = \mathrm{PEACE}.$$

Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

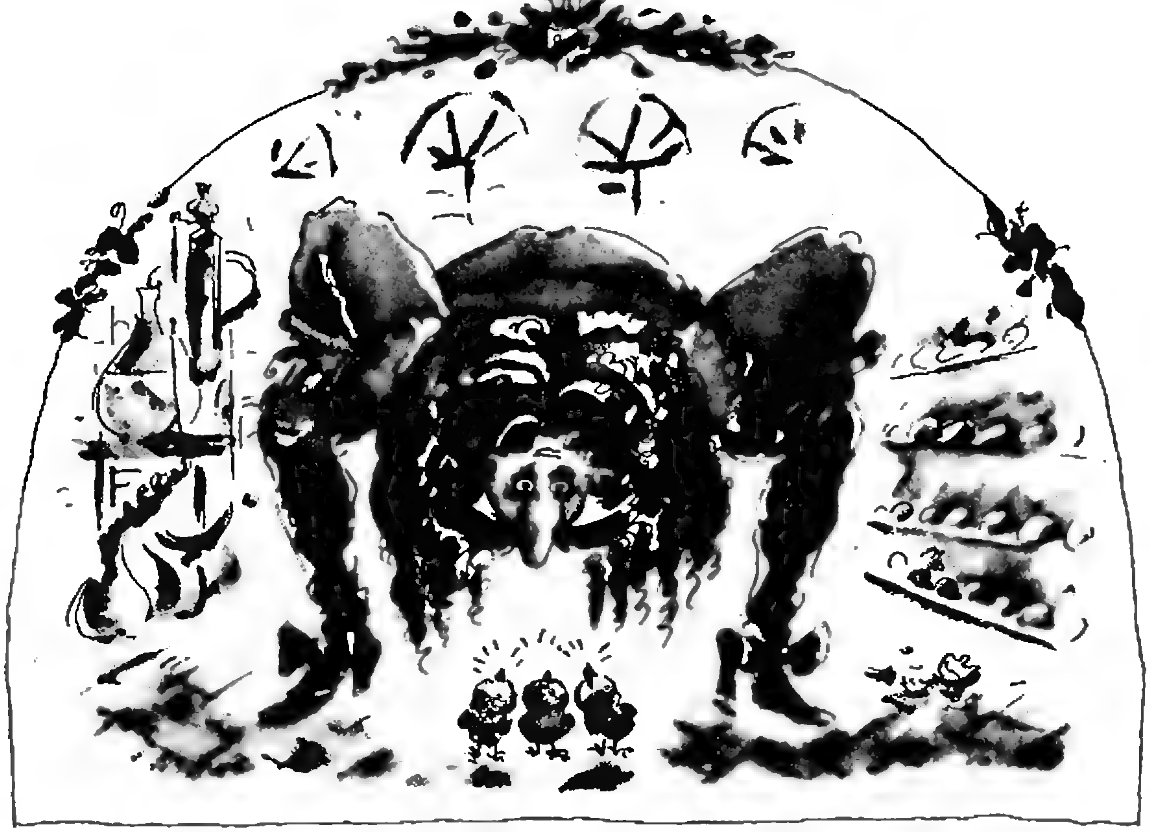
3. Наша речка небольшая. Обычно я перехожу её, погружаясь не более чем по пояс. Дно илистое, и ноги проваливаются в ил по щиколотку. Однажды после сильных дождей вода в реке сильно поднялась. Теперь уже, переходя реку, я опускался в воду по шею. Интересно, что при этом ноги перестали вязнуть в иле. Почему?



4. Пятиугольник разрезан на 11 частей (см. рисунок). Расставьте в них числа 1, 2, ..., 11 так, чтобы суммы чисел были равны во всех треугольниках, все вершины которых являются вершинами пятиугольника.

5. На столе лежат три красные палочки разной длины, причем сумма длин равняется 30 см, и пять синих палочек, сумма длин которых тоже равняется 30 см. Можно ли распилить те и другие палочки так, чтобы их потом можно было расположить парами, и в каждой паре длины палочек были одинаковы, а цвета разные?

Эти задачи нам предложили *В. Д. Вьюн*, ученик 9 кл. 149 школы г. Харькова *Борис Кругликов, А. П. Савин, В. П. Чичин, В. В. Произволов.*



Немного о термометре и о термоскопе Фердинанда

Кандидат физико-математических наук
А. И. БУЗДИН

Жарко, тепло, холодно, мороз... Так мы в быту характеризуем степень нагретости разных тел. Мерой нагретости является температура: чем выше температура — тем более нагрето тело.

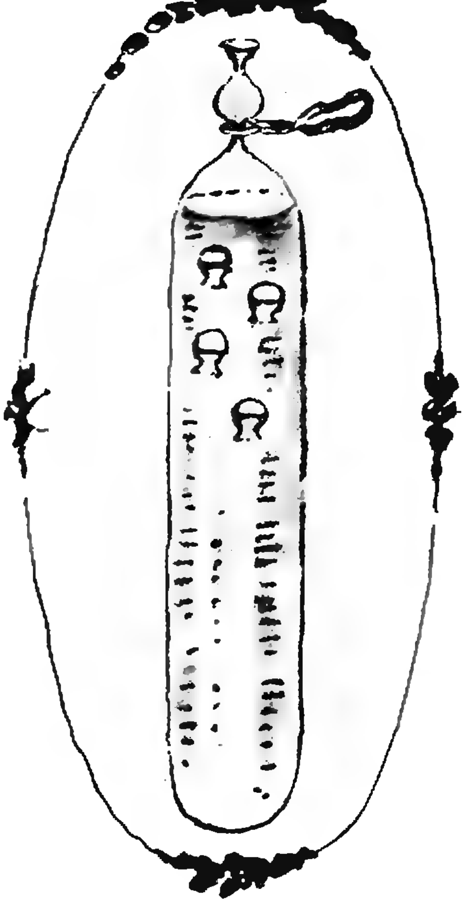
Мы легко на ощупь отличаем горячее от холодного, но наука начинается с количественных измерений. Сегодня и дошкольник знает — чтобы измерить температуру, надо взять градусник, то есть термометр. Именно с изобретения термометра началось развитие науки о теплоте.

В большинстве термометров используется свойство тел расширяться при нагревании (и сжиматься при охлаждении). Первый термометр, который был построен Галилеем в самом начале XVII века, работал на воде. Понятно, что с его помощью можно было измерять температуры не ниже температуры замерзания воды и не выше температуры ее кипения. Со временем наибольшее распространение получил ртутный термометр. В сильные морозы он, однако, перестает работать — при температуре —38,8 °С ртуть замерзает. На помощь здесь приходит спиртовый термометр (температура замерзания спирта намного ниже, чем у ртути, и равна —97 °С), который также сейчас находит широкое применение.

Заслуга изобретения спиртового термометра принадлежит герцогу Фердинанду II, правившему в середине XVII века во Флоренции. Наряду с государственными делами герцог много времени уделял занятиям естественными науками. В свое время он был учеником Галилея и внес заметный вклад в развитие методов измерения температуры. До того как термометр прочно вошел в обиход, был распространен термоскоп. Этот прибор для контроля температуры позволял лишь судить о том, выше или ниже температура некоторой определенной величины. Но измерять термоскопом температуру было невозможно. В изготовлении различных термоскопов Фердинанд достиг большого мастерства. Один из своих термоскопов Фердинанд прислал немецкому иезуиту Кирхеру, занимавшемуся «по совместительству» научными исследованиями. Прибор состоял из открытой сверху стеклянной трубки, почти полностью заполненной водой (см. рисунок). В воде находилось несколько крошечных грушевидных сосудиков с оттянутыми вниз горлышками. В каждом сосудике был заключен пузырек воздуха, размер которого был подобран таким образом, чтобы при определенной температуре сосудики плавали в воде внутри трубки. При более высокой температуре воздух в сосудиках расширялся, частично вытесняя воду; в результате этого увеличивалась выталкивающая сила, и сосудики поднимались на поверхность воды. По описанию, сделанному Фердинандом, можно судить, что температура, при которой сосудики «висели» внутри трубки, была около 15 °С. Когда же температура окружающего воздуха опускалась ниже 15 °С, воздух внутри сосудиков сжимался, количество воды в них увеличивалось, и они опускались на дно.

Одновременно с этим прибором и подробным описанием его работы Фердинанд прислал Кирхеру и другой термоскоп. Он был очень похож на первый и отличался лишь тем, что был полностью заполнен водой и запаян. В этом приборе, однако, наоборот, сосудики опускались при нагревании, а поднимались при охлаждении. Фердинанд предоставил Кирхеру самому решить загадку второго термоскопа. Нам неизвестно, справился ли с этой задачей Кирхер. Но мы надеемся, что вы, читатель, сделаете это без особого труда. (А проверить правильность своего ответа вы можете, посмотрев на с. 58).

Фердинанд построил и термометры самых разнообразных типов и конструкций. Любопытно, что он многое делал для «внедрения» научных открытий в «производство». Один из проектов Фердинанда заключался в широкомасштабном разведении кур. Он построил один из первых инкубаторов, где использовал свой термометр для контроля температуры при искусственном насиживании яиц. Однако уже тогда внедрение достижений науки было делом непростым: из 150 яиц Фердинанд получил лишь трех цыплят. Почему так произошло? Может быть, из-за недостаточной расторопности работника, несерьезно относившегося к показаниям термометра и больше доверявшего своим ощущениям, а может быть, из-за слабых знаний Фердинанда по биологии. Сейчас остается только гадать, отчего закончился крахом этот эксперимент.



С бо́льшим успехом Фердинанд использовал термометр для наблюдений за погодой, он проводил важные метеорологические измерения, обобщил материалы наблюдений за температурой в глубоких колодцах и подземельях в различные времена года. Оказалось, что на глубине смена времен года происходит несколько позже, чем на поверхности — нужно время, чтобы земля успела прогреться или, наоборот, охладиться.

Закончим мы наш маленький рассказ о термометрах и термоскопах вопросом к читателю: подумайте, почему водяной термометр неудобен для измерения температур, близких к температуре замерзания воды?

задачник Кванта

Задачи

М981—М985; Ф993—Ф997

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 июля 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5-86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М981, М982» или «Ф993». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию и имя обязательно пишите печатными буквами.

М981. Докажите, что число 11...1 (1986 единиц) имеет по крайней мере а) 8, б) 28 различных делителей.

Л. Д. Курляндчик

М982. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты ABB_1A_2, BCB_1C_2, CAA_1C_2. Докажите, что перпендикуляры к отрезкам A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, восставленные в их серединах, пересекаются в одной точке.

Н. Азамов (ученик 8 класса)

М983. В турнире с участием 16 теннисистов каждые двое играют одну партию.

а) Приведите пример распределения результатов партий, при котором любых 10 участников можно расставить по кругу так, чтобы каждый выиграл у своего левого соседа.

б) Докажите, что если условие пункта а) выполнено, то и любых 11 участников можно расставить по кругу таким образом.

К. П. Кохась

М984. Через произвольную точку K квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая его противоположные стороны AB и CD в точках P и Q. Докажите, что отличная от K точка пересечения окружностей, проходящих через точки K, B, P и K, D, Q, лежит на диагонали BD (рис. 1).

В. Н. Дубровский

М985. Углом между двумя прямыми, пересекающимися в точке Q, называется угол между их лучами с вершиной O, не превосходящий 90°. Сколькими способами через точку O в пространстве можно провести три прямые l_1, l_2, l_3 так, чтобы углы между l_2 и l_3, l_3 и l_1, l_1 и l_2 соответственно равнялись данным числам α_1, α_2, α_3? (Две тройки прямых l_1, l_2, l_3 и l'_1, l'_2, l'_3 считаются одинаковыми, если они «конгруэнтны», то есть если существует поворот или симметрия относительно плоскости, переводящие l_i в l'_i для всех $i=1, 2, 3$.)

Предостережение: ответ зависит от величин α_1, α_2, α_3; например, для $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=30°$ он не такой, как для $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=70°$.

А. Б. Гончаров

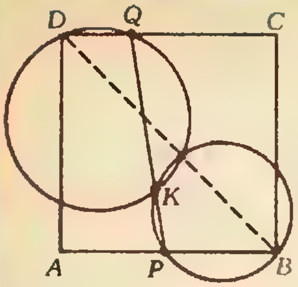


Рис. 1.

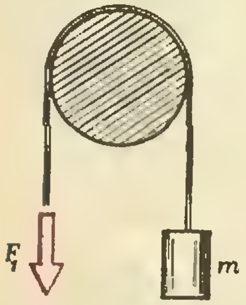


Рис. 2.

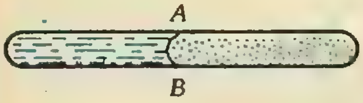


Рис. 3.

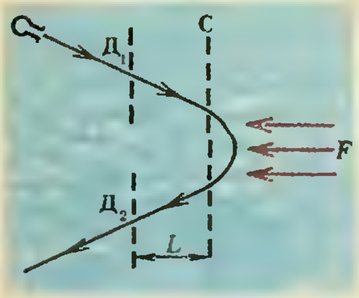


Рис. 4.

Ф993. Через неподвижное, горизонтально закрепленное бревно переброшена веревка. Чтобы удерживать груз массы $m=6$ кг, подвешенный на этой веревке, необходимо тянуть второй конец веревки с минимальной силой $F_1=40$ Н (рис. 2). С какой минимальной силой F_2 надо тянуть веревку, чтобы груз начал подниматься?

А. И. Буздин

Ф994. Спутник исследует планету, плотность которой ϱ, двигаясь по круговой орбите с периодом обращения T и фотографируя ее поверхность. Какая часть площади планеты останется неисследованной?

В. В. Дорин

Ф995. В запаянном капилляре находится жидкость плотности ϱ. При нагревании капилляра на малое ΔT оказалось, что граница AB между жидкостью и ее паром (рис. 3) не сдвигается. При этом давление пара возросло на Δp. Как изменилась плотность жидкости?

Л. Г. Маркович

Ф996. В пролетном масс-спектрометре источник испускает сгусток заряженных частиц, которые сначала летят свободно (рис. 4) и пролетают через первый датчик ($Д_1$), находящийся на расстоянии L от сетки (С). За сеткой по нормали к ней на частицы действует электрическая сила F. Частицы поворачиваются, вылетают через сетку назад и пролетают через второй датчик ($Д_2$), находящийся на том же расстоянии L от сетки. Меняя режим работы источника, измеряют время между срабатываниями датчиков и находят наименьшее время пролета τ. Какова масса частиц? (Начальная скорость зависит от напряжения источника, но точное значение ее неизвестно.) Как можно найти массы частиц, если источник испускает одновременно несколько сортов частиц с разными массами?

И. И. Воробьев

Ф997. Известно, что светящийся след падающего метеорита по мере приближения к Земле становится ярче. Однако в верхних слоях атмосферы он сохраняется значительно дольше, чем у Земли. Почему?

А. С. Бутов

Problems

M981 — M985; P993 — P997

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indi-

M981. Prove that the number 11...1 (1986 ones) has at least a) 8, b) 28 different divisors.

L. D. Kurlyandchik

M982. The squares ABB_1A_2, BCB_1C_2, CAA_1C_2 are constructed on the exterior of sides AB, BC, CA of triangle ABC. Prove that the perpendiculars at the midpoints of the segments A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 intersect in one point.

N. A. Azamov (8th form pupil)

M983. Sixteen tennis players play in a round robin tournament (each pair playing once).
a) Give an example of the results of such a tournament where

cate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than June 15th, 1986 to the following address: USSR, Moscow, 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian and English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

any ten players can be placed in a circle so that each of them has defeated his neighbour to the left.
b) Prove that if the conditions of a) are met, then any eleven players can be placed in a circle in the same way.

K. P. Kokhas

M984. A line passing through an arbitary point K of the square $ABCD$ intersects its opposite sides AB and CD at the points P and Q. Prove that the intersection point different from K of the circles passing through the points K, B, P and K, D, Q lies on the diagonal BD (see figure Рис. 1).

V. N. Dubrovski

M985. By the angle between two lines intersecting at point O we mean the angle between rays with origin O on these lines if this angle is no greater than 90°. How many different ways are there to construct three lines l_1, l_2, l_3 through the point O so that the angles between lines l_2 and l_3, l_3 and l_1, l_1 and l_2 are respectively equal to α_1, α_2, α_3? (Two line triples l_1, l_2, l_3 and l'_1, l'_2, l'_3 are "different" if they are not congruent, i. e. there exits no rotation or symmetry in a plane sending l_i into l'_i for all $i=1, 2, 3$.)
Warning: the answer depends on the magnitude of α_1, α_2, α_3, e. g. for $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=30°$ it is not the same as for $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=70°$.

A. B. Goncharov

P993. A rope is thrown over a horizontally fixed log. In order to hold in place a weight of mass $m=6 kg$ hanging on this rope, a minimal force of $F_1=40$ N must be exerted (see figure Рис. 2). What minimal force F_2 must be exerted to start the weight moving up?

A. I. Buzdin

P994. A satellite potates with period T along a circular orbit about a planet of density ρ and photographs its surface. What part of the planet's surface will remain unphotographed?

V. V. Dorin

P995. A sealed capillary contains a liquid of density ρ. When the capillary's temperature was increased by the (small) value ΔT, it turned out that the boundary AB between the liquid and its vapor did not move (see figure Рис. 3). The pressure of vapor increased by Δp. How did the liquid's density change?

L. G. Markovich

P996. In a fly-through mass-spectrometer the source emits a beam of charged particles which fly freely (see figure рис. 4), passing through the first counter ($Д_1$) located at the distance L from the grid (C). Behind the grid, the electric force F acts perpendicularly to the grid. The particles make a U-turn, fly back through the grid, passing through the second counter ($Д_2$) located at the same distance L from the grid. Changing the working conditions of the source, it is possible to measure the minimal flight time τ between the counters. What is the mass of the particles? (The initial velocity depends on the voltage on the source, but its exact value is unknown.) How can one find the masses of the particles if the source emits several types of particles of different masses?

I. I. Vorobiev

P997. It is known that the luminous trace of a falling meteorite becomes brighter as it approaches the earth. However, it remains visible in the upper atmospheric layers longer than near the earth's surface. Why?

A. S. Butov

Решения задач

M961 — M965; Ф973 — Ф977

M961. *На стороне AB квадрата ABCD взята точка E, а на стороне CD — точка F, причем AE:EB=1:2, CF=FD. Будут ли голубой и розовый треугольники (рис. 1) подобны?*

Ответ: да. Обозначим точки пересечения диагонали AC с отрезками ED и BF через M и N. В треугольниках AEM и CFN углы EAM и FCN равны по 45°, $\mathrm{tg}\,\angle AEM=3$, $\mathrm{tg}\,\angle CFN=2$ и, поскольку $\angle AME=180°-45° - \angle AEM$, $\mathrm{tg}\,\angle AME=-\mathrm{tg}(45°+$

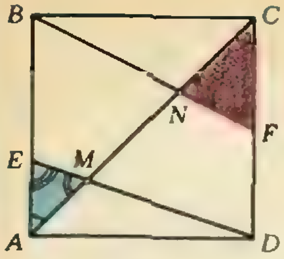


Рис. 1.

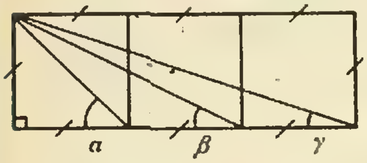


Рис. 2. Докажите, что $\alpha+\beta+\gamma=90°$.

$+\angle AEM)=-\frac{1+3}{1-1\cdot 3}=2$, следовательно, $\angle CFN=\angle AME$, и треугольники подобны по двум углам.

Приведем еще одно, чисто геометрическое решение. Очевидно, что $AM:MC=AE:CD=1:3$, $AB:AC=\sqrt{2}/2$, следовательно,

$$AE:AM=\left(\frac{1}{3}AB\right):\left(\frac{1}{4}AC\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Аналогично, $CN:NA=CF:AB=1:2$ и

$$CN:CF=\left(\frac{1}{3}AC\right):\left(\frac{1}{2}CD\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

то есть $AE:AM=CN:CF$; отсюда вытекает подобие треугольников.

Эта задача построена на соотношении $\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3=\pi/2$; оно же используется и в задаче, приведенной на рисунке 2,— попробуйте решить ее чисто геометрически!

А. П. Савин, В. Н. Дубровский

M962. *Докажите, что ни для какого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами не могут найтись такие различные целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n\geqslant 3$), для которых выполнялись бы равенства $P(x_1)=x_2$, $P(x_2)=x_3$, …, $P(x_{n-1})=x_n$, $P(x_n)=x_1$.*

◆

Покажем, что если целые числа $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют равенствам из условия задачи, то среди них найдутся одинаковые.

Мы используем такую **лемму**: если $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, b и c — различные целые числа, то $P(b)-P(c)$ делится на $b-c$. При этом будет выполняться неравенство $|b-c|\leqslant|P(b)-P(c)|$; только это следствие и понадобится для решения задачи.

Поскольку $P(x_1)=x_2$, $P(x_2)=x_3$, по лемме $|x_1-x_2|\leqslant|x_2-x_3|$; точно так же, пройдя по всему циклу, получим

$$|x_1-x_2|\leqslant|x_2-x_3|\leqslant|x_3-x_4|\leqslant\ldots\leqslant|x_nx_1|\leqslant|x_1-x_2|,$$

а значит, $|x_1-x_2|=|x_2-x_3|=\ldots=|x_n-x_1|$.

Если $n\geqslant 3$, отсюда следует, что среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ найдутся равные: можно считать, что x_1 — наименьшее из этих чисел; тогда

$$x_2-x_1=|x_1-x_2|=|x_n-x_1|=x_n-x_1,$$

то есть $x_n=x_2$.

$$\frac{b^k-c^k}{b-c}=b^{k-1}+b^{k-2}c+b^{k-3}c^2+\ldots+c^{k-1}.$$

Доказательство леммы. Из равенства, приведенного на полях, *ясно, что число* b^k-c^k *при* любом натуральном k делится на $b-c$. Пусть $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$; тогда число $P(b)-P(c)=a_1(b-c)+a_2(b^2-c^2)+\ldots+a_n(b^n)$ также делится на $b-c$.

Д. Раду

M963. *Три пары противоположных сторон шестиугольника параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие их середины, пересекаются в одной точке.*

◆

Докажем сначала одно вспомогательное утверждение.

Пусть отрезки AB и CD параллельны, а отрезки AC и BD пересекаются в точке P (рис. 1). *Тогда множество точек X, лежащих внутри углов APB и CPD, таких, что треугольники XAC и XBD равновелики, есть прямая, соединяющая середины отрезков AB и CD.*

Для доказательства проведем через точку X прямую, параллельную AB и CD; пусть она пересекает

(Окончание см. на с. 34)

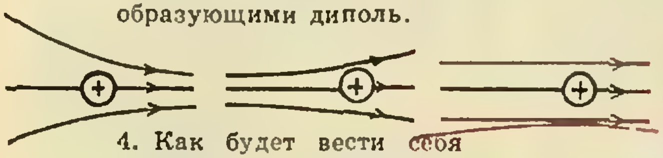
калейдоскоп

Вопросы и задачи

1. Приведите пример, когда при сближении двух разноименно заряженных тел сила притяжения между ними уменьшается до нуля.

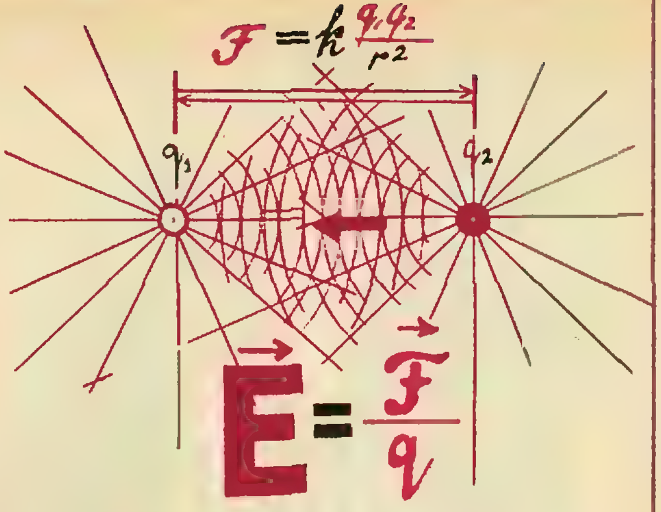
2. Какова напряженность электрического поля в точке, одинаково удаленной от зарядов, образующих электрический диполь?

3. Покажите, не производя вычислений, что напряженность поля электрического диполя тем меньше, чем меньше расстояние между зарядами, образующими диполь.

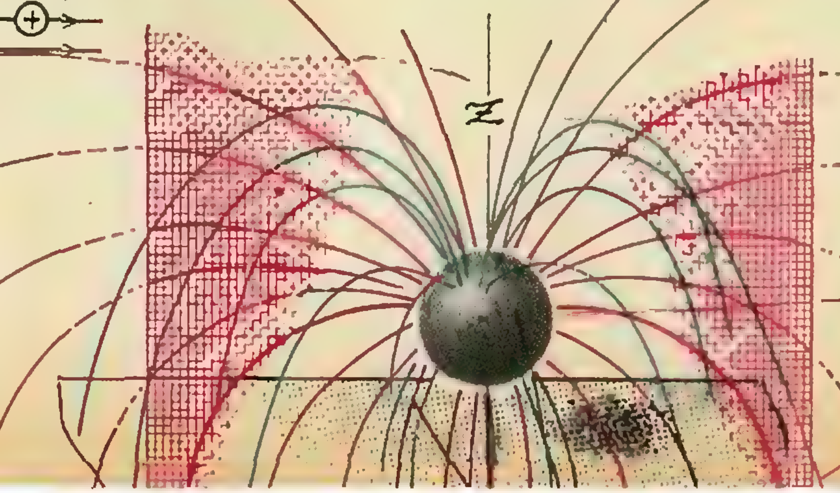


4. Как будет вести себя положительно заряженный шар в каждом из электрических полей, изображенных на рисунке? Как будет вести себя в этих же полях незаряженный шар?

5. Заряженный проводник, взятый в виде листа, свернули в цилиндр. Изменилась ли напряженность электрического поля у поверхности проводника?


$\mathcal{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$
q_1
q_2
$\vec{E} = \frac{\vec{\mathcal{F}}}{q}$

Фарадей своим мысленным взором
видел силовые линии,
пронизывающие
все пространство...
Фарадей искал сущность
реальных
явлений, протекающих в среде.
Дж. К. Максвелл

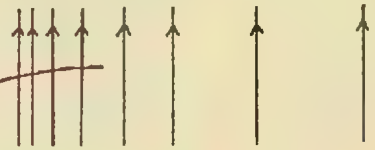


калейдоскоп

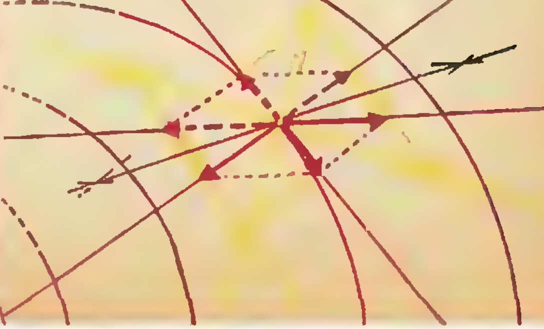
Вопросы и задачи

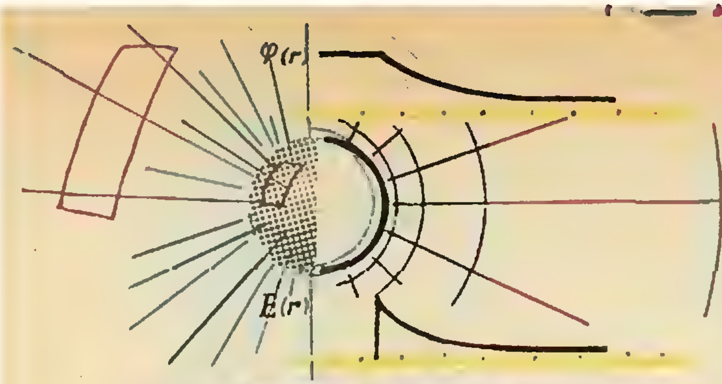
6. Заряд $(-q)$ находится в центре полой металлической сферы, которая несет заряд $(+2q)$. Изобразите с помощью силовых линий результирующее электрическое поле.

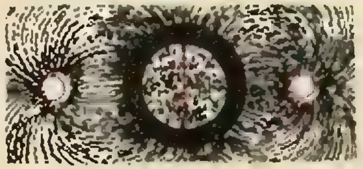
7. На расстоянии r от проводящей незаряженной плоскости находится точечный заряд $(+q)$. С какой силой будут взаимодействовать заряд и плоскость?



8. Может ли существовать в пустоте показанное на рисунке электростатическое поле?





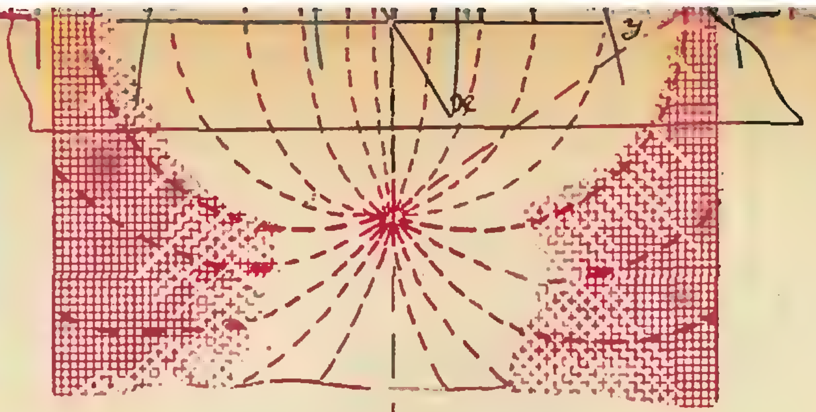


Любопытно, что...

...французского естествоиспытателя Шарля Дюфе (1698—1739), создавшего первую теорию электрических явлений, при проведении опытов по электризации подвешивали на шелковых шнурках и электризовали настолько сильно, что при приближении руки другого человека из него выскакивали искры.

...обычно молнию рисуют бьющей сверху вниз. Между тем в действительности свечение начинается снизу и уже затем распространяется по вертикальному каналу. Молния, точнее — видимая ее фаза, оказывается, бьет снизу вверх!

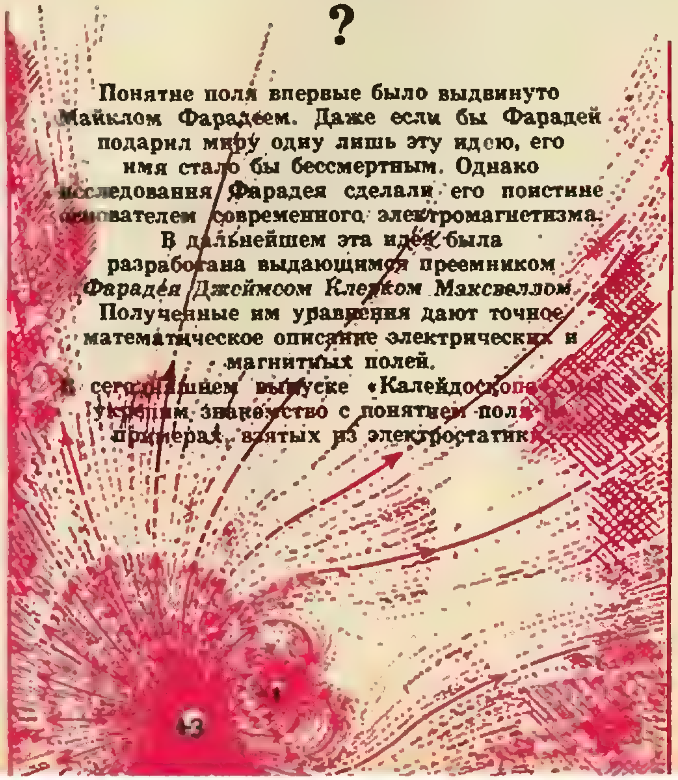
квант 5/86



А так ли хорошо знакомо вам

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

?



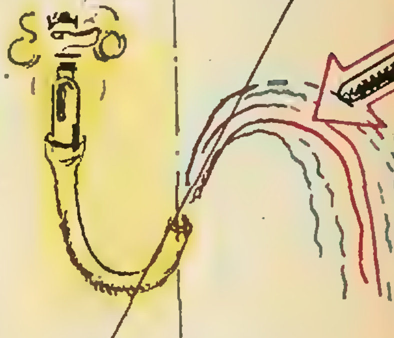
Понятие поля впервые было выдвинуто Майклом Фарадеем. Даже если бы Фарадей подарил миру одну лишь эту идею, его имя стало бы бессмертным. Однако исследования Фарадея сделали его поистине основателем современного электромагнетизма. В дальнейшем эта идея была разработана выдающимся преемником Фарадея *Джеймсом Клерком Максвеллом*. Полученные им уравнения дают точное математическое описание электрических и магнитных полей.

В сегодняшнем выпуске «Калейдоскопа» укрепим знакомство с понятием поля [illegible] примерах, взятых из электростатики.

квант 5/86

Микроопыт

С помощью резиновой трубки, надетой на водопроводный кран, устройте фонтан так, чтобы струя била под углом к вертикали. Поднесите к ниспадающей части струи наэлектризованную палочку и *добейтесь того*, чтобы рассыпавшаяся на сноп брызг струя вновь слилась. Объясните это явление.



Что читать об электрическом поле в «Кванте»

1. *«Проводящая сфера в задачах по электростатике» — 1983, № 3;*
2. *«Из старых опытов» — 1983, № 5; 1985, № 7;*
3. *«Электрическое и магнитное поля» — 1984, № 3;*
4. *«Что такое электрический пробой» — 1984, № 8;*
5. *«Теорема, позволяющая решать основные задачи электростатики» — 1984, № 12;*
6. *«Электрический диполь и его электрический момент» — 1985, № 11;*
7. *«Как устроена пустота?» — 1986, № 3.*

(Начало см. на с. 31)

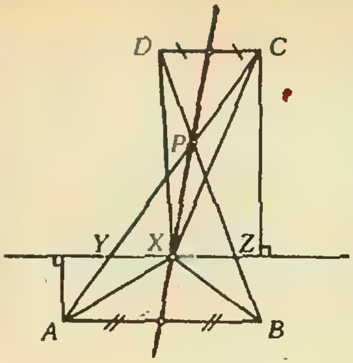


Рис. 1.

AC и BD в точках Y и Z (см. рис. 1). Треугольники XAY и XCY имеют общее основание XY, а сумма их высот, опущенных на это основание, равна расстоянию h между прямыми AB и CD, поэтому

$$S_{XAC}=S_{XAY}+S_{XCY}=\frac{1}{2}XY\cdot h,$$

где буквой S, как обычно, обозначены площади. Точно так же

$$S_{XBD}=\frac{1}{2}XZ\cdot h.$$

Следовательно, треугольники XAC и XBD равновелики тогда и только тогда, когда X — середина отрезка YZ. Но множество середин всевозможных отрезков, параллельных AB, с концами на прямых AC и BD, очевидно, и есть прямая, соединяющая середины отрезков AB и CD (и, кстати, проходящая через P).

Отметим, что $S_{XAC}=S_{XBD}$ и для точек X на прямой, параллельной AB и проходящей через P; для точек, не лежащих на указанных двух прямых, эти площади различны.

Перейдем к доказательству утверждения задачи. Пусть $A_1A_2...A_6$ — данный шестиугольник, M_1, M_2, ..., M_6 — середины его сторон, P, Q, R — точки пересечения (больших) диагоналей A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6, O — точка пересечения «средних линий» M_1M_4 и M_2M_5 (обозначения см. на рисунке 2). По доказанному утверждению $S_{OA_1A_4}=S_{OA_2A_5}$ (так как O лежит на M_1M_4) и $S_{OA_2A_5}=S_{OA_3A_6}$ (так как O лежит на M_2M_5), следовательно, $S_{OA_1A_4}=S_{OA_3A_6}$. Кроме того, точка O принадлежит объединению углов A_1PA_2 и A_4PA_5 и в то же время объединению углов A_2QA_3 и A_5QA_6, а пересечение этих двух пар углов — треугольник PQR (рис. 3), который содержится в одном из углов A_3RA_4 или A_6RA_1. Снова пользуясь нашим утверждением, заключаем, что третья «средняя линия» M_3M_6 тоже проходит через O.

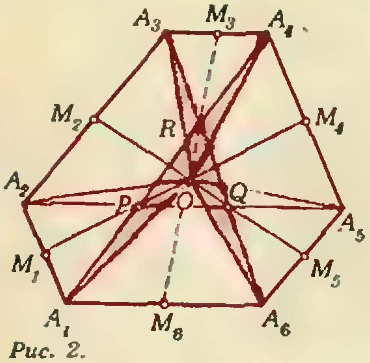


Рис. 2.

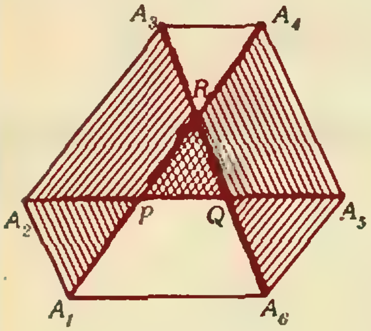


Рис. 3.

Упомянем еще три решения этой задачи. Первое из них аналогично приведенному нами и опирается на то, что *множество точек X трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD, для которых треугольники AXD и BXC равновелики, есть отрезок, соединяющий середины оснований* (ср. с доказанным выше вспомогательным утверждением). Кроме того, надо использовать еще один факт, интересный и сам по себе: *если в шестиугольнике $A_1A_2...A_6$ противоположные стороны параллельны, то треугольники $A_1A_3A_5$ и $A_2A_4A_6$ равновелики.* Другое решение основано на специально подобранном параллельном проектировании. Именно, как можно показать, всегда существует такая проекция, при которой большие диагонали данного шестиугольника становятся равными (достаточно добиться того, чтобы две его «средние линии» стали перпендикулярны сторонам, которые они соединяют). Легко видеть, что в таком случае «средние линии» будут биссектрисами треугольника, ограниченного большими диагоналями, и, следовательно, пересекаются в одной точке. При этом шестиугольник оказывается вписанным в окружность с центром в точке пересечения «средних линий». Наконец, утверждение задачи можно вывести из общего условия пересечения в одной точке трех прямых, проведенных из вершин треугольника (в данном случае треугольника PQR — см. рис. 2), — так называемой теоремы Чевы (см., например, задачу 34 в статье М. Б. Балка и В. Г. Болтянского «Центр тяжести облегчает решение» в «Кванте» № 4 за 1984 г.).

В. Н. Дубровский

M964. *Докажите, что в последовательности (a_n) различных натуральных чисел, удовлетворяющих условию $a_n < 100n$, найдется число, в десятичной записи которого*
а) встречается цифра 1;
б) встречается 1986 единиц подряд.

а) Достаточно показать, что *если в десятичной записи различных натуральных чисел a_1, a_2, ... не встречается цифра 1, то число a_n/n может быть сколь угодно большим* (в частности, $a_n/n > 100$ при некотором n).

Заметим, что среди первых 9^k чисел нашей последовательности найдется такое a_n, запись которого состоит не менее чем из $k+1$ цифр, то есть $a_n \geqslant 10^k$. В самом деле, количество натуральных чисел, записываемых не более чем k цифрами, отличными от 1, равно $9^k - 1$ (в каждом из k разрядов такого числа стоит одна из 9 цифр 0, 2, 3, ..., 9, а число 0 исключается; мы подразумеваем, что числа, имеющие меньше k знаков, дополнены нулями в старших разрядах до k-значных). Поскольку $n \leqslant 9^k$, справедливо неравенство $a_n/n \geqslant (10/9)^k$, а его правая часть неограниченно растет с ростом k.

б) Совершенно так же, как в пункте а), доказывается, что если в записи чисел a_1, a_2, ... в m-ичной системе счисления не входит некоторая «m-ичная цифра» c, то последовательность a_n/n неограничена (лишь при $c=0$ оценки нужно чуть-чуть изменить). Отсюда при $m = 10^{1986}$, $c = \underbrace{1\ 1 \ldots 1}_{1986\ \text{раз}}$ (в десятичной записи) вытекает утверждение б).

А. А. Столин

◆

M965. *Дано шесть чисел $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Чтобы подсчитать в «лоб» сумму их попарных произведений $a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_5a_6$, нужно затратить 15 умножений и 14 сложений. Покажите, как можно найти сразу: сумму этих чисел, сумму их произведений по два, по три, по четыре и по пять, затратив всего 15 сложений и 14 умножений.*

Обозначим через S_n^1 сумму n первых чисел $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, через S_n^k — сумму их произведений по k штук. Тогда мы можем последовательно найти

$$S_2^1 = x_1 + x_2,\ S_2^2 = x_1 x_2,$$

затем

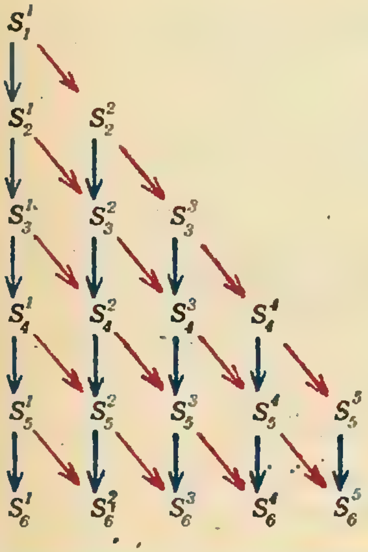
$$S_3^1 = S_2^1 + x_3,\ S_3^2 = S_2^2 + S_2^1 \cdot x_3,\ S_3^3 = S_2^2 x_3,$$

затем $S_n^k\,(1 \leqslant k \leqslant 4)$, $S_5^k\,(1 \leqslant k \leqslant 5)$ и, наконец, $S_6^k\,(1 \leqslant k \leqslant 5)$, пользуясь формулами

$$S_n^1 = S_{n-1}^1 + x_n,\ S_n^k = S_{n-1}^k + S_n^{k-1} x_n$$
$$(1 < k < n),\ S_n^n = S_{n-1}^{n-1} x_n.$$

Для вычисления всех $S_n^k\,(1 \leqslant k \leqslant n)$ потребуется $n-1$ сложений и $n-1$ умножений. Таким образом, чтобы сделать это вплоть до $n=6$, нужно $1+2+3+4+5=15$ сложений и столько же умножений. Последнее умножение $S_6^6 = S_5^5 x_6$ можно сэкономить, поскольку не требуется считать произведение всех 6 чисел.

Эту последовательность операций иллюстрирует схема на полях (голубые стрелки — сложения, красные — умножения).



Коротко это решение можно объяснить так. Нам нужно найти коэффициенты многочлена $(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_6)$ при $x, x^2, \ldots, x^5$, а мы последовательно находим произведения $x+a_1$ на $x+a_2$, затем на $x+a_3$, ..., на $x+a_6$.

Аналогично можно доказать, что все суммы произведений n чисел по k ($k = 1, 2, \ldots, n$) можно найти за $1 + 2 + \ldots + (n-1) = n(n-1)/2$ сложений и столько же умножений. Интересно выяснить, можно ли обойтись для этого меньшим числом операций.

Н. Б. Васильев

Ф973. *Тело начинает двигаться прямолинейно из точки A и через время T попадает в точку B а) с максимально возможной скоростью; б) с минимально возможной скоростью; расстояние |AB| равно l. Найти скорости тела в этих двух случаях, если скорость в точке A* $v_0=0$ *и ускорение тела* $-a<a<a_0$.

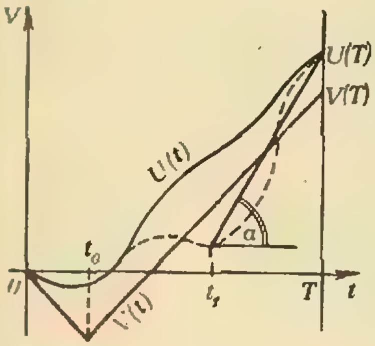


Рис. 1.

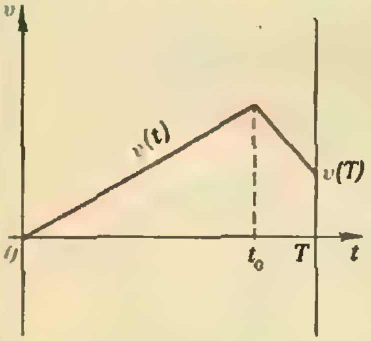


Рис. 2.

а) Чтобы прийти в точку B с максимальной скоростью, нужно двигаться следующим образом. До некоторого момента времени t_0 нужно двигаться с ускорением $-a_0$, затем до конца с ускорением a_0. Точка t_0 находится из условия, что проходимый путь равен l:

$$l=-\frac{a_0t_0^2}{2}-a_0t_0(t-t_0)+\frac{a_0(T-t_0)^2}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_0^2-2Tt_0+\frac{T^2}{2}=\frac{l}{a_0},\quad t_0=T-\sqrt{\frac{T^2}{2}+\frac{l}{a_0}}$$

(знак в решении квадратного уравнения выбирается из условия $t_0<T$). Скорость в момент времени t обозначим через $V(t)$. График функции $V(t)$ показан на рисунке 1 красной линией. Пусть $U(t)$ — скорость при другом режиме движения, удовлетворяющем нашим условиям, таком, что $U(T)>V(T)$. Покажем, что тогда $U(t)\geqslant V(t)$ при любом t (см. рис. 1). Предположим, что $U(t_1)<V(t_1)$ при некотором t_1 (эта возможность показана на рис. 1 пунктиром). Если $t_1\geqslant t_0$, то среднее ускорение на отрезке $t_1\leqslant t\leqslant T$ больше a_0 (черная линия на рис. 1 наклонена круче, чем красная), а если $t_1\leqslant t_0$, то среднее ускорение на отрезке $0\leqslant t\leqslant t_1$ меньше $-a_0$. Итак, если $U(T)>V(T)$, то $U(t)\geqslant V(t)$ при любом t и тело, движущееся со скоростью $U(t)$, пройдет за время T отрезок, больший l. Значит, $V(T)$ — максимально возможная скорость. Находим ее:

$$V(T)=-a_0t_0+a_0(T-t_0)=a_0(T-2t_0)=$$

$$=a_0\left(-T+2\sqrt{\frac{T^2}{2}+\frac{l}{a_0}}\right)=\sqrt{2a_0^2T^2+4a_0l}-a_0T.$$

б) Аналогично: чтобы прийти в точку B с минимальной скоростью, нужно до некоторого момента времени двигаться с ускорением a_0, затем до конца с ускорением $-a_0$. Точка t_0 находится из условия, что проходимый путь равен l:

$$l=\frac{a_0t_0^2}{2}+a_0t_0(T-t_0)-\frac{a_0(T-t_0)^2}{2}\Rightarrow t_0=T-\sqrt{\frac{T^2}{2}-\frac{l}{a_0}}$$

(график скорости $v(t)$ в зависимости от времени t показан на рис. 2). Скорость в момент времени T равна

$$a_0t_0-a_0(T-t_0)=a_0(2t_0-T)=$$

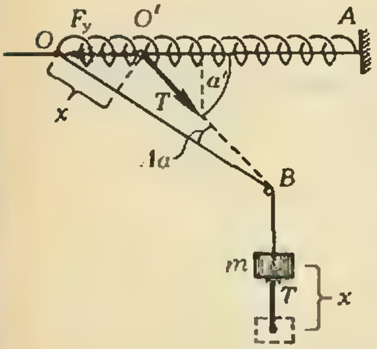
$$=a_0\left(T-2\sqrt{\frac{T^2}{2}-\frac{l}{a_0}}\right)=a_0T-\sqrt{2a_0^2T^2-4a_0l}.$$

Доказательство того, что эта скорость минимально возможная, аналогично предыдущему доказательству: если $u(t)$ — другой режим движения и $u(T)<v(T)$, то $u(t)\leqslant v(t)$ при любом t.

Примечание. В части а) может оказаться, что $t_0<0$: это будет при $l>\frac{a_0T^2}{2}$; тогда решения нет. Тогда не имеет решения и часть б) (под корнем отрицательное выражение).

Д. А. Акопян

Ф974. *Определите период малых колебаний системы, изображенной на рисунке: масса груза m, упругость пружины k, ∠AOB=α. Стержень и блок считать гладкими, пружину — невесомой. Пружина закреплена в точке A. Изменится ли период колебаний, если в точке O также закрепить груз m?*



Ф975. *Между пластинами плоского конденсатора площадью S, расстояние между которыми d, движется со скоростью $\vec{v}$ плоскопараллельная протяженная проводящая пластина толщиной d/2. Вдоль пластины перпендикулярно $\vec{v}$ действует постоянное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Определите напряжение на конденсаторе емкостью C, соединенном с пластинами так, как показано на рисунке.*

Предположим, что груз сместился вниз на малое расстояние x. Посмотрим, как изменится при этом сила натяжения нити.

Поскольку пружина невесомая, в любой момент времени (см. рисунок)

$$F_y = T\cos\alpha, \text{ то есть } k(\Delta l + \Delta l') = T\cos\alpha',$$

где $\Delta l' = |OO'|$, $\alpha' = \angle AO'B$. Как видно из рисунка, $|OO'| = x/\cos\alpha$ и $\alpha' = \alpha + \Delta\alpha$, где $\Delta\alpha = \frac{x \operatorname{tg}\alpha}{l-x}$. Так как $\cos(\alpha+\Delta\alpha) = \cos\alpha\cos\Delta\alpha - \sin\alpha\sin\Delta\alpha \underset{\Delta\alpha\to 0}{\approx}$ $\underset{\Delta\alpha\to 0}{\approx} \cos\alpha - \Delta\alpha\cdot\sin\alpha = \cos\alpha - \frac{x}{l-x}\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha$, при малом смещении груза вниз

$$T = \frac{k\left(\Delta l + \frac{x}{\cos\alpha}\right)}{\cos\alpha - \frac{x}{l-x}\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha} = \frac{k(\Delta l\cos\alpha + x)}{\cos^2\alpha - \frac{x}{l-x}\sin^2\alpha} \approx$$

$$\approx \frac{k(\Delta l\cos\alpha + x)}{\cos^2\alpha}$$

(мы пренебрегли вторым слагаемым в знаменателе, так как $\frac{x}{l-x} \to 0$ при $x \to 0$).

Теперь запишем уравнение движения груза:

$$ma = mg - T = mg - \frac{k\Delta l}{\cos\alpha} - \frac{kx}{\cos^2\alpha} = -\frac{kx}{\cos^2\alpha}.$$

Это уравнение описывает гармонические колебания с периодом

$$t = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m\cos^2\alpha}{k}} = 2\pi\cos\alpha\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

В частности, при $\alpha = 0$ получаем знакомую формулу для периода колебаний груза на пружине.

Из решения понятно, что если в точке O закрепить груз, то период колебаний увеличится, так как в этом случае при том же значении α величина T будет меньше; ускорение груза, закрепленного в точке A, увеличится — период колебаний уменьшится.

Л. Г. Маркович

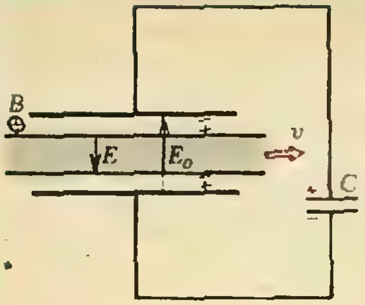
◆

В объеме проводящей пластины имеется огромное количество свободных электронов. При движении пластины внутри конденсатора на свободные электроны действуют три силы: сила Лоренца со стороны магнитного поля evB, направленная вниз; сила eE со стороны зарядов, находящихся на поверхностях движущейся пластины, направленная вверх; сила со стороны зарядов на пластинах конденсатора eE_0, направленная вниз. Сумма всех этих трех сил внутри проводника должна быть равна нулю, то есть

$$vB - E + E_0 = 0. \qquad (1)$$

При этом заряд на конденсаторе емкостью C должен быть равен заряду на пластинах площадью S:

$$Q = CU = \frac{\varepsilon_0 S}{d}E_0 d = \varepsilon_0 E_0 S. \qquad (2)$$



Работа по перенесению единичного положительного заряда по замкнутому контуру в электрическом поле зарядов всегда равна нулю; значит,

$$E_0 d - Ed/2 + U = 0. \qquad (3)$$

Чтобы найти значение $U = \frac{\varepsilon_0 E_0 S}{C}$, найдем значение E_0 из системы уравнений (1)—(3). Будем считать для общности, что толщина пластины не $d/2$, а d'; тогда

$$E_0 d - Ed' + \frac{\varepsilon_0 E_0 S}{C} = 0, \qquad (4)$$

и из (1) и (4) находим $E_0 = \dfrac{vBd'}{\dfrac{\varepsilon_0 S}{C} + d - d'}$.

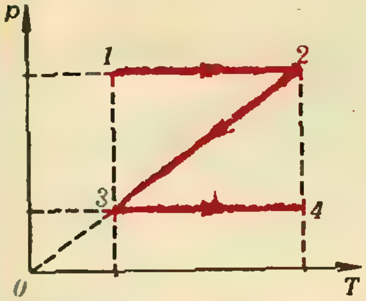
При $d' = 0$ $E_0 = 0$, а значит, и $U = 0$.

При $d' = \frac{d}{2}$ $E_0 = \dfrac{vB}{1 + \dfrac{2\varepsilon_0 S}{Cd}}$ и $U = \dfrac{\varepsilon_0 vBS}{C + \dfrac{2\varepsilon_0 S}{d}}$.

При $d' = d$ поля E_0 не будет, $E = vB$, а напряжение на конденсаторе C всегда будет $U = vBd$ независимо от его емкости.

Е. А. Ромишевский

Ф976. *Моль идеального одноатомного газа переводится из начального состояния в конечное, как показано на рисунке. Определите подведенное газу тепло, если разность начальной и конечной температур равна $\Delta t = 100$ °C.*



◆

Обратим внимание на то, что тепловой процесс задан в координатах p, T. Он состоит из трех участков: двух изобар (1→2) и (3→4) и изохоры (2→3). Постоянство объема на участке (2→3) вытекает из того, что давление p меняется пропорционально температуре T. Если обозначить молярные теплоемкости газа при постоянном объеме и при постоянном давлении через c_V и c_p, можно записать

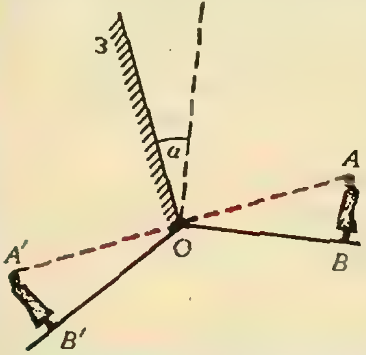
$$Q = Q_{12} + Q_{23} + Q_{34} = c_p(T_2 - T_1) + c_V(T_3 - T_2) + $$
$$+ c_p(T_4 - T_3) = (2c_p - c_V)\Delta t.$$

Для одноатомного идеального газа $c_V = \frac{3}{2}R$, $c_p = \frac{5}{2}R$ ($R = 8{,}31$ Дж/(моль·К)). Окончательно:

$$Q = \frac{7}{2} R\,\Delta t = 2910 \text{ Дж/моль}.$$

С. М. Козел

Ф977. *На стене, плоскость которой отклонена от вертикали на 4,87° (см. рисунок), укреплено зеркало. С какого максимального расстояния человек, рост которого 170 см, сможет увидеть в зеркале хотя бы часть своего изображения?*



◆

Изображение $A'B'$ человека AB в зеркале расположено симметрично самому человеку относительно плоского зеркала и равно по размерам человеку. Следовательно, предельный случай, когда человек увидит в зеркале хотя бы часть своего изображения, соответствует ситуации, приведенной на рисунке. Как видно, $\angle AOB = \alpha$ и

$$OB = AB/\operatorname{tg}\angle AOB = AB/\operatorname{tg}\alpha \approx AB/\alpha$$

(мы учли, что угол α мал и $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$).

Таким образом,

$$OB = \frac{AB}{\alpha} = \frac{1{,}7 \text{ м}}{\frac{4{,}87^\circ}{180^\circ}\pi} = 20 \text{ м}.$$

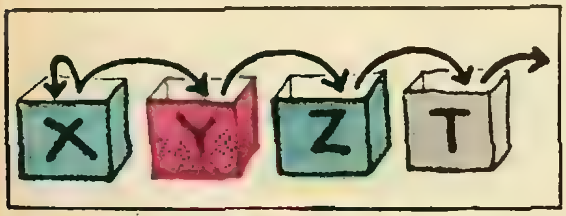
Е. П. Кузнецов

Зачем микрокалькулятору стек

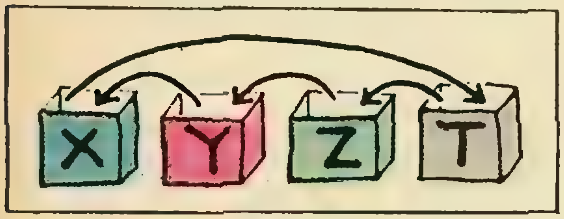
Кандидат физико-математических наук
Л. Ф. ШТЕРНБЕРГ

Эта статья предназначена в первую очередь девятиклассникам, пользующимся программируемым микрокалькулятором при изучении курса основ информатики и вычислительной техники. Однако статья будет полезной и многим другим пользователям калькуляторов (программируемых или нет), так как в ней рассказано о польской инверсной записи — очень простом приеме, позволяющем сильно упрощать организацию вычислений.

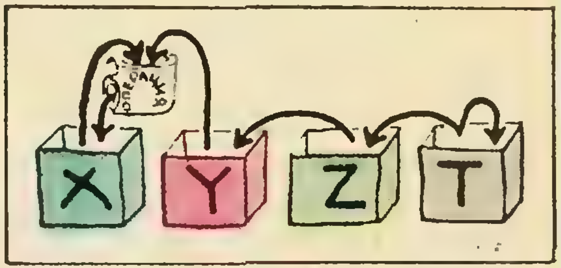
На программируемых калькуляторах «Электроника» БЗ-34, МК-56, МК-54 имеется интересное устройство — *стек*, которое состоит из четырех регистров: X, Y, Z, T, используемых на первый взгляд довольно странным образом. Команда ↑ продвигает информацию в стеке — содержимое T стирается, в T заносится содержимое Z, в Z — содержимое Y, в Y — содержимое X, которое остается и в X:



Команда F ⟳ двигает содержимое стека в обратную сторону, только содержимое X не стирается, а переходит в T.



Есть команда $\overleftrightarrow{XY}$, обменивающая содержимое X и Y и не затрагивающая остальных регистров. Если перед занесением числа в X или вызовом числа из регистра не выполнялась одна из операций ↑ или C_x, то перед занесением нового значения в X автоматически выполняется ↑, то есть пересылаются Z в T, Y в Z и X в Y. При выполнении операций над двумя числами (например, $X+Y$ или $X\times Y$) эти числа берутся из Y и X, результат засылается в X, а весь стек сдвигается:



(следует иметь в виду, что операция X^Y работает не так). А вот при выполнении операций над одним числом (например, $\sin X$) все выполняется очевидным образом: аргумент берется из X, результат остается в X, и больше ничего никуда не двигается.

Почему же стек работает именно таким образом и как им надо пользоваться? Попробуем поработать со стеком.

Вычислим выражение $a\times b-c/d$. Предположим, что значение a, b, c и d находятся в регистрах a, b, c и d соответственно. Оставим промежуточный результат в стеке, не засылая его в память, и продолжим вычисления — посмотрим, что из этого выйдет.

Таблица 1

№	Команда	Содержимое стека			
		X	Y	Z	T
00	ИП a	a			
01	ИП b	b	a		
02	×	$a\times b$			
03	ИП c	c	$a\times b$		
04	ИП d	d	c	$a\times b$	
05	÷	c/d	$a\times b$		
06	—	$a\times b-c/d$			

Нетрудно видеть, что эта программа — наилучшая из всех возможных, так как в ней нет ни одной лишней команды: вызвать из регистров исходные данные надо — значит, без четырех команд ИП не обойтись, и три операции выполнить надо, а больше в программе ничего и нет. Похоже, что стек — замечательная вещь: попробуем еще с ним поработать, только выражение возьмем посложнее:

$$\frac{p-\frac{d}{(a+b)}}{(e+f)}\times(k+l). \qquad (*)$$

Регистры распределять не будем (их можно распределить как угодно), а в командах П и ИП для наглядности будем писать имя переменной (то есть запись «ИПp» означает «вызов в X числа из того регистра, где хранится значение p»). Пишем программу и следим за стеком (все промежуточные результаты оставляем в стеке: см. табл. 2).

Подведем итоги: 23 команды, из них 15 нужных (ИП и операции) и 8 лишних (помечены звездочками

Таблица 2

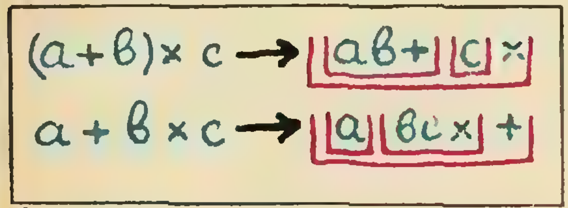
№	Команда	Содержимое стека				Комментарий
		X	Y	Z	T	
00	ИП a	a				Как нас учили в первом классе, начинаем с выражений в скобках
01	ИП b	b	a			
02	+	$a+b$				
03	ИП e	e	$a+b$			Оставляем промежуточный результат в стеке: посмотрим, куда он денется в итоге.
04	ИП f	f	e	$a+b$		
05	+	$e+f$	$a+b$			И этот промежуточный результат оставим в стеке.
06	ИП k	k	$e+f$	$a+b$		
07	ИП l	l	k	$e+f$	$a+b$	Стек на пределе — сейчас потеряем $a+b$!
08	+	$k+l$	$e+f$	$a+b$	$a+b$	Нет, пронесло! $(a+b)$ сохранилось.
09*	F⟳	$e+f$	$a+b$	$a+b$	$k+l$	Сейчас надо бы поделить d на $(a+b)$, но $(a+b)$ где-то глубоко-глубоко. С трудом достали тремя лишними командами.
10*	F⟳	$a+b$	$a+b$	$k+l$	$e+f$	
11*	F⟳	$a+b$	$k+l$	$e+f$	$a+b$	
12	ИП d	d	$a+b$	$k+l$	$e+f$	Значения d и $a+b$ вызваны, но они не в тех регистрах: придется менять местами.
13*	$\overleftarrow{\overrightarrow{XY}}$	$a+b$	d	$k+l$	$e+f$	
14	÷	$\frac{d}{a+b}$	$k+l$	$e+f$	$e+f$	И опять оставим результат в стеке.
15	ИП p	p	$\frac{d}{a+b}$	$k+l$	$e+f$	
16*	$\overleftarrow{\overrightarrow{XY}}$	$\frac{d}{a+b}$	p	$k+l$	$e+f$	Опять числа не в том порядке и надо менять их местами.
17	—	$p-\frac{d}{a+b}$	$k+l$	$e+f$	$e+f$	
18*	F⟳	$k+l$	$e+f$	$e+f$	$p-\frac{d}{a+b}$	Похоже, стек издевается над нами: нужные промежуточные результаты в самых неудобных местах — не сразу поймешь, где они и как их достать.
19*	F⟳	$e+f$	$e+f$	$p-\frac{d}{a+b}$	$k+l$	
20*	F⟳	$e+f$	$p-\frac{d}{a+b}$	$k+l$	$e+f$	
21	÷	$\frac{\left(p-\frac{d}{a+b}\right)}{e+f}$	$k+l$	$e+f$	$e+f$	Хоть на последней операции повезло: нужные промежуточные результаты как раз на месте.
22	×	ответ	$e+f$	$e+f$	$e+f$	

в программе). Очевидно, что если бы эти результаты мы вовремя запомнили в регистрах памяти, то сэкономили бы себе не меньше половины из этих 8 лишних команд. Да пока сообразишь, где сейчас в стеке какой результат... *Лучше без стека!*

Но прежде чем отказаться от стека, давайте попробуем понять, почему в первой программе стек «вел себя» так хорошо, а во второй, наоборот, «вел себя» так плохо. Для этого нам придется отправиться лет на 60 назад в гости к польскому математику Яну Лукасевичу, который не имел ни малейшего понятия о микрокалькуляторах, но все же изобрел одну замечательную конструкцию, ныне отлично известную тем, кто пишет трансляторы для ЭВМ, и получившую название *польская инверсная запись*.

В операциях над двумя числами мы ставим знак между числами; над одним числом — перед этим числом. Лукасевич предложил ставить знак всегда перед числами (*прямая польская запись*) или всегда после них (*инверсная польская запись* — именно она нас и будет интересовать), то есть вместо $a-b$ писать $ab-$ и вместо $\lg a$ писать $a \lg$.

Первое впечатление: «Ну и что? Можно писать и так. Только неудобно и непривычно». Непривычно? Да. А вот неудобно ли? Запишем в инверсной польской записи выражения «$(a+b)\times c$» и «$a+b\times c$». В первом из них умножаются выражение $a+b$ (которое само должно быть записано в польской записи $ab+$) и число c; во втором — складываются a и выражение $b\times c$ (записанное в польской записи $bc\times$). Итак:



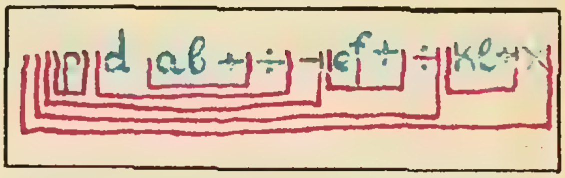
Красным показано, какие числа захватывает операция. Посмотрите на польскую запись: скобки исчезли — они не нужны, операции выстроились в том порядке, в котором они выполняются, и о старшинстве операций можно забыть: операции просто выполняются по порядку — слева направо. (Если бы нас с первого класса приучали к таким правилам арифметики! Насколько проще было бы!)

Запишем теперь в польской записи выражение, для которого мы составили первую программу:

$$ab\times cd\div -$$

Теперь достаточно взглянуть на программу... и все станет ясно: наша программа — точная копия польской записи.

Польская запись выражения (*) такова:



Теперь взглянем на нашу программу вычисления этого выражения... и сразу станет ясно, что мы там натворили и почему стек себя «плохо вел». Если написать программу точно по польской *записи, то получим* ровно 15 команд — ни одной лишней!

— Замечательно! — скажет читатель. — Только как получить из обычной записи польскую?

Очень просто. Запишем выражение (*) в линеаризованной записи (то есть без многоэтажных формул):

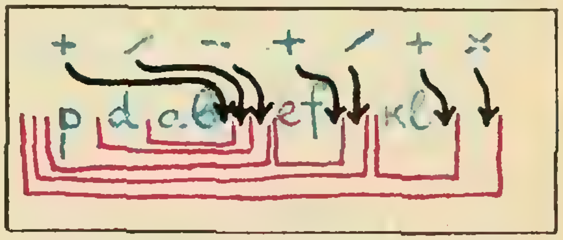
$$p-(d/(a+b))/(e+f)\times(k+l)$$

и применим 3 простых правила:

1. Выпишем числа и переменные в том порядке, в каком они записаны: *pdabefkl*.

2. Выпишем операции в том порядке, в котором они должны выполняться (при условии, что всегда выполняется первая слева операция, которая уже может быть выполнена): $+/-+/+\times$

3. Вставим операции непосредственно после соответствующих чисел.



На самом деле заранее формировать польскую запись не обязательно, можно это сделать в процессе написания программы. Программируем тот же пример, читая линеаризованную запись символ за символом (только скобки не читаются, а принимаются к сведению; см. табл. 3).

Получили оптимальную программу: 8 вызовов данных и 7 операций. И стек «ведет себя» отменно: обратите внимание, как «качаются» промежуточные результаты в стеке, но в нужный момент они оказываются всегда на месте и в подходящем порядке. Можно математически доказать, что так всегда и будет. (Только операция X^Y ведет себя не так: дело в том, что ... она просто неправильно реализована — у всех операций над двумя числами первое число в Y, второе в X, у этой — наоборот; все операции над двумя числами двигают

Таблица 3

Читаемый символ	Рассуждения	Записываемая команда		При выполнении в стеке будет			
				X	Y	Z	T
p	Числа и переменные всегда записываются в стек	ИП p	1	p			
—	Операцию выполнить нельзя,— не над чем! — пропускаем.						
d	Переменную — в стек.	ИП d	2	d	p		
/	Операция не готова к выполнению — пропускаем.						
a +	Переменную — в стек. Пока еще ни одну операцию выполнить нельзя.	ИП a	3	a	d	p	
b	В стек.	ИП b	4	b	a	d	p
	Наконец встретилась операция, для которой оба числа в стеке. Выполним ее.	+	3	$a+b$	d	p	
	Нет ли у нас отложенных операций, для которых готовы данные? Есть — деление. Выполним его (а где нужные числа? — можно не заботиться — как раз на местах).	÷	2	$\frac{d}{a+b}$	p		
	И опять появилась операция, для которой данные готовы — выполняем ее.	—	1	$p-\frac{d}{a+b}$			
/	Больше выполнять нечего — читаем очередной символ и откладываем операцию — не готова она.						
e	В стек. Выполнять пока нечего.	ИП e	2	e	$p-\frac{d}{a+b}$		
+	Пропускаем — не готова она.						
f	В стек.	ИП f	3	f	e	$p-\frac{d}{a+b}$	
	Готовы числа для сложения — выполняем.	+	2	$e+f$	$p-\frac{d}{a+b}$		
	Теперь готовы данные для деления — выполняем.	÷	1	$\frac{p-\frac{d}{a+b}}{e+f}$			
×	Пропускаем — не над чем						
k +	В стек. Для «×» и «+» данные по-прежнему не готовы.	ИП k	2	k	$\searrow\cdots$		
l	В стек. И можно выполнить «+»	ИП l	3	l	k	$\searrow\cdots$	
	Выполняем сложение. Все готово и для умножения.	+	2	$k+l$	$\cdots\swarrow$		
	Выполняем умножение. Конец.	×	1	ответ			

стек, эта — нет; так что при ее программировании указанным методом придется писать $\overset{\rightarrow}{\underset{\leftarrow}{XY}}$, FX^Y, $\overset{\rightarrow}{\underset{\leftarrow}{XY}}\, F\circlearrowleft$ или вместо X^Y писать $e^{Y\times\ln X}$ — тогда все получится.)

Теперь стало понятно, почему стек работает именно таким образом, и, оказывается, даже не надо следить, где какой результат находится в каждый момент: в нужный момент он будет там, где надо.

Но... а вдруг нам не хватит 4 регистров стека? Тогда промежуточный результат надо записать в память. Но как определить, хватит нам стека или нет? Неужели следить за всеми качаниями стека? Нет, на самом деле все проще: взглянем на столбец таблицы, над которым нет заголовка,— в нем какие-то цифры — они показывают, сколько регистров стека занято (всю таблицу стека писать не надо, а эти цифры писать надо). Правило заполнения столбца очень простое: каждая команда ИП добавляет единицу, каждая операция над двумя числами уменьшает предыдущее число на единицу, операции над одним числом не изменяют его. И если появилось число 5, то в этот момент при очередном «качке» стека один из промежуточных результатов будет утерян.

Как тогда быть? Подробно ответить на этот вопрос не позволяет объем статьи. Мы заметим лишь, что в такой ситуации всегда можно воспользоваться регистрами памяти, но часто удается так переорганизовать формулу, по которой ведутся вычисления, чтобы не происходило переполнение стека.

В заключение заметим, что польская инверсная запись весьма удобна при организации вычислений на (непрограммируемом) инженерном калькуляторе: ее использование позволяет исключить списывание с индикатора многих промежуточных результатов.

О математике гармонических колебаний

(Начало см. на с. 9)

в созданную еще И. Ньютоном модель звуковых волн: на прямой в направлении распространения звука рассматривается система массивных осциллирующих точечных грузиков, соединенных маленькими пружинками, лишенными массы. Кинетическая энергия этой системы сосредоточена в грузиках, а потенциальная запасается в пружинах. Такая система называется *системой связанных осцилляторов* на прямой. Такие системы можно рассматривать и на плоскости, и в пространстве.

Системы связанных осцилляторов оказались очень удобной моделью во многих разделах механики и физики. Даже такая очень непростая наука, как физика элементарных частиц, в качестве одной из своих основ — модели физического вакуума — использует систему связанных осцилляторов. С этой точки зрения вакуум можно рассматривать как очень сложный музыкальный инструмент, который отзывается теми или иными колебаниями на любое внешнее воздействие.

Используя площадь...

(Начало см. на с. 16)

Упражнения

1. Даны правильный треугольник ABC и точка O внутри него; A', B' и C' — проекции этой точки на высоты AA_1, BB_1 и CC_1 соответственно. Докажите, что величина $AA'+BB'+CC'$ не зависит от выбора точки O.

2. Докажите, что в выпуклом многоугольнике, все углы которого равны, сумма длин перпендикуляров, опущенных из любой внутренней точки O на стороны многоугольника (или на их продолжения), не зависит от положения точки O.

3. Докажите, что если противоположные стороны четырехугольника не параллельны, то середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон, лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей.

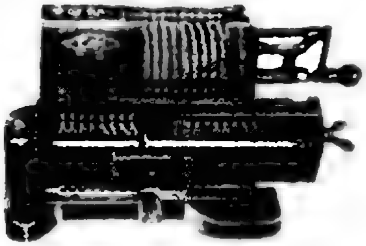
4. Докажите, что длина биссектрисы угла B треугольника ABC равна $\dfrac{2ac}{a+c}\cos\dfrac{\beta}{2}$.

5. Докажите с помощью площади, что каждая медиана треугольника делится любой другой медианой в отношении 2 : 1, считая от вершины, и тем самым медианы треугольника пересекаются в одной точке.

6. На стороне AC треугольника ABC взята точка D. Докажите, что сумма радиусов вписанных окружностей треугольников ABD и BCD больше радиуса вписанной окружности треугольника ABC.

IX. Сумматор

Доктор физико-математических наук М. Е. ЛЕВИНШТЕЙН,
кандидат физико-математических наук Г. С. СИМИН,
В. Я. СИНДАЛОВСКИЙ



Сумматор эпохи механических вычислительных машин. Время суммирования двух чисел на нем зависело от ловкости, с которой оператор передвигал рычажки и крутил ручку, и составляло от 1 до 10 секунд. Для сложения ручку вращали в одну сторону, а для вычитания — в другую. Умножение и деление сводилось к последовательным сложениям или вычитаниям и занимало до одной минуты.
Быстродействие современных сумматоров на основе кремниевых биполярных транзисторов достигает сотен миллионов сложений в секунду.

Сумматор, как следует из его названия, предназначен для выполнения в ЭВМ операции сложения. Если учесть, что все математические операции, осуществляемые ЭВМ,— умножение, деление, возведение в степень, вычисление интегралов, решение дифференциальных уравнений и т. д.— в конечном счете сводятся к выполнению по определенным программам операций сложения, станет ясно, что сумматор — один из самых важных узлов ЭВМ.

Сумматор складывает два числа, работая по тем же правилам, что и мы, когда выполняем сложение «в столбик».

Сложим, например, два числа: $A=10010$ и $B=1011$*). Сумма чисел C равняется

$$\begin{array}{r} 10010 \\ +\ 1011 \\ \hline 11101 \end{array}$$

Сформулируем правила, которыми мы руководствуемся, выполняя операцию сложения. Мы складываем число, записанное в младшем разряде числа A (a_1), с числом, записанным в младшем разряде числа B (b_1). Если результатом сложения оказались 0 или 1, мы записываем результат в младший разряд числа C (c_1). Однако результатом сложения может оказаться и 2. Такой результат для двоичной системы соответствует переносу единицы в следующий, более старший разряд («ноль пишем, один в уме»!).

Переходя к сложению следующих, вторых разрядов, мы фактически должны складывать не два числа a_2 и b_2, а три: a_2, b_2 и третье число, которое мы обозначим p_1. Если в результате проделанного раньше сложения в младшем разряде единица в старший не переходит, $p_1=0$, а если переходит, то $p_1=1$. Результатом сложения во втором разряде будут два числа: второй разряд суммы c_2 и p_2 — число, подлежащее сложению с a_3 и b_3 в следующем, третьем разряде. Разумеется, как c_2, так и p_2 могут равняться либо 0, либо 1.

Точно так же выполняется сложение и во всех последующих разрядах, вплоть до старшего.

Для наглядности запишем сформулированные правила в форме таблицы истинности.

Таким образом, схема сумматора, выполняющая сложение одного разряда двух чисел (так называемого одноразрядного сумматора), должна иметь три входа, на которые подаются сигналы a_n, b_n и p_{n-1}, и два выхода, на которых формируются сигналы c_n и p_n.

Одна из возможных схем одноразрядного сумматора показана на рисунке 1.

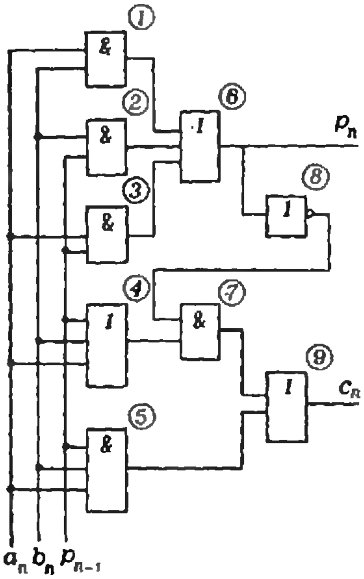


Рис. 1. Одноразрядный сумматор. Входные сигналы обозначены буквами a_n, b_n и p_{n-1}, выходные — c_n и p_n. Цифрами в кружках условно пронумерованы логические схемы, образующие сумматор.

---

*) Числа A, B и сумма C записаны в двоичной системе, в которой обычно хранится и перерабатывается в ЭВМ вся информация.

Значение слагаемых			Значение результата	
a_n	b_n	p_{n-1}	c_n	p_n
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	1
1	0	1	0	1
0	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Таблица истинности.

Как бы ни были сложны действия, выполняемые в ЭВМ, в конечном итоге они сводятся к многочисленным операциям суммирования двоичных чисел. Даже такие сложнейшие логические задачи, как игра в шахматы, тоже могут быть решены при помощи операций суммирования. В 1967 году состоялся первый шахматный матч между электронными вычислительными машинами СССР и США. Матч состоял из четырех партий. Глубина просмотра вариантов составляла до 5 полуходов (то есть ходов как своих, так и противника). Со счетом 3:1 победила советская шахматная программа.
Современные шахматные программы уже сейчас играют в силу мастера спорта.

Прежде всего обратим внимание на то, что она содержит только хорошо знакомые нам простейшие логические схемы типа И, ИЛИ и НЕ.

Разберем работу одноразрядного сумматора на примере сложения двух чисел $a_n=1$; $b_n=0$ при наличии сигнала переноса $p_{n-1}=1$. На входы схемы 1 типа И поступают сигналы $a_n=1$ и $b_n=0$. Следовательно, на ее выходе вырабатывается сигнал 0. Такой же сигнал будет на выходе схемы 2 ($b_n=0$; $p_{n-1}=1$). На выходе схемы 3 вырабатывается сигнал 1 ($a_n=1$; $p_{n-1}=1$). Схема 6 типа ИЛИ имеет три входа, на одном из которых действует сигнал 1, а на двух остальных — 0. На ее выходе формируется сигнал $p_n=1$.

Далее, с выхода схемы 6 сигнал 1 поступает на вход инвертора 8, а с его выхода сигнал 0 — на вход схемы И 7. На второй вход схемы 7 подается сигнал с выхода схемы ИЛИ 4. При рассматриваемой комбинации входных сигналов он соответствует 1.

На выходе схемы 7 формируется 0, который поступает на вход схемы ИЛИ 9. На второй вход схемы 9 поступает сигнал со схемы И 5, в данном случае 0. В результате выходной сигнал $c_n=0$.

Как мы видим, схема выдала правильный результат $c_n=0$; $p_n=1$. Удостоверьтесь сами, что результат сложения будет правильным при любой комбинации входных величин a_n, b_n и p_{n-1}.

Для суммирования многоразрядных двоичных чисел необходимо соединить между собой столько одноразрядных сумматоров, сколько разрядов содержат складываемые числа (рис. 2).

Вспоминая, что числа в больших ЭВМ могут содержать 48 разрядов, что за каждым квадратиком, обозначающим простейшую логическую операцию, в действительности скрывается электронная схема, содержащая несколько транзисторов, мы приходим к выводу, что сумматор, складывающий многоразрядные числа в ЭВМ, представляет собой весьма сложный узел.

Итак, мы познакомились с работой регистра и сумматора. Обратили ли вы внимание, что чем дальше мы отходим от «одиночной клетки», на основе которой строится ЭВМ,— транзистора,— чем более сложные схемы мы анализируем, тем больше меняется предмет разговора, методы анализа, сам язык, на котором ведется обсуждение. Это не случайно. Из области физики полупроводниковых приборов мы вступили в царство совсем другой науки — схемотехники.

Основы этой науки заложены выдающимися математиками, логиками, инженерами. Она очень интересна и глубоко разработана. Но это предмет совсем другого разговора.

Наш рассказ о полупроводниковых элементах вычислительной техники подходит к концу. И закончим мы его в следующем номере журнала, рассказав о перспективных полупроводниковых элементах для будущих ЭВМ.

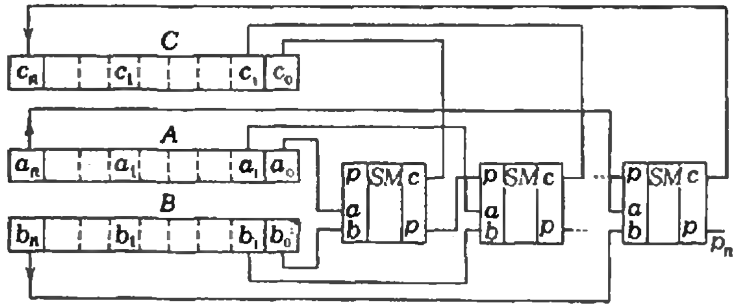


Рис. 2. Многоразрядный сумматор. Он складывает многоразрядные двоичные числа A и B, разряды которых обозначены соответственно a_0, a_1, ..., a_n и b_0, b_1, ..., b_n. Разряды суммы C обозначены c_0, c_1, ..., c_n.

Вспомогательный куб

Кандидат физико-математических наук
М. Р. ЛИБЕРЗОН

При решении задач по стереометрии уже на самом первом шаге часто возникают трудности. Нужно обладать хорошо развитым геометрическим воображением, чтобы представить себе соответствующую пространственную картину. Если речь идет о геометрических телах, с которыми мы встречаемся в повседневной жизни (куб, шар, цилиндр, параллелепипед и т. п.), то эти предметы легко себе представить. Как их рисовать, известно. Значительно труднее изобразить, например, скрещивающиеся прямые или совокупность прямых и плоскостей в пространстве. И не просто изобразить, а сделать чертеж, помогающий решению задачи.

Существует метод, позволяющий в ряде случаев преодолеть указанные трудности. Он основан на следующем соображении. Если пространственная конфигурация трудно воспринимается и не связана с конкретным геометрическим телом, то попробуем искусственно ее связать с каким-нибудь телом. Например, с кубом.

Изображенный на бумаге куб облегчает работу нашему воображению. На рисунке 1, например, отчетливо видно, что прямые l и m являются скрещивающимися. Убрали куб (рис. 2), и пространственная наглядность исчезла — мы видим пересекающиеся прямые l и m на плоскости.

Другой пример. Три луча l, m и n, исходящие из одной точки A_1, нарисованы на кубе (рис. 3). Ясно, что они представляют собой ребра трехгранного угла. На рисунке 4 куба нет, поэтому картинка стала плоской. Чтобы увидеть на ней тот же трехгранный угол, мы должны заставить свое воображение потрудиться.

Использование вспомогательного куба не только «превращает» плоскую картину в объемную, но и указывает пути решения ряда задач. Продемонстрируем это на следующих примерах*).

Задача 1. *Плоские углы трехгранного угла равны 45°, 45° и 60°. Через его вершину проведена прямая, перпендикулярная одной из граней, плоский угол которой равен 45°. Найти угол между этой прямой и ребром трехгранного угла, не лежащим в упомянутой грани.*

Решение. Рассмотрим вспомогательный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5). Проведем диагонали AB_1 и AC двух его смежных граней. Имеем $B_1\widehat{A}B=45^\circ$, $B\widehat{A}C=45^\circ$, $B_1\widehat{A}C=60^\circ$ как угол правильного треугольника AB_1C. Следовательно, трехгранный угол AB_1BC — это угол, о котором говорится в условии задачи. Ребро AA_1 проходит через его вершину A и перпендикулярно грани BAC. Значит, требуется найти величину угла A_1AB_1. Ответ очевиден: $A_1\widehat{A}B_1=45^\circ$.

Решение этой задачи без использования куба довольно сложно и существенно длиннее**). Здесь нам вообще не пришлось считать: ответ удалось «прочесть» на кубе. Но такие случаи редки.

Задача 2. *Угол между двумя гранями трехгранного угла прямой, а величина каждого плоского угла этих граней равна α. Найти величину плоского угла третьей грани.*

Решение. Сначала будем считать угол α острым. Пусть вершина A вспомогательного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 6) является вершиной трехгранного угла, а отрезки AM, AB и AN — его ребрами (если $\alpha>45^\circ$, то точки M и N лежат на продолжениях ребер BB_1 и BC). Требуется найти угол MAN.

Опустим из точки M перпендикуляр MP на отрезок AN и соединим точки B и P. По теореме о трех перпендикулярах отрезок BP перпендикулярен отрезку AN. Из прямоугольных треугольников APB и ABM получаем

$$|AP|=|AB|\cdot\cos\alpha,\quad |AM|=\frac{|AB|}{\cos\alpha}.$$

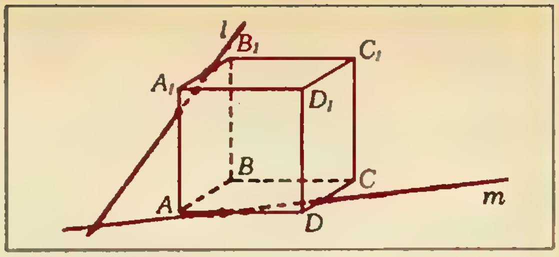


Рис. 1.

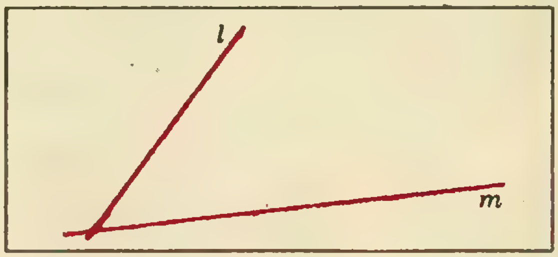


Рис. 2.

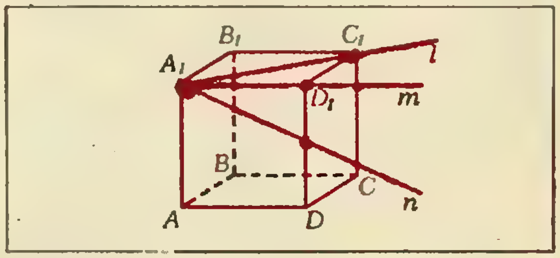


Рис. 3.

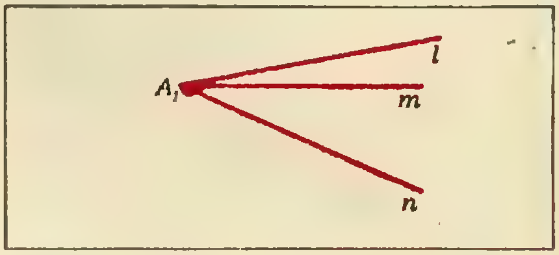


Рис. 4.

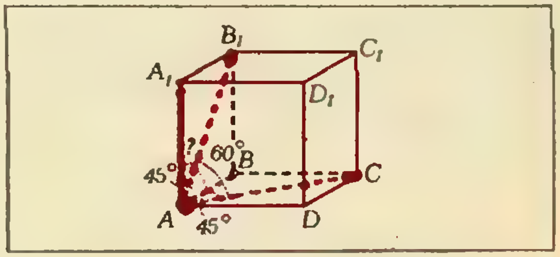


Рис. 5.

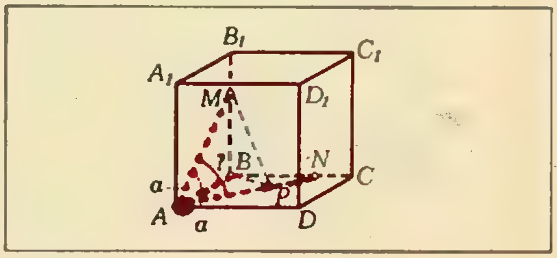


Рис. 6.

---

*)Разобранные в настоящей статье задачи в разные годы предлагались на письменных вступительных экзаменах по математике на различных факультетах МГУ им. М. В. Ломоносова.

**) Оба решения (с кубом и без него) приводятся в книге Дорофеева Г. В., Потапова М. К., Розова Н. Х. *«Пособие по математике для поступающих в вузы»* (М. «Наука», 1976, с. 467—469).

Искомый угол $\widehat{MAN}$ — острый угол прямоугольного треугольника APM; поэтому

$$\cos \widehat{MAN} = \frac{|AP|}{|AM|} = \frac{|AB| \cdot \cos\alpha \cdot \cos\alpha}{|AB|} = \\ = \cos^2 \alpha,$$

$$\widehat{MAN} = \arccos(\cos^2 \alpha).$$

Если угол $\alpha = 90°$, то искомый угол прямой, что также может быть записано полученным соотношением.

Итак, ответ во всех случаях один: $\arccos(\cos^2 \alpha)$.

Мы видим, что на кубе удобно изображать трехгранные углы, две грани которых перпендикулярны. Это связано с тем, что куб содержит прямые двугранные углы. Но в кубе заложен и линейный размер — длина его ребра. Это дает возможность изображать на чертеже и величины расстояний.

Задача 3. *Основание MN и вершина K равнобедренного треугольника MNK находятся на различных гранях прямого двугранного угла с ребром l. Точки M и K удалены от l на расстояние a, а проекция точки N на ребро l равноудалена от проекций точек M и K на ребро l. Найти расстояние от точки N до l, если MK образует с l угол, равный 60°.*

Решение. Пусть длина ребра вспомогательного куба $ABCDA_1B_1C_1B_1$ равна a и двугранный угол из условия задачи образован гранями AA_1B_1B и $ABCD$ (рис. 7). Тогда точка M лежит на ребре A_1B_1, а точка K — на ребре CD (или на их продолжениях). Совместим точку M с вершиной куба A_1. Пусть точка K находится на ребре CD (она может находиться на продолжении ребра CD за вершину D, что не меняет наших рассуждений).

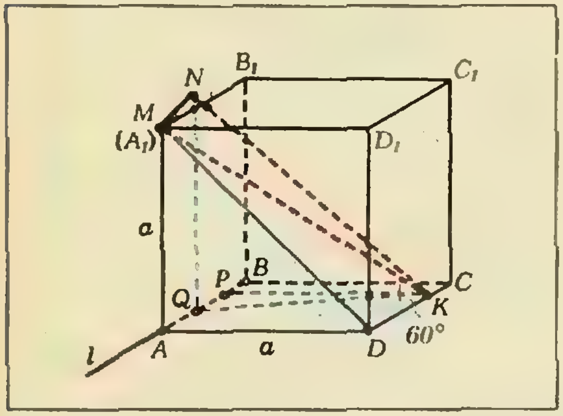


Рис. 7.

Опустим перпендикуляр KP на ребро AB и отметим середину Q отрезка AP. В плоскости грани AMB_1B восставим из точки Q перпендикуляр к ребру AB. Вершина N треугольника MNK лежит на этом перпендикуляре, так как ее проекция Q равноудалена от проекций точек M и K. Заметим, что точка N расположена выше ребра MB_1; в противном случае треугольник MNK не будет равнобедренным.

Проведем отрезки MD и KQ. $|MD| = a\sqrt{2}$ как диагональ квадрата со стороной a. По условию угол между скрещивающимися прямыми AB и MK равен 60°. Но прямая CD параллельна прямой AB, следовательно, $\widehat{MKD} = 60°$. Из прямоугольного треугольника MDK находим

$$|MK| = \frac{|MD|}{\sin 60°} = \frac{2a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \quad |DK| = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

По условию $|NK| = |MK|$ и $|AP| = |DK|$. Тогда $|QP| = \frac{1}{2}|AP| = \frac{1}{2}|DK| = \frac{a}{\sqrt{6}}$. Из прямоугольного треугольника QPK находим $|QK|^2 = |QP|^2 + |KP|^2 = 7a^2/6$. Наконец, из прямоугольного треугольника NQK получаем

$$|NQ| = \sqrt{|NK|^2 - |QK|^2} = \\ = \sqrt{|MK|^2 - |QK|^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{6}.$$

Задача решена.

Задача 4. *В треугольнике LMN дано: $\widehat{LNM} = 90°$, $\widehat{MLN} = 30°$. На перпендикуляре к отрезку LN, проходящем в пространстве через точку L, взята такая точка F, что $|LF| = |MN|$. Полуплоскости, которым принадлежат треугольники LMN и LNF, образуют двугранный угол, равный 60°. Найти острый угол между прямыми LM и NF.*

Решение. Разместим треугольник LMN на грани вспомогательного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ так, как показано на рисунке 8, то есть точку L совместим с вершиной A_1, а точку N — с вершиной A. Пусть $|MN| = a$. Проведем в верхней и нижней гранях куба соответственно отрезки LP и NQ так, что $\widehat{PLD_1} = \widehat{QND} = 60°$. Двугранный угол, образованный плоскостями LND_1D и $LNPQ$, равен 60°. На отрезке LP возьмем такую точку F, чтобы $|LF| = |MN| = a$. Соединим точки N и

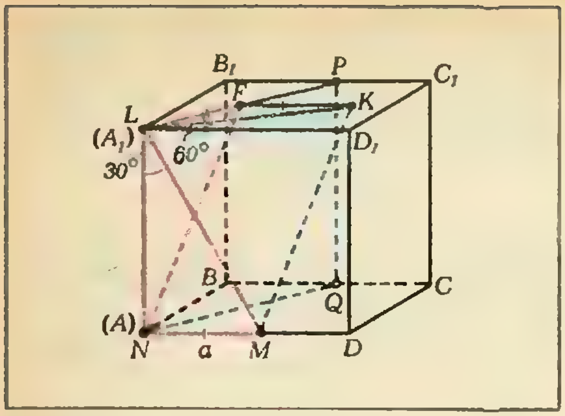


Рис. 8.

F. Наш чертеж полностью соответствует условию задачи.

Найдем угол между прямыми LM и NF. Через точку F проведем отрезок FK параллельно ребру LD_1 и равный по длине a. Точку K соединим с точками M и L. Угол LMK искомый, так как прямая MK параллельна прямой NF (четырехугольник $NFKM$ — параллелограмм). Из прямоугольного треугольника LNM находим $|LM|=2a$. Треугольники LNM и NLF равны (по двум катетам), поэтому $|NF|=|LM|=2a$. Значит, и $|KM|=2a$. В треугольнике LFK $|LF|=|FK|=a$, $\widehat{LFK}=120°$. Отсюда $|LK|=a\sqrt{3}$. Из треугольника LMK находим

$$\cos\widehat{LMK}=\frac{|LM|^2+|KM|^2-|LK|^2}{2|LM|\cdot|KM|}=$$

$$=\frac{8a^2-3a^2}{2\cdot 4a^2}=\frac{5}{8},$$

то есть $\widehat{LMK}=\arccos\frac{5}{8}$.

Задача 5. *Угол между двумя скрещивающимися прямыми равен 60°. Точка M лежит на одной прямой, а точка N — на другой, причем расстояния от каждой из этих точек до общего перпендикуляра скрещивающихся прямых одинаковы и равны расстоянию между прямыми. Какие значения может принимать острый угол между общим перпендикуляром и прямой MN?*

Решение. Пусть одна из скрещивающихся прямых проходит через вершины A и D вспомогательного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вторую прямую проведем через вершину A_1 под углом 60° к ребру A_1D_1 в плоскости грани $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 9). Тогда ребро AA_1 есть общий перпендикуляр к данным прямым. Расстояние между прямыми равно длине ребра куба a, значит, точки M и N удалены от отрезка AA_1 на расстояние a. Совместим точку M с вершиной D. Возможны два варианта расположения точки N.

1. *Точка N лежит внутри грани $A_1B_1C_1D_1$.*

Проведем отрезки ND_1 и MN. Треугольник A_1ND_1 равносторонний, следовательно, $|ND_1|=a$. Искомый угол между прямыми MN и AA_1 равен углу NMD_1, так как прямая AA_1 параллельна MD_1. В треугольнике ND_1M

$$|ND_1|=|MD_1|=a,\ \widehat{MD_1N}=90°.$$

Значит, $\widehat{NMD_1}=45°$.

2. *Точка N лежит вне грани $A_1B_1C_1D_1$* (на рисунке 9 точка N_1).

Проведем отрезки N_1D_1 и MN_1. Треугольник $N_1A_1D_1$ равнобедренный с углом при вершине 120° и боковыми сторонами, равными a. Следовательно, $|N_1D_1|=a\sqrt{3}$. Искомый угол между прямыми AA_1 и MN_1 равен углу N_1MD_1. Из треугольника N_1D_1M находим $\widehat{N_1MD_1}=60°$.

Мы видим, что введение вспомогательного куба существенно упрощает решение. В следующей задаче, как и в задаче 1, мы благодаря кубу найдем нужный угол без вычислений.

Задача 6. *Основанием пирамиды $HPQR$ является равнобедренный прямоугольный треугольник PQR, длина гипотенузы PQ которого равна $2\sqrt{2}$. Боковое ребро пирамиды HR перпендикулярно плоскости основания, и его длина равна 1. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку H и середину ребра PR, а другая проходит через точку R и середину ребра PQ.*

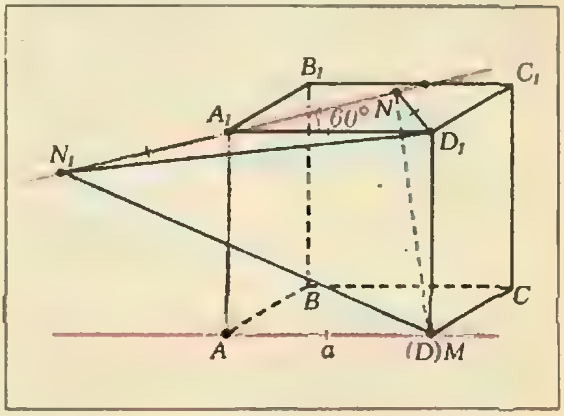


Рис. 9.

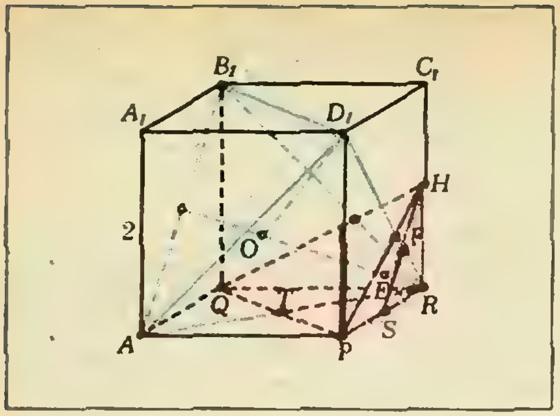


Рис. 10.

Решение. Пусть длина ребра вспомогательного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 2. Тогда диагональ каждой его грани равна $2\sqrt{2}$. Поместим пирамиду $HPQR$ внутрь куба так, чтобы точки P, Q и R совпали соответственно с точками D, B и C (рис. 10). Точка H совпадает с серединой ребра RC_1.

Соединим точку H с серединой S ребра PR. Проведем диагональ RA нижней грани куба. Точка T пересечения диагоналей RA и PQ — середина отрезка PQ. Требуется найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми HS и RT.

Проведем диагонали C_1P, B_1A и B_1R боковых граней куба. Очевидно, что отрезок HS параллелен отрезку B_1A. Поэтому искомый угол — это угол B_1AR, который равен 60° (треугольник B_1AR равносторонний).

Заметим теперь, что плоскость треугольника B_1AR содержит отрезок RT и параллельна отрезку HS. Поэтому искомое расстояние равно расстоянию между прямой HS и плоскостью B_1AR.

Рассмотрим правильный тетраэдр с основанием B_1AR и вершиной D_1. Пусть D_1O — высота тетраэдра. Из точки F пересечения отрезков D_1R и HS опустим перпендикуляр FE на отрезок RO. Отрезок FE перпендикулярен плоскости B_1AR, ибо отрезок FE параллелен отрезку D_1O. Значит, искомое расстояние равно $|FE|$. Из подобия треугольников D_1OR и FER

$$\frac{|FE|}{|D_1O|}=\frac{|FR|}{|D_1R|}=\frac{1}{4}.$$

Осталось найти высоту тетраэдра D_1O. В прямоугольном треугольнике D_1OR гипотенуза $|D_1R|=2\sqrt{2}$, а катет RO составляет 2/3 высоты правильного треугольника B_1AR со стороной $2\sqrt{2}$, то есть $|RO|=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. Тогда $|D_1O|=\sqrt{|D_1R|^2-|RO|^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Наконец,

$$|FE|=\frac{1}{4}|D_1O|=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Задачи

1. У трехгранного угла $OABC$ угол между гранями OAB и OBC прямой, а величина каждого из остальных двугранных углов равна γ. Найти величину плоского угла AOC.

2. Вершины B и C треугольника ABC лежат на различных гранях двугранного угла величины 45° с ребром l. Сторона AC перпендикулярна одной грани и пересекается с ней в своей середине. Проекция отрезка BC на другую грань параллельна ребру l и по длине равна расстоянию от точки C до l. Найти углы треугольника ABC.

3. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC втрое короче катета BC. Через точку B проведена в пространстве прямая, перпендикулярная отрезку BC, и на этой прямой взята точка D так, что $|BD|=|AC|$. Двугранный угол между полуплоскостями, которым принадлежат треугольники BCD и ABC, равен 45°. Найти острый угол между прямыми AB и CD.

4. Угол между двумя скрещивающимися прямыми равен 45°. Точка M лежит на одной из них, а точка N — на другой. Длина общего перпендикуляра скрещивающихся прямых вдвое больше расстояния от точки M до него и втрое меньше расстояния от точки N до него. Найти угол между общим перпендикуляром и прямой MN.

5. Длина ребра правильного тетраэдра $SABC$ равна 1. BD — высота треугольника ABC. Равносторонний треугольник BDE лежит в плоскости, образующей угол φ с ребром AC, причем точки S и E лежат по одну сторону от плоскости ABC. Найти расстояние между точками S и E.

Поправка

В статье «Программирование на микрокалькуляторе: простейшие программы» («Квант», 1986, № 2, с. 46) имеются опечатки: 1) на с. 48 в алгоритме КОСИНУС вместо «нач вещ k» следует читать «нач»;

2) алгоритм на с. 57 должен иметь вид:

```
алг КОСИНУС;
  нач вещ $a2$, $b$, $c$;
     $a2 := (\text{ввод } a)^2$;
     вывод $((\text{ввод } b)^2 + (\text{ввод } c)^2 - a2)/2/b/c$;
  кон
```

3) в программе на с. 48 между командами 09 и 10 должна быть команда ИП 0.

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический, физический и экономический факультеты)

1. Известно, что $x_1=4x_2$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-(a+3)x+2a=0$. Найдите a.

2. Решите уравнение

$$\sin 2x+\cos 6x=1-2\cos^2\left(5x+\frac{\pi}{4}\right).$$

3. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC биссектриса угла BAD проходит через середину M стороны CD. Известно, что $|AB|=5$, $|AM|=4$. Найдите длину отрезка BM.

4. Решите неравенство

$$\frac{9-5^{x+2}}{3\cdot 5^{2x}-2\cdot 5^{x+1}+3}<4.$$

5. Через вершину A правильного тетраэдра $ABCD$ параллельно ребру CD проведена плоскость β, которая делит тетраэдр на две части равных объемов. Найдите расстояние от вершины B до плоскости β, если ребро тетраэдра равно 1.

Вариант 2

(геолого-геофизический факультет и факультет естественных наук)

1. Определите, какое из двух чисел больше: $7\cdot\sqrt[3]{7}$ или

$$2^{\left(\frac{5}{4}\log_4 49-\frac{1}{2}\log_{1/4} 7\right)}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2+(y-4)^2=6, \\ 4x-xy=2. \end{cases}$$

3. Точки M и N выбраны соответственно на основании BC и боковой стороне CD трапеции $ABCD$. Прямые AM и BN пересекаются в точке K, причем $|AK|=3|KM|$, $|KN|=2|BK|$. Найдите отношение $|CN|:|ND|$.

4. Решите уравнение

$$\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos 9x.$$

5. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ точка M — середина ребра $C'D'$, точка N выбрана на ребре AB так, что $|AN|=2|NB|$. Через вершину D и точки M и N проведена плоскость π. Определите величину двугранного угла между плоскостью π и плоскостью грани $ABCD$ куба.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из пяти задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов, начиная с завершения демонстрации.

Ниже после текста каждой задачи в скобках указан средний процент решивших ее.

Вариант 1

1. В цилиндр сечением S_1 налита несжимаемая жидкость, поверх которой помещен поршень (рис. 1). Внутри этого поршня имеется цилиндрическая вставка сечением S_2. Сила трения между поршнем и вставкой может достигать величины F; между поршнем и стенками цилиндра трения нет. С какой минимальной силой нужно надавить сверху на вставку, чтобы выдавить ее из поршня? Силу тяжести не учитывать. (46 %)

2. В схеме, изображенной на рисунке 2, напряжение на конденсаторе емкостью C_2 равно U, а конденсаторы емкостью C_1 и C_3 не заряжены. Ключ K попеременно переключают в положения A и B. Определите, какое количество теплоты выделится после очень большого числа переключений. (39 %)

3. Стержень AC (рис. 3), на котором закреплены два одинаковых грузика B и C, подвешен за точку A к очень длинной нити DA ($DA\gg AC$). Стержень удерживали в горизонтальном положении, при котором нить была вертикальной, а затем отпустили. Какой будет скорость точки A в момент, когда стержень будет проходить низшее положение? Массой стержня и нити пренебречь, $AB=l$, $BC=2l$. (16 %)

4. Пассажир летящего на высоте 10 км самолета видит восходящее Солнце. Оцените, через какое время увидит Солнце наблюдатель, стоящий на земле под самолетом. (67 %)

5. На наклонной плоскости на равных расстояниях друг от друга размещены три ролика. Крайние ролики легко проворачиваются, средний — закреплен. Когда брусок кладут на средний и нижний ролики, он съезжает. Когда его кладут на верхний и средний — он не съезжает. Объясните явление. (33%)

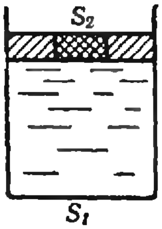


Рис. 1.

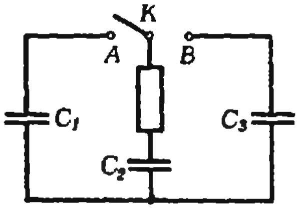


Рис. 2.

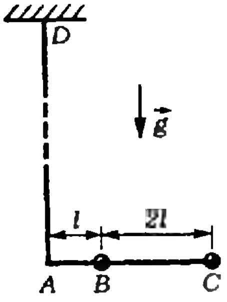


Рис. 3.

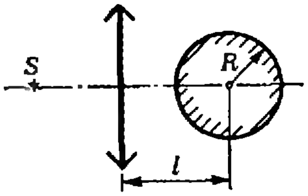


Рис. 5.

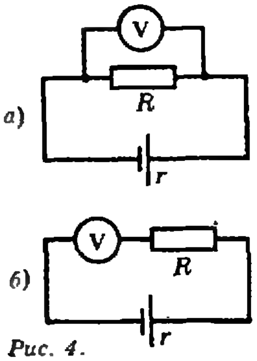


Рис. 4.

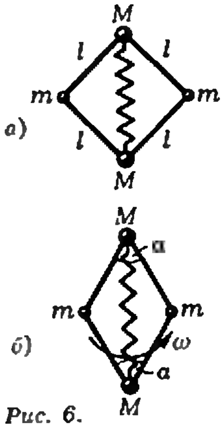


Рис. 6.

Вариант 2

1. В цепь, составленную из источника с внутренним сопротивлением r и резистора с сопротивлением R, включается вольтметр: первый раз параллельно резистору, второй раз последовательно с ним (рис. 4). Показания вольтметра в обоих случаях оказались одинаковыми. Найдите сопротивление вольтметра. (61%)

2. Оптическая система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием F и зеркального шарика радиусом R, центр которого находится на оптической оси линзы на расстоянии l от нее (рис. 5). Определите расстояние от линзы до точечного источника S, расположенного на оптической оси системы, при котором изображение источника совпадает с самим источником. (28 %)

3. Два шарика массой M каждый скреплены невесомой пружиной жесткостью k. К ним через невесомые нити прикреплены еще два шарика массой m так, что вся система образует квадрат со стороной l, покоящийся на горизонтальном гладком столе (рис. 6, а). Затем эта связка постепенно раскручивается на столе вокруг ее центра масс до тех пор, пока квадрат не превратится в ромб с углом $\alpha=60°$ (рис. 6, б). Определите угловую скорость вращения связки. (40 %)

4. Как известно, предельный размер детали на кинопленке определяется размерами кристалликов светочувствительного слоя. При этом с уменьшением размера кристалликов четкость изображения на кинокадре растет. Оцените предельный размер кристалликов, при котором кинозритель перестает замечать рост четкости изображения на экране кинозала. (48 %)

5. В холодную колбу наливают горячую воду и на горлышко надевают воздушный шарик. Если взболтать воду, шарик сначала раздувается, а потом спадает. Если снова взболтать колбу, эффект раздувания опять повторяется, хотя и слабее. Объясните явление. (51%)

Публикацию подготовили
Г. В. Меледин, М. В. Фомин

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(механико-математический факультет)

1. Найдите наименьшее значение функции

$$y=3x+e^{-2x}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{1+\sin^2 x}+2\cos\frac{x}{2}=0.$$

3. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, если сторона ее основания равна a, а радиус шара, вписанного в пирамиду, равен r.

4. Укажите, сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=8, \\ (y-ax)(y-a\sqrt{2})=0 \end{cases}$$

в зависимости от параметра a.

5. Укажите все значения параметра a, для каждого из которых является правильным утверждение: если $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ и $-\frac{\pi}{2}<\beta<0$, причем $\sin\frac{\alpha}{2}=a\cos\beta$, то $-\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<0$.

Вариант 2
(физический факультет)

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=2^{x^2-2x-1}$ на промежутке $[0;\ 2]$.

2. Решите уравнение

$$2\cos^2 x-3\sin x=0.$$

3. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 30. Если вычесть из первого числа 5, из второго 4, а третье число оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

4. Решите неравенство

$$\log_2^2 x-\log_{1/2} x<12-3\sqrt{\log_{1/2}^2 x+\log_2\frac{x}{4}}.$$

5. Вершина угла ABC, величина которого меньше 180°, находится на окружности l_1, а одна из его сторон проходит через центр этой окружности. Окружность l_2 вписана в угол ABC и внешне касается окружности l_1. Найдите, при каком значении угла ABC радиус окружности l_2 в 24 раза больше радиуса окружности l_1.

Вариант 3
(радиофизический факультет)

1. Решите уравнение

$$4\cos^2 x+4\sin x=1.$$

2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y=-2x^3+3x^2+12x+5$$

на промежутке $[-2;\ 1]$.

3. Решите неравенство

$$\frac{2\cdot 4^{x+1}-5\cdot 9^x}{9^{x+1}-7\cdot 4^x}<1.$$

4. Укажите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x<1, \\ x-y+a=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

5. Высота конуса равна диаметру его основания, а объем конуса равен v. Найдите объем шара, описанного около конуса.

Вариант 4

(геологический факультет)

1.Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=8, \\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{y}=1. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$9^{\cos x}-10\cdot 3^{-\frac{1}{2}+\cos x}+3=0.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2(x+1)^2+1<0.$$

4. Укажите, в какой точке функция $y=\log_{1/2}(3-2x-x^2)$ принимает наименьшее значение. Найдите это значение.

5. Отношение площади боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды к площади ее основания равно $\sqrt{3}$. Найдите угол между противоположными боковыми ребрами пирамиды.

Вариант 5

(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3}\sin 3x+\cos 3x=0.$$

2. Укажите промежутки возрастания и убывания функции

$$y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+3.$$

3. Вычислите

$$\log_{\sqrt{2}}(4\sqrt[3]{2}\cdot 3^{\log_{1/3}\sqrt[3]{8}}).$$

4. Решите неравенство

$$\sqrt{1-x}>2x+8.$$

5. Площадь боковой поверхности конуса равна s, а площадь его полной поверхности равна p. Определите угол между высотой и образующей конуса.

Задачи устного экзамена

1. Объясните, почему при преобразовании обыкновенной дроби в десятичную всегда получается либо конечная десятичная дробь, либо периодическая.

2. Осевым сечением конуса является правильный треугольник. В конус вложены шары S_1, S_2, S_3, ..., каждый из которых касается всех образующих конуса. Наибольший из них S_1 вписан в конус, а каждый последующий S_i касается двух соседних S_{i-1} и S_{i+1}. Радиус шара S_1 равен r_1. Укажите:

а) Какую последовательность образуют радиусы r_n ($n=1, 2, 3, \ldots$) шаров S_n?

б) Какую последовательность образуют объемы этих шаров?

в) Какую часть объема конуса составляет суммарный объем всех шаров вместе?

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2xz+3yz+z^2=11z, \\ 3xz+yz-z^2=2z, \\ xz-2yz+2z^2=3z. \end{cases}$$

4. Укажите, как должны быть связаны между собой числа a и b, чтобы неравенство $\sqrt{x-a}>\sqrt{2x-b}$ имело решения. В том случае, когда решения существуют, какое множество они образуют? При каких a и b это множество есть промежуток $[1;\ 5[$?

5. Решите неравенство

$$\sqrt{25-x^2}\leqslant\frac{12}{x}.$$

6. Приведите пример фигуры, которая имеет:

а) бесконечно много осей симметрии, но не имеет центра симметрии;

б) бесконечно много центров симметрии, но не имеет оси симметрии.

7. Основания трапеции равны a и b ($a<b$). Диагонали трапеции делят ее на четыре треугольника. Площадь наименьшего из них (по площади) равна S. Укажите, какой это треугольник. Каковы площади других треугольников?

8. Радиус окружности l_1 равен r. Выясните, существует ли такая концентрическая с l_1 окружность l_2, чтобы в кольцо, образованное этими окружностями, можно было вписать n окружностей, каждая из которых касалась бы двух соседних (n — данное натуральное число, $n\geqslant 3$). Определите радиус окружности l_2.

9. Плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды равен α. Определите, под каким углом наклонены к плоскости основания боковые грани пирамиды.

10. Докажите, что график каждой квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$) имеет ось симметрии.

11. Два шара радиусов r_1 и r_2 ($r_1<r_2$) касаются между собой и всех образующих конуса. Определите угол при вершине осевого сечения конуса.

12. Решите неравенство

$$\left|\log_2\frac{x}{3}\right|^{x^2-5x-6}\leqslant 1.$$

13. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=|x^2-4x|-1$ на промежутке $\left[-\frac{1}{2};\ 3\right]$.

14. Решите уравнение

$$\frac{4\sin x}{(x-3)^2}+|\sin x|=0.$$

15. Сумма первых девятнадцати членов арифметической прогрессии равна 76. Найдите десятый член этой прогрессии. Можно ли определить еще какой-нибудь член этой прогрессии?

16. Постройте график функции

$$y=\begin{cases} \dfrac{x}{1+x}, & \text{если } x\leqslant 0, \\ \log_{1/2}(x+1), & \text{если } x>0. \end{cases}$$

17. Укажите все значения a, при каждом из которых наибольшее на промежутке $[0;\ 1]$ значение функции $y=2+ax^2-x^3$ достигается в точке $x=1$.

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Наблюдатель измерил, что за $\tau=2$ с тело в свободном падении пролетело расстояние $s=100$ м. Как долго падало тело из начального состояния покоя до момента начала наблюдения и какой путь прошло при этом?

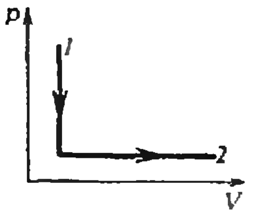


Рис. 1.

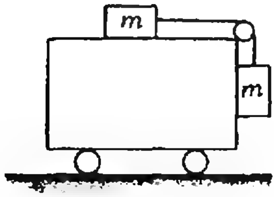


Рис. 2.

2. Сила $F=60$ Н прикладывается к санкам массой $m=40$ кг под углом $\alpha=30°$ к горизонту один раз вверх, второй — вниз. Во сколько раз будут отличаться ускорения санок в этих случаях, если коэффициент трения $\mu=0{,}1$?

3. Масса $m=0{,}5$ кг идеального газа с молярной массой $M=0{,}002$ кг/моль перешла из состояния *1* в состояние *2* (рис. 1), сохранив начальную температуру $T_1=600$ К. Вычислите работу газа, если конечное давление в $k=5$ раз меньше начального.

4. Аккумулятор с внутренним сопротивлением $r=0{,}8$ Ом разрядился до напряжения $U=12$ В, и его поставили на подзарядку к источнику с $\mathcal{E}=20$ В. При каком добавочном сопротивлении ток зарядки не превысит допустимого тока аккумулятора, равного $I_0=2$ А? Внутренним сопротивлением аккумулятора пренебречь.

5. Постройте изображение карандаша длиной $l=6$ см в линзе с оптической силой $D=+33$ дптр, если он лежит на оптической оси линзы так, что его середина совпадает с фокусом линзы.

Радиофизический факультет

1. С каким ускорением нужно двигать по горизонтали систему тел, изображенных на рисунке 2, чтобы грузики сохранили свое положение, если коэффициент их трения с опорой $\mu=0{,}6$?

2. В сосуде находилась жидкость плотностью ρ_1 и объемом V_1. После добавления жидкости с плотностью, в k раз большей, конечный объем смеси оказался в N раз больше начального объема. Вычислите плотность и массу смеси.

3. Открытая с двух концов трубка длиной $l=0{,}76$ м до половины погружена в ртуть. Сколько ртути останется в трубке, если, плотно закрыв верхнее отверстие, вынуть трубку из ртути? Атмосферное давление считать нормальным.

4. Два конденсатора с емкостями C_1 и C_2 соединили последовательно и зарядили от источника с напряжением U. Отключив, их соединили параллельно. Как перераспределятся заряды и каким станет напряжение на обкладках конденсаторов?

5. После ускорения разностью потенциалов U ион с зарядом q и массой m влетает в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ перпендикулярно магнитным линиям. Вычислите длину пути и время пребывания иона в магнитном поле.

Механико-математический факультет

1. До какой температуры при нормальном атмосферном давлении нужно нагреть азот, чтобы его плотность стала равной плотности метана (CH_4) при нормальных условиях?

2. Плоский конденсатор с зарядом $q=3$ мкКл подключен к аккумулятору с напряжением $U=20$ В и целиком погружен в воду ($\varepsilon=81$). Что произойдет при извлечении конденсатора из воды?

3. Электрон влетел в однородное электрическое поле с напряженностью $E=10\,000$ В/м со скоростью $v_0=8$ Мм/с перпендикулярно силовым линиям. Вычислите величину и направление его скорости в момент $t=2$ нс.

4. Однородное цилиндрическое бревно едва плавает в воде в вертикальном положении. Если его притопить, то период вертикальных колебаний бревна будет $T=6$ с. Вычислите длину бревна.

5. У старой модели фотоаппарата минимальное расстояние объектива до пленки равно фокусному расстоянию ($F=40$ mm), а максимальное — в $k=5$ раз больше. Определите пределы фотографирования и максимальное увеличение.

Факультет кибернетики

1. Ракета после вертикального старта двигалась $t=30$ с с ускорением $a=3g$. Вычислите максимальную высоту ее подъема в случае пренебрежения сопротивлением воздуха.

2. В каком случае изохорическое нагревание постоянной массы идеального газа на $\Delta T=4$ К приведет к 4-кратному повышению его давления?

3. Расстояние между зарядами диполя $l=2$ мкм, а напряженность поля в точке, удаленной от зарядов на $a=1$ см, равна $E=2$ В/м. Вычислите величину зарядов диполя.

4. Протон и α-частица равных энергий влетают в однородное магнитное поле перпендикулярно его магнитным линиям. Сравните характеристики их траекторий в магнитном поле.

5. При некотором положении предмета лупа дала изображение, увеличенное в $\Gamma_1=5$ раз. Как изменится увеличение при уменьшении расстояния предмета от лупы в $k=1{,}5$ раза?

Публикацию подготовили *В. А. Вышенский, А. А. Капшивый, К. В. Корсак, Г. Л. Кулинич, Н. А. Перестюк*

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Два тела движутся равномерно по окружности в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 3 секунды быстрее второго и догоняет второе тело каждые полторы минуты. За какое время каждое тело проходит окружность?

2. Решите уравнение $\sin x-\cos\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)=0$.

3. Решите уравнение $9^x=6+3^x$.

4. Решите неравенство $\frac{3}{x+3}<1$.

5. В кубе с длиной ребра a расположен шар, касающийся трех граней, сходящихся в вершине A. Другой шар касается первого шара и трех граней, сходящихся в вершине C, где $[AC]$ — диагональ грани куба. Найдите радиусы шаров, если известно, что они относятся друг к другу как 1:2.

Вариант 2

1. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 351, а сумма следующих трех членов равна 13. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

2. Решите уравнение $\sin x+\cos x=\cos 2x$.

3. Решите уравнение $8\cdot 9^x+6^{x+1}=27\cdot 4^x$.

4. Решите неравенство $\log_2\frac{x+1}{x}>1$.

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой с. Длины всех боковых ребер пирамиды одинаковы, а длина высоты боковой грани, проведенной из вершины пирамиды к катету основания, равна длине катета. Найдите объем шара, вписанного в пирамиду.

Физика

Задачи устного экзамена

1. В потолке имеются два люка A и B (рис. 1), расстояние между которыми $L=8$ м. Из точки C, находящейся на расстоянии $H=3$ м от потолка и расстоянии $l=4$ м от люка A, был брошен мяч так, что он пролетел через оба люка. Определите начальную скорость и угол бросания мяча. Размеры люков достаточны для пролета мяча. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

2. Цилиндр массой $M=2$ кг, имеющий осевое отверстие, скользит с трением по стержню массой $m=1$ кг, который прикреплен к вертикальной пружине с жесткостью $k=10^3$ Н/м (рис. 2). Определите энергию деформации пружины, если ускорение цилиндра $a=2$ м/с^2. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

3. Система, состоящая из блока, чашечек с грузами и нити, находится в равновесии (рис. 3). Масса каждой чашечки с грузом $M=1$ кг. Затем с одной из чашечек сняли груз массой $m_1=0{,}1$ кг, и система пришла в движение. Определите массу груза m_2, который надо положить на другую чашечку, чтобы натяжение нити стало равным ее натяжению в исходном равновесном состоянии.

4. Насос откачивает пары воды из емкости, на дне которой разлито $m=200$ г воды. Определите, через какое время вода полностью испарится, если температура в емкости поддерживается постоянной и равной $t=20$ °C, а насос за каждые $\Delta\tau=10$ с откачивает $\Delta V=8\cdot 10^{-4}$ м^3 паров воды. Давление насыщенного пара при этой температуре равно $p_н=2333$ Па. Молярная масса воды $M=18\cdot 10^{-3}$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль · К).

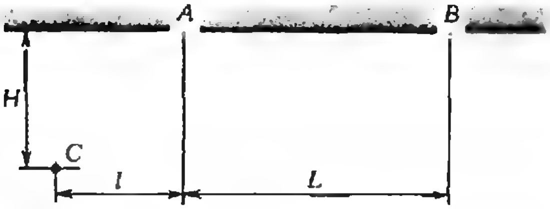


Рис. 1.

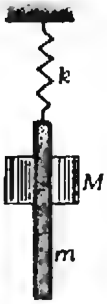


Рис. 2.

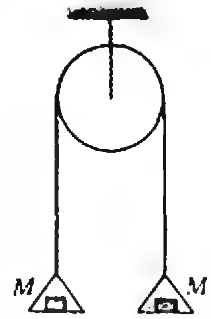


Рис. 3.

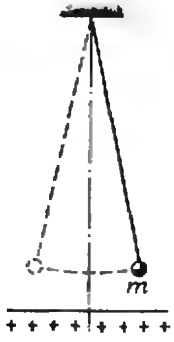


Рис. 4.

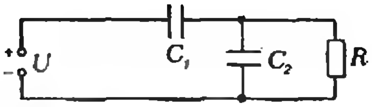


Рис. 5.

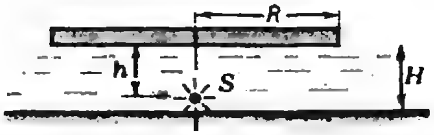


Рис. 6.

5. При расширении газа тепловая машина совершает работу; при этом объем газа увеличивается от $V_1=10^{-3}$ м^3 до $V_2=2\cdot 10^{-3}$ м^3, а давление линейно убывает от $p_1=10^6$ Па до $p_2=4\cdot 10^5$ Па. Определите изменение внутренней энергии газа при его расширении и КПД тепловой машины, если известно, что количество теплоты, полученное за цикл тепловой машиной от нагревателя, $Q_1=1$ кДж, а отданное холодильнику $Q_2=0{,}8$ кДж.

6. Положительно заряженный шарик массой $m=30$ г совершает гармонические колебания над положительно заряженной бесконечной горизонтальной плоскостью (рис. 4); при этом сила электрического взаимодействия шарика с плоскостью $F=0{,}1$ Н, а период его колебаний $T=2$ с. Затем шарик перезарядили так, что его заряд стал отрицательным, но по модулю равным первоначальному. Определите период гармонических колебаний шарика в новом состоянии. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

7. В схеме, изображенной на рисунке 5, емкость конденсатора $C_2=10$ мкФ, сопротивление резистора $R=2$ кОм, площадь пластин конденсатора емкостью C_1 равна $S=100$ см^2, а расстояние между ними $d=5$ мм. Мощность рентгеновского излучателя, который ионизирует воздух между обкладками конденсатора емкостью C_1, равна $w=2\cdot 10^{12}$ пар носителей заряда за 1 с в 1 м^3. Заряд носителей равен элементарному заряду $e=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл. Все образованные за единицу времени носители долетают до пластин первого конденсатора. Определите заряд на конденсаторе емкостью C_2.

8. Отрицательно заряженная частица влетает в область однородного магнитного поля с индукцией $B=10^{-3}$ Тл, где движется по дуге окружности радиусом $R=0{,}2$ м. Затем частица попадает в однородное электрическое поле, где пролетает вдоль направления силовой линии участок с разностью потенциалов $U=10^3$ В; при этом скорость частицы изменяется в $n=3$ раза. Определите конечную скорость частицы.

9. В кювете (плоской ванночке) с жидкостью на глубине $h=3$ см находится точечный источник света (рис. 6), который начинает смещаться вдоль вертикали со скоростью $v=10^{-3}$ м/с. На дне кюветы находится плоское зеркало, а на поверхности жидкости, на высоте $H=4$ см от дна, плавает черный диск радиусом $R=6$ см. Центр диска расположен над источником света. Через какое время источник света станет видим для внешнего наблюдателя? Показатель преломления жидкости $n=\sqrt{2}$.

10. В опытах Резерфорда α-частицы со скоростью $v=2\cdot10^7$ м/с попадали на тонкую золотую фольгу. Полагая вектор скорости α-частицы совпадающим с прямой, соединяющей частицу и ядро атома золота (прямое столкновение), оцените радиус ядра. Число Авогадро $N_A=6\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$, элементарный заряд $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}8\cdot10^{-12}$ Ф/м, заряд ядра золота $q=79e$.

Публикацию подготовили
Н. А. Гладков, Л. П. Паршев

Московский архитектурный институт

Математика

Задачи устного экзамена

1. Упростите выражения:

а) $A=\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$, если $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$, $a>0$, $0<b<1$;

б) $A=\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}$;

в) $A=\dfrac{\lg^2(x^3)}{\lg^3(x^2)}\cdot\lg\sqrt{x}$.

2. Вычислите без таблиц:

а) $A=2\cos20^\circ\cdot\cos40^\circ\cdot\cos80^\circ$;

б) $A=\mathrm{tg}\,1^\circ\cdot\mathrm{tg}\,2^\circ\cdot\mathrm{tg}\,3^\circ\cdot\ldots\cdot\mathrm{tg}\,88^\circ\times\mathrm{tg}\,89^\circ$;

в) $A=\dfrac{2\cos40^\circ-\cos20^\circ}{\sin20^\circ}$.

3. Найдите:

а) $\sin^3x+\cos^3x$, если $\sin x+\cos x=a$;

б) $\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha=a$.

4. Докажите тождества:

а) $\mathrm{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{1-\sin2\alpha}{1+\sin2\alpha}$;

б) $32\sin^2\alpha\cos^4\alpha=2+\cos2\alpha-2\cos4\alpha-\cos6\alpha$;

в) $\sin^2(45^\circ+\alpha)-\sin^2(30^\circ-\alpha)-\sin15^\circ\times\cos(15^\circ+2\alpha)=\sin2\alpha$.

5. Решите уравнения:

а) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1$;

б) $7\cdot3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}$;

в) $2\lg\lg x=\lg(3-2\lg x)$;

г) $\sin^4x+\cos^4x=\dfrac{5}{8}$.

6. Решите неравенства:

а) $\dfrac{1}{2^x-1}>\dfrac{1}{1-2^{x-1}}$;

б) $0{,}1^{\log_2\frac{x+1}{x-3}}<10$; в) $\sqrt{24-10x}>3-4x$.

7. Постройте графики:

а) $y=|x^2-4|$;

б) $|y-2|=|x-1|$;

в) $y=\sin|x|$.

8. *Решите системы уравнений:*

а) $\begin{cases}\log_5x+3^{\log_3y}=7,\\ x^y=625^3;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(x+y)3^{y-x}=\dfrac{5}{27},\\ 3\log_5(x+y)=x-y.\end{cases}$

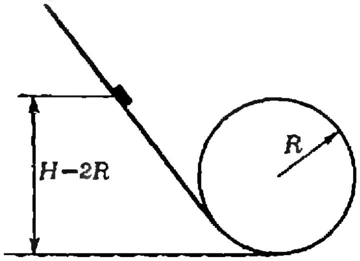
Физика

Задачи устного экзамена

1. К стене прислонена лестница массой m. Центр тяжести лестницы находится на расстоянии 1/3 длины от ее верхнего конца. Какую горизонтальную силу нужно приложить к середине лестницы, чтобы верхний конец ее не оказывал давления на стену? Угол между лестницей и стеной α.

2. Тяжелый шарик массой m подвешен на нити. Нить может выдержать натяжение $T=2mg$. На какой угол от положения равновесия нужно отклонить нить с шариком, чтобы он оборвал нить, проходя через положение равновесия?

3. Небольшое тело соскальзывает по наклонной плоскости, плавно переходящей в «мертвую петлю», с высоты $H=2R$, где R — радиус петли (см. рисунок). На какой высоте тело оторвется от поверхности петли? С какой высоты должно скатываться тело, для того чтобы отрыва не произошло?



4. Происходит соударение двух абсолютно упругих шаров массой m_1 и m_2. Их начальные скорости v_1 и v_2. Найдите скорости шаров после удара. Удар считать центральным: скорости шаров направлены вдоль линии, соединяющей их центры.

5. Брусок массой m равномерно втягивают за привязанную к нему веревку на высоту h по доске, угол наклона которой к горизонту α. Веревка параллельна доске. Коэффициент трения бруска о доску μ. Найдите энергию, которая идет на нагревание доски и бруска.

6. Найдите работу, которую надо совершить, чтобы сжать пружину жесткостью $k=30$ Н/см на $x=10$ см.

7. Медный шарик, подвешенный к пружине, совершает вертикальные колебания. Как изменится период колебаний, если к пружине подвесить алюминиевый шарик того же радиуса? Плотность меди и алюминия равна $\rho_1=8{,}9\cdot10^3$ кг/м^3 и $\rho_2=2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3 соответственно.

8. Какой наибольшей высоты можно выложить массивную кирпичную колонну постоянного по высоте поперечного сечения S, чтобы возникающая под действием только силы тяжести деформация колонны оставалась в пределах упругости? Каково при этом будет наибольшее относительное сжатие кирпичной кладки? Модуль Юнга кирпича $E=3000$ МПа, плотность $\rho=1{,}8\cdot10^3$ кг/м^3, предел упругости $\sigma_{пр}=3$ МПа.

9. Для измерения температуры воды массой $m=66$ г в нее погрузили термометр, который показал $t_1=32{,}4$ °С. Какова была действительная температура воды, если теплоемкость термометра $C=1{,}9$ Дж/К и перед погружением в воду он показывал температуру помещения $t_2=17{,}8$ °С?

Публикацию подготовили
Ю. М. Мещеряков, Ю. А. Морозов, В. А. Смирнов

Первая Всесоюзная олимпиада по математике учащихся средних профессионально-технических училищ

С 20 по 25 мая 1985 года в Днепропетровске — одном из крупнейших индустриальных центров нашей страны — проходила первая Всесоюзная олимпиада по математике среди учащихся средних профессионально-технических училищ.

Училищные, городские, областные, республиканские туры предметных олимпиад учащихся ПТУ стали в последние годы традиционными во многих областях и республиках страны. Так, в Ленинграде, Грузии, Вологде, Узбекистане эти олимпиады проводятся около десяти лет.

С 1985 года олимпиады по математике, физике и химии проходят во всесоюзном масштабе.

Форма проведения заключительного тура первой математической олимпиады была во многом необычной. В первый день участники решали задачи и рассказывали свои решения членам жюри. Среди задач было много имеющих прикладную направленность, требующих смекалки, допускающих нестандартные решения.

Второй день носил экспериментальный характер. Накануне учащимся I—II курсов была прочитана лекция о пользовании микрокалькуляторами, а в день олимпиады им была предложена исследовательская задача, для решения которой необходимо было обращаться к вычислительному устройству. В это устройство (использовались микрокалькуляторы «Электроника» Б3-34 и МК-54) была заранее введена программа, позволяющая вычислить экспериментальные данные, относящиеся к некоторой физической ситуации (например, высоту, на которой находится в любой заданный момент времени центр шарика, подброшенного над столом с некоторой начальной скоростью). Учащимся предлагалось найти различные характеристики эксперимента (например, моменты падения шарика, начальную скорость, радиус шарика и т. д.)

Учащимся третьего курса была прочитана лекция на новую для них тему — «Геометрические вероятности», а в день олимпиады им были предложены задачи по теме этой лекции. Мы предполагаем осветить задания второго дня олимпиады в отдельных статьях.

Результаты олимпиады оказались замечательными. Многие участники решили все предложенные им задачи. Особенно активно проходил экспериментальный тур. Все участники работали очень увлеченно, проявили много изобретательности и выдумки.

Из 93 участников 44 награждены дипломами победителей I, II, III степени. Много было вручено различных специальных призов и грамот. Среди победителей следует назвать награжденных Дипломами I степени.

По первому курсу: *Влашин Олег* (СПТУ № 4, Ивано-Франковск), *Гвоздь Зоряна* (СПТУ № 32, Львов), *Кучеров Николай* (СПТУ № 133, Минск), *Москаленко Сергей* (СПТУ № 8, Стрый), *Романенко Валерий* (СПТУ № 17, Киев), *Шувалов Сергей* (СПТУ № 120, Москва);

по второму курсу: *Герцберг Александр* (СПТУ № 127, Ленинград), *Малык Владимир* (СПТУ № 2, Кокчетав);

по третьему курсу: *Ковтун Сергей* (СПТУ № 4, с. Синевка Сумской обл.), *Копчинский Константин* (СПТУ № 3, Севастополь), *Роззувайло Олег* (СПТУ № 147, Ленинград).

Олимпиада была организована очень хорошо. Радушные хозяева из Днепропетровска сделали все, чтобы она стала ярким праздником знаний. Состоялись разнообразные интересные встречи участников с членами жюри, среди которых было много известных ученых из Москвы, Ленинграда, Киева, Днепропетровска, Казани, Вологды. Возглавлял работу жюри член-корреспондент АН СССР А. А. Стогний (Киев).

Первая Всесоюзная олимпиада учащихся ПТУ показала, что в нашей профессиональной школе начали закладываться важные традиции развития творческих способностей будущих рабочих, их интереса к науке.

Задачи I Всесоюзной олимпиады по математике учащихся СПТУ

Первый день

I курс

1. Двое спускаются вниз по движущемуся эскалатору. Первый движется по эскалатору со скоростью вдвое меньшей, чем скорость эскалатора, а второй (тоже относительно эскалатора) — со скоростью вдвое меньшей, чем скорость первого. Первый при спуске насчитал 100 ступенек. Сколько ступенек насчитает второй?

2. Точка движется по оси OX так, что зависимость ее координаты $x=x(t)$ от времени t описывается многочленом 3-й степени. Скорость точки равна нулю в моменты времени $t=3$ и $t=7$. В какой момент времени ускорение точки равно нулю?

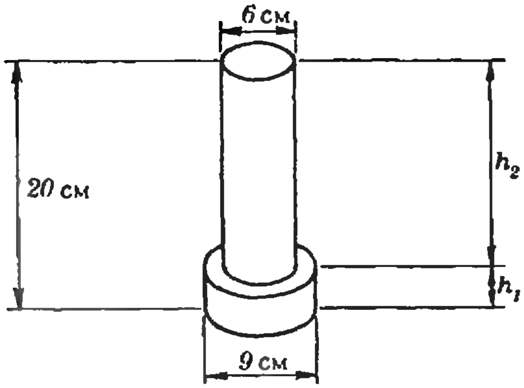
3. Стальную плитку, имеющую форму треугольника со сторонами 3, 4 и 5, положили на большой лист бумаги и обвели карандашом. Пользуясь только этой плиткой и карандашом, постройте точку пересечения биссектрис нарисованного треугольника.

II курс

1. Металлический прямоугольный ящик без крышки высотой 50 см и объемом 1 м^3 выкрасили краской изнутри и снаружи. На окраску ушло 530 г краски при расходе 50 г на один м^2. Найдите размеры ящика.

2. Дан квадрат $ABCD$. Отрезок, соединяющий вершину B с серединой стороны CD, пересекает диагональ AC в точке K. Найдите угол AKB.

3. Деталь имеет форму и размеры, указанные на рисунке. Какова должна быть высота h_1 основания детали, чтобы центр масс детали



(сделанной из однородного материала) был как можно ниже?

III курс

1. В вагоне находится 60 контейнеров трех типов: контейнеры первого типа весят 0,5 тонны каждый, второго типа — 0,4 тонны, третьего типа — 0,3 тонны. Стоимость одного контейнера каждого типа — соответственно 800, 700 и 600 рублей. Общий вес всех контейнеров — 25 тонн. Найдите их общую стоимость.

2. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки K, L, M так, что $AK:KB=BL:LC=CM:MA=2$. Во сколько раз площадь треугольника ABC больше площади треугольника KLM?

3. По одну сторону от стены высотой 30 м на расстоянии 10 м от стены лежит груз, по другую сторону от стены по горизонтальной площадке ездит кран. Башня крана имеет высоту 20 м, а его стрела, прикрепленная к верхней точке башни, имеет длину l м и может быть расположена под любым углом к горизонту. При какой наименьшей длине l стрелы кран может поднять груз через стену? (Трос крана свисает вертикально с конца стрелы, его длина неограничена.)

I, II, III курс

4. Цилиндрический стержень с винтовой резьбой имеет длину 55,00 см и диаметр 1,91 см. Шаг резьбы (расстояние между соседними витками) — 1,10 см. Найдите длину образовавшейся на стержне винтовой линии.

5. Найдите, чему равен корень $\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{2n}-\underbrace{88\ldots8}_{n}}$

а) при $n=1$, б) при $n=2$, в) при любом n.

6. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки E и F. Отрезки AF, DF, DE и EC делят параллелограмм на восемь частей — два четырехугольника и шесть треугольников. Докажите, что площадь одной из них — четырехугольника с вершиной D — равна сумме площадей трех других частей — четырехугольника с вершиной B и двух треугольников со стороной AE и стороной FC.

М. И. Башмаков, Л. М. Пашкова,
А. А. Егоров

Нам пишут

В редакцию журнала поступило письмо от преподавателя МГУ В. Г. Баула. Он обращает наше внимание на фразу из статьи «Задачи на сравнение чисел» («Квант», № 2, с. 25): «такое огромное число (речь идет о числе 1986^{1985}) ... не может вычислить ни одна ЭВМ в мире».

В письме содержится программа, с помощью которой отечественная ЭВМ за три минуты вычислила все 6550 цифр числа 1985^{1986}, большего чем 1986^{1985}. Вот его первые 400 цифр:

1985^{1986}=6060536781938122129935577405810
1706803770967881670988684242464519852023
0657158223690545643526062929121017582677
5818575294168144641015796954620596573211
7143114344139374724738173374162794987109
0083837446931844413747934279943692567389
8510929687523512431089566356226432328533
9041459720048602306720872973869468440323
2104009956095155438800528759632404326846
1137926434459089798584173784903023136766
345497636...

Ответы, указания, решения

Немного о термометре и о термоскопе Фердинанда

Во втором термоскопе важную роль играет тепловое расширение воды. Поскольку этот термоскоп полностью заполнен водой и запаян, то при нагревании вода может расширяться, лишь занимая место воздуха в колбочках (воздух не может противостоять натиску воды, так как сжимаемость у воды во много раз меньше, чем у воздуха). В результате при повышении температуры уменьшается выталкивающая сила, действующая на сосудики, и они опускаются на дно.

Ответ на второй вопрос. Неудобство использования водяного термометра при температурах, близких к 0 °C, связано с аномалией теплового расширения воды.

Вспомогательный куб

1. $2\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sin\gamma}\right)$ (см. рис. 1). Ответ может быть записан в виде $\arccos(\operatorname{ctg}^2\gamma)$.
2. 60° (см. рис. 2).
3. $\arccos\frac{18-\sqrt{2}}{20}$ (см. рис. 3).
4. $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{37\pm6\sqrt{2}}}{2}\right)$. Рассмотрите два случая (рис. 4).
5. $\frac{1}{2}\sqrt{5-2\sqrt{6}\sin\varphi}$. Тетраэдр $SABC$ удобно расположить так, как показано на рисунке 5: отрезки AC и BD направлены вдоль ребер вспомогательного куба, вершина S принадлежит боковой грани.

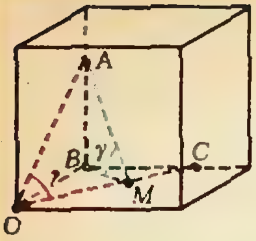


Рис. 1.

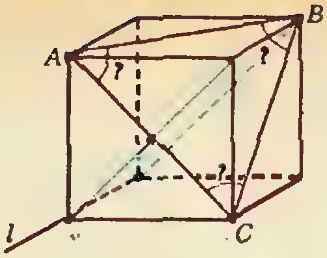


Рис. 2.

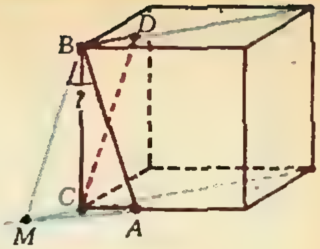


Рис. 3.

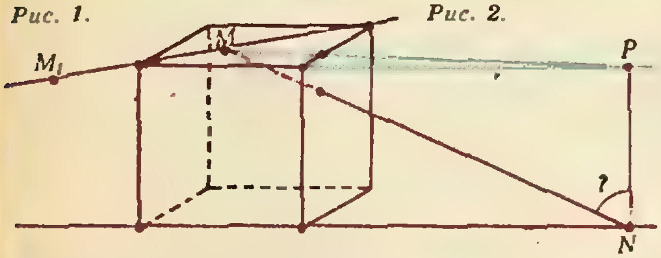


Рис. 4.

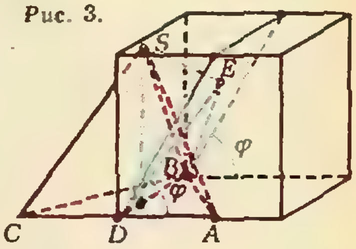


Рис. 5.

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

1. $\{2;\ 9/2\}$. Указание. По теореме Виета $5x_2=$ $=a+3, 4x_2^2=2a$.

2. $x_1=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{6}$; $x_2=(-1)^n\frac{\pi}{24}+\frac{n\pi}{4}$ $(k,\ n\in\mathbb{Z})$.

3. 3. Указание. Пусть MN — средняя линия трапеции $ABCD$, N — середина AB. Докажите, что треугольники AMN и BMN равнобедренные $(|AN|=|NM|=|BN|)$, а $\widehat{AMB}=90°$.

4. $]-\infty;\ -2\log_5 2]\cup[-\log_5 3;\ 0]\cup]\log_5 3;\ +\infty[$.

5. $\sqrt{\frac{2}{11-4\sqrt{2}}}$. Указание. Пусть M и N — точки пересечения плоскости β с ребрами BD и BC, K — середина CD, L — точка пересечения MN и BK. Площадь треугольника BMN составляет половину площади грани BCD. Определите величину $|BL|$. Докажите, что искомое расстояние равно высоте треугольника ABL, опущенной из вершины B.

Вариант 2

1. Первое число больше.

2. $\{(1;\ 2),\ (-1;\ 6),\ (\sqrt{2};\ 4-\sqrt{2}),$
$(-\sqrt{2};\ 4+\sqrt{2})\}$.

3. 3 : 1. Указание. Проведите через N прямую, параллельную основаниям; пусть она пересечет AM в точке L. Используя подобие треугольников BMK и KLN, докажите, что $|ML|=3|KM|=\frac{3}{4}|AM|$.

4. $x_1=-\frac{\pi}{32}+\frac{k\pi}{4}$; $x_2=\frac{\pi}{40}+\frac{n\pi}{5}$ $(k,\ n\in\mathbb{Z})$.

5. $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{13}}{3}$. Указание. Пусть плоскость π пересекает прямые CC' и BC в точках K и P соответственно. Определите $|CK|$ и $|CP|$. Докажите, что угол KLC прямоугольного треугольника KLC, где CL — высота, опущенная из вершины C в треугольнике DPC, является искомым.

Физика

Вариант 1

1. $F_{\min}=\frac{F}{1-S_2/S_1}$.

2. $Q=\frac{C_2(C_1+C_3)}{C_1+C_2+C_3}\frac{U^2}{2}$. Указание. При установившемся напряжении конденсаторы имеют общий заряд $q=C_2U$ и соединены параллельно.

3. См. решение задачи Ф978 из «Задачника «Кванта», которое будет опубликовано позже.

4. Наблюдатель, стоящий на земле, увидит Солнце через время t, которое затратит Земля для поворота на угол α (рис. 6):

$$t=\frac{\alpha}{\omega}=\frac{\widehat{BOA}}{2\pi/T}\approx\frac{\sqrt{2h/R}}{2\pi/T}\approx 15\ \text{мин}$$

(здесь $h=10$ км, $R=6{,}4\cdot10^3$ км, $T=1$ сутки). Заменив R на $R\cos\varphi$, можно учесть широту φ.

5. Когда брусок кладут на два ролика, сила трения, действующая на него со стороны заклиненного ролика B (рис. 7), стремится повернуть брусок по часовой стрелке. В результате сила давления на правый (нижний) ролик будет больше, чем на левый (верхний). Поэтому в первом случае сила трения будет меньше, чем во втором. Если брусок начал соскальзывать, то благодаря тому, что центр тяжести смещается вправо, сила реакции N, а значит, и сила трения $F_{\text{тр}}$, действующая на левый ролик, будет уменьшаться, а на правый — увеличиваться. Вот почему брусок в первом случае не сможет остановиться, а во втором — остановится.

Вариант 2

1. $R_V=R^2/r$.

2. При $l<F$ решения нет, при $F<l<R+F$ расстояние $d=lF/(l-F)$, при $l>R+F$ имеются два решения (рис. 8): $d_1=lF/(l-F)$ и $d_2=$ $=(l-R)F/(l-R-F)$.

3. $\omega=\sqrt{2k\,(1-\sqrt{2/3})/(M-m)}$.

4. См. решение задачи Ф982 из «Задачника «Кванта», которое будет опубликовано позже.

5. При взбалтывании из-за существенного увеличения поверхности соприкосновения горячей воды с воздухом в колбе происходит быстрый разогрев воздуха, что приводит к увеличению его давления. Кроме того, резко усиливается испарение воды и к давлению воздуха добавляется заметное давление водяных паров. В результате этого шарик раздувается. Потом воздух остывает, пар конденсируется, давление уменьшается, шарик сокращается в размере. Далее все повторяется, но при меньшей температуре, поэтому явление выражено слабее.

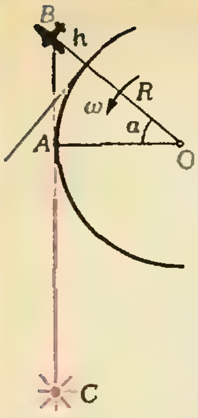


Рис. 6.

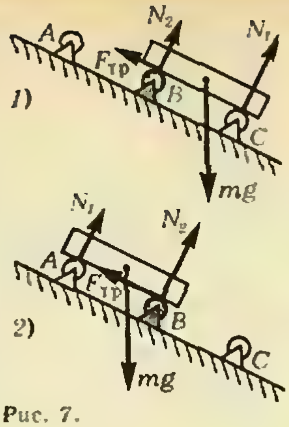


Рис. 7.

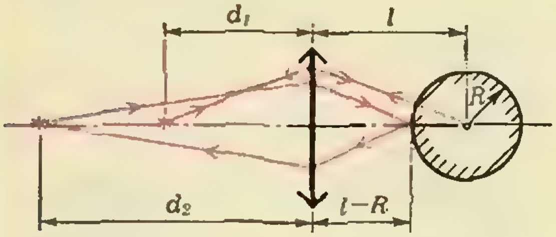


Рис. 8.

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $\frac{3}{2}\left(1-\ln\frac{3}{2}\right)$. 2. $x=\pm\frac{3\pi}{2}+4k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

3. $\frac{a^4 r}{2\sqrt{3}(a^2-12r^2)}$.

4. 2 при $a=0$, $|a|>2$;
3 при $|a|=2$, $|a|=\sqrt{3}$;
4 при $0<|a|<\sqrt{3}$, $\sqrt{3}<|a|<2$.

5. $-\frac{1}{2}\leqslant a<0$.

Вариант 2

1. $y_{\min}=\frac{1}{4}$, $y_{\max}=\frac{1}{2}$.

2. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

3. 17, 10, 3 и 8, 10, 12.

4. $\left]\frac{1}{8};\ \frac{1}{4}\right]\cup\left[2;4\right[$.

5. 2 arctg 3.

Вариант 3

1. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

2. $y_{\min}=-2$, $y_{\max}=18$.

3. $\left]-\infty;\ \log_{0,4}\frac{7}{9}\right[\cup\left]\log_{0,4}\frac{15}{14};\ \infty\right[$.

4. $a=-1$, $a=3$.

5. $\frac{125}{32}\,v$.

Вариант 4

1. $\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$.

2. $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

3. $\left]-1-\frac{1}{\sqrt{2}};\ -1\right[\cup\left]-1;\ -1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$.

4. $y_{\min}=y(-1)=-2$.

5. 90°.

Вариант 5

1. $x=-\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$.

2. На промежутках $]-\infty;\ -1[$ и $]2;\ \infty[$ функция возрастает, а на промежутке $]-1;\ 2[$ — убывает.

3. $\frac{26}{15}$. 4. $x\in\left]-\infty;\ -3\right[$.

5. $\arcsin\frac{p-s}{s}$.

Задачи устного экзамена

2. а) геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{3}$; б) геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{27}$ и первым членом $\frac{4}{3}\pi r_1^3$; в) $\frac{6}{13}$.

3. $\{(x;\ y;\ 0),\ x\in R,\ y\in R;\ (1;\ 2;\ 3)\}$.

4. Если $b\leqslant 2a$, то неравенство не имеет решений. При $b>2a$ решения неравенства образуют интервал $\left[\frac{b}{2};\ b-a\right[$. В частности, это будет интервал $[1;\ 5[$, если $a=-3$, $b=2$.

5. $]0;\ 3]\cup[4;\ 5]$.

6. а) полуплоскость; б) множество отрезков прямых $y=x+n$, $n\in\mathbf{Z}$, с концами на прямых $y=0$ и $y=1$.

7. Наименьшую площадь имеет треугольник, прилегающий к меньшему основанию трапеции. Треугольник, прилегающий к большему основанию трапеции, имеет площадь $\frac{b^2}{a^2}S$. Треугольники, прилегающие к боковым сторонам трапеции, равновелики. Площадь каждого из них равна $\frac{b}{a}S$.

8. $r\frac{1+\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}$; $r\frac{1-\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}$.

9. $\arccos\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$.

11. $2\arcsin\frac{r_2-r_1}{r_2+r_1}$.

12. $\left]0;\ \frac{3}{2}\right[\cup\,]3;\ 6]$.

13. $y_{\max}=y(2)=3$, $y_{\min}=y(0)=-1$.

14. $x=5$, $x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

15. 4. Нет.

17. $a\geqslant\frac{3}{2}$.

Физика

Физический факультет

1. $\tau_0=\frac{s}{g\tau}-\frac{\tau}{2}=4$ с; $s_0=\frac{g\tau_0^2}{2}=80$ м.

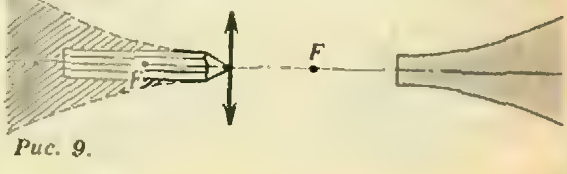


Рис. 9.

2. $\frac{a_1}{a_2}=\frac{F\cos\alpha-\mu(mg-F\sin\alpha)}{F\cos\alpha-\mu(mg+F\sin\alpha)}\approx 1{,}65.$

3. $A=\frac{m}{M}RT\left(\frac{k-1}{k}\right)=8{,}3\cdot10^5$ Дж.

4. $R=(\mathscr{E}-U-I_0r)/I_0=3{,}2$ Ом.

5. Изображение карандаша состоит из двух частей: действительная часть расположена за линзой, мнимая — перед линзой (рис. 9).

Радиофизический факультет

1. $a=g(1-\mu)/(1+\mu)=2{,}5$ м/с^2.

2. $m=\rho_1V_1(1+k(N-1))$; $\rho=\rho_1(1+k(N-1))/N$.

3. $x=(h_0+l-\sqrt{h_0^2+l^2})/2\approx0{,}22$ м (здесь $h_0=760$ мм — высота столбика ртути в барометре, соответствующая нормальному атмосферному давлению).

4. $q_1'=2C_1^2C_2U/(C_1+C_2)^2$; $q_2'=2C_1C_2^2U/(C_1+C_2)^2$; $U_1'=U_2'=2C_1C_2U/(C_1+C_2)^2$.

5. $l=\frac{\pi}{B}\sqrt{\frac{2mU}{q}}$; $t=\frac{\pi m}{qB}$.

Механико-математический факультет

1. $T=T_0M_а/M_м\approx478$ К.

2. Энергия конденсатора уменьшится на $\Delta W=qU(1-1/\varepsilon)/2\approx3\cdot10^{-5}$ Дж.

3. $v=\sqrt{v_0^2+(eEt/m)^2}\approx8{,}7$ Мм/с; $\alpha=\mathrm{arctg}\,(eEt/(mv_0))\approx24^\circ$ (α — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{v}_0$).

4. $l=T^2g/(4\pi^2)\approx9$ м.

5. $d_{min}=kF/(k-1)=0{,}05$ м; $d_{max}\to\infty$; $\Gamma_{max}=k-1=4$.

Факультет кибернетики

1. $h_{max}=at^2/2+(at)^2/(2g)=6gt^2=54$ км.

2. Начальная температура газа $T=\Delta T/3\approx1{,}3$ К.

3. $q=4\pi\varepsilon_0Ea^3/l\approx1{,}1\cdot10^{-10}$ Кл (здесь $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная).

4. Радиусы круговых траекторий протона и α-частицы одинаковы.

5. $\Gamma_2=\frac{k\Gamma_1}{(k-1)\Gamma_1+1}\approx2{,}14.$

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. 15 с, 18 с. 2. $x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$. 3. $\{1\}$. 4. $]-\infty;-3[\cup]0;+\infty[$. 5. $a/5$, $2a/5$.

Указание. Пусть r и $R=2r$ — радиусы данных шаров, а O_1 и O_2 — их центры. Точки O_1 и O_2 лежат в плоскости $AA'C'C$. Имеем (обозначения ясны из рисунка 10). $|AC|=a\sqrt{2}=|AF|+|FG|+|GC|$, но $|AF|=|O_1F|\sqrt{2}=r\sqrt{2}$, $|GC|=R\sqrt{2}=2r\sqrt{2}$, $|FG|=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{Rr}=2r\sqrt{2}$.

Вариант 2

1. $a=243$; $q=1/3$. 2. $x_1=-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x_2=-\pi/2+2l\pi$; $x_3=2m\pi$ $(k,l,m\in\mathbb{Z})$. 3. $\{1\}$. 4. $]0;1[$. 5. $\frac{\pi c^3}{6(\sqrt{6}+1)^3}$.

Указание. Пусть $SABC$ — данная пирамида ($\widehat{ACB}=90^\circ$). Высота SD проходит через середину AB (см. рис. 11). Кроме того, если SE — высота грани ASC, то, по условию, $|SE|=|BC|=2|ED|$, поэтому $\cos\widehat{SED}=1/2$, то есть $\widehat{SED}=60^\circ$. Для вычисления радиуса вписанного шара воспользуйтесь формулой $r=\frac{3V}{S}$, где V — объем, а S — полная поверхность пирамиды.

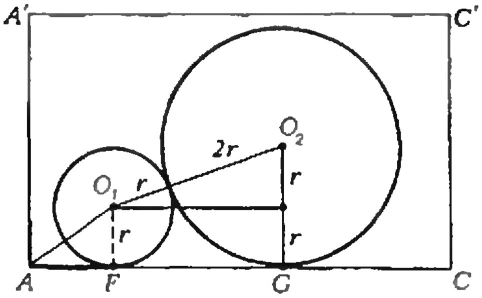


Рис. 10.

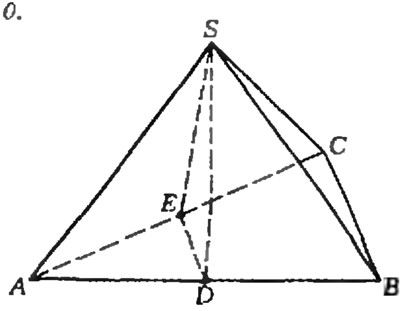


Рис. 11.

Физика

1. $\alpha=\mathrm{arctg}\left(H\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{l+L}\right)\right)=\frac{\pi}{4}$;

$$v_0=\sqrt{\frac{gl}{2(\mathrm{tg}\,\alpha-H/l)\cos^2\alpha}}\approx12{,}6\ \text{м/с}.$$

2. $E=(M(g-a)+mg)^2/(2k)=0{,}34$ Дж.

3. $m_2=\frac{m_1}{1-2m_1/M}=0{,}125$ кг.

4. $\tau=\frac{\Delta\tau mRT}{Mp_н\Delta V}\approx14{,}5\cdot10^3$ с ≈4 ч.

5. $\Delta U=Q_1-(p_1+p_2)(V_2-V_1)/2=300$ Дж; $\eta=(1-Q_2/Q_1)\,100\,\%=20\,\%$.

6. $T'=T\sqrt{\frac{mg-F}{mg+F}}\approx1{,}4$ с.

7. $q=2\varepsilon wdSRC_2=6{,}4\cdot10^{-11}$ Кл.

8. $v=\frac{2nU}{(n^2-1)RB}=3{,}75\cdot10^6$ м/с.

9. $t=\frac{1}{v}\left(\frac{R}{\mathrm{tg}\arcsin(1/n)}+h-2H\right)=10$ с.

10. $r=\frac{qeN_A}{\pi\varepsilon_0Mv^2}\approx3\cdot10^{-14}$ м, где $M=4\times10^{-1}$ кг/моль — молярная масса гелия.

Московский архитектурный институт

Математика

1. а) $1/b$; б) $-1/2$. Указание. Умножьте A на $\sin\pi/7$, после чего воспользуйтесь формулой $\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$; в) $9/16$.

2. а) $1/4$. Указание. Умножьте A на $\sin20^\circ$; б) 1; в) $\sqrt{3}$.

3. а) $\frac{a}{2}(3-a^2)$; б) $\pm\sqrt{a^2-4}$. 5. а) $\{-1;3\}$; б) $\{-1\}$; в) $\{10\}$; г) $x=\frac{\pi}{6}(3k\pm1)$ $(k\in\mathbb{Z})$.

6. а) $]0;2-\log_2 3[\cup]1;+\infty[$; б) $]-\infty;-5[\cup]3;+\infty[$; в) $]-5/8;12/5]$. 7. а) см. рисунок 12;

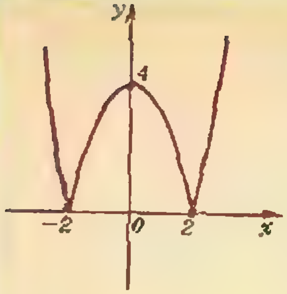


Рис. 12.

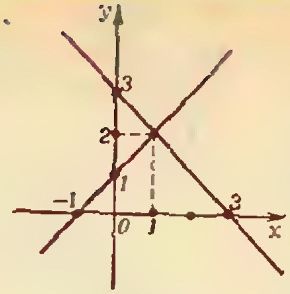


Рис. 13.

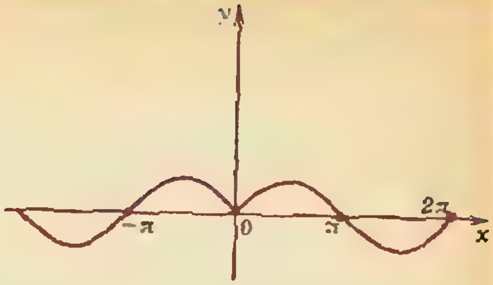


Рис. 14.

б) см. рисунок 13; в) см. рисунок 14.

8. а) {(625; 3); (125; 4)}; б) {(4; 1)}.

Физика

1. $F \approx 4/3 mg \operatorname{tg} \alpha$.

2. $\alpha > 60°$.

3. $H_1 = 5/3R$; $H_2 = 5/2R$.

4. $v_1' = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$;

$v_2' = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$.

5. $E_т = mgh\mu \operatorname{ctg} \alpha$.

6. $A = kx^2/2 = 15$ Дж.

7. Период колебаний *уменьшится* в $\sqrt{\rho_1/\rho_2} \approx 1{,}8$ раза.

8. $H_{max} = \sigma_{пр}/(\rho g) \approx 167$ м; $\varepsilon_{max} = \sigma_{пр}/E = 0{,}001$.

9. $t_в = t_1 + \frac{C(t_1 - t_2)}{c_в m} \approx 32{,}5\ °C$ (здесь $c_в = 4200$ Дж/(кг·К) — *удельная теплоемкость воды*).

Избранные школьные задачи
(см. «Квант» № 4)

1. −1. Указание. Выделением полного квадрата преобразуйте данное выражение к виду

$$\frac{1}{2}(2x - y + 1)^2 + \frac{1}{2}(3y + 1)^2 - 1.$$

Наименьшее значение равно −1 и достигается при $x = -\frac{2}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$.

2. 167166500. Решение. Перепишем данную сумму, воспользовавшись равенством $k(k+2) = \frac{(k+2)^3 - k^3 - 8}{6}$:

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots + 999 \cdot 1001 = \frac{3^3 - 1^3 - 8}{6} + \frac{5^3 - 3^3 - 8}{6} + \frac{7^3 - 5^3 - 8}{6} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1001^3 - 999^3 - 8}{6} = \frac{1001^3 - 1^3 - 500 \cdot 8}{6} = \frac{1002999000}{6} = 167166500.$$

3. 76. Указание. $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, поэтому все делители числа 1001 — это 1, 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001.

4. а) $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$; б) $\sqrt{P_1^2 + P_2^2}$. Решение. Положим $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. Треугольники ACD и BCD подобны треугольнику ABC, причем коэффициенты подобия равны, соответственно, b/c и a/c.

а) Если r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, то $r_1 = br/c$ и $r_2 = ar/c$. Поэтому $r_1^2 + r_2^2 = (br/c)^2 + (ar/c)^2 = \frac{b^2 + a^2}{c^2} \cdot r^2 = r^2$.

б) Если P — *периметр треугольника* ABC, то $P_1 = bP/c$ и $P_2 = aP/c$; поэтому $P_1^2 + P_2^2 = (bP/c)^2 + (aP/c)^2 = \frac{b^2 + a^2}{c^2} P^2 = P^2$.

5. $2a^2$. Указание. Положив $MA = x$, $MB = y$, $MC = z$, где M — точка *описанной окружности*, найдите сумму $x^2 + y^2 + z^2$, применив три раза теорему косинусов.

6. $x_1 = x_2 = \ldots = x_{10} = 1$. Решение. *Сумма всех* уравнений равна $55x_1 + 55x_2 + \ldots + 55x_{10} = 550$, *откуда* $x_1 + \ldots + x_{10} = 10$. Разность второго и первого уравнений равна $9x_1 - x_2 - \ldots - x_{10} = 0$. Складывая эти два уравнения, получаем $10x_1 = 10$, то есть $x_1 = 1$. Аналогично находим $x_2, \ldots, x_{10}$.

7. Решение. Поделим обе части неравенства *на* xyz *и перенесем* все слагаемые в левую часть. Неравенство примет вид

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{yz} - \frac{1}{xz} - \frac{1}{xy} \geqslant 0,$$

то есть

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right)^2\right] \geqslant 0.$$

8. Указание. *Воспользуйтесь теоремой косинусов и свойством биссектрисы угла треугольника.*

9. Указание. *Если рассечь треугольную* пирамиду произвольной плоскостью, параллельной двум противоположным ребрам, то в сечении получится параллелограмм (см. рисунок 15). Если двигать эту плоскость от одного ребра к другому, то одна пара сторон будет увеличиваться от 0 до b, а другая пара сторон будет уменьшаться от a до 0 (a и b — длины выбранных ребер). Значит, в некотором проме-

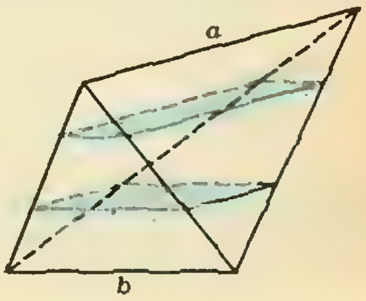


Рис. 15.

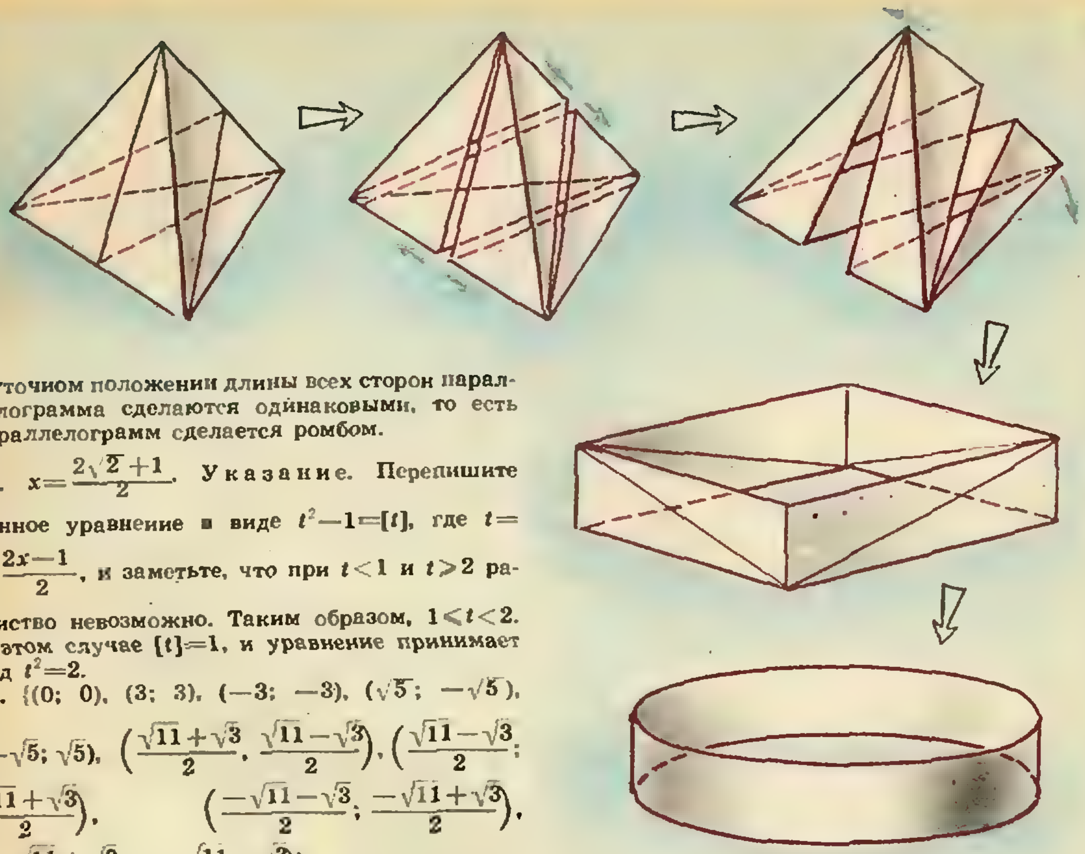


Рис. 17.

жуточном положении длины всех сторон параллелограмма сделаются одинаковыми, то есть параллелограмм сделается ромбом.

10. $x=\frac{2\sqrt{2}+1}{2}$. Указание. Перепишите данное уравнение в виде $t^2-1=[t]$, где $t=\frac{2x-1}{2}$, и заметьте, что при $t<1$ и $t>2$ равенство невозможно. Таким образом, $1\leqslant t<2$. В этом случае $\{t\}=1$, и уравнение принимает вид $t^2=2$.

11. $\{(0;\ 0),\ (3;\ 3),\ (-3;\ -3),\ (\sqrt{5};\ -\sqrt{5}),\ (-\sqrt{5};\ \sqrt{5}),\ \left(\frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2};\ \frac{\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{-\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2};\ \frac{-\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{-\sqrt{11}+\sqrt{3}}{2};\ \frac{-\sqrt{11}-\sqrt{3}}{2}\right)\}$. Указание. Складывая и вычитая уравнения системы, получите систему

$$\begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2-9)=0, \\ (x-y)(x^2+xy+y^2-5)=0, \end{cases}$$

равносильную совокупности четырех систем, каждая из которых уже легко решается.

12. $|BD|=\frac{|BC|+|AB|-|AC|}{2}$. Указание. Воспользуйтесь тем, что отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, заключенные между этой точкой и точками касания, равны.

Можно доказать, что D — это точка касания со стороной BC окружности, вписанной в треугольник ABC.

13. $\left\{\frac{5}{4};\ \frac{5}{3}\right\}$. Указание. Возведите обе части уравнения в квадрат и сделайте замену переменных $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.

14. $(mn(m+1)(n+1))/4$. Указание. Пару горизонтальных линий можно выбрать $(m(m+1))/2$ способами; аналогично, пару вертикальных линий можно выбрать $(n(n+1))/2$ способами.

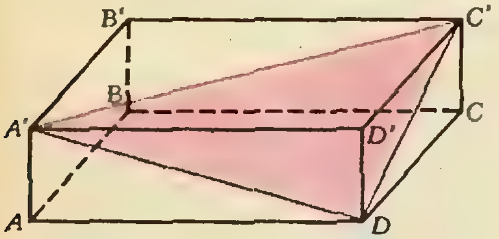


Рис. 16

15. Плоскость $A'C'D$ (см. рисунок 16) должна быть горизонтальной. Указание. Площадь ортогональной проекции параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$ на горизонтальную плоскость равна удвоенной площади проекции треугольника $A'C'D$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 4)

1. После первого перехода туристу осталось пройти 2/3 пути; после второго перехода ему осталось пройти 2/3 остатка, то есть $2/3\cdot 2/3$ пути. После третьего перехода ему осталось пройти 2/3 нового остатка, то есть $2/3\cdot 2/3\cdot 2/3=8/27$ всего пути. Таким образом, 32 км составляют 8/27 всего пути. Отсюда весь путь равен 108 км.

2. В год печатается $12\cdot 5=60$ задач. К началу 1970 года было напечатано 0 задач, поэтому к началу года с номером K будет напечатано $60\cdot(K-1970)$ задач. Если K — искомый год, то $60\cdot(K-1970)<K$, а $60\cdot(K+1-1970)>K$. Отсюда

$$60\cdot 1969<59K<60\cdot 1970,$$

то есть

$$2002\,\frac{22}{59}<K<2003\,\frac{23}{59}.$$

Единственное целое число, удовлетворяющее этому неравенству, — это число 2003. Таким образом, это событие (номер математической задачи в «Задачнике «Кванта» равен году выхода журнала) произойдет в 2003 году. К началу этого года будет напечатано 60·(2003—1970)=1980 задач. Остаются 23 задачи. За первые четыре месяца 2003 года будет опубликовано 20 задач, а третьей задачей майского номера «Кванта» будет задача М2003.

3. Плохая теплопроводность тряпки объясняется низкой теплопроводностью воздуха, содержащегося в ней. Теплопроводность воды гораздо выше, поэтому, если заменить в тряпке воздух на воду (то есть намочить тряпку), можно сильно обжечь руку.

4. См. рисунок 17.

5. 182×302=54 964; 204 579:3=68 193.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 2)

Задание 3 (И. Харузек). 1. **Cf5!!** (сразу 1. Крс5 не опасно из-за 1...f5) **1...gf** (1...f6 2.С:g6+ Крd8 2.Cf7) **3.Крс5 f6 3.Крd6 Лg8 4.Кре6 Крf8 5.Кр:f6** и т. д.

Задание 4 (Л. Куббель). **1. Сс5 Лс8.** Если 1...Крс8, то 2.Са7, и черные беззащитны: белый король приближается к пешке, а на 1...Лb8 решает 2.Лh8+ Крс7 3.Cd6+. **2.Cb6+ Кре8 3.Cc7 a5 4.Крd1 a4 5.Крc1 a3 6.Крb1 a2+7.Кра1!** (7.Кр:а2? Ла8+), и черные должны сдаться.

Победители шахматного конкурса 1985 года

Победителями конкурса признаны: А. Балыков (Тбилиси), А. Баранов (Чайковский), Г. Бедный (Бердичев), А. Бойко (Кировоград), В. Браила (Комрат), М. Германов (с. Чаши Курганской обл.), А. Кириченко (ст. Старощербиновская Краснодарского края), О. и Н. Клигер (Кировоград), Д. Красиков (Ростов-на-Дону), Я. Криволапов (Киев), А. Кудрик (Кривой Рог), А. Кузнецов (Ленинград), И. Купалов (Москва), Г. Леонов (Курган), А. Липовенко (Кривой Рог), Е. Лобанов (д. Уроп Кемеровской обл.), Ю. Махлин (Москва), В. Медведев (Москва), М. Палецкий (Середина-Буда), Д. Рабинович (Рига), С. Рассказов (Карпинск), А. Серебренников (Москва), С. Тасмуратов (Астрахань), В. Татоян (Ереван), И. Трубников (Тольятти). Редакция поздравляет победителей. Все они награждаются дипломом и значком журнала «Квант», шахматно-математической литературой с автографами А. Е. Карпова и Е. Я. Гика и получают право на присвоение I разряда по шахматам.

Кроме того, еще 25 участников конкурса награждаются значком журнала «Квант» и получают право на присвоение II разряда по шахматам.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, А. А. Варламов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский,
А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. Г. Захаров, С. В. Иванов,
Д. А. Крымов, Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова,
Е. К. Тенчурина, П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Б. Румянцева

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 18.03.86. Подписано к печати 21.04.86.
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8.
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,31. Т - 11718.
Тираж 202 198 экз.
Цена 40 коп. Заказ 705

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142 300 г Чехов Московской области

Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

БЕСКОНЕЧНАЯ ДОСКА

Сегодня мы рассмотрим несколько шахматно-математических задач и головоломок на неограниченной доске.

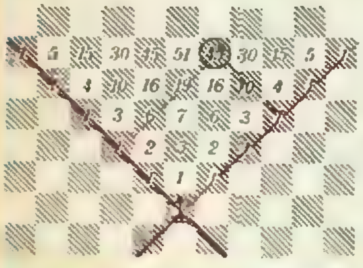
На бесконечной доске находятся два белых ферзя и черный король. Могут ли белые поставить мат? Если могут, то за сколько ходов? Зависит ли это от начальной расстановки фигур?

Мат ставится не позднее четвертого хода при любом исходном расположении фигур. Сначала один из ферзей объявляет шах по вертикали, и в ответ на отступление короля на одну из соседних линий второй ферзь зажимает короля на двух вертикалях. Если обычную доску рассматривать как фрагмент неограниченной, то можно считать, что возникает примерно такая позиция: ферзи на полях c1 и f8, король на d4. Теперь на любой ход короля следует горизонтальный шах с матом на следующем ходу, например: **2... Крe4 3. Фc4+** и **4. Фff4×**.

Отправим теперь на бесконечную доску короля.

Сколькими различными способами может пройти король путь между двумя произвольными полями бесконечной доски за наименьшее число ходов?

Выберем одно из полей как исходное, проведем через него две диагонали, разбивающие доску на четыре прямых угла, и повернем доску так, чтобы конечное поле для короля оказалось сверху (на следующем рисунке одно такое поле отмечено кружочком).

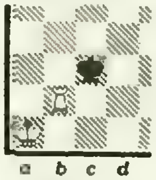


Теперь в соседние поля с королем записываются три единицы, а затем на каждое поле следующей горизонтали ставится сумма чисел тех полей предыдущей горизонтали, с которых король может попасть на данное поле. Числа, написанные на полях доски, и есть количество кратчайших маршрутов короля с исходного поля до заданного.

Получившаяся таблица называется 3-арифметическим треугольником, ее свойства подробно изучаются в комбинаторике. Конечно, можно было бы строить числовую таблицу сразу на всей плоскости, но ясно, что в трех других углах картина полностью повторится. С другой стороны, если нас интересует не общий принцип, а конкретный ответ для двух данных полей, можно ограничиться рассмотрением прямоугольника, отмеченного на рисунке пунктиром, потому что, покинув этот прямоугольник, король уже не в состоянии будет пройти путь между выбранными полями за кратчайшее число ходов.

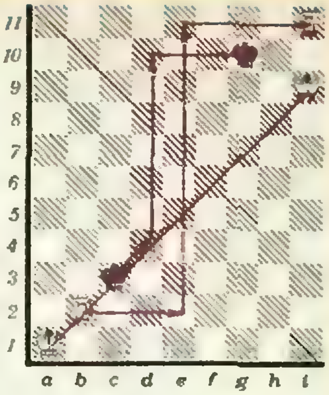
Следующую необычную задачу на бесконечной доске придумал американский математик С. Нортон.

Могут ли белые выиграть в следующей позиции (доска неограничена с двух сторон)?

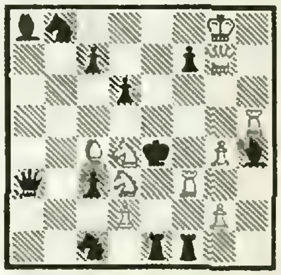


На первый взгляд задание кажется невыполнимым, поскольку черный король убегает на север или на восток. Если ладья мешает его движению, то король подходит к ней, сгоняет с места, и одно из направлений становится открытым, а король белых, похоже, не поспевает на помощь. И все же белые могут заматовать черного короля, причем даже не выходя за пределы прямоугольника 9×11! Вот как решается эта задача.

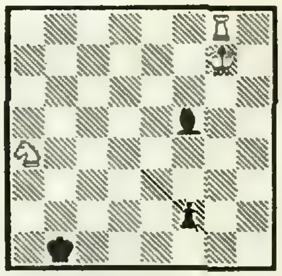
1. Лe2! Крd4. После 1... Крd3 2. Лe11 черные только теряют темп по сравнению с основным вариантом. **2. Крb2 Крd5 3. Крc3 Крd6 4. Крd4 Крd7 5. Лe11! Крd8 6. Крe5 Крd9 7. Крf6 Крd10.** Как будто усилия белых не увенчались успехом — ладья должна уйти, освобождая путь черному королю. Однако белые добились важной цели — перебросили короля правее ладьи, и теперь обе их фигуры участвуют в окружении. **8. Лi11! Крe10.** Королю остается бежать лишь на восток, но далеко ему не уйти. **9. Крg7 Крf10 10. Крh8 Крg10 11. Крi9!** Все, черный король отрезан по обоим направлениям. Дальнейшая игра состоит в простом матовании одинокого короля на доске конечных размеров. Из решения задачи следует, что на доске, ограниченной с двух сторон, король и ладья справляются с одиноким королем соперника, независимо от начального расположения всех трех фигур.



Конкурсные задания

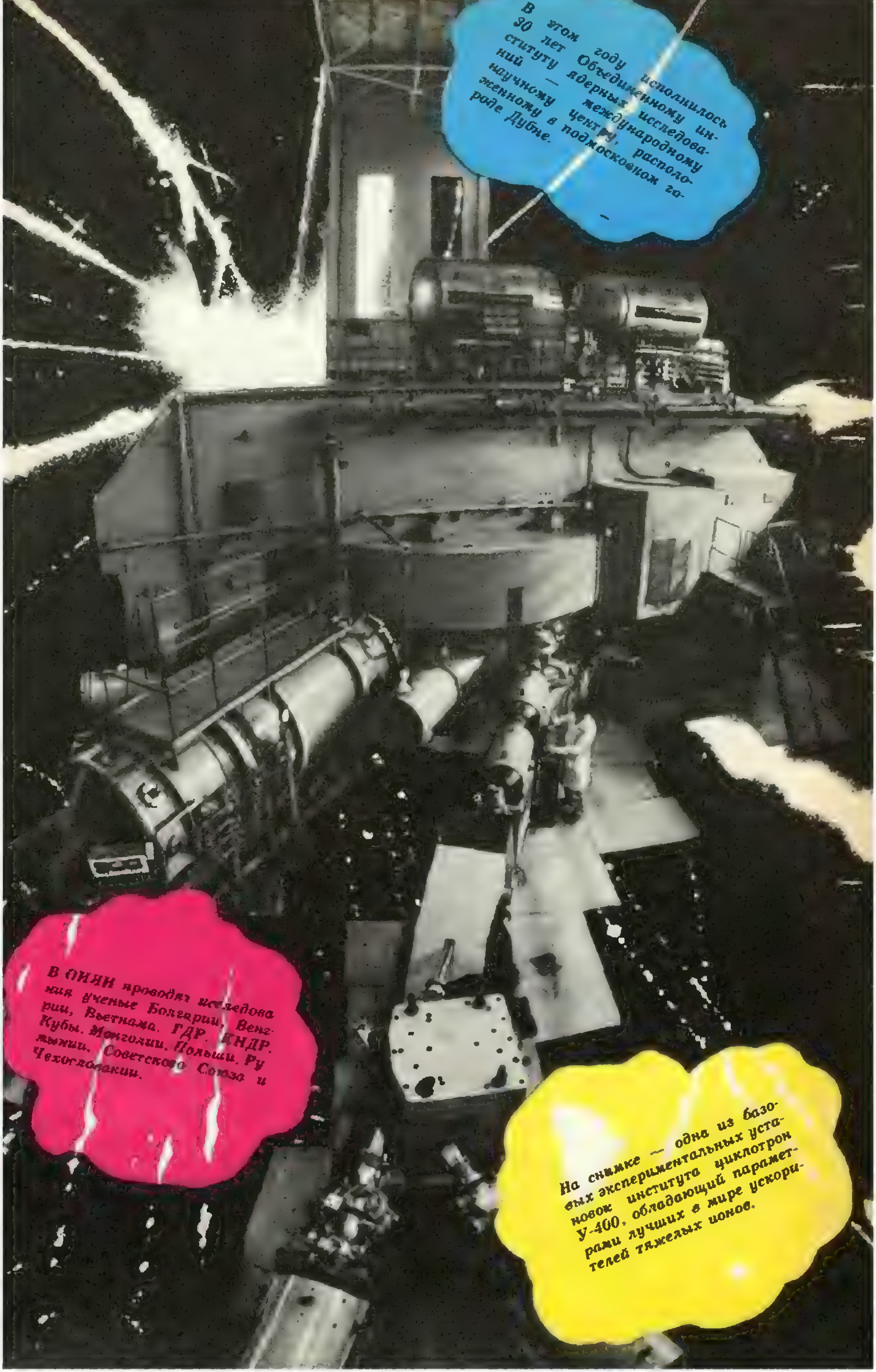


9. Белые начинают и дают мат в 2 хода.



10. Белые начинают и делают ничью.

Срок отправки решений — 20 июля 1986 г. с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 9. 10».



В этом году исполнилось 30 лет Объединенному институту ядерных исследований — международному научному центру, расположенному в подмосковном городе Дубне.

В ОИЯИ проводят исследования ученые Болгарии, Венгрии, Вьетнама. ГДР. КНДР. Кубы. Монголии. Польши. Румынии, Советского Союза и Чехословакии.

На снимке — одна из базовых экспериментальных установок института циклотрон У-400, обладающий параметрами лучших в мире ускорителей тяжелых ионов.

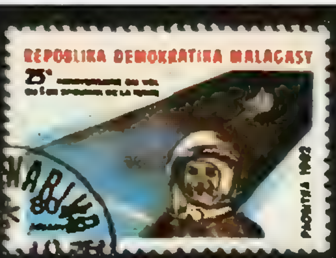
Цена 40 коп.

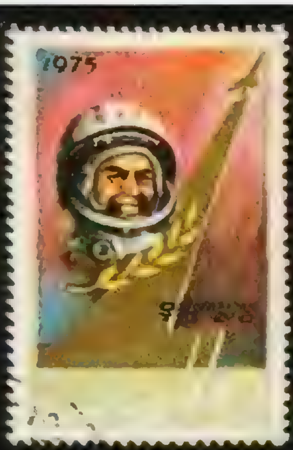
Индекс 70465

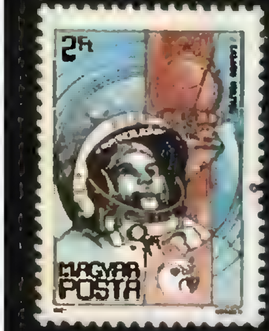
Подвигу — четверть века

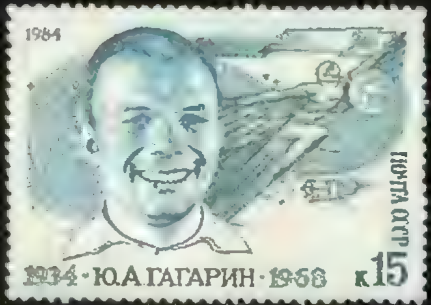
12 апреля 1986 года исполнилось 25 лет со дня полета Юрия Гагарина в космос. Все эти годы не ослабевает поток марок и почтовых блоков разных стран, посвященных этому выдающемуся событию. Некоторые из них, не воспроизводившиеся в нашем журнале, мы помещаем в этом номере.

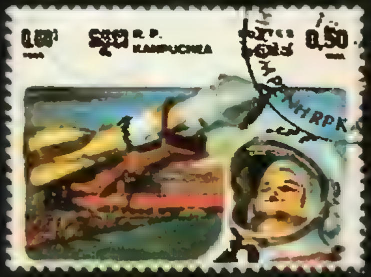
В. Рудов

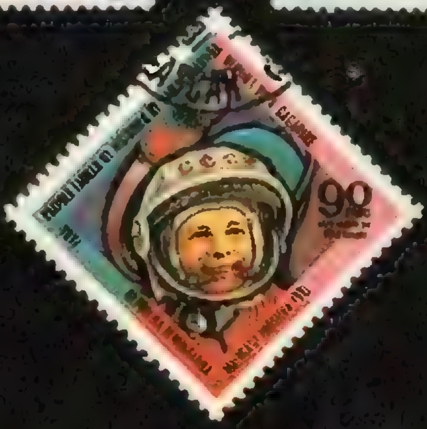

REPOBLIKA DEMOKRATIKA MALAGASY
25
POSITRA 1982

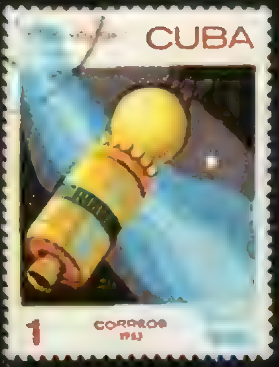


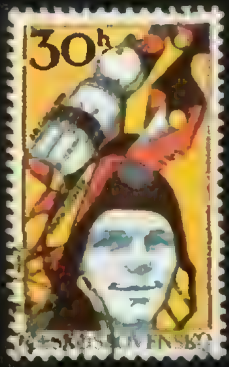

2Ft
MAGYAR POSTA

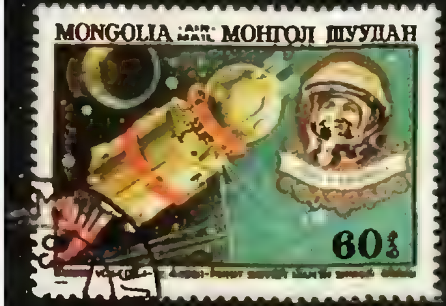

1984
ПОЧТА СССР
1934 · Ю.А.ГАГАРИН · 1968
к15

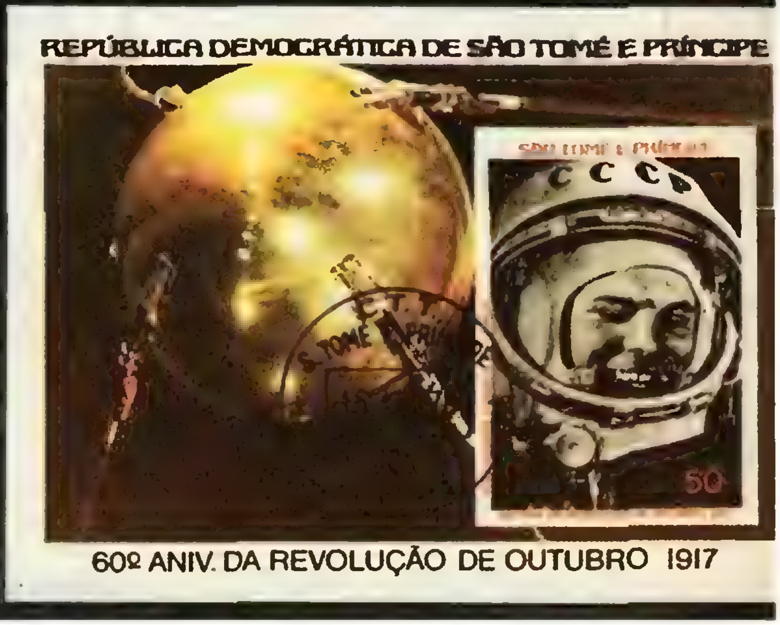

R.P. KAMPUCHEA
0.50

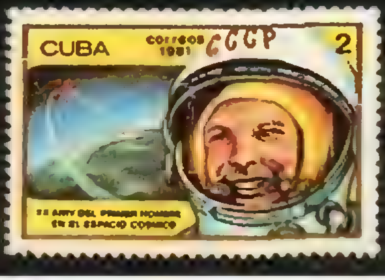



CUBA
1
CORREOS


30h
ČESKOSLOVENSKO


MONGOLIA
МОНГОЛ ШУУДАН
60


REPÚBLICA DEMOCRÁTICA DE SÃO TOMÉ E PRÍNCIPE
SÃO TOMÉ E PRÍNCIPE
CCCP
50
60º ANIV. DA REVOLUÇÃO DE OUTUBRO 1917


CUBA
CORREOS 1981
CCCP
2

НОМЕР
6

*Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР*

Квант

6 1986

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
3	*С. В. Дужин, В. Н. Рубцов.* Четырехмерный куб	*S. V. Dujhin, V. N. Rubtsov.* The four-dimensional cube
8	*С. Р. Филонович.* Шарль Кулон и его открытия	*S. R. Filonovich.* Charles Coulomb and his discoveries
16	*Л. В. Тарасов.* Зеленый луч	*L. V. Tarasov.* Green ray
18	*Ю. П. Соловьев.* Вызов Ван Роумена	*Yu. P. Soloviev.* Van Roomen's challenge
21	*Ф. Недемейер, Я. А. Смородинский.* Сопротивление ребер многомерного куба	*F. Nedemayer, Ya. A. Smorodinski.* Resistance of the edges of multidimensional cubes
	Наш календарь	**Our calendar**
14	75-летие открытия сверхпроводимости	75 years since the discovery of superconductivity
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
25	Математика 9, 10	Mathematics 9, 10
32	Избранные школьные задачи	Selected school problems
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
27	Задачи	Problems
28	Под-Котик и его повесть (по мотивам Л. Кэрролла)	The Mock Turtle's story (following *L. Carroll)*
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
33	Задачи М986 — М990; Ф998 — Ф1002	Problems M986 — M990; P998 — P1002
35	Решения задач М966 — М970; Ф978 — Ф982	Solutions M966 — M970; P978 — P982
52	Список читателей, приславших правильные решения	List of readers who have sent correct solutions
	Искусство программирования	**The art of programming**
42	*Л. Н. Системский.* Программирование на микрокалькуляторе: игры	*L. N. Sistemski.* Programming your pocket calculator: games
	Полупроводниковые элементы вычислительной техники	**Semiconducting elements in computers**
44	X. Заключение. Полупроводниковые элементы будущих ЭВМ	X. Conclusion. Semiconducting elements of future computers
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
47	*С. М. Козел.* Электромагнитная индукция	*S. M. Kozel.* Electromagnetic induction
54	**Варианты вступительных экзаменов**	**Entrance examination problems**
61	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	«Квант» улыбается *(41)*	**Kvant smiles** *(41)*
	Наша обложка *(36)*	**Our cover page** *(36)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Шахматные рекорды (3-я с. обложки)	Chess records *(3rd cover page)*

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1986

Памяти Льва Григорьевича Асламазова

23 апреля 1986 года в расцвете творческих сил трагически погиб известный ученый, профессор, доктор физико-математических наук, заместитель главного редактора журнала «Квант» Лев Григорьевич Асламазов. От нас ушел удивительно активный, трудолюбивый, многосторонне одаренный человек, сумевший за недолгую жизнь совершить много добрых и нужных людям дел.

Л. Г. Асламазов родился в 1944 году в г. Батуми. В 1960 году поступил в Московский физико-технический институт, а после его окончания в 1966 году — в аспирантуру Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау АН СССР, где в дальнейшем работал по 1975 год. Основные научные интересы Льва Григорьевича были сосредоточены в области теории сверхпроводимости, в развитие которой он внес существенный вклад. Открытое Л. Г. Асламазовым и А. И. Ларкиным явление флуктуационной сверхпроводимости создало новое направление исследований в физике сверхпроводников. Оно уже вошло в учебники и монографии по теории сверхпроводимости. Одновременно с научной деятельностью Лев Григорьевич вел большую научно-организационную работу, являясь ученым секретарем Института теоретической физики.

С 1976 года Л. Г. Асламазов работал доцентом, а затем профессором кафедры теоретической физики Московского института стали и сплавов. Блестящие лекции, педагогический, научный и организаторский талант принесли ему заслуженное уважение коллег и студентов.

Он успешно совмещал большую педагогическую и общественную работу с научной деятельностью, в значительной степени определяя направление научных исследований на кафедре и в проблемной лаборатории института.

Много сил и времени Лев Григорьевич отдавал популяризации научных знаний, привлечению в науку талантливой молодежи. Еще со студенческих лет он, являясь членом Оргкомитета, активно участвовал в организации и проведении Всесоюзных школьных олимпиад, в подготовке команд СССР к Международным олимпиадам по физике.

Л. Г. Асламазов был одним из инициаторов создания журнала «Квант», постоянным автором, членом редакционной коллегии, а впоследствии заместителем главного редактора журнала. Его неустанная, принципиальная, заинтересованная работа по поиску тем и авторов статей, живое обсуждение всех редакционных проблем порождали мощные творческие импульсы, столь необходимые в издании журнала.

Огромный вклад внес Лев Григорьевич в организацию, формирование и научное редактирование «Библиотечки «Квант», в которой в короткий срок были опубликованы десятки превосходных научно-популярных книг.

К любому делу, за которое брался Л. Г. Асламазов, будь то научная работа, редактирование книги или подготовка лекции, он относился с глубокой ответственностью, выполняя его с неизменной тщательностью, обязательно доводя до конца. Это был отзывчивый, благожелательный и в то же время очень требовательный человек. Он пользовался любовью и уважением товарищей по работе, учеников, всех близко знавших его людей. Светлая память о Льве Григорьевиче Асламазове навсегда сохранится в сердцах тех, кто имел счастливую возможность трудиться и общаться с ним.

Четырехмерный куб

Кандидат физико-математических наук
С. В. ДУЖИН,
кандидат физико-математических наук
В. Н. РУБЦОВ

«Рассмотрим четырехмерный куб...», «Выделим в десятимерном пространстве шестимерное подпространство...» Эти и многие подобные им фразы авторы частенько встречали в научной литературе, слышали на разнообразных семинарах, сами произносили, одним словом, привыкли не удивляться им. Но однажды задумались: «А ведь не так уж далеки те времена, когда слова «четырехмерный куб», «четвертое измерение» были пугающе непривычны слуху даже большинства математиков, а у неспециалистов вызывали недоумение и любопытство, сродни интересу к «снежному человеку», «летающим тарелкам» и прочим псевдонаучным вещам». Между авторами возник следующий диалог:

A_1: Четырехмерный куб? Конечно, это тривиально! Его надо задавать просто как подмножество четырехмерного пространства с помощью формул, обобщающих школьные формулы. Только формулами!

A_2: Согласен, это даст возможность формально определить, что такое четырехмерный куб, но будет непонятно, ненаглядно. Четырехмерный куб легко описывается геометрически как фигура, аналогичная квадрату на плоскости или кубу в трехмерном пространстве. Проекции, развертки, сечения — только так!

Недолго спорив, авторы решили попробовать объединить свои точки зрения, начав, правда, с наглядной стороны дела.

Как его «увидеть»

Чтобы представить себе четырехмерный куб, полезно сначала посмотреть на обычный — трехмерный — куб, а также на «двумерный куб» (квадрат) и «одномерный куб» (отрезок) в динамике — так, как они показаны на рисунках 1, *а, б, в*.

Изучив эти рисунки, можно попытаться понять и рисунок 2, изображающий четырехмерный куб. Так же как (двумерная) грань *ABCD* трехмерного куба, двигаясь параллельно самой себе (рис. 1,*а*) до положения *A′B′C′D′*, заметает трехмерный куб, «трехмерная грань» *ABCDEFGH*, двигаясь параллельно самой себе до по-

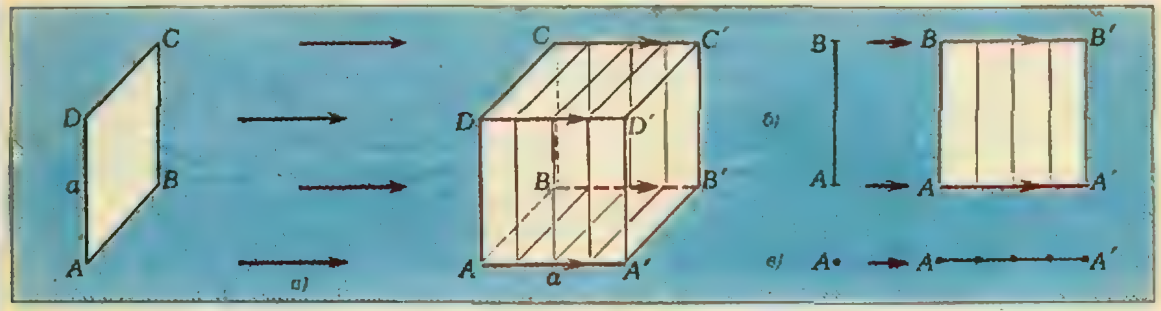


Рис. 1. Так трехмерный куб получается из квадрата, квадрат — из отрезка, отрезок — из точки.

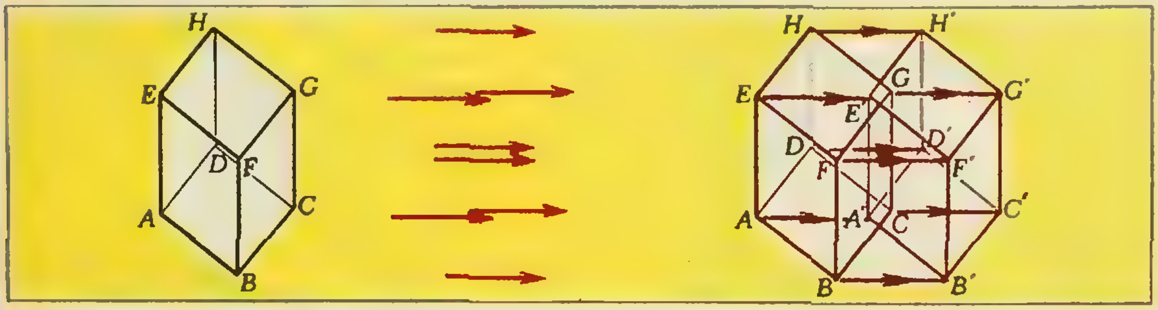


Рис. 2. А так четырехмерный куб получается из трехмерного.

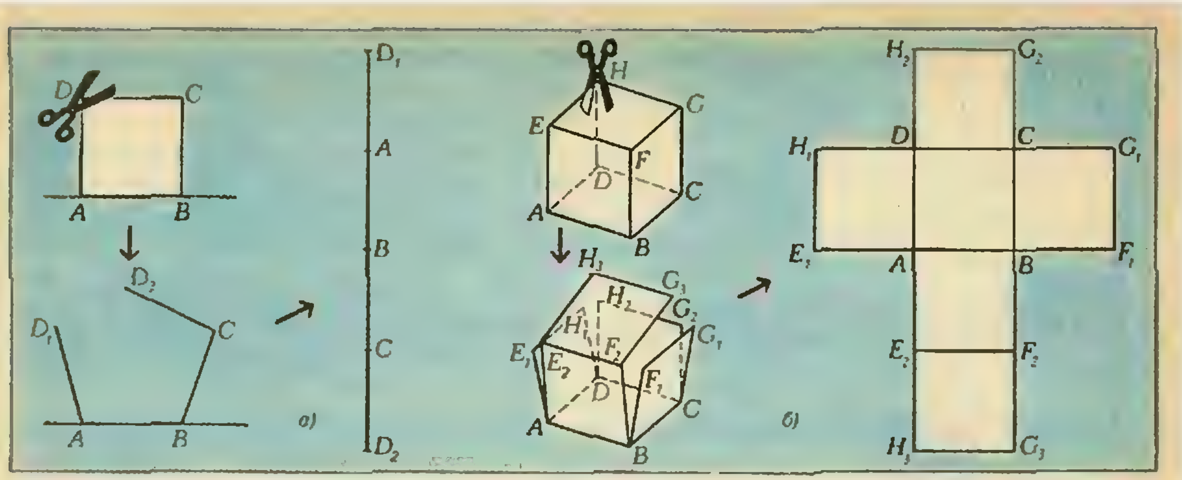


Рис. 3. Развертка квадрата и трехмерного куба.

ложения $A'B'...H'$, «заметает» четырехмерный куб. Увидели ли вы его?

Конечно, полученный чертеж четырехмерного куба условен, он дает его искаженное изображение. Но ведь и рисунок 1,*а* дает искаженное изображение обычного куба на плоскости. На самом деле оба чертежа имеют одинаковую природу: они показывают образы трехмерного и четырехмерного кубов при параллельной проекции на плоскость.

Разница лишь в том, что нам удается «приподнять в пространство» плоское изображение трехмерного куба усилием мысли, а такой способностью представить себе «четырехмерье» мы уже не обладаем.

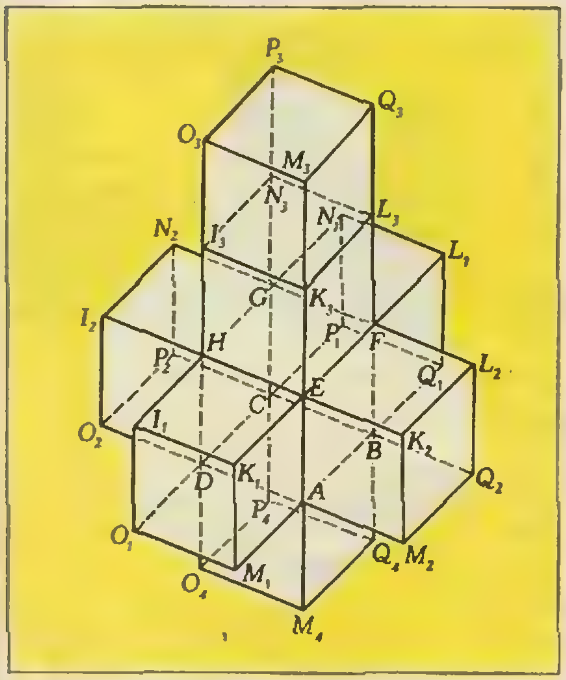


Рис. 4. Объемная развертка четырехмерного куба.

Ну, а если не удалось хорошо увидеть четырехмерный куб в движении — попробуем развернуть его.

Как его развернуть

Чтобы представить себе развертку четырехмерного куба, сначала посмотрим на развертку трехмерного и двумерного кубов (рис. 3). Мы видим, что развертка квадрата одномерна и состоит из четырех отрезков; развертка куба двумерна и состоит из шести квадратов. Аналогично, развертка четырехмерного куба трехмерна и состоит из восьми трехмерных кубов (рис. 4).

Так же как трехмерный куб можно склеить из развертки (см. рис. 3,*б*), отождествляя вершины $G_1 \equiv G_2 \equiv G_3$, $H_1 \equiv H_2 \equiv H_3$, $E_1 \equiv E_2$ и $F_1 \equiv F_2$ (и соответствующие ребра), четырехмерный куб можно получить из его развертки (см. рис. 4), «склеивая» вершины, обозначенные одинаковыми буквами, но с разными номерами, например $M_1 \equiv M_2 \equiv M_3 \equiv M_4$ или $I_1 \equiv I_2$; при этом склеиваются не только вершины (и соответствующие ребра), но и двумерные грани, например $M_3O_3P_3Q_3 \equiv$ $\equiv M_4O_4P_1Q_1$.

Рисунок 4 стоит рассмотреть внимательнее. Можно считать, что на нем показан макет своеобразного восьмикомнатного дома. Этот дом описан американским писателем-фантастом Р. Хайнлайном в рассказе «Дом, который построил Тил». Во время «путешествия», предпринятого героями Хайнлайна по чудесному дому, их поразило следующее обстоятельство. Когда они, двигаясь в определенном направлении, проходили комнату одну за другой, то пятой комнатой на их пути оказалась та, из которой они вышли. Например, если, двигаясь «снизу вверх», пройти четыре комнаты, образующие центральную башню развертки, то вновь окажешься в комнате «первого этажа». Действительно, «крыша» дома, как это видно из обозначений вершин, склеена с «полом» нижней комнаты. На самом деле всякий раз при пересечении границ комнат маршрут автоматически поворачивает на 90°, так что, например, ломаная $M_1AEK_3M_3$ не прямолинейна, но представляет собой контур квадрата. Этот факт легко понять, рассматривая аналогичные пути на развертке трехмерного куба и на поверхности самого куба (рис. 3). Если вы поняли идею склеивания четырехмерного куба из его развертки, вас не удивит то, что один из героев рассказа Хайнлайна, выпрыгнув из окна одной из комнат очутился... снова внутри дома!

Как его спроектировать

Существует еще один популярный способ изображения четырехмерного куба, представленный на рисунке 5,*б*. Восемь трехмерных граней изображены здесь внутренним (малым) кубом, внешним (большим) кубом и шестью усеченными пирамидами, соединяющими соответственные грани малого и большого кубов. Этот рисунок получается при центральном проектировании четырехмерного куба на некоторую «трехмерную плоскость». Смысл этого рисунка легче понять, если рассмотреть также рисунок 5,*а*, на котором изображена центральная проекция трехмерного куба на плоскость из некоторой точки.

По рисунку 5 удобнее всего сосчитать количество разного рода составляющих элементов четырехмерного куба. А именно, он имеет 16 вершин, 32 ребра, 24 двумерных грани (в виде квадратов) и 8 «трехмерных граней» (в виде кубов).

Как его строго определить

Итак, мы получили наглядное представление о четырехмерном кубе. В частности, мы знаем, сколько и каких элементов входит в его состав и как они соединяются между собой. Авторы догадываются, однако, что у многих читателей, особенно у тех, кто предпочитает логическую сторону математики ее наглядной стороне, осталось чувство неудовлетворенности от такого знакомства с четырехмерным миром. Ведь мы ознакомили вас лишь с различными описаниями по аналогии четырехмерного куба, и не дали его строгого математического определения. Между тем сделать это очень просто. Однако прежде, чем давать это определение, мы приведем несколько хорошо известных наблюдений.

Отрезок («одномерный куб») располагается на прямой (в «одномерном пространстве») и в системе координат Ox может быть задан неравенством $0 \leqslant x \leqslant 1$ (рис. 6,*а*).

Квадрат («двумерный куб») располагается на плоскости (в «двумерном пространстве») и в системе координат Oxy может быть задан системой неравенств $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ (рис. 6,*б*).

Трехмерный куб в системе координат $Oxyz$ трехмерного пространства выделяется системой неравенств $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ (рис. 6,*в*).

Эти наблюдения делают естественным такое определение.

Четырехмерный куб — это множество всех четверок действительных чисел $(x;\ y;\ z;\ t)$, для которых

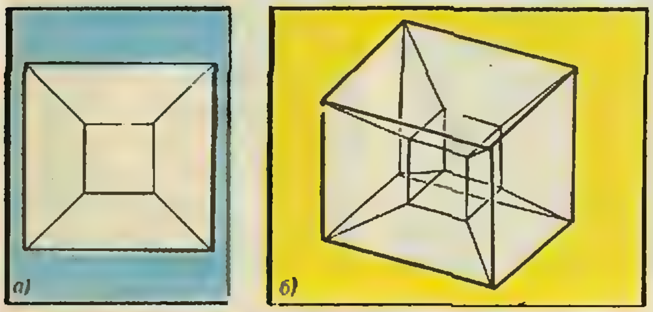


Рис. 5. Изображение обычного и четырехмерного кубов в центральной проекции.

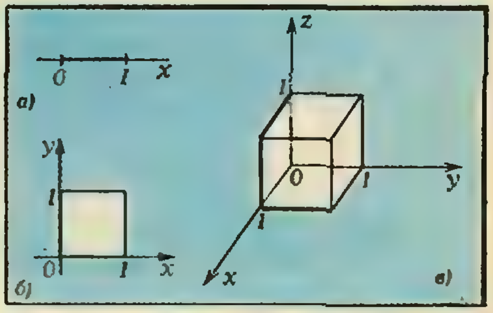


Рис. 6. «Маломерные кубы» в своих системах координат.

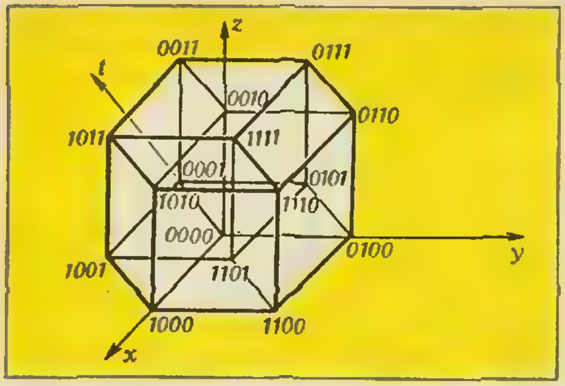


Рис. 7. Четырехмерный куб в четырехмерной системе координат.

$0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Четырехмерный куб в системе координат x, y, z, t четырехмерного пространства изображен на рисунке 7, где у каждой вершины указаны ее координаты (в целях экономии места без скобок и запятых).

Придирчивого читателя не удовлетворит, однако, такое определение. Он спросит: что такое система координат в четырехмерном пространстве? И вообще, что такое четырехмерное пространство?

Чтобы ответить на последний вопрос, мы сначала вспомним — ну, конечно, вы угадали! — что такое трехмерное пространство. Это набор всевозможных троек чисел (x; y; z), где x, y и z — действительные числа (координаты точки), для которых определено расстояние по формуле

$$|MN| = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 + (z_M - z_N)^2}$$

(см. учебник А. В. Погорелова «Геометрия 6—10», с. 204). Оказывается, предыдущую фразу можно взять за определение трехмерного пространства: из этого определения можно вывести все основные положения стереометрии с помощью элементарной алгебры. Так, определив плоскость как множество точек, удовлетворяющих линейному уравнению вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$

несложно доказать, например, что через любую тройку неколлинеарных точек M, N, P проходит одна и только одна плоскость, а именно, плоскость с уравнением

$$\begin{aligned}&((y_P - y_M)(z_N - z_M) - (z_P - z_M)(y_N - y_M)) \times \\ &\times (x_M - x) + ((z_P - z_M)(x_N - x_M) - \\ &- (x_P - x_M)(z_N - z_M))(y_M - y) + \\ &+ (x_P - x_M)(y_N - y_M) - \\ &- (y_P - y_M)(x_N - x_M))(z_M - z) = 0 \qquad (2)\end{aligned}$$

(см. «Геометрия 6—10», с. 212).

Теперь следующее определение должно прозвучать естественно. *Четырехмерным пространством* называется множество всех четверок чисел *(x; y; z; t), где x, y, z, t — действительные числа, для которых определено расстояние по формуле*

$$\begin{aligned}|MN|^2 = (x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + \\ + (z_N - z_M)^2 + (t_N - t_M)^2. \qquad (3)\end{aligned}$$

С определением плоскости в четырехмерном пространстве дело обстоит не так просто. Дело в том, что здесь бывают как обычные двумерные плоскости, так и трехмерные «плоскости», называемые *гиперплоскостями*. С точки зрения задания плоскостей уравнениями, именно гиперплоскость является точным аналогом обычной плоскости в трехмерном пространстве. В уравнении (1) обычной плоскости двум из трех переменных x, y, z можно придавать произвольные значения, и тогда значение третьей переменной будет определяться из уравнения однозначно. Таким образом,

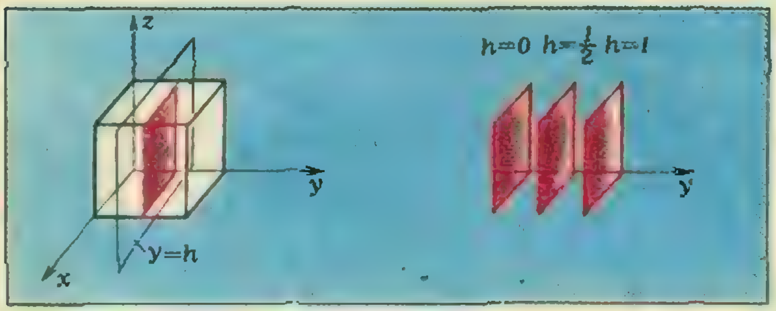


Рис. 8. Сечения куба, параллельные грани.

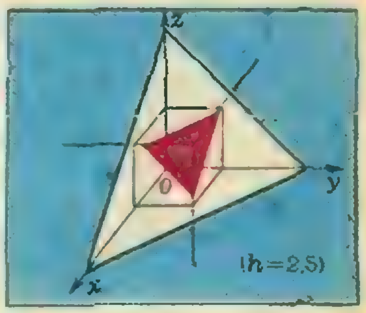


Рис. 9. Сечения куба, перпендикулярные диагонали.

множество всех решений этого уравнения описывается двумя произвольными параметрами, то есть оно двумерно. По той же причине множество всех решений одного линейного уравнения в четырехмерном пространстве $Ax+By+Cz+Dt+E=0$ само по себе трехмерно. Аналогично трехмерному случаю, вектор с координатами $(A; B; C; D)$ перпендикулярен данной гиперплоскости и называется ее *нормальным вектором.*

Как его обобщить

Читатель, разобравшийся в предыдущем определении, без труда даст теперь определение n-мерного куба для любого $n \geqslant 1$. Для этого он сначала определит n-мерное пространство как множество наборов из n чисел $(x_1; x_2; ...; x_n)$, расстояние между которыми задается формулой

$$|AB|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+...+(a_n-b_n)^2},$$

а затем и n-мерный куб как множество тех точек n-мерного пространства, для которых выполнены неравенства $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 1$, ..., $0 \leqslant x_n \leqslant 1$.

Как его рассечь

Четырехмерные фигуры удобно представлять себе при помощи их сечений некоторым семейством параллельных друг другу гиперплоскостей (гиперплоскости параллельны между собой, если их нормальные векторы коллинеарны). Смысл этой конструкции можно понять, рассматривая сечения трехмерных тел обычными плоскостями (рис. 8, где показано сечение куба плоскостями $y=h$). Аналогично выглядят и сечения четырехмерного куба плоскостями $t=h$ — вспомните рисунок 2!

Для лучшего понимания геометрии четырехмерного куба рассмотрим следующую более трудную задачу: *изобразить семейство его сечений гиперплоскостями, перпендикулярными главной диагонали.* Если взять диагональ, соединяющую вершины (0; 0; 0; 0) и (1; 1; 1; 1), то уравнение этих гиперплоскостей будет иметь вид $x+y+z+t=h$, где h — некоторая константа.

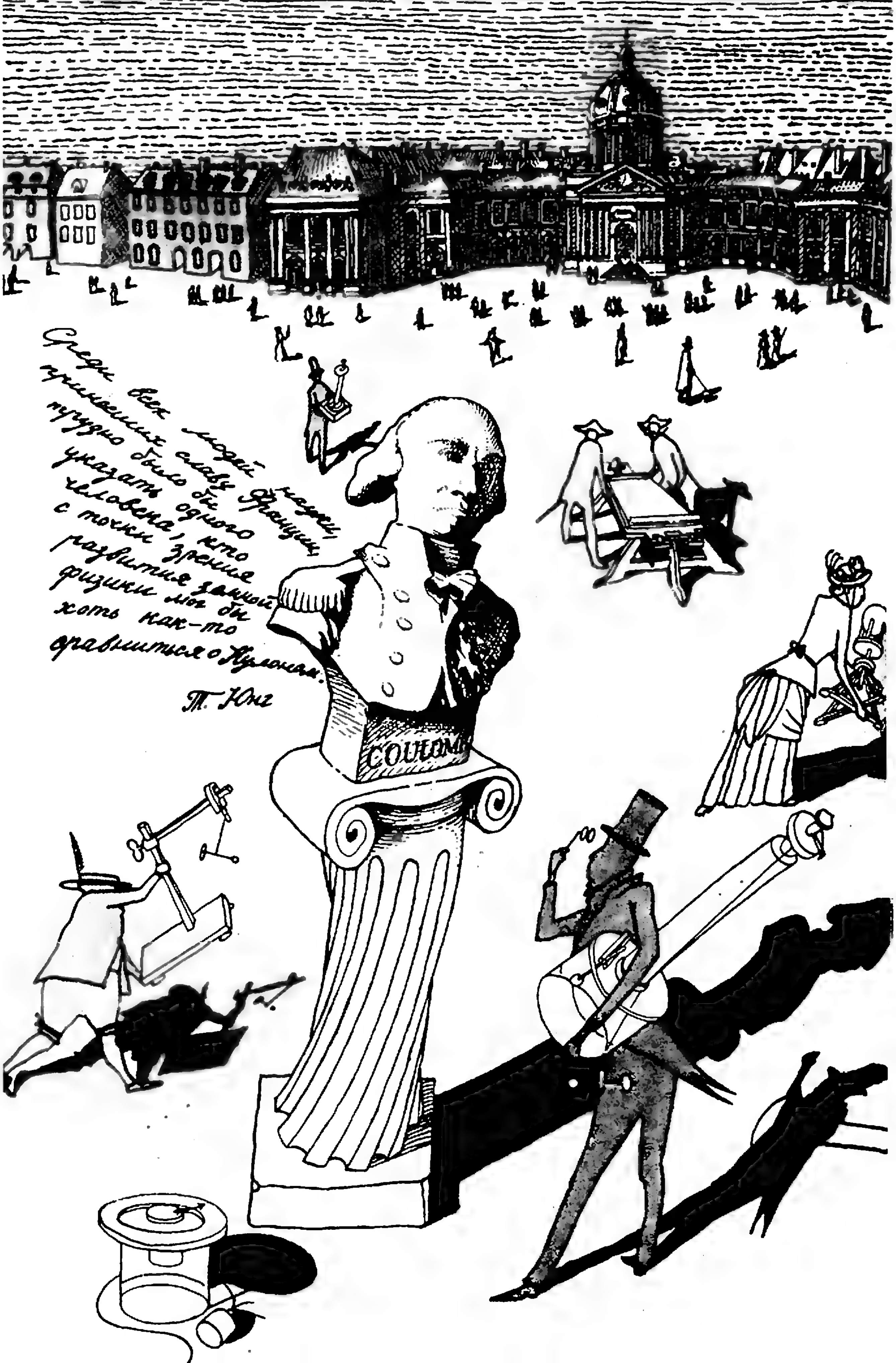
Разберем сначала аналогичную трехмерную задачу. Трехмерный куб можно представить как пересечение двух октантов, заданных системами неравенств

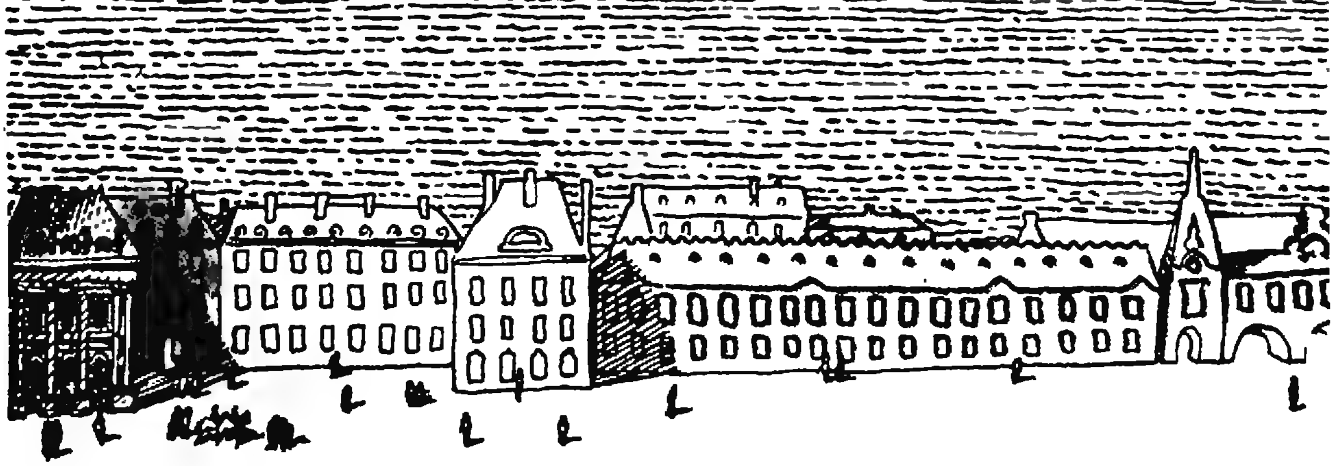
$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ z \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x \leqslant 1, \\ y \leqslant 1, \\ z \leqslant 1 \end{cases}$$

(рис. 9). Всякая плоскость вида $x+y+z=h$ пересекает каждый из этих двух октантов по правильному треугольнику. Проследим за изменением этой конфигурации при изменении h от 0 до $\sqrt{3}$. В начальный момент ($h=0$) один из треугольников состоит всего из одной точки. Затем его линейные размеры увеличиваются пропорционально h, одновременно с этим второй треугольник постепенно уменьшается, оставаясь гомотетичным первому с отрицательным коэффициентом. Начиная с того момента, когда вершины меньшего треугольника «протыкают» стороны большего, их пересечение дает шестиугольник. Этот шестиугольник становится правильным, когда размеры треугольников сравниваются. Далее описанный процесс повторяется в обратном порядке.

Подобным образом, четырехмерный куб представляет собой пересечение двух частей четырехмерного пространства, выделяемых системами неравенств $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $t \geqslant 0$ и $x \leqslant 1$, $y \leqslant 1$, $z \leqslant 1$, $t \leqslant 1$. Нетрудно показать, что гиперплоскость $x+y+z+t=h$ пересекает каждую из этих частей по правильному тетраэдру. Один из этих тетраэдров увеличивается с ростом h, а другой уменьшается. Искомое множество представляет собой пересечение двух таких тетраэдров и может быть точкой, тетраэдром или усеченным тетраэдром (в частности, при совпадении размеров обоих тетраэдров мы получим в пересечении правильный октаэдр; он изображен на рисунке 3 на четвертой странице обложки «Кванта» № 6 за 1985 год).

Мы надеемся, что читатели настолько освоились с понятием четырехмерного куба, что сумеют нарисовать эти сечения самостоятельно.


Среди всех людей науки,
принесших славу Франции,
трудно было бы
указать одного
человека, кто
с точки зрения
развития данной
физики мог бы
хоть как-то
сравниться с Кулоном.
Т. Юнг
COULOM



Шарль Кулон и его открытия

Кандидат физико-математических наук *С. Р. ФИЛОНОВИЧ*

В этом году исполняется 250 лет со дня рождения Шарля Кулона. Это имя известно каждому, кто когда-либо изучал физику. Главным научным достижением Кулона обычно считают экспериментальное подтверждение закона «обратных квадратов» — закона взаимодействия неподвижных точечных зарядов. Однако Кулону принадлежит ряд исследований и в других областях физики, вошедших в золотой фонд науки. Мы публикуем статью о выдающемся французском ученом и отрывки из важнейших работ Кулона, дающие представление о его творчестве.

Шарль Огюстен Кулон родился 14 июня 1736 года в городе Ангулеме, на юго-западе Франции. Его отец, в свое время пытавшийся сделать военную карьеру, к моменту рождения сына был правительственным чиновником. Мать Кулона происходила из знатной семьи. Детство Шарля прошло в Париже, где он получил начальное образование, посещая Коллеж Четырех Наций, основанный по завещанию знаменитого политического деятеля кардинала Мазарини. Коллеж Мазарини славился высоким уровнем преподавания математики, и, видимо, там привили юному Кулону любовь к этому предмету.

После окончания Коллежа Кулон уехал из Парижа на родину отца в Монпелье. Там он принимал участие в работе местного научного общества и даже был принят в него по классу математики. Однако Кулон недолго оставался в провинции. Он понимал, что необходимо выбрать какую-то профессию, которая обеспечила бы средства к существованию. Выбор Кулона пал на профессию военного инженера, дававшую достаточно высокое положение в обществе и в наибольшей степени соответствовавшую склонностям молодого любителя науки.

Для поступления в Военно-инженерный корпус французской армии необходимо было закончить специальную школу, располагавшуюся в Мезьере. В середине XVIII века Мезьерская военно-инженерная школа считалась одним из лучших высших технических учебных заведений Европы. После успешной сдачи вступительных экзаменов Кулон был зачислен в Школу и в течение полутора лет обучался там математике, черчению, основам физики, а также получал практические навыки: учился плотницкому делу, обработке камня, проведению геодезических работ. В 1761 году Кулон закончил Школу и получил чин лейтенанта.

Вскоре Кулон получает приказ о назначении на Мартинику — в заморскую колонию Франции. Там молодой и еще совсем неопытный инженер руководит строительством военного форта — основного оборонительного сооружения острова. На Мартинике Кулон провел восемь лет и был отозван на родину лишь после того, как строительство форта было практически закончено.

После возвращения во Францию Кулон получает последовательно назначения в Бушэн, Шербур, Безансон, Рошфор, Лилль... И все это время, продолжая службу в качестве военного инженера, выполняя множество поручений технического характера, в том числе и очень хлопотных, Кулон находил время для исследований в различных областях техники и физики.

Вести самостоятельную научную работу Кулон начал еще на Мартинике. Его первое исследование было посвящено проблемам сопротивления материалов и строительной механики. Удивительно, но не имевший практически никакого опыта в науке молодой военный инженер сумел подготовить мемуар, во многом определивший пути развития строительной механики. Мемуар, имевший по традиции того времени длинное название «О применении правил максимума и минимума к некоторым вопросам статики, имеющим отношение к архитектуре», был представлен в Парижскую Академию наук, получил одобрение и был опубликован. Учитель Кулона по Мезьерской школе, академик Боссю писал об этой работе: «...Кулон охватил, так сказать, всю архитектурную статику ... Повсюду в его исследовании мы отмечаем глубокое знание анализа бесконечно малых и мудрость в выборе физических гипотез, а также в их применении...» Отмеченное Боссю сочетание тонкой физической интуиции и хорошего знания математики стало впоследствии одной из наиболее характерных черт научных работ Кулона.

Первый успех в Академии окрылил молодого исследователя, и он представляет на ее рассмотрение всё новые и новые работы. Примечательно, что почти во всех технических проблемах, с которыми ему приходится сталкиваться. Кулон видит проблемы научные и стремится изучить их как можно глубже. Так, находясь на службе в Бушэне, он готовит мемуар по строительной механике, в Шербуре он работает сразу над двумя темами: о предельных мускульных усилиях человека и о конструкции чувствительного прибора для исследования магнитного поля Земли (за последнюю работу Кулон получил премию Парижской Академии наук). Во время службы в Безансоне Кулон занимается проблемами проведения подводных работ. Написанный им на эту тему мемуар переиздавался в конце XVIII — начале XIX века четыре раза и даже был переведен на русский язык. В Рошфоре ученый выполнил цикл экспериментов по сухому трению, за что получил еще одну премию Академии. Наконец в Лилле, находящемся в области, где широко использовались ветряные двигатели, он готовит мемуар об эффективности ветряных мельниц и оптимальной форме их крыльев.

Исследовательская активность Кулона получила признание: в 1781 году он был избран членом Парижской Академии наук по классу механики. Тогда же он переехал в столицу. В Париже командование Военно-инженерного корпуса использовало его в основном в качестве консультанта по техническим вопросам. Однако главной для Кулона теперь, безусловно, становится деятельность в Академии наук.

В 80-е годы ученый проводит несколько важнейших исследований в области физики. Конструируя прибор для изучения магнитного поля Земли, предназначавшийся для установки в знаменитой Парижской Обсерватории, он столкнулся с необходимостью тщательно изучить особенности деформации кручения тонких металлических нитей. С этой целью Кулон ставит цикл экспериментов и на основе проведенных исследований конструирует крутильные весы — прибор для измерения малых сил, характеризовавшийся уникальной для того времени чувствительностью. Принцип измерений с помощью крутильных весов основан на том, что момент упругих сил, возникающих при закручивании нити, оказывается пропорциональным углу закручивания. Именно крутильные весы стали основным инструментом при проведении знаменитого цикла экспериментов Кулона по электричеству и магнетизму (1785—1789 г.г.).

Опыты Кулона, основанные на непосредственном измерении силы электростатического взаимодействия, позволили установить связь между новой физической величиной — количеством электричества (зарядом) — и привычными механическими величинами — силой и расстоянием. Поэтому вполне обоснованно на Международном конгрессе электриков, проходившем в 1881 году в Париже, авторитетная комиссия, в состав которой входили В. Томсон (Кельвин), Г. Гельмгольц, Г. Кирхгоф, А. Г. Столетов и другие известные физики, единодушно назвала именем Кулона единицу количества электричества. С тех пор 1 кулон (1 Кл) живет в физике, постоянно напоминая нам о трудах и днях выдающегося французского ученого.

(Окончание см. на с. 14)

К числу наиболее значительных работ Кулона относится его мемуар «Теория простых машин с учетом трения их частей и жесткости канатов». В нем подробно исследовано явление сухого трения. К началу работы Кулона над этой проблемой в научной литературе можно было найти самые разнообразные утверждения относительно трения. Так, был уже известен закон Амонтона, согласно которому сила трения пропорциональна силе нормального давления и не зависит от площади соприкосновения тел. Однако некоторые исследователи оспаривали его справедливость. Большой разброд царил в суждениях о зависимости силы трения скольжения от относительной скорости движения тел. Наконец, нередко можно было столкнуться с противоречащими друг другу экспериментальными результатами. Причина такого положения состояла в том, что трение — очень сложное явление, зависящее от большого числа факторов, в том числе — от состояния поверхностей. Для получения однозначных результатов следовало провести систематические количественные исследования. С практической точки зрения особенно важна была постановка полномасштабных опытов, когда нагрузки соответствуют используемым на практике.

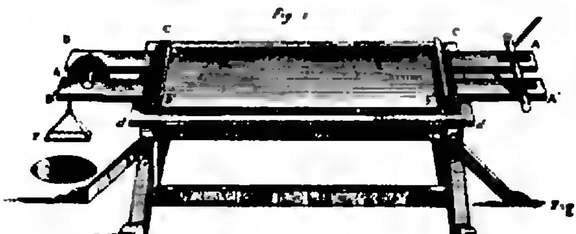
Исследование Кулона отвечало всем этим требованиям. В его опытах изучалась зависимость силы трения от природы соприкасающихся тел, от площади соприкосновения, силы давления, сжимающей поверхности (Кулон использовал нагрузки массой до 1000 кг), от времени контакта, относительной скорости скольжения и т. д.

В целом Кулон подтвердил закон Амонтона, но в то же время показал, что это приближенный закон. Оказалось, что сила трения скольжения очень слабо зависит от площади соприкосновения, и чаще всего этой зависимостью можно пренебречь.

Внизу на рисунке приведена схема экспериментальной установки Кулона для изучения сухого трения. На Fig. 1 изображен стол для изучения силы трения скольжения: груз на салазках (Fig. 2) скользил по поверхности $aab'b'$ под действием силы натяжения троса, перекинутого через блок h; к концу троса прикреплялась платформа P, на которую устанавливались грузы. На Fig. 3 изображено устройство для изучения силы трения покоя (действие этого устройства основано на принципе рычага). Сравнивая силу трения покоя и силу трения скольжения, Кулон пришел к выводу о существовании явления застоя и описал это явление.

«...При скольжении дерева по дереву без смазки с некоторой скоростью сила трения также пропорциональна нормальному давлению, но по величине она много меньше той, которая требуется, чтобы нарушить связь между поверхностями после некоторого времени их контакта. Установлено, например, что сила, необходимая для нарушения связи между двумя поверхностями дуба после нескольких минут контакта относится к силе, необходимой для преодоления трения, когда поверхности движутся с некоторой скоростью, как 95:22 ...»

В 90-х годах Кулон провел ряд экспериментов по изучению вязкого трения. В этих опытах он использовал крутильный подвес. Эффект трения определялся по скорости затухания крутильных колебаний цилиндра, помещенного в сосуд с жидкостью (этот прибор изображен на рисунке внизу). Ученый пришел к выводу, что при очень малой скорости движения возникающее сопротивление пропорционально скорости, а при больших скоростях — ее квадрату.



Стол для изучения силы трения скольжения.

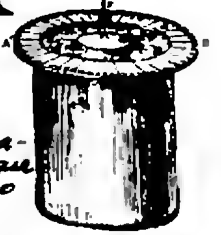
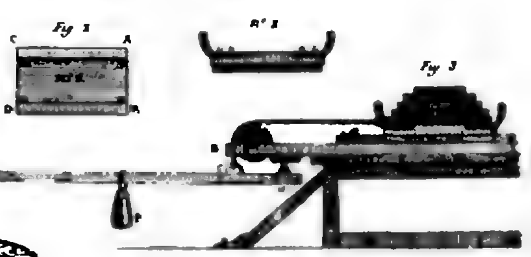


Схема экспериментальной установки Кулона для изучения вязкого трения.



Устройство для изучения силы трения покоя.

Тщательным изучением электро- и магнитостатических явлений Кулон занялся сразу после завершения опытов по кручению металлических нитей (крутильный подвес был идеальным устройством для количественного исследования слабых по величине взаимодействий). Первый мемуар на эту тему назывался «Конструкция и применение электрических весов, основанных на свойстве металлических проволок иметь силу кручения, пропорциональную углу кручения». Эта работа, в которой был экспериментально обоснован «закон Кулона», в прошлом году отметила двухсотлетие.

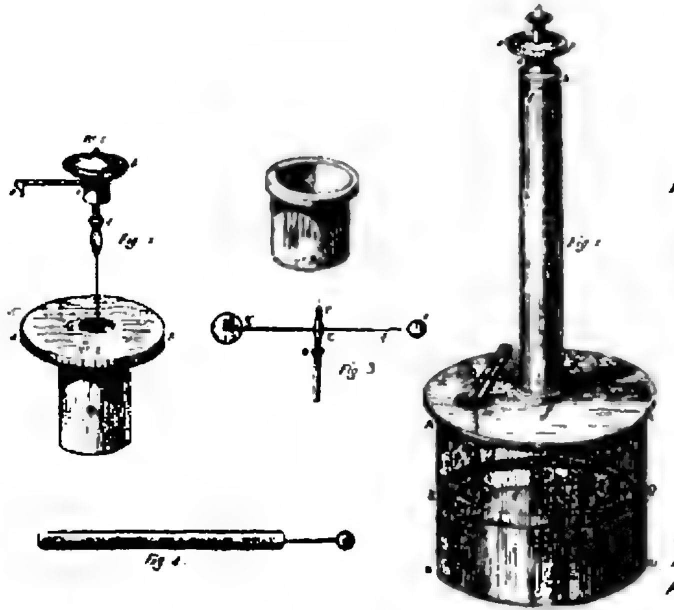
С середины XVIII века многие исследователи пытались определить «закон электрической силы». Некоторые из них предполагали, по аналогии с законом всемирного тяготения, что это должен быть закон «обратных квадратов», однако попытки прямого определения зависимости силы от расстояния затруднялись тем, что еще не было осознано различие между взаимодействием заряженных тел и притяжением или отталкиванием «элементарных» (то есть точечных) зарядов. Вследствие этого некоторые экспериментаторы делали ошибочные выводы из данных измерений.

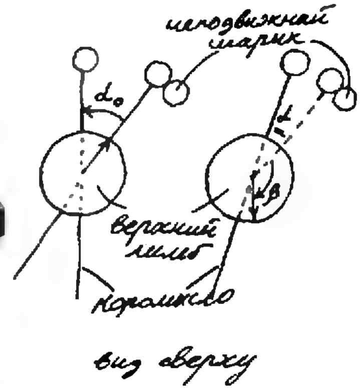
Достоинство опытов Кулона по электричеству состоит в том, что в них измерялось взаимодействие между зарядами, которые в первом приближении действительно можно было считать точечными. Кулон использовал специальные крутильные «электрические» весы, с помощью которых определялась сила отталкивания между двумя равными и одноименными зарядами.

По традиции того времени Кулон очень тщательно описал устройство весов и методику проведения эксперимента.

«На стеклянный цилиндр *ABCD* диаметром и высотой 32,5 см положена стеклянная пластина диаметром 35 см, полностью покрывающая сосуд; в ней просверлены два отверстия примерно по 4,5 см в диаметре, одно из которых *f* находится в центре; над ним возвышается стеклянная трубка *h* высотой 65 см ... На верхнем конце трубки *h* помещен поворотный микрометр, показанный в деталях на Fig. 2 ... Захват *q* (Fig. 2, № 1) на конце представляет собой нечто вроде рейсфедера ..., именно в нем укрепляется конец очень тонкой серебряной нити; другой ее конец сжимается захватом *P* (Fig. 3) ... Игла, которую видно на Fig. 1 (*ag*), подвешенная [на нити] горизонтально на половине высоты большого сосуда, ... сделана либо из шелковой нити, натертой сургучом, либо из соломинки ..., на ее конце *a* помещается маленький бузиновый шарик диаметром от 4,5 до 6,8 мм, а на конце *g* — небольшой вертикальный кусочек бумаги, пропитанной скипидаром, служащий противовесом шарику *a* и замедляющий колебания ...; в крышке *A* проделано второе отверстие *m*; именно через него [внутрь сосуда] вводят маленький цилиндр *mΦt* ..., на конце которого находится такой же бузиновый шарик. Вокруг сосуда на высоте иглы имеется шкала *zQ*, разделенная на 360° ...»

До начала опыта Кулон устанавливал крутильный подвес так, чтобы указатель *io* (Fig. 2) стоял на нулевой отметке, нить была не закручена, шары *a* и *t* слегка касались друг друга, причем шар *a* нахо-





Крутильные весы Кулона для исследования зависимости силы электростатического отталкивания от расстояния.

дился против нулевого деления шкалы zQ. Дальнейшие действия Кулон описывает так:

«... электризуют маленький проводник (Fig. 4), который представляет собой булавку ..., и вводят его в отверстие m, заставляя коснуться шара t, находящегося в контакте с шаром a. Булавку удаляют; оба шара оказываются наэлектризованными одноименным электричеством, и они взаимно отталкиваются на расстояние, которое измеряется по шкале zQ, когда смотрят по направлению нити и центра шара; поварачивая затем указатель микрометра b в направлении pnO, закручивают нить подвеса lP и создают силу, пропорциональную углу закручивания, которая стремится приблизить шарик a к t. Таким образом наблюдают расстояния, на которые сводятся шары a и t при различных углах кручения, и, сравнивая силы кручения с соответствующими расстояниями между двумя шариками, определяют закон отталкивания.»

Игла ag находилась в равновесии, когда момент силы электростатического отталкивания уравновешивался моментом упругих сил, возникающих при закручивании нити. Поэтому при равновесии сила отталкивания оказывалась пропорциональной углу закручивания, то есть углу $\alpha+\beta$, где α — угловое расстояние между шариками, измеренное по шкале zQ, β — угол поворота головки b. Если закон взаимодействия зарядов — это действительно «закон обратных квадратов», то сила электростатического отталкивания должна быть пропорциональна $1/\alpha^2$ (при не слишком больших α, когда линейное расстояние между зарядами можно считать пропорциональным угловому расстоянию между ними).

Следовательно, если до закручивания головки b (при $\beta=0$) шарики расходились на угол α_0, а после закручивания на угол β равновесие устанавливалось при угловом расстоянии между шариками α, то должно выполняться соотношение $(\alpha_0/\alpha)^2=(\alpha+\beta)/\alpha_0$. (Кулон приводит данные о чувствительности своих весов. При толщине нити около 40 мкм поворот коромысла весов на 1° требовал приложения силы $F\approx 4\cdot 10^{-9}$ Н (плечо силы $d\approx\approx 11$ см).)

Из таблицы, в которой приведены данные из мемуара Кулона, видно, что полученные Кулоном результаты в целом подтверждали «закон обратных квадратов». (Для изучения силы притяжения между разноименными зарядами была использована другая установка. Схема ее приведена на рисунке.)

Интересно, что закон взаимодействия точечных зарядов до сих пор подвергается экспериментальной проверке. К настоящему времени закон «обратных квадратов» подтвержден с исключительной точностью: поправка δ в показателе степени расстояния ($F\sim r^{-(2\pm\delta)}$) не может превосходить фантастически малую величину: $\delta\leqslant 6\cdot 10^{-16}$!

Кулон использовал крутильные весы и для изучения магнитных взаимодействий. Однако результаты опытов Кулона по магнетизму с современной точки зрения представляют меньший интерес, чем данные электрических опытов, и мы не будем на них останавливаться.

Таблица

α	β	$\alpha+\beta$	$(\alpha+\beta)/\alpha_0$	$(\alpha_0/\alpha)^2$
36	0	36	1	1
18	126	144	4	4
8,5	567	575,5	16	17,9

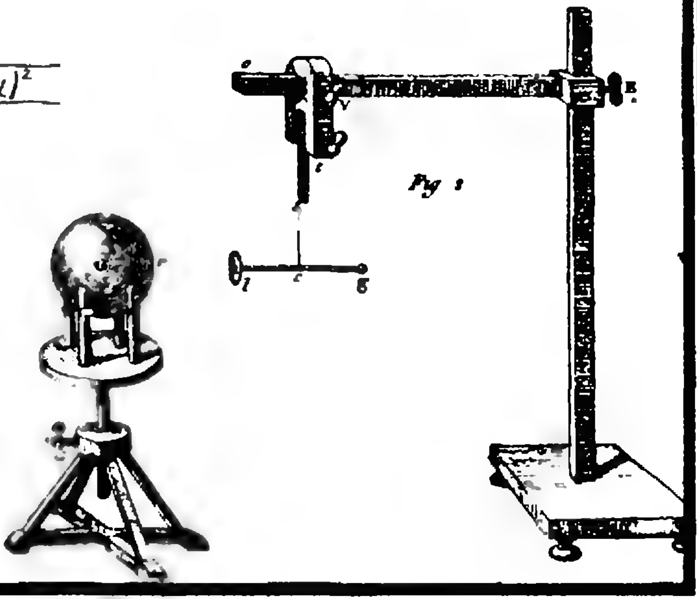
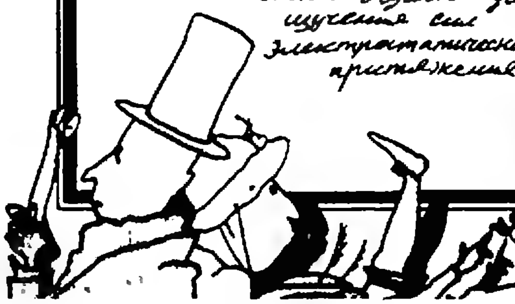


Схема экспериментальной установки Кулона для изучения сил электростатического притяжения.



Круг исследований Кулона в области электричества был очень широк. Он изучил явление утечки заряда, распределение заряда по поверхности проводников сложной формы, исследовал индукционное действие заряженного проводника на нейтральный и т. д. В целом полученные Кулоном результаты стали экспериментальной основой первой последовательной количественной теории электричества, разработанной французским математиком С. Пуассоном в 1811 году.

В 1789 году началась Великая французская буржуазная революция, которая перевернула весь уклад жизни французского общества. Революционные события затронули и Кулона. В 1791 году он в чине майора вышел в отставку. В 1793 году была распущена королевская Академия наук. Кулон с семьей уезжает из Парижа и полтора года живет вдали от столицы.

Однако столь крупный ученый, как Кулон, не мог долго оставаться вне научной жизни. В 1795 году был образован Институт Франции, заменивший старую Академию. Среди первых членов Института был и Кулон. После избрания в новую Академию и возвращения в Париж ученый продолжил свои исследования, однако их интенсивность постепенно спадала.

В последние годы жизни Кулон много сил отдавал работе в качестве генерального инспектора народного образования, участвуя в коренном преобразовании системы просвещения во Франции.

Ученый умер в Париже в 1806 году.

Наш календарь

75-летие открытия сверхпроводимости

Сверхпроводимость была открыта в 1911 году голландским физиком, профессором Лейденского университета Г. Камерлинг-Оннесом. Каковы обстоятельства этого открытия?

В 1908 году Камерлинг-Оннес, впервые ожижив гелий (его температура кипения при атмосферном давлении 4,2 К), сделал доступной для исследований область очень низких температур. Как теперь хорошо известно, в этой температурной области сверхпроводимость обнаруживают множество металлов, сплавов и соединений. Казалось бы, открытие сверхпроводимости стало неизбежным — на него просто нельзя было не натолкнуться, тем более что измерение электросопротивления — едва ли не самое «ходовое» в экспериментальной физике. Однако голландский ученый пришел к своему открытию не совсем случайно.

В те годы физиков очень занимал вопрос, что будет происходить с сопротивлением металлов при приближении к абсолютному нулю температуры. Теория тогда еще ответа дать не могла, и существовали два диаметрально противоположных прогноза. Одни — вслед за Кельвином — полагали, что при абсолютном нуле металл станет

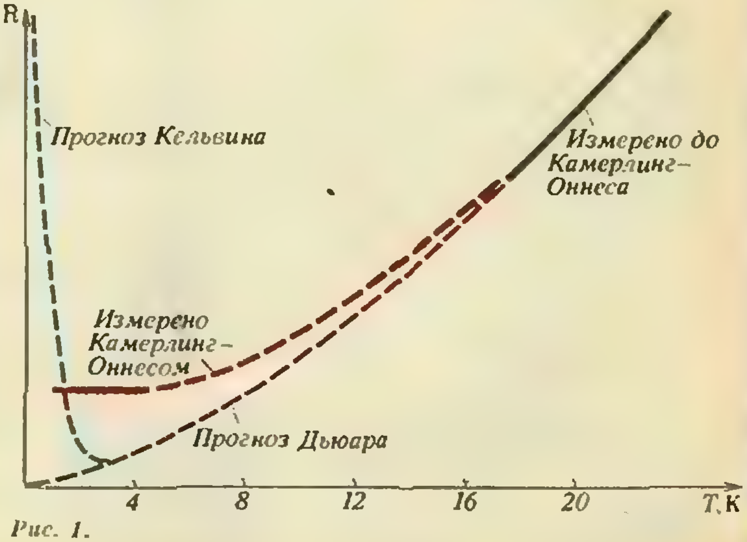


Рис. 1.

изолятором (его сопротивление станет бесконечно большим), другие же разделяли мнение Дьюара, считавшего, что с приближением к нулю сопротивление будет постепенно неограниченно уменьшаться (рис. 1).

Приступить к исследованиям сопротивления металлов *при «гелиевых»* температурах Камерлинг-Оннес смог только в конце 1910 года. И его сразу же ожидал сюрприз: оба прогноза — и кельвиновский и *дьюаровский* — оказались ошибочными. Измерения на проволоке из чистой платины показали, что при самом глубоком охлаждении сопротивление *перестает* зависеть от температуры (см. рис. 1). Сопоставив новый результат со своими более ранними данными, полученными в измерениях при *не столь низких* температурах, голландский физик пришел к выводу: ордината горизонтального участка зависимости R (T) должна *быть тем меньше,* чем чище металл. И, таким образом, в случае металла идеальной чистоты R обратится в нуль еще до подхода к $T=0$. *С точки зрения классической* электронной теории металлов такое падение сопротивления до нуля при ненулевой температуре выглядело абсолютно непонятным, и Камерлинг-Оннес решил привлечь к объяснению квантовую теорию, широкое признание которой начиналось как раз в это время. Таким образом ему удалось вывести зависимость R (T), которую следовало ожидать для идеально чистого металла.

Ясно, что для экспериментальной проверки этой зависимости требовался металл максимальной чистоты. В те времена на эту роль могла претендовать только ртуть, легко поддающаяся эффективной очистке путем дистилляции. Но Камерлинг-Оннес был опытным экспериментатором и прекрасно понимал, сколь неудобно иметь дело со ртутью. Ведь для повышения точности измерений сопротивления величина этого сопротивления должна быть по возможности большой, то есть для экспериментов надо было использовать длинную тонкую проволоку. А ртуть жидкая! Поэтому ученый сначала с помощью своей формулы зависимости R (T) прикинул, чего можно ожидать от такого эксперимента. Расчет показал, что при температуре 4,3 К сопротивление ртути будет еще ощутимым, а при 3 К упадет до неизмеримо низкого уровня. Таким образом, открывалась великолепная возможность проследить в опыте всю картину исчезновения сопротивления, и, имея перед собой столь заманчивую перспективу, стоило пускаться в нелегкую борьбу с экспериментальными трудностями.

Лишь после ряда неудачных попыток Камерлинг-Оннесу и его помощнику стеклодуву-виртуозу удалось разработать необходимый тип образца для измерений — ажурную зигзагообразную конструкцию из тончайших стеклянных капилляров, внутренний канал которых диаметром порядка 50 мкм заполняла жидкая ртуть, образующая единую «нить» длиной около 1 м (рис. 2). Легко представить, сколько хлопот доставлял такой образец. При малейшем неосторожном движении, при слишком быстром охлаждении или отогреве стеклянные капилляры трескались и обламывались; иногда при замораживании *нарушалась* непрерывность ртутной нити...

И все же настойчивость и экспериментальное мастерство победили. Весной 1911 года *Камерлинг-Оннес* торжествовал: опыт — в поразительном согласии с теоретическим предсказанием! — показал, что сопротивление чистой ртути, *еще вполне измеримое при* температуре 4,3 К, при 3 К действительно становится практически неизмеримым.

Однако дальнейшие более точные *измерения поколебали* веру ученого в его теорию.

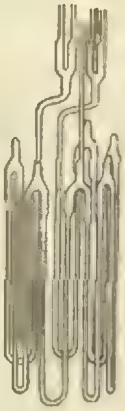


Рис. 2.

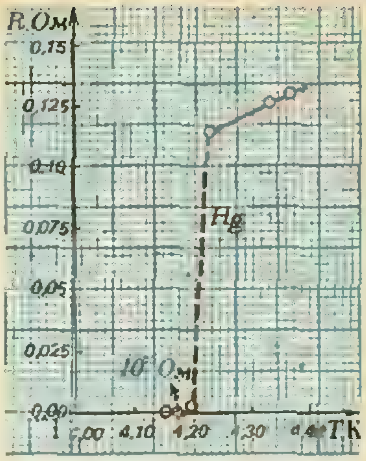


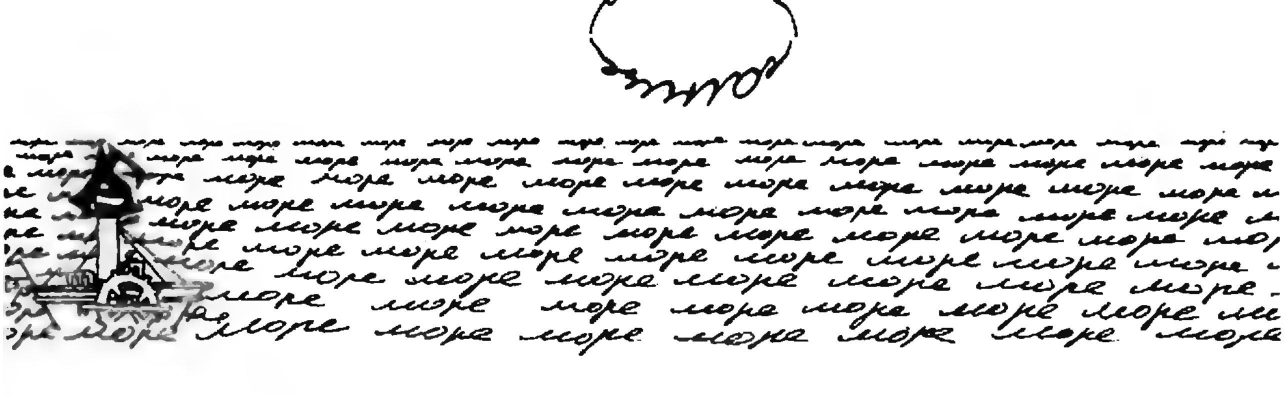
Рис. 3.

Оказалось, что сопротивление исчезает скачком (рис. 3), тогда как формула для R (T) предсказывала хотя и крутое, но все же плавное падение сопротивления. Впоследствии выяснилось, что совпадение теории Камерлинг-Оннеса с опытом вообще чисто случайное. Ученым было открыто принципиально новое явление — сверхпроводимость.

Задача объяснения физической природы сверхпроводимости оказалась исключительно трудной, и решить ее не удавалось около полувека. Теория этого явления была создана лишь в 1957 году американскими учеными Дж. Бардином, Л. Купером и Дж. Шриффером и советским ученым Н. Н. Боголюбовым.

В наши дни учение о сверхпроводимости превратилось в один из наиболее глубоко разработанных разделов физики твердого тела. Огромные успехи достигнуты и в практическом использовании сверхпроводимости — уже работают базирующиеся на этом явлении сверхчувствительные приборы для электромагнитных измерений; широко применяются сверхпроводящие соленоиды, создающие магнитные поля в таких объемах и такой *величины,* о которых в случае обмоток из нормальных проводников нельзя и мечтать. В недалеком будущем промышленная энергетика получит *обладающие неслыханно* высоким КПД сверхпроводящие электрогенераторы и электродвигатели; ведутся работы по созданию сверхкомпьютеров, *которые должны* превзойти теперешние полупроводниковые по быстродействию и объему памяти.

Б. Е. Явелов



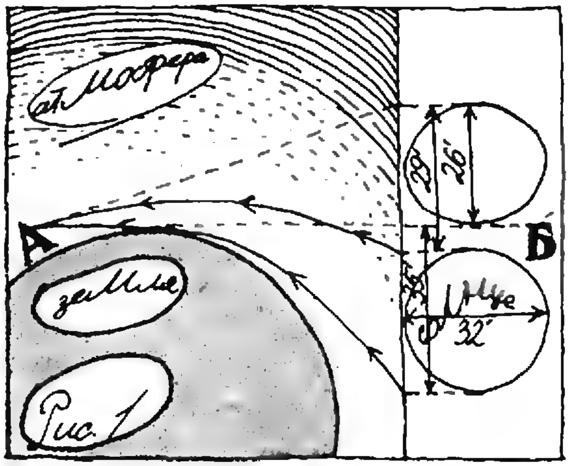
Зеленый луч

Кандидат физико-математических наук
Л. В. ТАРАСОВ

Иногда при заходе солнца можно наблюдать удивительное явление — так называемый зеленый луч. Когда почти весь солнечный диск скрылся за горизонтом, на несколько секунд вдруг вспыхивает яркий зеленый свет. Краешек солнца вместо желто-красного неожиданно превращается в ярко-зеленый, во все стороны от него исходят зеленые лучи. Секунда, другая, третья ..., и красочное зрелище внезапно исчезает. Зеленый луч вероятнее всего увидеть в такой вечер, когда солнце вплоть до самого заката ярко светит и почти не изменяет своего цвета, оставаясь желтым или, в крайнем случае, желтовато-оранжевым. Советский астроном Г. А. Тихов много лет изучал это удивительное явление. Вот что он пишет: «Если солнце при закате красного цвета и на него легко смотреть, то можно с уверенностью утверждать — зеленого луча не будет. Напротив, если солнце не очень изменило свой бело-желтый цвет и садится ярким, то можно предполагать, что зеленый луч появится. Важно, чтобы горизонт имел отчетливую линию, без всяких неровностей: ближнего леса, строений и т. п. Этих условий легче всего достичь на море, вот почему зеленый луч хорошо известен людям моря».

Физика зеленого луча основывается на трех эффектах: 1) эффекте искривления световых лучей в оптически неоднородной среде (в данном случае в земной атмосфере), 2) зависимости степени искривления лучей от длины волны, 3) рассеянии света в атмосфере (точнее, на ослаблении эффекта рассеяния света в достаточно чистой и спокойной атмосфере). Учтем эти эффекты поочередно — сначала первый, а затем последующие.

Известно, что, проходя в атмосфере, световой луч искривляется, причем так, чтобы его траектория всегда была обращена выпуклостью в сторону менее плотных областей воздуха. По этой причине мы видим заходящий солнечный диск немного сплюснутым по вертикали; его вертикальный поперечник виден под углом 26′, что на 6′ меньше углового размера горизонтального поперечника. В этом «повинно» уменьшение плотности атмосферного воздуха с высотой, приводящее к соответствующему искривлению лучей (так называемое явление рефракции света в атмосфере). Когда мы, любуясь на морском берегу солнечным закатом, видим, как нижний край светила коснулся линии горизонта, мы обычно не сознаем, что в действительности в данный момент этот край светила находится на 2°35′ ниже линии горизонта (а значит, и весь солнечный диск находится глубоко за горизонтом). Величина 2°35′



зеленый луч
солнце
зеленый луч
море

складывается из двух слагаемых: 2° *объясняются тем, что свет от* Солнца до Земли идет чуть больше восьми минут; а вот 35′ связаны с рефракцией света в атмосфере. Заметим, что из-за рефракции верхний край солнечного диска «приподнимается» слабее — не на 35′, а только на 29′ (рефракция уменьшается по мере увеличения высоты объекта над горизонтом). *Именно поэтому* заходящее солнце и кажется наблюдателю слегка сплюснутым. Сказанное поясняет рисунок 1, где *А* — наблюдатель, *АБ* — линия горизонта. (В связи с этим советуем вам прочитать статью А. А. Михайлова «Когда день равен ночи», опубликованную в «Кванте» № 6 за 1980 год.) Рефракцией света в атмосфере *объясняются* также миражи (см. статью Г. И. Гринёвой и Г. В. Розенберга «Дела и проделки феи Морганы» в «Кванте» № 8 за 1984 год).

Далее учтем, что чем меньше длина волны света, тем сильнее он преломляется. Именно на этом основано спектральное разложение света в призмах. *Указанный эффект приводит к* тому, что сине-зеленые лучи претерпевают в атмосфере более сильную рефракцию, чем красные лучи. Пусть для простоты в спектре солнечного света имеются всего два цвета — зеленый и красный; «белый» солнечный диск можно рассматривать в данном случае в виде *наложенных друг* на друга зеленого и красного дисков. Рефракция света в атмосфере приподнимает над горизонтом зеленый диск в большей степени, чем красный.

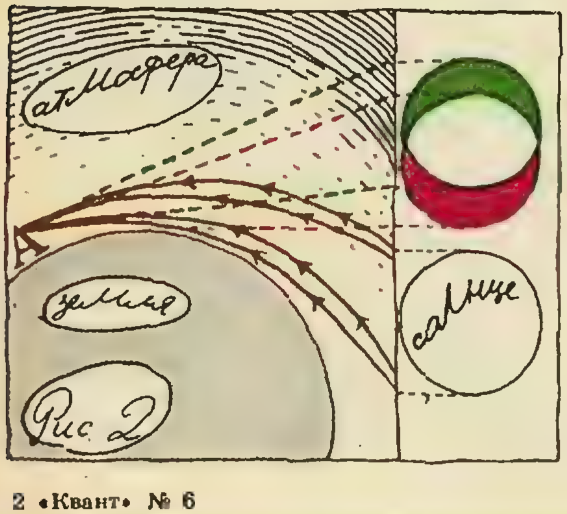


Рис. 2

В результате наблюдатель должен был бы увидеть заходящее солнце таким, каким оно показано в правом *верхнем углу на рисунке* 2. Верхний край диска был бы зеленым, а нижний красным; в центральной же части диска наблюдалось бы смещение цветов (наблюдался бы «белый» цвет).

Описанная картина верна лишь при условии, что атмосфера не рассеивает света. В действительности, однако, *она его рассеивает.* Это приводит к тому, что из светового пучка, идущего от солнца, наиболее эффективно выбывают лучи с более короткой длиной волны (закон рассеяния был установлен Рэлеем: интенсивность рассеянного света обратно пропорциональна четвертой степени длины световой волны). Поэтому *зеленой каемки наверху* диска мы не увидим, а весь солнечный диск будет выглядеть не «белым», а красноватым.

Но вот представим себе, что почти весь солнечный диск скрылся за горизонтом, так что остался лишь самый верхний его краешек. И пусть при этом стоит ясная и тихая погода, *воздух чист,* так что рассеяние света в атмосфере относительно невелико. Вот в этом случае мы и можем увидеть яркозеленый край солнца вместе с россыпью зеленых лучей.

Вызов Ван Роумена

Кандидат физико-математических наук
Ю. П. СОЛОВЬЕВ

В начале октября 1594 года король Франции Генрих IV принимал в Фонтенбло посланника Республики Соединенных Нидерландов, которую по имени самой крупной ее провинции чаще всего называли Голландией. Возникшая в результате длительной и упорной борьбы против испанского владычества, республика была очень молода — ей шел всего второй десяток лет. Война с Испанией не прекращалась — голландское правительство настойчиво искало союзников. А во Франции только что погасли пожары многолетней междоусобицы, и Генрих, преодолев бешеное сопротивление оппозиции, поддерживаемой испанцами, стал французским королем. Генрих не скрывал своего интереса к Голландии как к союзнику в борьбе с Испанией, но более всего его интересовали бурно развивающиеся голландская промышленность, торговля и мореплавание. Поэтому, прогуливаясь по парку в Фонтенбло, он внимательно слушал рассказ посланника о новых шелковых мануфактурах Роттердама, бумажных фабриках Утрехта, корабельных верфях Зандама.

— В Голландии сейчас много талантливых инженеров и ученых,— говорил посланник.— Математик и механик Симон Стевин разрабатывает новые системы шлюзов и плотин, по проектам математика Лудольфа Цейлена возводятся крепости, математик Андриен Ван Роумен славится своими головоломными вычислениями. Кстати,— продолжал посланник,— не так давно Ван Роумен сделал вызов математикам всего мира. Он разослал во многие страны письмо, в котором предлагает решить придуманную им задачу. Но пока это никому не удалось.

— Победителем непременно будет француз,— засмеялся король.

—Ваше Величество,— заметил посланник,— я привез это письмо, но по-видимому, Франция не имеет выдающихся математиков, поскольку Ван Роумен среди тех, кому он адресовал свой вызов, не упомянул ни одного француза.

— И все же у меня есть математик, и весьма выдающийся,— ответил Генрих.— Позовите Виета.

Так в этот осенний день столкнулись судьбы двух очень непохожих людей.

Андриен Ван Роумен — родился в 1561 году в г. Лувене в Испанских Нидерландах (ныне Бельгия). Изучал медицину и математику в Лувенском университете. В Лувене же получил степень доктора. Преподавал математику в Лейдене и Вюрцбурге. Занимался исследованиями по геометрии и тригонометрии, а также практическими вопросами астрономии и навигации. Получил ряд частных результатов о разложении функций $\sin nx$ и $\cos nx$ по степеням $\sin x$ и $\cos x$, определил значение числа π с семнадцатью десятичными знаками, то есть с наивысшей точностью для Европы того времени. При жизни Ван Роумен был очень знаменит в Голландии и Германии, но со временем его работы утратили свое значение, и сейчас упоминания о нем можно разыскать лишь в самых толстых энциклопедиях.

Франсуа Виет — родился в 1540 году в г. Фонтене. С 1559 года занимался адвокатской деятельностью, серьезно интересуясь при этом математикой и астрономией. В 1571 г. переехал в Париж, где продолжал адвокатскую деятельность и завязал знакомства с парижскими математиками. В 1573 году стал советником парламента в Бретани, затем частным советником короля Генриха III. В 1580 году получил должность королевского докладчика по ходатайствам. В последние годы правления Генриха III занимался расшифровкой переписки между противниками короля и испанцами. Нашел ключ к сложному шифру, который использовался испанским королем Филиппом II и его генералами. Филипп II, узнав из перехваченных французских депеш, что его секретную корреспонденцию читают при французском дворе, в гневе принес жалобу Папе Римскому, указывая, что расшифровка явно проводилась с помощью колдовства и черной магии. После убийства Генриха III в августе 1589 г. перешел на службу к Генриху Наваррскому, будущему французскому королю Генриху IV. Автор большого числа работ по алгебре, геометрии, тригонометрии, астрономии. Установил зависимость между корнями и коэффициентами алгебраического уравнения, нашел разложения функций $\sin nx$ и $\cos nx$ по степеням $\sin x$ и $\cos x$, создал современную алгебраическую символику. Работы Виета, написанные тяжелым, усложненным языком, остались непонятыми его современниками и лишь спустя почти полвека после его смерти оказали огромное влияние на развитие алгебры и геометрии.

Но вернемся в Фонтенбло. Когда появился Виет, посланник достал письмо Ван Роумена. В нем предлагалось решить уравнение

$$45x-3795x^{3}+95\,634x^{5}-1138\,500x^{7}+$$
$$+7\,811\,375x^{9}-34\,512\,075x^{11}+$$
$$+105\,306\,075x^{13}-232\,676\,280x^{5}+$$
$$+384\,942\,375x^{17}-488\,494\,125x^{19}+$$
$$+483\,841\,800x^{21}-378\,658\,800x^{23}+$$
$$+236\,030\,652x^{25}-117\,679\,100x^{27}+$$
$$+46\,955\,700x^{29}-14\,945\,040x^{31}+$$
$$+3\,764\,565\,x^{33}-740\,259x^{35}+$$
$$+111\,150x^{37}-12\,300x^{39}+$$
$$+945x^{41}-45x^{43}+x^{45}=a,$$

в частности, при

$$a=\sqrt{1\frac{3}{4}-\sqrt{\frac{5}{16}}-\sqrt{1\frac{7}{8}-\sqrt{\frac{45}{64}}}}.$$

Для облегчения задачи Ван Роумен сообщал ответы, которые получаются при двух других значениях a (записываемых еще более громоздко).

Виет прочел письмо и сразу же написал решение. Посланник сказал, что в резиденции у него имеется запечатанный конверт с решением самого Ван Роумена. В присутствии нотариуса он вскроет его и завтра ответит, прав ли Виет. На следующий день голландец подтвердил, что решение Виета верно, а Виет, в свою очередь, прислал еще двадцать два других решения, не известных Ван Роумену. Кроме того, Виет указал на ошибку в условии задачи (сделанную либо переписчиками, либо самим Ван Роуменом).

Попробуем разобраться, как удалось Виету необыкновенно быстро решить столь чудовищное на первый взгляд уравнение. Обратимся для этого к некоторым его математическим работам. Главными тригонометрическими результатами, полученными Виетом, являются выражения для синусов и косинусов кратных дуг. Виет получает эти выражения в форме правила, указывающего, как чисто механически можно получить их. Это правило похоже на то, которое приведено в статье Д. Б. Фукса «Формулы для $\sin nx$ и $\cos nx$» на с. 25, разница лишь в том, что вместо треугольника Паскаля Виет пользуется следующей таблицей:

1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...
1	3	6	10	15	21	...
1	4	10	20	35	56	...
1	5	15	35	70	126	...
1	6	21	56	126	252	...
1	7	28	84	210	462	...
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

Каждое число здесь получается посредством сложения чисел, стоящих перед ним и над ним. Стоит отметить, что Виет выражает не $\sin nx$ и $\cos nx$ через $\sin x$ и $\cos x$, как это делаем мы, а $2\sin nx$ и $2\cos nx$ через $2\sin x$ и $2\cos x$. Если в образованных таким образом выражениях рассматривать величины $2\sin nx$ или $2\cos nx$ как известные, то мы получим уравнения n-й степени относительно неизвестных $2\sin x$ и $2\cos x$.

Первоначальная цель, ради которой Виет выводил формулы синусов кратных дуг, заключалась в вычислении синусов дуг через синусы малых дуг, то есть в составлении таблицы синусов. Затем эти формулы нашли применение в алгебре и геометрии. В частности, геометрическую задачу о трисекции угла α Виет связал с уравнением $3x-x^3=a$, которому удовлетворяют значения $a=2\sin\alpha$, $x=2\sin(\alpha/3)$. Два положительных решения этого уравнения Виет трактует как хорды, отвечающие дугам $2\alpha/3$ и $(360^\circ-2\alpha)/3$. Отрицательный корень он, по обыкновению своего времени, вообще не принимает во внимание. Точно так же задачу о делении угла на пять равных частей Виет связывает с уравнением $5x-5x^3+x^5=a$, которому удовлетворяют значения $a=2\sin\alpha$, $x=2\sin(\alpha/5)$.

Из сказанного ясно, в какой степени был подготовлен Виет, чтобы мгновенно решить задачу Ван Роумена. Он сразу же увидел, что предложенное значение a является длиной стороны правильного пятнадцатиугольника, вписанного в единичный круг (проверьте это!), или, что то же самое, хордой, отвечающей дуге 24°. Коэффициенты при первом и предпоследнем членах левой части позволили ему предположить, что левая часть есть не что иное, как выражение $2\sin 45\alpha$ через $2\sin\alpha$. Но поскольку $a=2\sin 12^\circ$, то $\alpha=12^\circ/45=4^\circ/15$, и значит, $x=2\sin(4^\circ/15)$. Именно это решение и передал Виет голландскому посланнику.

После аудиенции Виет проверил свое предположение. Однако, проделав необходимые вычисления, он обнаружил, что левая часть предложенного уравнения не совпадает с разложением $2\sin 45\alpha$ по степеням $2\sin\alpha$!

Наверное, в этот момент он чувствовал себя не очень уютно, скорее всего, просто скверно.

Что произошло? Может быть, это всего лишь ошибка в весьма утомительных вычислениях? Видимо, в этот момент Виет и сумел найти другой — геометрический — способ выразить $2\sin 45\alpha$ через $2\sin\alpha$: для того чтобы разделить дугу на 45 частей, нужно разделить ее сначала на пять частей, затем каждую часть на три и снова на три. Другими словами, левую часть уравнения Ван Роумена можно получить из системы

$$\begin{cases} 3z-z^3=a, \\ 3y-y^3=z, \\ 5x-5x^3+x^5=y. \end{cases}$$

Лишь проанализировав те ответы, которые сообщал Ван Роумен для двух других значений a, Виет убедился, что речь действительно идет о делении дуги на сорок пять частей и смело исправил ошибку в условии. Но Виет не ограничился этим решением. Двадцать два других решения, сообщенных им на следующий день, имели вид

$$2\sin\frac{360^\circ k+12^\circ}{45}=2\sin\frac{120^\circ k+4^\circ}{15},$$
$$k=1,\ 2,\ \ldots,\ 22.$$

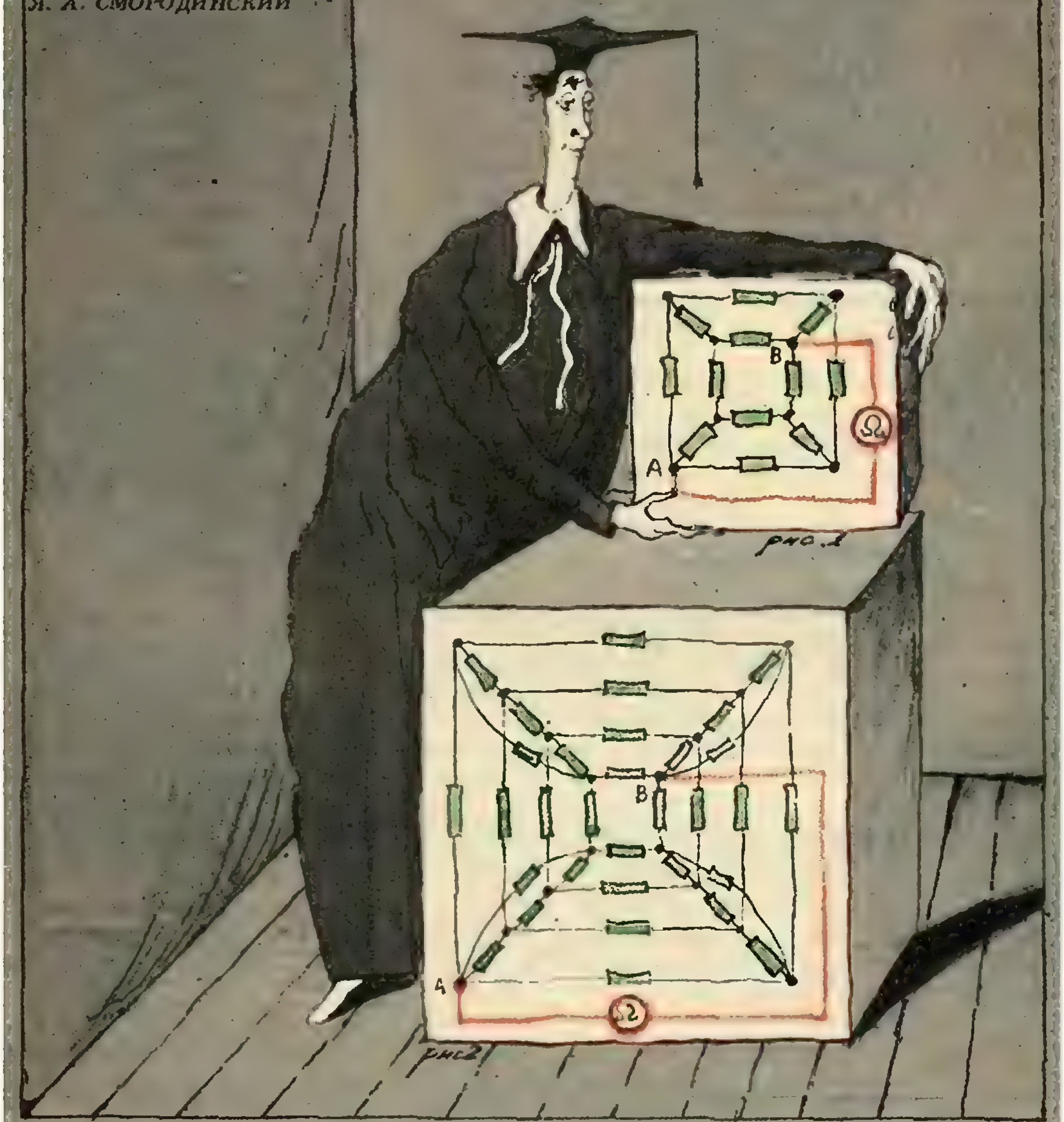
Таким образом, Виету удалось найти все положительные корни (напомним, что только они считались решениями в его время).

Здесь можно было бы поставить точку, однако математическое соревнование между Виетом и Ван Роуменом на этом не кончилось. Спустя короткое время Виет предложил Роумену построить циркулем и линейкой окружность, касающуюся трех данных окружностей (задача Аполлония). Вскоре Виет указал изящное геометрическое построение, выполнимое только циркулем и линейкой.

Рассказывают, что, потерпев второе поражение, Ван Роумен стал ревностным почитателем Виета и даже приезжал к нему учиться.

Сопротивление ребер многомерного куба

Ф. НЕДЕМЕЙЕР (ВНР),
доктор физико-математических наук
Я. А. СМОРОДИНСКИЙ



В конце сороковых годов в математических кружках Москвы появилась задача об электрическом сопротивлении проволочного куба. Кто ее придумал или нашел в старых учебниках, *мы не знаем*. Задача была очень популярной, и о ней быстро узнали все. Очень скоро ее стали задавать на экзаменах, и она перешла в разряд почти тривиальных.

Задачу эту можно сформулировать так: *сосчитайте сопротивление R_3 между точками A и B на схеме из рисунка 1, при условии, что все показанные на схеме сопротивления равны 1 Ом.*

— Ну и что здесь интересного? — спросит скептический читатель. — Нужно долго и нудно считать по законам Кирхгофа и все получится. В общем — скучная задача по физике.

Если такому читателю предложить сосчитать сопротивление R_4 между точками A и B при том же условии, но уже на схеме с рисунка 2, он и вовсе

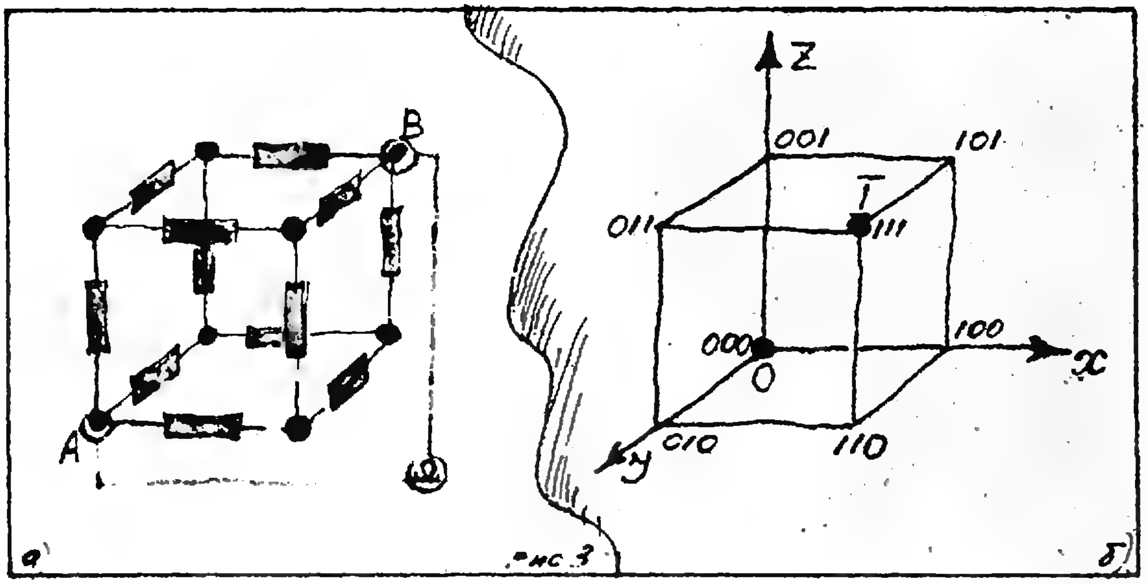


рис. 3

рассердится — мыслимо ли проводить такой счет?

Между тем в этих задачах скрыты красивые геометрические и алгебраические закономерности (недаром эта с виду физическая задача рассматривалась на математических кружках), позволяющие их решить без всякого «нудного счета», а также неожиданным образом их обобщить.

Случай трехмерного и четырехмерного кубов

Начнем с очевидного геометрического наблюдения: схема на рисунке 1 — это схема ребер обычного куба (сравните рисунки 1 и 3, *а*). В качестве модели нашего куба рассмотрим стандартный единичный куб в системе координат $Oxyz$, сопоставив точкам O и I вершины (0; 0; 0) и (1; 1; 1), подразумевая наличие сопротивлений в 1 Ом на всех ребрах куба. Заметим, что координаты вершин куба (и только координаты этих 6 точек) состоят лишь из нулей и единиц. Назовем сумму координат какой-либо вершины ее *рангом*. Если между точками O и I создать разность потенциалов, то *потенциал вершин одинакового ранга одинаков* (это очевидно из соображений симметрии). Поэтому можно, не меняя сопротивления схемы, закоротить вершины одного ранга, получив схему, состоящую из трех последовательно соединенных групп параллельных сопротивлений (рис. 4). Для такой схемы задача решается устно (см. рис. 4): сопротивление R_3 равно 5/6 Ом.

Для подсчета сопротивления второй схемы (см. рис. 2) заметим, что эта схема — схема ребер четырехмерного куба *). Это — уже менее очевидное геометрическое наблюдение. Читатель может произвести его, сравнив рисунок 2 с рисунком 7 на с. 6. Далее подсчет выполняется точно так же, как в случае обычного куба. При подсчете (показанном на рисунке 5) вновь используется то, что *вершины одного ранга имеют одинаковый потенциал* и поэтому могут быть закорочены (без изменения общего сопротивления между точками O и I). Ответ получается такой: $R_4 = 2/3$ Ом.

Задача 1. Сосчитайте сопротивление ребер R_5 пятимерного куба между его диаметрально противоположными вершинами при условии, что сопротивление каждого ребра равно 1 Ом.

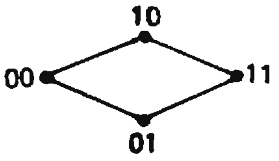
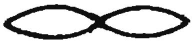
Сопротивление ребер *n*-мерного куба

Задачу о сопротивлении ребер куба можно обобщить дальше, рассматривая кубы размерности $n=5$, 6, 7, 8 и т. д. Это можно сделать по той же схеме, что для $n=2$, 3, 4, однако мы не будем в праве считать себя математиками, если не сумеем сразу *сосчитать сопротивление R_n n-мерного куба между его противоположными вершинами* для любого n (определение n-мерного куба см. на с. 7).

Читатель может спросить — правомерна ли такая постановка задачи, ведь n-мерный куб при $n > 3$ — лишь

---

*) С понятием четырехмерного куба можно познакомиться в статье С. В. Дужина и В. Н. Рубцова в этом номере «Кванта».

Ранг	0	1	2	Σ
				
Число вершин	1 +	2 +	1 =	4
Число ребер	2 +	2 =		4
Схема 				
Сопротивления	1/2 +	1/2 =		1

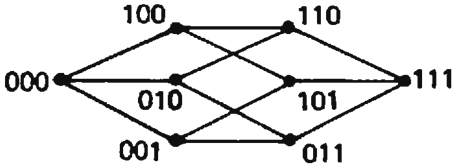
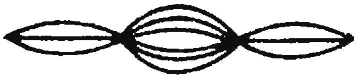
Ранг	0	1	2	3	Σ
					
Число вершин	1 +	3 +	3 +	1 =	8
Число ребер	3 +	6 +	3 =		12
Схема 					
Сопротивления	1/3 +	1/6 +	1/3 =		5/6

Рис. 4.

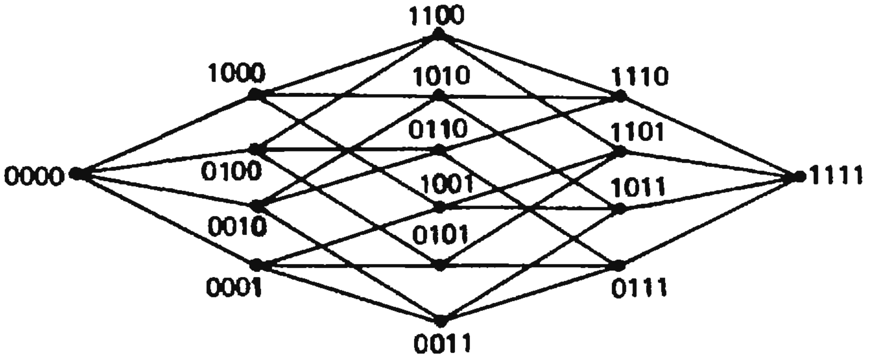
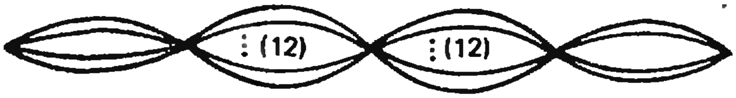
Ранг	0	1	2	3	4	Σ
						
Число вершин	1 +	4 +	6 +	4 +	1 =	16
Число ребер	4 +	12 +	12 +	4 =		32
Схема 						
Сопротивления	1/4 +	1/12 +	1/12 +	1/4 =		2/3

Рис. 5.

Рис. 6.

Ранг	0	1	2 . . . k − 1	k . . . n − 1	n
Число вершин	1 +	n +	$\frac{n(n-1)}{2}$ + . . . +	C_n^k + . . . + n +	1 = 2^n
Число ребер	n +	n(n − 1) + . . .	+(n − k) C_n^k + . . . +	n =	?
Сопротивления	$\frac{1}{n}$ +	$\frac{1}{n(n-1)}$ + . . . +	$\frac{1}{n\,C_{n-1}^k}$ + . . . +	$\frac{1}{n}$ =	?

математическая абстракция, он не существует «на самом деле», так что непонятно, какой смысл в подсчете сопротивления его ребер. Отвечаем. Смысл есть, поставленная задача — вполне реальная физическая задача. Дело в том, что хотя сам n-мерный куб при $n>3$ нельзя поместить в трехмерное пространство, схема его ребер без труда в обычное пространство помещается. Так, на рисунке 2 (или 5) видно, как это делается для четырехмерного куба, а на обложке журнала даже показана схема ребер восьмимерного куба! В общем случае (n — любое) вложимость схемы ребер n-мерного куба в трехмерное пространство — несложная математическая теорема, на доказательстве которой мы останавливаться не будем.

Интересно отметить, что схему ребер трехмерного куба можно разместить без самопересечений на плоскости (см. рис. 1), однако доказано (это уже трудная теорема), что схему ребер четырехмерного (и вообще n-мерного при $n \geqslant 4$) куба поместить на плоскость без самопересечений нельзя.

Как читатель наверняка догадался, подсчет R_n проводится в сущности так же, как R_3 и R_4. Проследить за ним можно по рисунку 6. Ответ таков:

$$\boxed{R_n=\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)\,C_n^k},} \qquad (1)$$

где C_n^k — биномиальный коэффициент (см. «Квант», 1986, № 1, с. 23).

При подсчете мы вновь пользуемся тем, что вершины одного ранга имеют тот же потенциал, и поэтому все сводится к подсчету числа ребер, соединяющих вершины соседних рангов. Понятно, что число вершин ранга k равно C_n^k (их столько, сколько имеется способов поставить k цифр 1 на n мест), а число ребер, исходящих из каждой вершины ранга k равно $n-k$ (почему?); значит, число ребер между вершинами k-го и $(k+1)$-го ранга равно $(n-k)\,C_n^k$. Эти ребра можно считать параллельно соединенными, поэтому получаем (1).

Задачи

2. Проверьте, что $(n-k)\,C_n^k=nC_{n-1}^k$, обосновав тем самым соотношение

$$\boxed{R_n=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{C_{n-1}^k}.} \qquad (2)$$

3. Пользуясь формулой (2), докажите, что

$$\boxed{R_n=\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)\,2^k}.} \qquad (3)$$

4. Установите рекуррентное соотношение

$$\boxed{R_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{2}R_{n-1}}$$

алгебраически (пользуясь формулой (3)) и геометрически. Проверьте наши подсчеты R_3, R_4, R_5, исходя из этого соотношения и равенств $R_1=R_2=1$.

Другие обобщения

Предлагаемые здесь методы подсчета можно применить и к другим задачам, например такой:

Задача 5. Сосчитайте сопротивление проволочного трехмерного куба между соседними вершинами при условии, что сопротивление каждого ребра равно 1 Ом. Обобщите на любое n.

Более интересно менять не точки приложения омметра, а конфигурацию рассматриваемой схемы. Наши рассуждения сохраняют силу для любой схемы, у которой в каждый узел подключено одинаковое количество ребер (сопротивлений в 1 Ом).

Задача 6. Покажите, что сопротивление между соседними узлами схемы из m узлов, в каждой из которых входит s сопротивлений в 1 Ом, равно

$$R=\frac{2}{s}\left(1-\frac{1}{m}\right).$$

Например, для бесконечной двумерной квадратной сетки получается простой ответ: $R=1/2$ ($s=4$, $m=\infty$). Для сетки из треугольников ($s=6$, $m=\infty$) $R=1/3$, для сетки из шестиугольников ($s=3$, $m=\infty$) $R=2/3$, для тетраэдра ($s=3$, $m=4$) $R=1/2$. Для n-мерного куба получаем ($s=n$, $m=2^n$):

$$\boxed{R=\frac{2}{n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right).}$$

Еще более интересна (но, увы, не элементарна!) задача о подсчете сопротивления между соседними по диагонали узлами бесконечной квадратной сетки из сопротивлений в 1 Ом. Ответ оказывается равным $2/\pi$ Ом, хотя в схеме нет ни намека на окружность!

Математика 9, 10

Публикуемая ниже заметка предназначена девятиклассникам и десятиклассникам. Она также будет полезна тем, кто готовится к вступительным экзаменам в вузы.

Самое замечательное свойство треугольника Паскаля состоит в том, что числа из его n-й строки — это коэффициенты многочлена

$$
\begin{aligned}
&(x+1)^n:\\
&(x+1)^1= x+1,\\
&(x+1)^2= x^2+2x+1,\\
&(x+1)^3= x^3+3x^2+3x+1,\\
&(x+1)^4= x^4+4x^3+6x^2+4x+1,\\
&(x+1)^5= x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1
\end{aligned}
$$

. . . .

Когда-то это проходили в школе, но теперь не проходят.

Формулы для $\sin nx$ и $\cos nx$

Сборники задач для поступающих в вузы пестрят синусами и косинусами «кратных углов», то есть выражениями типа $\sin 7x$, $\cos 9x$ и т. п. Не всегда, но довольно часто бывает полезно записать эти выражения как функции от $\sin x$ и $\cos x$. В принципе это можно сделать совершенно автоматически при помощи формул для синуса и косинуса суммы, но при многократном применении даже самой простой формулы никто не застрахован от ошибок; к тому же может помешать нехватка времени. Ниже приводится простой, легко запоминающийся и надежный способ написания формул для $\sin nx$ и $\cos nx$.

Треугольник Паскаля. Вполне возможно, что читатель знает, что это такое; все же напомним определение. Треугольник Паскаля — это числовая таблица, в n-й строке которой стоят $n+1$ натуральных чисел. При этом в верхней строке стоят две единицы и при каждом n в n-й строке стоят по краям единицы, а на остальных местах — суммы последовательных пар соседних чисел из $(n-1)$-й строки (рис. 1).

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

. . . .

Рис. 1.

Формулы. Напишите n-ю строку треугольника Паскаля. (Кстати, для того чтобы найти n-ю строку, не нужно считать строки: в n-й строке на втором месте стоит n.) Припишите к числам из этой строки последовательно $\cos^n x$, $\cos^{n-1}x \sin x$, $\cos^{n-2}x\sin^2 x, \ldots$ $\ldots, \sin^n x$. Подчеркните в получившейся цепочке выражения, стоящие на четных местах: втором, четвертом и т. д. Выпишите неподчеркнутые выражения и подчеркнутые выражения в две отдельные строчки. В каждой из получившихся двух строчек поставьте перед вторым выражением минус, перед третьим плюс, перед четвертым минус и т. д. Все готово — в верхней строчке вы написали выражение для $\cos nx$, в нижней — для $\sin nx$.

Примеры. При $n=2$ строка треугольника Паскаля имеет вид 1, 2, 1. Пишем:

$$\boxed{\cos^2 x \quad 2\cos x \sin x \quad \sin^2 x}$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x,$$
$$\sin 2x=2\cos x \sin x.$$

При $n=3$ пишем:

$$\boxed{\cos^3 x \quad 3\cos^2 x \sin x \quad 3\cos x \sin^2 x \quad \sin^3 x}$$

$$\cos 3x=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x,$$
$$\sin 3x=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x.$$

Несколько полученных этим способом формул для $\cos nx$ и $\sin nx$ читатель найдет на рисунке 2; вдоль красных ломаных на этом рисунке можно прочесть строки треугольника Паскаля.

Упражнение. Зная n-ю строку треугольника Паскаля, легко написать формулу, выражающую $\operatorname{tg} nx$ через $\operatorname{tg} x$. Попробуйте это сделать.

Доказательство формул. Вообще-то эти формулы являются следствием «формулы Муавра» («Квант», 1983, № 2, с. 19, статья Л. С. Понтрягина «Комплексные числа»). Но, чтобы не ссылаться на не входящий в програм-

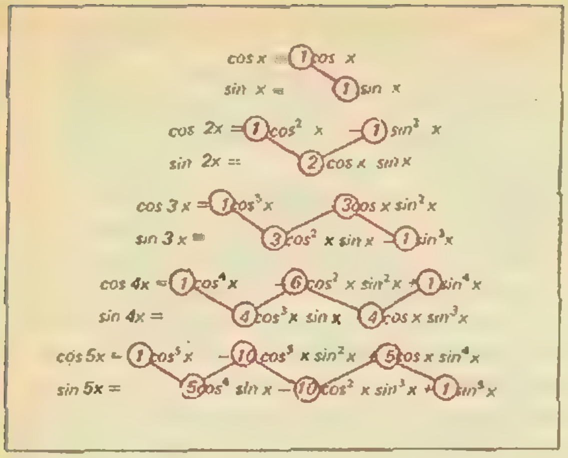

cos x = ① cos x
sin x = ① sin x
cos 2x = ① cos² x − ① sin² x
sin 2x = ② cos x sin x
cos 3x = ① cos³ x − ③ cos x sin² x
sin 3x = ③ cos² x sin x − ① sin³ x
cos 4x = ① cos⁴ x − ⑥ cos² x sin² x + ① sin⁴ x
sin 4x = ④ cos³ x sin x − ④ cos x sin³ x
cos 5x = ① cos⁵ x − ⑩ cos³ x sin² x + ⑤ cos x sin⁴ x
sin 5x = ⑤ cos⁴ sin x − ⑩ cos² x sin³ x + ① sin⁵ x

Рис. 2.

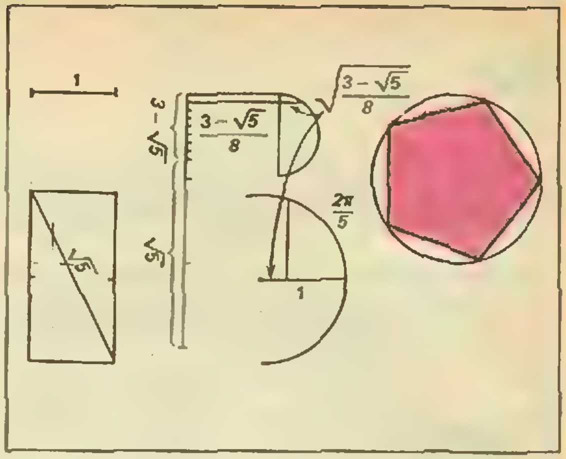

1
3 − √5
(3 − √5)/8
√((3 − √5)/8)
√5
√5
2π/5
1

Рис. 3.

му материал, мы приведем их прямое доказательство по индукции.

При $n=2$ формулы общеизвестны. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}$ есть n-я строка треугольника Паскаля. Предположим, что формулы

$$\cos nx = a_1\cos^n x - a_3\cos^{n-2}x\sin^2 x + \ldots,$$

$$\sin nx = a_2\cos^{n-1}x\sin x - a_1\cos^{n-3}x\sin^3 x + \ldots$$

уже доказаны. По формуле для косинуса суммы

$$\cos(n+1)x = \\ = \cos(nx+x) = \cos nx\ \cos x - \sin nx\sin x = \\ = (a_1\cos^n x - a_3\cos^{n-2}x\sin^2 x + \ldots)\cos x - \\ -(a_2\cos^{n-1}x\sin x - a_4\cos^{n-3}x\sin^3 x + \ldots)\sin x.$$

Раскрывая скобки и перегруппировывая слагаемые, получаем:

$$\cos(n+1)x = \\ = a_1\cos^{n+1}x - (a_2+a_3)\cos^{n-1}x\sin^2 x + \\ +(a_4+a_5)\cos^{n-3}x\sin^4 x - \ldots$$

Аналогично, при помощи формулы $\sin(n+1)x = \sin nx\cos x + \cos nx\sin x$ получается

$$\sin(n+1)x = \\ = (a_1+a_2)\cos^n x\sin x - (a_3+a_4)\cos^{n-2}x\sin^2 x + \ldots$$

Поскольку a_1, a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, ... есть $(n+1)$-я строка треугольника Паскаля, мы доказали для $\cos(n+1)x$ и $\sin(n+1)x$ нужные формулы.

Заключение. Построение циркулем и линейкой правильного пятиугольника (читать только любознательным!). Пусть $x=2\pi/5$. Тогда $5x=2\pi$ и $\sin 5x=0$. По нашей формуле

$$\sin 5x = 5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \\ +\sin^5 x = \sin x(5\cos^4 x - \\ -10\cos^2 x\ (1-\cos^2 x) + (1-\cos^2 x)^2) = \\ = \sin x(16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1).$$

Таким образом

$$\sin x(16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1) = 0,$$

откуда либо $\sin x = 0$, либо $\cos x = \pm\sqrt{\frac{3\pm\sqrt5}{8}}$. Так как $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, нам подходит только возможность $\cos x = \sqrt{\frac{3-\sqrt5}{8}}$. Принимая за 1 радиус окружности, в которую вписан наш пятиугольник, мы последовательно строим отрезок длины $\sqrt{\frac{3-\sqrt5}{8}}$, дугу $2\pi/5$ — и вписанный в окружность правильный пятиугольник. Детали построения представлены на рисунке 3.

Замечание. Это построение лишено практической ценности: при помощи общедоступных инструментов трудно достичь сколько-нибудь удовлетворительной точности. Интересен сам факт, что правильный пятиугольник можно построить циркулем и линейкой, в отличие, скажем, от правильного семиугольника (см. статью А. А. Кириллова «О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма», «Квант», 1977, № 7).

Д. Б. Фукс

Раздел философии, называемый математикой, является самым легким из всех разделов с точки зрения представления и доказательств... Этот раздел философии сообщает нам гибкость, укрепляет соображение, приучает нас ненавидеть недосказанное, так как его исходные положения общеизвестны, доказательства легки, в нем воображение помогает разуму и мало противоречивого.

Омар Хайям

Квант для младших школьников

Задачи

1. Определите угол, который стрелки часов составляют в 9 часов 20 минут.

2. Расшифруйте числовой ребус:

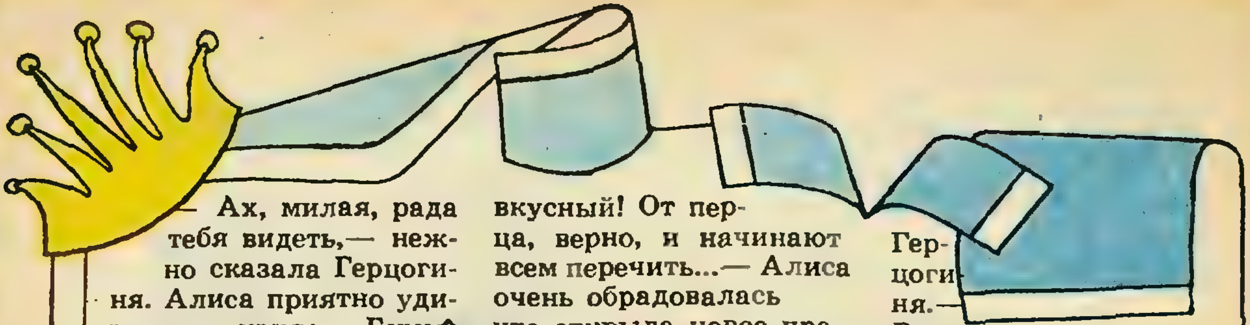
$$\begin{array}{r} \text{КТО} \\ +\ \text{КОТ} \\ \hline \text{ТОК} \end{array}$$

3. В те, еще не столь давние времена, когда непременной принадлежностью чаепития был пыхтящий самовар с восседающим на нем заварным чайником, накрытым расшитой льняной салфеткой, заварные чайники делались с дырочкой в крышке (такие чайники делают и сейчас). Зачем нужна такая дырочка?

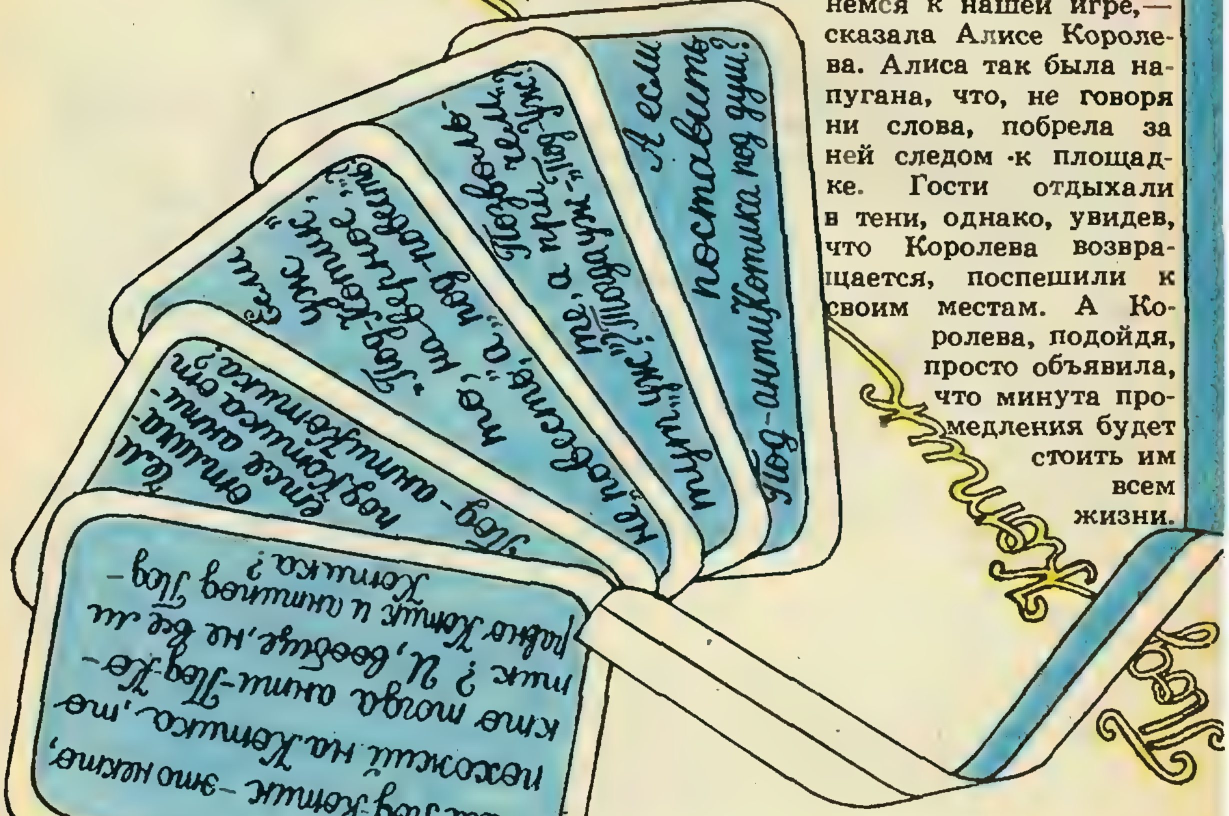
4. Найдите наименьшее число, сумма цифр которого делится на 17, и сумма цифр следующего за ним числа тоже делится на 17.

5. Алик, Боря, Витя и Гена ходили по грибы. Алик с Борей вместе собрали грибов столько же, сколько Витя с Геной вместе, а у Алика с Геной грибов оказалось меньше, чем у Бори с Витей. Гена нашел грибов больше, чем Витя. Расположите имена мальчиков в порядке убывания числа найденных каждым из них грибов.

Эти задачи нам предложили *А. П. Савин*, семиклассник Кашкадаринской школы Масаллинского района АзССР *Назим Садыгов*, *А. Г. Самосват*, *Г. А. Гальперин*, *Н. Х. Розов*.



— Ах, милая, рада тебя видеть,— нежно сказала Герцогиня. Алиса приятно удивилась, увидев Герцогиню в отличном расположении духа, и подумала, что, должно быть, от перца она была такой вспыльчивой.— 7 ☐ Когда я буду Герцогиней,— сказала она про себя, — у меня в кухне совсем не будет перца. Суп и без него вкусный! От перца, верно, и начинают всем перечить...— Алиса очень обрадовалась что открыла новое правило 3 ♡ от уксуса куксятся,— продолжала она задумчиво,— от горчицы — огорчаются, от лука — лукавят, от сдобы — добреют. Как жалко, что никто об этом не знает... Все было бы так просто! Ели бы сдобу и добрели! Она совсем забыла о Герцогине и вздрогнула, когда та сказала ей прямо в ухо: — Ты о чем-то задумалась, милочка. А мораль отсюда такова... Нет, что-то не соображу!...— А может, здесь и нет никакой морали,— заметила Алиса.— Как это нет! — возразила Герцогиня.— Во всем есть своя мораль, нужно только уметь ее 8 ☐ найти! Тут, к великому удивлению Алисы, Герцогиня умолкла и задрожала. Алиса подняла глаза и увидала, что перед ними, грозно нахмурившись, стоит Королева.— Прекрасная погода, Ваше Величество,— слабо прошептала Герцогиня.— Я тебя честно предупреждаю,— закричала Королева и топнула ногой.— Либо мы лишимся твоего общества, либо ты лишишься головы. Решай сейчас же, нет — в два раза быстрее!— Герцогиня решила и тотчас исчезла. 4 ♤ Вернемся к нашей игре,— сказала Алисе Королева. Алиса так была напугана, что, не говоря ни слова, побрела за ней следом к площадке. Гости отдыхали в тени, однако, увидев, что Королева возвращается, поспешили к своим местам. А Королева, подойдя, просто объявила, что минута промедления будет стоить им всем жизни.

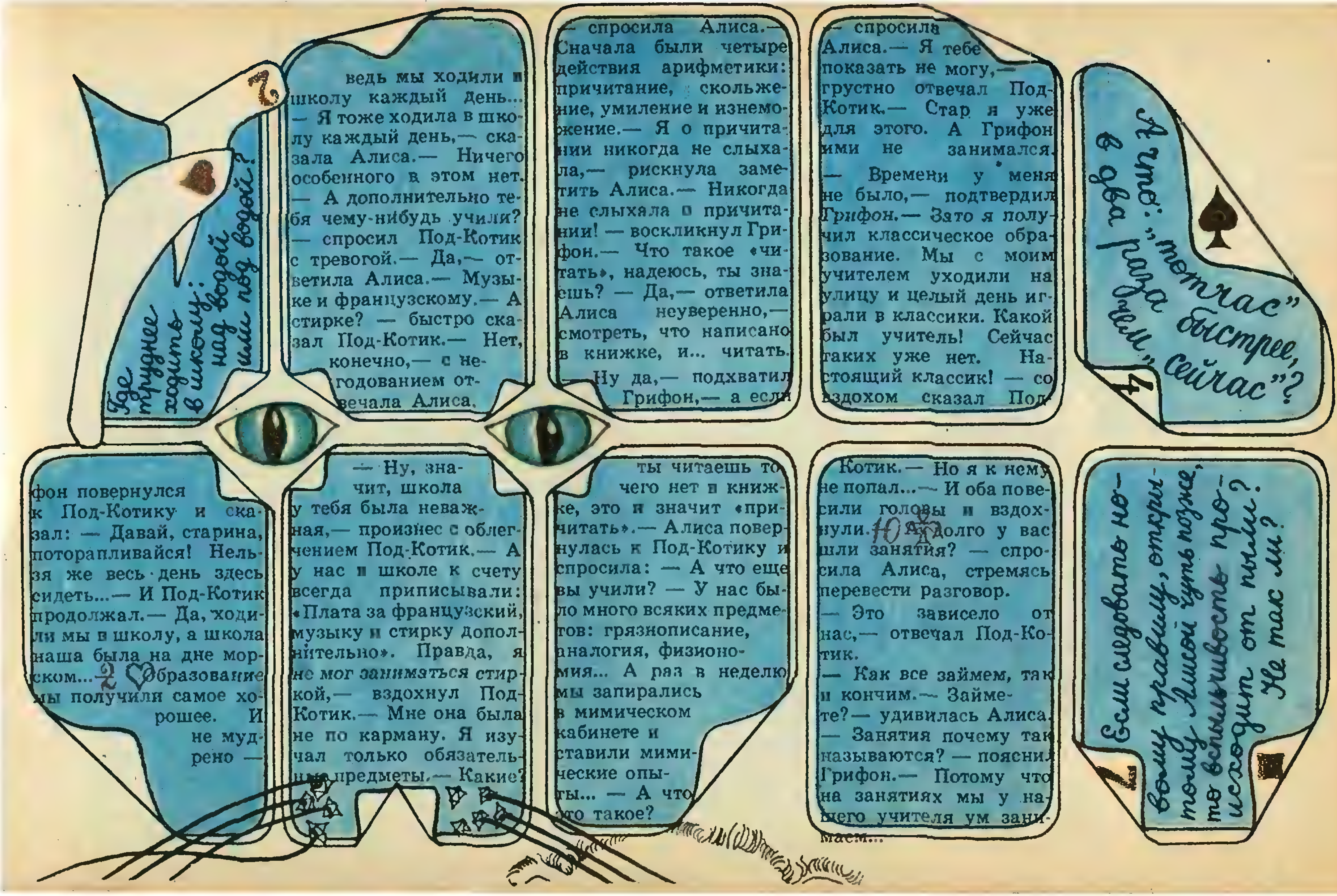

Под-Котик не повесть
Если Под-Котик — это некто, похожий на Котика, то кто тогда анти-Под-Котик? И, вообще, не все ли равно Котик и антипод Под-Котика?
Чем отличается анти-подКотика от Под-антиКотика?
Если уж „Под-Котик", то, наверное, не повесть, а „под-повесть"?
Позвольте, а при чем тут „уж"? Тогда уж „Под-Уж"!
А если поставить Под-антиКотика под душ?

Пока шла игра, Королева беспрестанно ссорилась с игроками. Наконец она бросила игру и, переводя дыхание, спросила Алису:

— А видела ты Под-Котика? — Нет,— сказала Алиса.— Я даже не знаю, кто это такой.— Как же,— сказала Королева.— Это такой *зверь. Из него делают* шапки и муфты «под котик».

— Пошли. Он тебе сам все расскажет. Вскоре они увидели Грифона, крепко спящего на солнцепеке.— Вставай, бездельник,— сказала Королева,— отведи эту барышню к Под-Котику. Пусть расскажет ей свою историю.— И она ушла, оставив Алису с Грифоном.— Смех да и *только!* — пробормотал Грифон.— Смех? — переспросила Алиса растерянно.— Ну да,— ответил *Грифон*.— Все это выдумки. Казнить! Скажет тоже! У них такого отродясь не было. Ладно, пошли! *«Все здесь только и говорят что «пошли»!»*,— подумала Алиса.— Никогда в жизни еще мною так не помыкали!» Когда они подошли к Под-Котику, тот взглянул на них большими полными слез глазами.

— Эта барышня,— *начал Грифон*,— хочет послушать твою историю. Вынь да положь ей эту историю! — Что же, я расскажу,— проговорил Под-Котик глухим голосом.— Садись и не открывай рта, пока я не кончу. Грифон и Алиса уселись. Наступило молчание. «Не знаю, как это он собирается кончить, если никак не может начать»,— подумала про себя Алиса. Но делать было нечего — она *терпеливо* ждала. Наконец Под-Котик немного успокоился и, тяжело вздыхая, заговорил.— Когда мы были *маленькие*, мы ходили в школу на дне моря. Учителем у нас был старый Котик. Мы звали его Спрутиком.— Зачем же вы звали его Спрутиком? — спросила Алиса.— Мы его звали Спрутиком, потому что он всегда ходил с прутиком,— *ответил сердито* Под-Котик.— Ты не очень-то догадлива!— Гри-



фон повернулся к Под-Котику и сказал: — Давай, старина, поторапливайся! Нельзя же весь день здесь сидеть...— И Под-Котик продолжал.— Да, ходили мы в школу, а школа наша была на дне морском... Образование мы получили самое хорошее. И не мудрено — ведь мы ходили в школу каждый день...

— Я тоже ходила в школу каждый день,— сказала Алиса.— Ничего особенного в этом нет.

— А дополнительно тебя чему-нибудь учили? — спросил Под-Котик с тревогой.— Да,— ответила Алиса.— Музыке и французскому.— А стирке? — быстро сказал Под-Котик.— Нет, конечно,— с негодованием ответила Алиса.

— Ну, значит, школа у тебя была неважная,— произнес с облегчением Под-Котик.— А у нас в школе к счету всегда приписывали: «Плата за французский, музыку и стирку дополнительно». Правда, я *не мог заниматься стиркой*,— вздохнул Под-Котик.— Мне она была не по карману. Я изучал только обязательные предметы.— Какие? — спросила Алиса.— Сначала были четыре действия арифметики: причитание, скольжение, умиление и изнеможение.— Я о причитании никогда не слыхала,— рискнула заметить Алиса.— Никогда не слыхала о причитании! — воскликнул Грифон.— Что такое «читать», надеюсь, ты знаешь? — Да,— ответила Алиса неуверенно,— смотреть, что написано в книжке, и... читать.

— Ну да,— подхватил Грифон,— а если ты читаешь то, чего нет в книжке, это и значит «причитать».— Алиса повернулась к Под-Котику и спросила: — А что еще вы учили? — У нас было много всяких предметов: грязнописание, аналогия, физиономия... А раз в неделю мы запирались в мимическом кабинете и ставили мимические опыты... — А что это такое? — спросила Алиса.— Я тебе показать не могу,— грустно отвечал Под-Котик.— Стар я уже для этого. А Грифон ими не занимался.

— Времени у меня не было,— подтвердил Грифон.— Зато я получил классическое образование. Мы с моим учителем уходили на улицу и целый день играли в классики. Какой был учитель! Сейчас таких уже нет. Настоящий классик! — со вздохом сказал Под-Котик.— Но я к нему не попал...— И оба повесили головы и вздохнули.— А долго у вас шли занятия? — спросила Алиса, стремясь перевести разговор.

— Это зависело от нас,— отвечал Под-Котик.

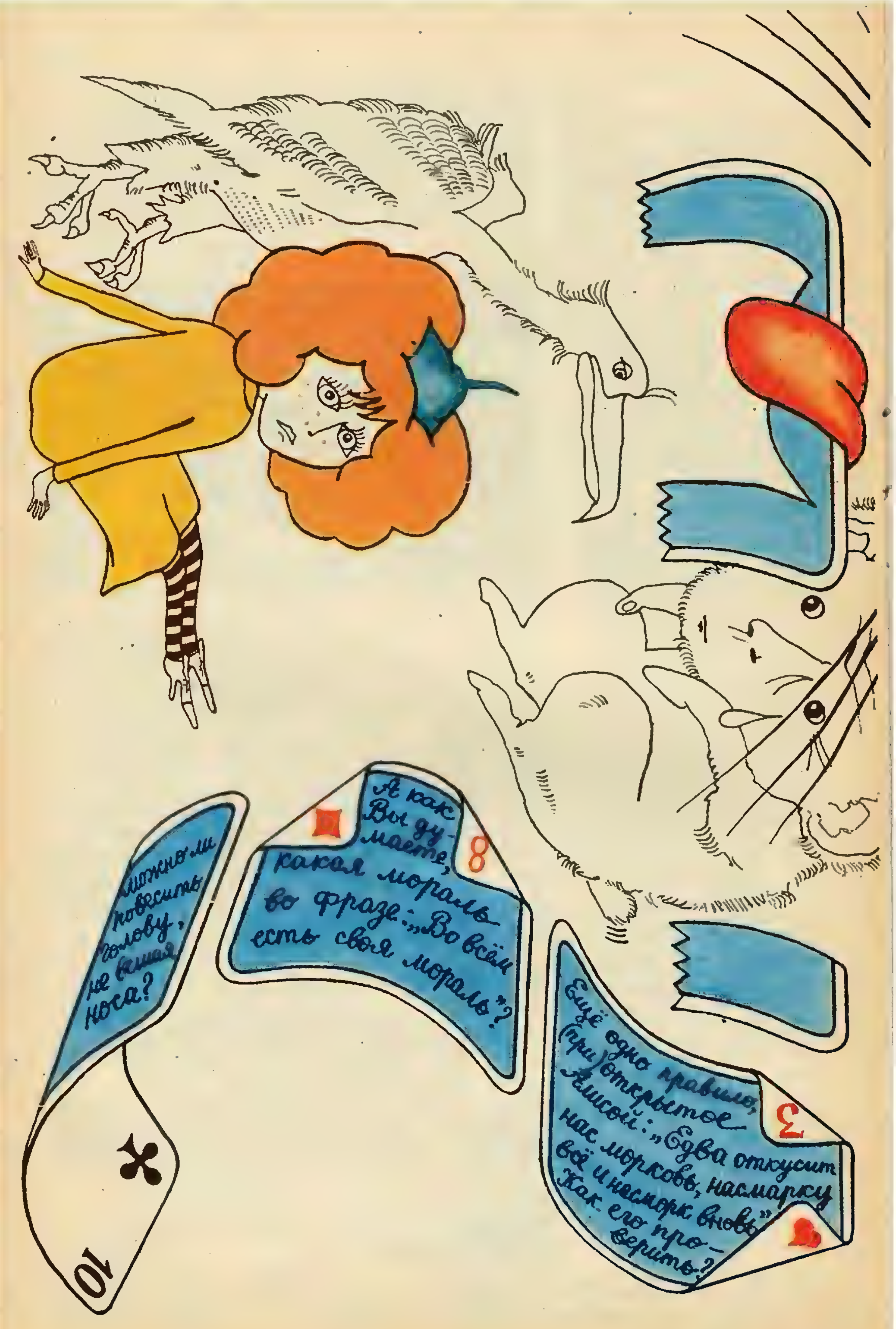
— Как все займем, так и кончим.— Займете?— удивилась Алиса.

— Занятия почему так называются? — пояснил Грифон.— Потому что на занятиях мы у нашего учителя ум занимаем...

Где труднее ходить в школу: над водой или под водой?

А что: „тотчас" в два раза быстрее, чем „сейчас"?

Если следовать новому правилу, открытому Алисой чуть позже, то вспыльчивость происходит от пыли? Не так ли?


А как Вы думаете, какая мораль во фразе: „Во всём есть своя мораль"?
Можно ли повесить голову, не вешая носа?
Ещё одно правило, (при)открытое Алисой: „Едва откусит нас морковь, насмарку всё и насморк вновь". Как его проверить?
8
3
10

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ 2xy-2y-z^2=4. \end{cases}$$

2. а) Известно, что медиана и высота, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол при этой вершине на три равные части. Докажите, что этот треугольник — прямоугольный, и найдите его острые углы.

б) Известно, что медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол при этой вершине на четыре равные части. Докажите, что этот треугольник — прямоугольный, и найдите его острые углы.

3. Какое из двух чисел больше:

$$\frac{1985^{1986}+1}{1985^{1987}+1} \text{ или } \frac{1985^{1984}+1}{1985^{1985}+1}\ ?$$

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ найдите такую точку O, чтобы площади четырехугольников, получающихся при соединении точки O с серединами сторон четырехугольника $ABCD$, были равны.

5. Докажите, что из любых 100 натуральных чисел можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма делилась на 100.

Девятый класс

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy+x+y=1, \\ yz+y+z=5, \\ xz+x+z=2. \end{cases}$$

7. Найдите геометрическое место точек O пересечения диагоналей прямоугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник.

8. Решите уравнение

$$\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}=2\sqrt{2}+(x-y)^2.$$

9. Найдите наибольший общий делитель чисел $A=2^{1986}-1$ и $B=2^{1983}-1$.

10. Известно, что в четырехугольник можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Докажите, что квадрат площади этого четырехугольника равен произведению длин его сторон.

Десятый класс

11. Решите уравнение

$$2\arccos x=\arccos(2x^2-1).$$

12. В окружность вписан пятиугольник $ABCDE$. Расстояния от точки E до прямых AB, BC и CD равны соответственно a, b и c. Найдите расстояние от точки E до прямой AD.

13. Найдите все решения уравнения

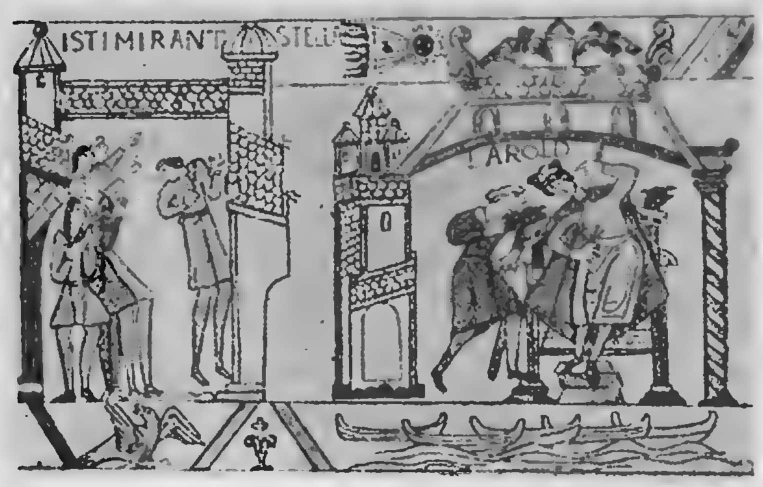
$$\cos x+\cos y-\cos(x+y)=\frac{3}{2}.$$

14. На плоскости лежат три сферы, попарно касающиеся друг друга. Расстояние между точками касания сфер с плоскостью равны a, b и c. Найдите радиусы сфер.

15. Если в некотором натуральном числе, не оканчивающемся нулем, зачеркнуть одну из цифр, то оно уменьшится в целое число раз. На каком месте может стоять зачеркиваемая цифра?

Публикацию подготовил А. А. Егоров

Наша обложка



На этом рисунке и на обложке журнала — два изображения одного и того же объекта — кометы Галлея. Первое — самое раннее (из сохранившихся в истории), второе — сегодняшнее.

Рисунок сделан с гобелена «образца» 1066 года, вышитого королевой Матильдой, женой Вильгельма Завоевателя, под предводительством которого норманны покорили Англию. На гобелене видна комета и надпись «удивляются звезде». В правой части гобелена придворный астролог нашептывает последнему англо-саксонскому королю Гарольду II о дурном знамении — комете.

На обложке журнала — «гобелен» с изображением кометы Галлея, «вышитый» современным компьютером. Этот снимок получен при пролете сквозь кометную атмосферу космического аппарата «Вега 2» 9 марта 1986 года. Компьютер раскрасил полученное телекамерой изображение: красный цвет соответствует наиболее плотной и яркой части атмосферы кометы, желтый, зеленый, голубой цвета показывают очертания все менее и менее плотных ее областей. За сближением кометы с Солнцем следили ученые всех стран. В ходе этого грандиозного космического эксперимента были подтверждены многие научные предсказания и... возникли новые вопросы и загадки, над решением которых размышляют ученые.

задачник кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки *школьной программы*. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера *можно* отправлять не позднее 15 августа 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6—86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М986, М987» или «Ф998». Решения задач из разных номеров журнала или *по* разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», Новая задача по физике» или «...Новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию, имя и домашний адрес следует писать печатными буквами.

Задачи

М986 — М990, Ф998 — Ф1002

М986. Докажите, что для любых положительных чисел a и b выполняется неравенство

$$2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}>5\sqrt[5]{ab}.$$

М987. В турнире участвуют $2m$ команд. В первом туре встретились некоторые m пар команд, во втором — другие m пар. Докажите, что после этого можно выбрать m команд, никакие две из которых еще не играли между собой.

М. Бона (ученик гимназии, Венгрия)

М988. Из одной точки O на плоскости проведено n векторов единичной длины. Докажите, что если для некоторого $k<n/2$ по обе стороны от каждой прямой, проходящей через O, лежит не менее k векторов, то длина суммы всех n векторов не превосходит $n-2k$.

П. А. Калугин

М989. Найдите все натуральные числа a, для которых число $a-1$ является суммой а) двух; б)* трех делителей числа a (не обязательно различных; в число делителей включается 1).

в)* Докажите, что для любого n существует лишь конечное число натуральных a таких, что $a-1$ является суммой n натуральных делителей числа a (не обязательно различных).

В. В. Батырев

М990. В пространстве заданы три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, у которых эти три прямые

а) проходят по ребрам?

б) проходят по ребрам или диагоналям граней?

в) содержат 6 вершин параллелепипеда?

В. Н. Дубровский

Ф998. Горнолыжник спускается с высокой горы с установившейся скоростью v. Гора образует угол α с горизонтом и плавно переходит в горизонтальный участок. Как должен наклоняться лыжник, чтобы не упасть в момент перехода? Считать, что переход происходит очень быстро. Масса лыжника равна M. Сопротивление воздуха не учитывать.

А. Н. Семенов

Ф999. По гладкой горизонтальной поверхности стола скользит мешок массой m_1, связанный жесткой невесомой веревкой с мешком массой m_2. Веревка, соединяющая мешки, проходит через не-

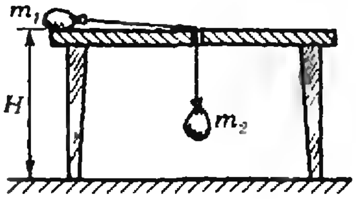


Рис. 1.

большое отверстие в столе (рис. 1). Длина веревки L, высота стола H, причем $H<L$. На какую высоту поднимется мешок m_2 после удара об пол, если в начальный момент вся веревка лежала на столе и мешки не двигались?

Г. Л. Коткин

Из задач, присланных нашими читателями на Конкурс «Ф1000», лучшей признана задача

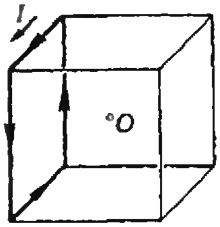


Рис. 2.

Ф1000. Ток I, текущий по контуру, образованному четырьмя ребрами куба (рис. 2), создает в центре куба магнитное поле с индукцией B_0. Найти величину и направление вектора индукции магнитного поля, создаваемого в центре куба током I, текущим по контуру из шести ребер (рис. 3).

М. М. Цыпин

Автор этой задачи — М. М. Цыпин — награждается Дипломом «Кванта».

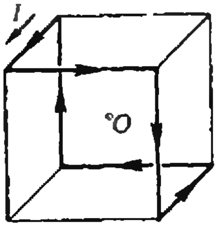


Рис. 3.

Ф1001. В однородном электрическом поле находится незаряженный металлический шар. При выключении поля в шаре выделилось количество тепла Q. Какое количество тепла выделилось бы в шаре втрое большего радиуса?

С. С. Кротов

Ф1002. Точечный источник света находится на расстоянии L от экрана. Собирающую линзу с фокусным расстоянием $F>(L/4)$, параллельную экрану, перемещают между источником и экраном. При каком положении линзы диаметр пятна, видимого на экране, будет минимальным?

Д. Ю. Григорьев

Problems

M986—M990; P998—P1002

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than August 15th, 1986 to the following address: USSR, Moscow, 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».

M986. Prove the following inequality for arbitrary positive numbers a and b:

$$2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}>5\sqrt[5]{ab}.$$

M987. $2m$ teams participate in a tournament. In the first round m pairs of teams meet, in the second — m other pairs. Prove that after that it is possible to choose m teams no two of which have met before.

M. Bona (gymnasium student, Hungary)

M988. n unit vectors in the plane have the common origin O. Prove that if for some $k<n/2$ there are no less than k vectors on both sides of any line passing through O, then the length of the sum of the n vectors is no greater than $n-2k$.

P. A. Kalugin

M989. Find all the natural numbers a for which the number $a-1$ is the sum of a) two; b)* three divisors of the number a (not necessarily distinct).
c)* Prove that for any n there exists only a finite number of natural numbers a such that $a-1$ is the sum of n natural divisors of the number a (not necessarily distinct; the number 1 is counted among the divisors).

V. V. Batyrev

Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in block letters.

M990. Three pairwise skew lines, not simultaneously parallel to any plane, are given in space. How many parallelipipedons are there such that these three lines
a) pass through its edges,
b) pass through its edges or through diagonals of its faces,
c) contain 6 of its vertices?

V. N. Dubrovski

P998. A skier slides downhill from a high mountain at the established velocity v. The mountain forms the angle α with the horizon and then smoothly levels out. How must the skier incline his body so as not to fall as his trajectory levels out? It may be assumed that the levelling out is very rapid. The skier's mass is M. Air friction is negligible.

A. N. Semionov

P999. A sack of mass m_1 tied by an inelastic weightless rope to a sack of mass m_2 slides on a smooth horizontal table. The rope passes through a small hole in the table (see figure Рис. 1). The length of the rope is L, the height of the table is H, where $H<L$. To what height will the sack m_2 rise after colliding with the floor, if at the initial moment the entire rope was on the table and the sacks were motionless?

G. L. Kotkin

P1000. The current I flowing in the circuit constituted by 4 edges of a cube (see figure Рис. 2) creates a magnetic field of induction B_0 at the cube's centre. Find the magnitude and direction of the magnetic induction vector arising at the cube's centre when the same current I flows along the circuit consisting of 6 edges (Рис. 3).

M. M. Tsypin

P1001. An uncharged metallic solid sphere was placed in a uniform electric field. When the field was turned off, the amount of heat Q was liberated in the shere. How much heat would have been liberated in a sphere of thrice longer radius?

S. S. Krotov

P1002. A point light source is placed at the distance L from the screen. A convergent lens of focal distance $F>(L/4)$ parallel to the screen is moved between the source and the screen. For what position of the lens will the diameter of the luminous spot on the screen be minimal?

D. Yu. Grigoriev

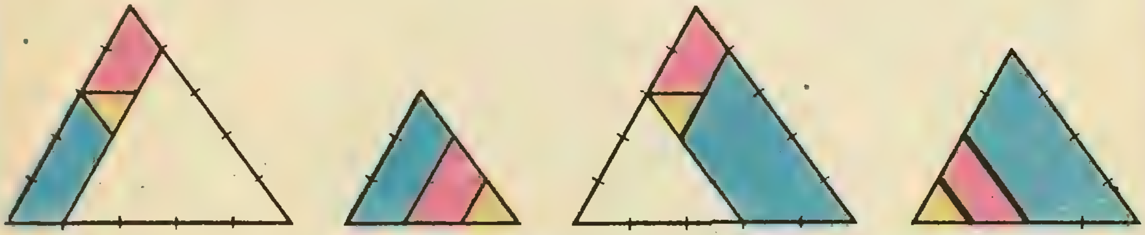
Решения задач

M966 — M970; Ф978 — Ф982

M966. *Докажите, что любой треугольник можно разрезать отрезками на четыре куска, из которых можно составить два подобных ему треугольника.*

Если сумма площадей двух треугольников, подобных данному с коэффициентами k_1 и k_2, равна площади данного, то $k_1^2+k_2^2=1$. На рисунке показаны два разрезания для самых известных дробей, удовлетворяющих этому условию — $k_1=3/5$, $k_2=4/5$ (стороны исходного треугольника разбиты на 5 равных частей).

Н. Б. Васильев



M967. *Обозначим через $\sigma(n)$ сумму всех натуральных делителей числа n (включая 1 и n) и через $\varphi(n)$ — количество чисел, меньших числа n и взаимно простых с ним. Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 2$*

$$\sigma(n)+\varphi(n) \geqslant 2n.$$

Пусть $1=d_1<\ldots<d_k=n$ — все делители числа n. Среди натуральных чисел, не превосходящих n, количество кратных d_i равно n/d_i, поэтому общее количество чисел, не взаимно простых с n, равное $n-\varphi(n)$, не больше суммы

$$\frac{n}{d_2}+\frac{n}{d_3}+\ldots+\frac{n}{d_k}=d_{k-1}+d_{k-2}+\ldots+d_1=\sigma(n)-n$$

(ибо $n/d_1=d_k$, $n/d_2=d_{k-1}, \ldots$). Таким образом,

$$n-\varphi(n) \leqslant \sigma(n)-n,$$

откуда и следует доказываемое неравенство.

Отметим, что для простого p наша оценка точна:

$$\sigma(p)=p+1, \quad \varphi(p)=p-1, \quad \sigma(p)+\varphi(p)=2p.$$

В. Ф. Лев

◆

M968. *Три многоугольника в пространстве расположены так, что их плоскости пересекаются в одной точке O.*
а) Докажите, что найдется плоскость, проекции на которую этих трех многоугольников имеют равные площади.
б) Сколько будет таких плоскостей, проходящих через точку O?

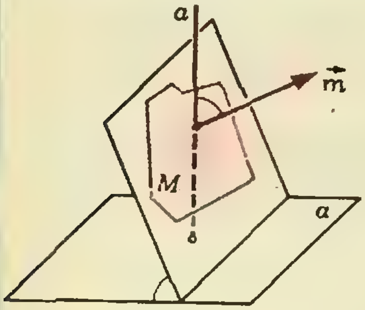


Рис. 1.

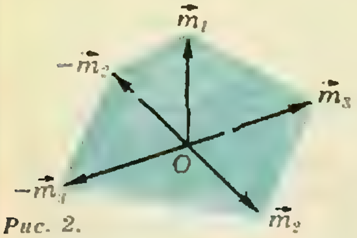


Рис. 2.

Сопоставим многоугольнику M вектор $\vec{m}$, перпендикулярный плоскости многоугольника и равный по длине площади многоугольника. Тогда площадь проекции M на любую плоскость α равна длине проекции $\vec{m}$ на прямую a, перпендикулярную α (площадь M при проекции умножается на косинус угла между α и плоскостью M, а длина вектора $\vec{m}$ — на косинус угла между вектором и прямой a, но эти углы, очевидно, равны; см. рисунок 1).

Отложим от точки O векторы $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$ и $\vec{m}_3$, соответствующие данным многоугольникам; их концы и точка O не лежат в одной плоскости. В силу сказанного выше условию задачи а) удовлетворяет плоскость, проходящая через концы этих векторов, поскольку их проекции на перпендикулярную ей прямую совпадают. А так как длины проекций двух каких-либо векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$ на прямую равны тогда и только тогда, когда проекция $\vec{m}$ совпадает с проекцией $\vec{n}$ или $-\vec{n}$, мы можем аналогично построить еще 3 такие плоскости, заменяя в тройке векторов $\vec{m}_1$, $\vec{m}_2$, $\vec{m}_3$ вектор $\vec{m}_2$, или вектор $\vec{m}_3$, или оба вместе на противоположные (рис. 2). Ясно, что эти 4 плоскости попарно непараллельны, и при этом любая плоскость, удовлетворяющая условию задачи а), должна быть параллельна одной из них. Таким образом, ответ в задаче б) — 4 плоскости.

А. Опукян, Н. М. Седракян

◆

M969. *Докажите неравенство для $a, b, c>0$:*

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

Заметим, что

$$\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3-c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3-a^3}{c^2+ca+a^2}=$$
$$=(a-b)+(b-c)+(c-a)=0,$$

поэтому левую часть нашего неравенства можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\right). \qquad (*)$$

А поскольку $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ и

$$\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}-\frac{1}{3}=\frac{2(a^2-2ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}=\frac{2(a-b)^2}{a^2+ab+b^2} \geqslant 0,$$

первое слагаемое в (*) не меньше чем $(a+b)/3$; аналогично, второе — не меньше $(b+c)/3$, третье — $(c+a)/3$, то есть все выражение (*) не меньше чем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{3}+\frac{b+c}{3}+\frac{c+a}{3}\right)=\frac{a+b+c}{3},$$

что и требовалось доказать.

Г. Г. Алиханов

◆

М970. *На начальной остановке в автобус вошло 32 пассажира, которым нужно ехать до 32 разных остановок, расположенных на расстоянии 1 км друг от друга. Водитель решил провести голосование: какие остановки отменить, а какие сохранить. Он называет остановки в некотором порядке. Пассажир голосует за отмену остановки, если он собирается ехать дальше, против, если собирается выходить на этой остановке, и воздерживается, если — раньше (не учитывая, что при дальнейшем голосовании могут отменить и его остановку). Если за отмену подано больше голосов, чем против, остановку отменяют, а тот (или те), кто хотел на ней выходить, решают ехать до ближайшей к ней из еще не отмененных (если таких две — до первой из них). Какое а) наименьшее, б) наибольшее число остановок может сохраниться в зависимости от порядка, в котором их называет водитель?*

а) Ответ. 2. Две последние остановки сохраняются при любом порядке голосования: против последней никто не голосует, против предпоследней голосует один пассажир, а за нее — не меньше одного. Если водитель называет остановки в следующем порядке номеров: 31, 32, 29, 30, 27, 28, ..., 1, 2, все остальные остановки отменят (см. таблицу).

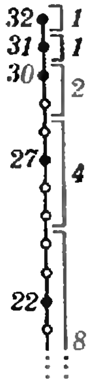
б) Ответ. 6. Пусть после голосования осталось неотмененными m остановок, и на i-й из них, считая с конца, сошло a_i пассажиров (например, $a_1=1$ — на последней, 32-й остановке, очевидно, сходит 1 пассажир). Тогда против отмены этой остановки проголосовало не больше a_i пассажиров (ибо последующее голосование не могло уже изменить решения сойти на ней), а за отмену — не меньше $a_{i-1}+a_{i-2}+...+a_1$. Поскольку остановку не отменили, $a_i \geqslant a_{i-1}+a_{i-2}+...+a_1$. Пусть осталось m остановок, тогда

$$32=a_m+a_{m-1}+a_{m-2}+...+a_1 \geqslant$$
$$\geqslant 2(a_{m-1}+a_{m-2}+...+a_1) \geqslant$$
$$\geqslant 2^2(a_{m-2}+...+a_1) \geqslant ... \geqslant 2^{m-1}a_1=2^{m-1},$$

и следовательно, $m \leqslant 6$.

Таблица

Номер остановки	Число голосов	
	за отмену	против отмены
31	1	1
32	0	1
29	3	1
30	2	1
27	5	1
28	3	2
. . .	. . .	. . .
$32-2k-1$	$2k+1$	1
$32-2k$	$k+1$	k



Укажем такой порядок голосования, при котором $m=6$. Разобьем остановки, начиная с последней, на 6 групп, состоящих из 1, 1, 2, 4, 8, 16 остановок. В каждой группе отметим одну остановку так, чтобы соседние отмеченные остановки были равноудалены от общей границы их групп, то есть остановки с номерами 32, 31, 30, 27, 22, 11 (см. рисунок). Проведем голосование от конца к началу сперва по неотмеченным остановкам (легко видеть, что их все отменяют), потом — по отмеченным (за каждую из них проголосуют все пассажиры ее группы, против — все пассажиры следующих групп; поскольку $2^k=1+1+2+\ldots+2^{k-1}$, число голосов за и против будет одинаковым и остановку не отменят).

Проведенные рассуждения справедливы для любого числа остановок; **ответ** в задаче б) в общем случае — $[\log_2 n]+1$.

С. Л. Елисеев

Ф978. *На жестком невесомом стержне ABC длины 3l закреплены два одинаковых грузика B и C так, как показано на рисунке 1: $|AB|=l$, $|BC|=2l$. Стержень подвешен за точку A к очень длинной невесомой нити AO. В начальный момент стержень удерживают в горизонтальном положении, и нить при этом вертикальна; затем стержень отпускают. Какой будет скорость точки A в тот момент, когда стержень будет проходить низшее положение?*

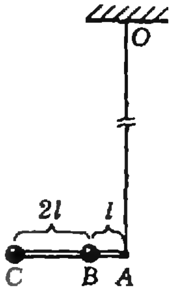


Рис. 1.

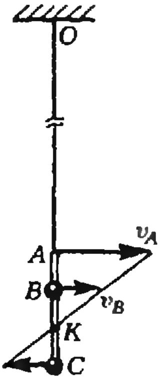


Рис. 2.

К тому моменту, когда стержень будет проходить низшее положение, нить OA очень слабо отклонится от вертикали (поскольку она очень длинная). Поэтому силу натяжения нити, действующую на стержень, можно считать все время вертикальной (горизонтальной ее составляющей можно пренебречь). Следовательно, горизонтальная составляющая импульса стержня остается неизменной, то есть равной нулю, и в низшем положении

$$|mv_B|=|mv_C| \Rightarrow |v_B|=|v_C|=v.$$

Значение v найдем из закона сохранения энергии:

$$2\left(\frac{mv^2}{2}\right)=mgl+3mgl=4mgl,$$

откуда

$$v=2\sqrt{gl}.$$

Таким образом, в момент прохождения низшего положения стержень вращается вокруг центра K отрезка BC (рис. 2).

При этом $|AK|=2|OB|$, и скорость точки A

$$v_A=2v_B=2v=4\sqrt{gl}.$$

Г. Л. Коткин

◆

Ф979. *В сосуде, имеющем форму двух «состыкованных» цилиндров одинаковой длины l и с площадями сечений S и αS (α>1), находится идеальный газ. Посредине каждого цилиндра находятся поршни, соединенные жестким стержнем (см. рисунок); при этом давление в отсеке I равно p, в отсеке III давление равно βp, поршни находятся в равновесии. К системе подвели тепло Q так, что температура возросла, оставаясь во всех отсеках одинаковой. Определите, как изменилось давление в отсеке I. Внутренняя энергия одного моля газа равна cT (c — молярная теплоемкость газа). Теплоемкости цилиндров и поршней пренебрежимо малы, трением пренебречь.*

Пусть V_i, p_i и ν_i — объем i-го отсека, давление и число молей газа в нем. Полное число молей газа в сосуде $\nu=\nu_1+\nu_2+\nu_3$. Так как температура T во всех отсеках одинакова, уравнение Менделеева — Клайперона дает

$$p_1V_1+p_2V_2+p_3V_3=(\nu_1+\nu_2+\nu_3)RT=\nu RT. \qquad (1)$$

По этой же причине поршни не сместятся, так как при постоянных объемах отношение давлений в отсеках не меняется и в любой момент времени будет выполнено условие равновесия

$$(p_3-p_2)\alpha S+(p_2-p_1)S=0. \qquad (2)$$

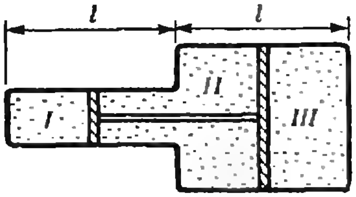
Используя условие $p_3=\beta p_1$, из (2) находим

$$p_2=p_1\frac{\alpha\beta-1}{\alpha-1}. \qquad (3)$$

Из (3) видно, что задача имеет смысл лишь при $\alpha\beta\geqslant 1$, так как давление должно быть положительным. Подставляя p_2 и p_3 в (1), находим связь между давлением в первом отсеке и температурой:

$$p_1=\frac{\nu TR(\alpha-1)}{Sl(\alpha^2\beta-1)}. \qquad (4)$$

Поскольку разность конечной и начальной тем-



пературов $\Delta T=\frac{Q}{\nu c}$, из (4) для изменения давления Δp имеем

$$\Delta p=\frac{QR(\alpha-1)}{cSl(\alpha^2\beta-1)}.$$

В. С. Фадин

◆

Ф980. *Четыре одинаковых металлических пластины площади S каждая с зарядами q_1, $-q_1$, q_2, $-q_2$ установлены параллельно друг другу на расстоянии d одна от другой (рис. 1; d много меньше линейных размеров пластин). Внешние пластины 1 и 4 соединяют проводником. Найти разность потенциалов между пластинами 2 и 3.*

После соединения пластин *1* и *4* проводником, разность потенциалов между ними U_{14} будет равна нулю. При этом распределение зарядов на пластинах и электрических полей между ними будет таким, как показано на рисунке 2.

$$U_{14}=E_1d-E_3d+E_2d=\frac{d}{\varepsilon_0 S}(q_1'-q_3+q_2')=0.$$

Из закона сохранения заряда на пластинах *2* и *3* следует:

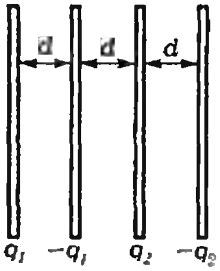


Рис. 1.

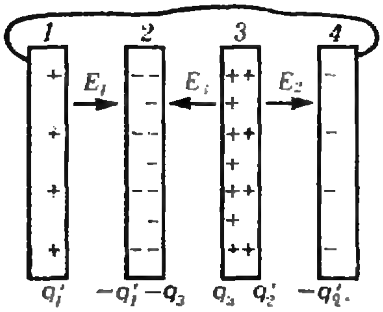


Рис. 2.

$$q_1'+q_3=q_1,\quad q_2'+q_3=q_2,$$

откуда

$$q_3=\frac{q_1+q_2}{3}.$$

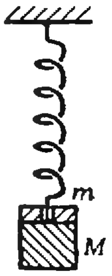
Следовательно, разность потенциалов между пластинами *2* и *3* равна

$$U_{23}=\frac{q_3}{\varepsilon_0 S}d=\frac{q_1+q_2}{3\varepsilon_0 S}d.$$

Г. В. Федотович

◆

Ф981. *На груз массы M, висящий на пружине, кладут груз массы m (см. рисунок), удерживая груз M в первоначальном положении, а затем грузы отпускают. Найти максимальную силу, действующую на груз m со стороны груза M.*



Для того чтобы определить силу N, действующую на перегрузок m со стороны груза M, воспользуемся вторым законом Ньютона для движения перегрузка:

$$ma=mg-N.$$

После того как грузы отпустили, они совершают гармонические колебания (как один груз массы $M+m$). Значит, ускорение a периодически изменяет свое направление. Сила

$$N=m(g-a)$$

будет максимальна в момент, когда ускорение имеет максимальную абсолютную величину и направлено вверх, то есть в момент наибольшего растяжения пружины. Для определения ускорения используем второй закон Ньютона для движения груза с перегрузком:

$$(M+m)a=(M+m)g-kx. \qquad (1)$$

Максимальное значение $x_{\max}$ найдем с помощью закона сохранения энергии (учитывая, что в момент максимального растяжения пружины скорость груза равна нулю):

$$-(M+m)gx_0+\frac{k}{2}x_0^2=-(M+m)gx_{\max}+\frac{k}{2}x_{\max}^2, \quad (2)$$

где x_0 — удлинение пружины без перегрузка m. Учитывая, что $kx_0=Mg$, из (2) получаем: $kx_{\max}=(M+2m)g$. Подставляя это значение в (1), находим максимальное значение ускорения —

$$|a_{\max}|=\left|-\frac{m}{M+m}g\right|=\frac{m}{M+m}g,$$

и зная $a_{\max}$, находим $N_{\max}$:

$$N_{\max}=mg\frac{M+2m}{M+m}.$$

П. И. Зубков

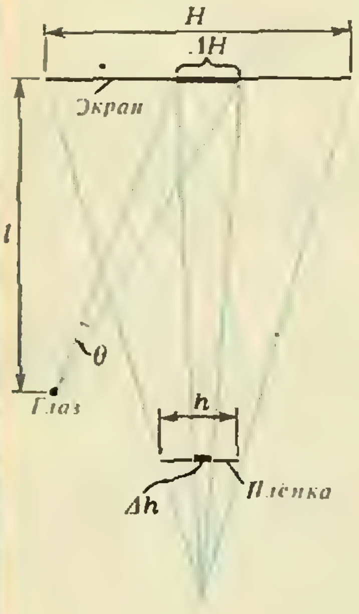
◆

Ф982. *Как известно, предельный размер различимой детали изображения на кинопленке определяется размерами кристалликов светочувствительного слоя. С уменьшением размера кристалликов четкость изображения растет. Оцените предельный размер кристалликов, при котором зритель перестает замечать рост четкости изображения на экране кинозала. Предполагается, что вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения величины, выбрать достаточно правильные численные значения и получить численный результат.*

В случае простейшей проекционной киноустановки изображение на экране создается в результате прохождения через кинопленку расходящегося светового пучка, обеспечивающего необходимое увеличение кадра. При этом важно отсутствие линейных искажений на экране. Это значит, что отношение размера Δh детали на пленке к размеру h всего кадра должно быть точно таким же, как и отношение размера ΔH изображения этой детали на экране к размеру H всего изображения кадра на экране, то есть

$$\frac{\Delta h}{h}=\frac{\Delta H}{H}.$$

Пусть ΔH — предельный размер детали, еще различимой глазом зрителя с расстояния l, H — размер экрана, совпадающий с размером изображения кадра на нем, Δh — минимальный размер детали на кинопленке, совпадающий с размером светочувствительного кристаллика («зерна») фотоэмульсии, h — размер кадра на пленке (см. рисунок).



Отношение $\Delta H/l$ определяется так называемым «угловым разрешением глаза» зрителя, то есть минимальным углом θ, на границах которого глаз разделяет (видит неслившимися) две точки или две линии. Величину этого угла несложно оценить. Вспомним, например, посещение кабинета врача-окулиста: с расстояния нескольких метров, рассматривая таблицу букв так же, как мы смотрим кино, мы различаем детали букв, не меньшие нескольких миллиметров; то есть по порядку величины угол θ равен

$$\theta\sim\frac{\Delta H}{l}\sim10^{-3}.$$

Таким образом, $\Delta H\sim l\theta$, и

$$\Delta h=h\frac{\Delta H}{H}\sim\frac{hl\theta}{H}.$$

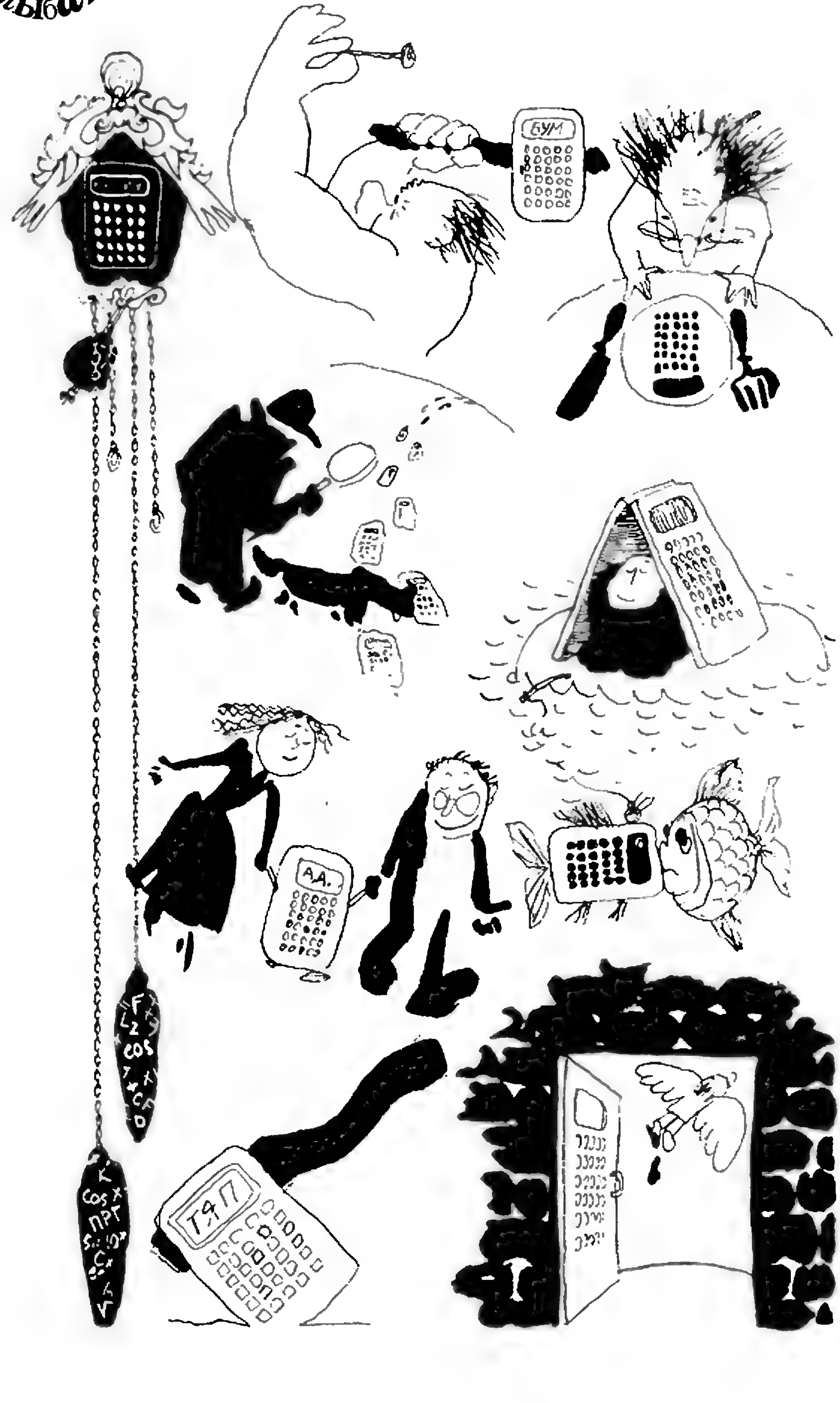
При $h=1$ см, $l=20$ м, $H=5$ м, $\theta\sim10^{-3}$ для минимального размера кристалликов фотоэмульсии, за пределами которого зритель перестает замечать рост четкости изображения на экране, получаем

$$\Delta h\sim0{,}04\ \text{мм}.$$

Эта оценка вполне согласуется с известными параметрами кинофотоматериалов.

Г. В. Меледин

Микрокалькуляторы
в картинках
(Рисунки П. Чернуского)


БУМ
А.А.
cos
cos
ПР
ТЧП

Программирование на микрокалькуляторе: игры

Л. Н. СИСТЕПСКИЙ

Статья предназначена в первую очередь для девятиклассников, изучающих курс основ информатики и вычислительной техники и имеющих доступ к программируемому микрокалькулятору, но будет интересна также и всем, кто пользуется таким микрокалькулятором.

В течение учебного года вы научились писать программы на алгоритмическом языке. На страницах журнала «Квант» мы объяснили, как транслировать эти программы в коды программируемого микрокалькулятора (см. «Квант», 1985, №№ 2, 3). Эти навыки позволяют вам пользоваться вашим калькулятором и для решения школьных задач из курса математики, например находить корни алгебраических уравнений.

Но это дело будущего. А сейчас, перед летними каникулами, мы предлагаем вам отвлечься от математических задач и поиграть в игры с помощью вашего программируемого микрокалькулятора.

Игра Баше

Из кучи, содержащей p предметов, например спичек, два игрока по очереди берут некоторое количество спичек. За один раз можно взять не менее одной и не более k спичек. Число k (лучше выбрать его намного меньше p) устанавливается игроками заранее. Проигрывает тот, кому придется взять последнюю спичку.

Введите в машинку программу, данную в таблице 1, обзаведясь предварительно набором спичек, пуговиц или других предметов, и, внимательно прочтя инструкцию, начните игру. Можете играть с машиной один на один. Убедившись, что машина — сильный партнер, позовите на помощь товарища и попробуйте сообща сыграть против машины.

Инструкция

1. Ввести программу В/О.
2. 1 ВП 7 П 7 1, 8 F 1/x П/8.
3. p С/П (p), k С/П (0).
4. Если первый ход делает машина, то С/П (количество спичек, взятых машиной), ввести ваш ход С/П (ход машины) и опять ваш ход и т. д.
5. Если первый ход хотите делать вы, то введите число взятых вами спичек, С/П (ответный ход машины), ваш ход С/П (ход машины) и т. д.
6. Для новой игры: В/О и идти к п. 3 инструкции.

Задачи

1 (для любителей математики). Для данных p и k найдите выигрышную стратегию в игре Баше.

2* (для любителей программирования). Попробуйте расшифровать стратегию машинки.

Баллистическая игра

Изобразите на клетчатой бумаге систему координат, причудливый пейзаж и два города глупцов, враждующих между собой (рисунок). В пределах каждого города установите стартовую прощадку и отметьте точками положения орудий (пушек), из которых неразумные жители враждующих городов обстреливают друг друга хлопушками. Введите в машину программу из таблицы 2, нажмите В/О, введите данные согласно инструкции.

Таблица 1

00	П 0	40	24	F Вx	0
01	С/П	50	25	—	11
02	↑	0E	26	ИП 1	61
03	1	01	27	/—/	0L
04	+	10	28	×	12
05	П 1	41	29	ИП 0	60
06	0	00	30	+	10
07	С/П	50	31	1	01
08	F x≠0	57	32	—	11
09	15	15	33	F x≠0	57
10	/—/	0L	34	44	44
11	↑	0E	35	П 2	42
12	ИП 0	60	36	/—/	0L
13	+	10	37	↑	0E
14	П 0	40	38	ИП 0	60
15	ИП 0	60	39	+	10
16	1	01	40	П 0	40
17	—	11	41	ИП 2	62
18	ИП 1	61	42	БП	51
19	÷	13	43	07	07
20	ИП 8	68	44	1	01
21	—	11	45	П 2	42
22	ИП 7	67	46	БП	51
23	+	10	47	36	36

Таблица 2

00	ИП 3	63	34	+	10
01	F sin	1[	35	П 0	40
02	ИП 2	62	36	ИП А	6—
03	×	12	37	ИП 3	63
04	П 0	40	38	+	10
05	ИП 3	63	39	П А	4—
06	F cos	1Г	40	ИП С	6[
07	ИП 2	62	41	ИП 6	66
08	×	12	42	—	11
09	ИП 8	68	43	П С	4[
10	×	13	44	ИП 0	60
11	П 3	43	45	ИП 9	69
12	ИП 0	60	46	×	12
13	П 2	42	47	ИП 2	62
14	ИП 6	66	48	+	10
15	F sin	1[	49	ИП 0	60
16	ИП 5	65	50	×	12
17	×	12	51	ИП 1	61
18	П 0	40	52	+	10
19	ИП 6	66	53	П В	4L
20	F cos	1Г	54	ИП 0	60
21	ИП 5	65	55	ИП 9	69
22	×	12	56	×	12
23	ИП 8	68	57	ИП 5	65
24	×	12	58	+	10
25	П 6	46	59	ИП 0	60
26	ИП 0	60	60	×	12
27	П 5	45	61	ИП 4	64
28	0	00	62	+	10
29	П 0	40	63	П Д	4Г
30	П В	4L	64	С/П	50
31	П Д	4Г	65	БП	51
32	ИП 0	60	66	32	32
33	ИП 8	68			

Инструкция

1. Ввести программу. Переключатель меры угла перевести в положение Г (градусы). В/О;

2. Ввести данные: Y_1; П 1; v_1; П 2; α_1°; П 3; Y_2, П 4; v_2; П 5; α_2°; П 6; 1; П 8; 5; /—/; П 9; X_1; ПА; X_2; ПС.

3. С/П;

4. Результаты: ИП А (X_1) ИП В (Y_1) ИП С (X_2) ИП Д (Y_2)

5. Далее. к п. 3 инструкции.

Смысл данных следующий:

Y_1 — ордината пушки первого города (слева);

v_1 — начальная скорость хлопушки. вылетающей из этой пушки;

$\overset{\circ}{\alpha}_1$ — угол прицела первой пушки (см. рисунок) в градусах;

Y_2 — ордината пушки, установленной во втором городе (справа);

v_2 — начальная скорость хлопушки второй пушки;

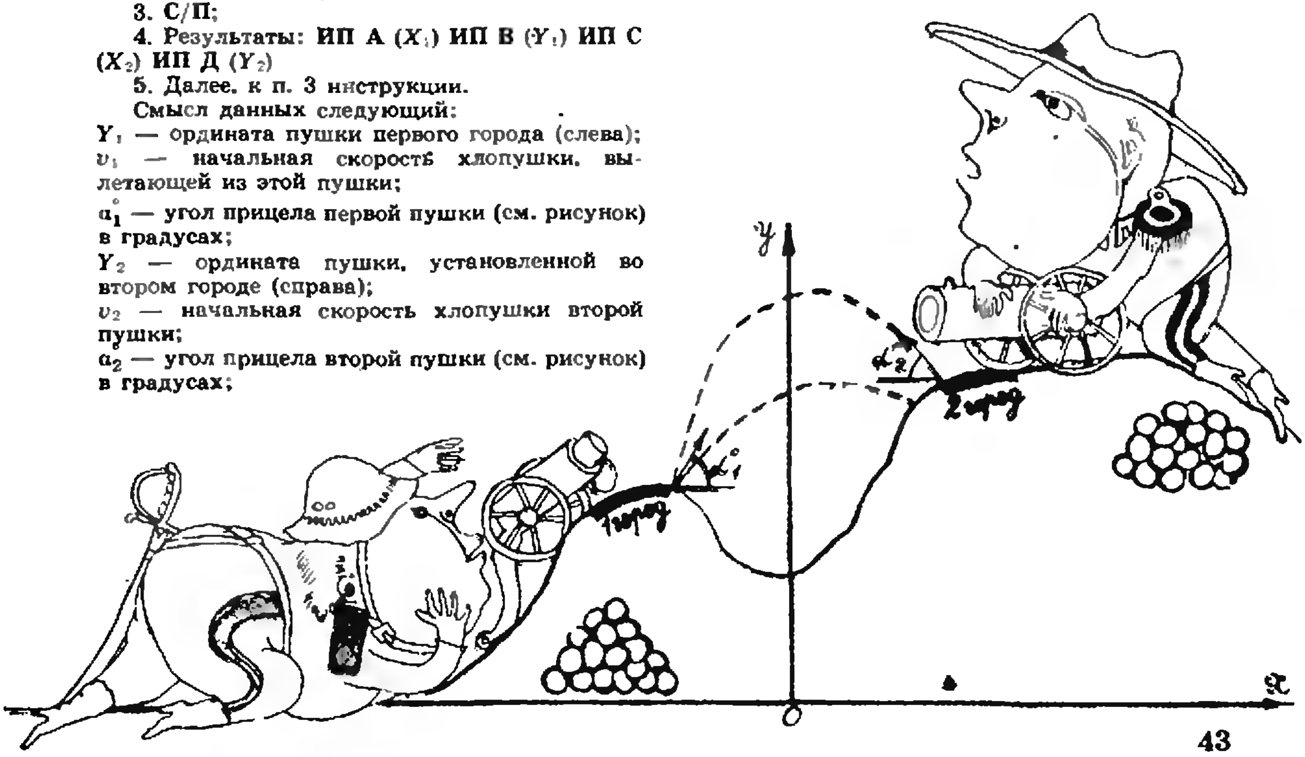
$\overset{\circ}{\alpha}_2$ — угол прицела второй пушки (см. рисунок) в градусах;

X_1 — абсцисса пушки первого города;

X_2 — абсцисса пушки второго города.

Запустите программу клавишей С/П. В регистрах А и В будут занесены абсцисса и ордината первой хлопушки через 1 секунду после выстрела, а в регистрах С,Д — абсцисса и ордината хлопушки, выпущенной из второго города. Нажав С/П, вы получите положения хлопушки еще через 1 секунду и т. д. Пока машина вычисляет, отмечайте положения хлопушек на чертеже. Выигрывает тот глупец, кто (первым) поразит стартовую площадку соперника.

В регистр 8 (см. инструкцию) перед началом игры заносится 1. Вы можете занести любое число t, меняя тем самым промежуток времени между отдельными показаниями машинки (можно интересоваться положениями хлопушек не через каждую секунду, а через 2 секунды или 0,5 секунды и т. д.). В регистр 9 заносится величина — $g/2$, где g — величина ускорения свободного падения в м/сек^2. Мы положили $g=10$. Если глупцы живут не на Земле, а на Луне, то нужно выбрать g в 6 раз меньше. Короче говоря, вам представляется широкий диапазон для фантазии о возможных безобразиях глупцов. Тот, кто лучше разбирается в физике и усвоил законы движения, получит хорошую возможность моделирования процесса движения тела в поле тяготения.



X. Заключение. Полупроводниковые элементы будущих ЭВМ

Доктор физико-математических наук М. Е. ЛЕВИНШТЕЙН,
кандидат физико-математических наук Г. С. СИМИН

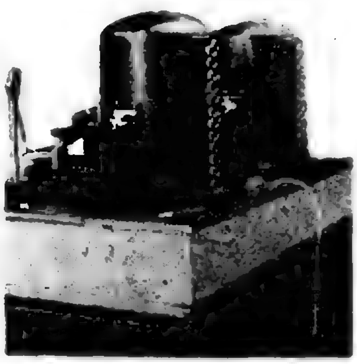


Рис. 1. В таких установках на тонких пленках монокристаллических полупроводников наращиваются очень чистые бездефектные слои толщиной 0,05—10 мкм, обладающие всеми свойствами, необходимыми для создания БИС.

Полупроводниковые элементы, на основе которых работают современные ЭВМ, достигли высокой степени совершенства. Время их переключения составляет стомиллионные доли секунды. Размеры их так малы, что на кремниевой пластинке размером 5×5 мм помещаются сотни тысяч транзисторов — полевых или биполярных.

Современные ЭВМ способны управлять космическими аппаратами и ставить диагноз больному, доказывать математические теоремы и руководить предприятиями, переводить научные тексты и планировать перевозки в масштабах целой страны.

Однако существуют задачи, которые пока что не под силу даже самым мощным из нынешних ЭВМ. Например, чтобы составить удовлетворительный прогноз погоды на завтрашний день, провести очень точный расчет поведения самолета в воздушном потоке или электронов в твердом теле, необходимы ЭВМ с быстродействием порядка 1 триллиона операций в секунду. И для таких ЭВМ, разработка которых ведется уже сейчас, понадобятся новые, более совершенные элементы.

Совершенствование элементов ЭВМ происходит сразу в нескольких направлениях. Улучшаются параметры биполярных и полевых транзисторов, создаются и испытываются новые переключательные элементы, предлагаются и проходят всестороннюю проверку новые способы объединения переключательных элементов в Сверхбольшие и Сверхскоростные Интегральные Схемы.

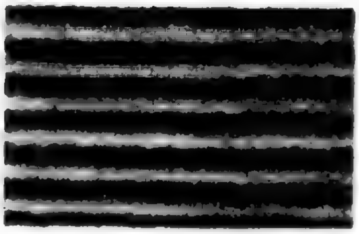


Рис. 2. Структура из чередующихся слоев двух разных полупроводников, выращенных друг на друге. На электронной микрофотографии каждая темная зона состоит из шести атомных плоскостей GaAs, *каждая светлая — из четырех атомных плоскостей* $Al_{1-x}Ga_xAs$. *Обратите внимание на четкие границы между полосками, характеризующие точность, с которой регулируется толщина слоев при выращивании.*

Совершенствование существующих элементов ЭВМ

Из принципа работы биполярных и полевых транзисторов (см. заметки II и III настоящей серии в «Кванте» № 10, 11, 1985 г.) следует, что скорость переключения этих элементов тем выше, чем меньше их размеры и чем больше подвижность носителей тока в полупроводнике, из которого они изготовлены.

Поэтому совершенствование существующих элементов ЭВМ — биполярных и полевых транзисторов — идет двумя основными путями. Создаются новые технологические процессы, позволяющие получать транзисторы с возможно меньшей толщиной базы (биполярный транзистор) или возможно более коротким каналом (полевой транзистор). Идет поиск новых материалов с большой подвижностью носителей для изготовления транзисторов.

Современные технологические процессы позволяют под контролем ЭВМ наращивать слои полупроводникового материала толщиной в один-единственный атомный слой. Практически созданы и проходят испытания приборы с толщинами рабочих элементов 10—15Å (рис. 2). Созданы биполярные транзисторы с толщиной базы ~0,1 мкм и полевые — с длиной затвора 0,15 мкм.

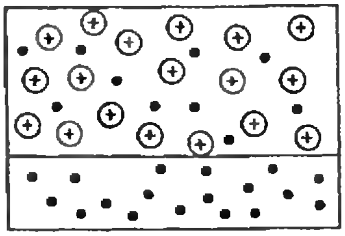


Рис. 3. Селективно-легированная структура. Атомы донорной примеси (обозначены ⊕) вводятся в материал 1 (GaAlAs). *Они создают в этом материале свободные электроны (обозначены •). Часть*

электронов переходит в полоску материала 2 (GaAs), где создается достаточно большая концентрация электронов с высокой подвижностью.

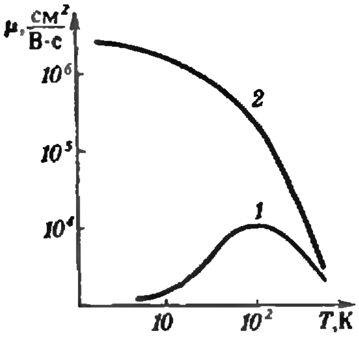


Рис. 4. Зависимость подвижности от температуры: 1 — в GaAs с концентрацией носителей $2 \cdot 10^{17}$ см$^{-3}$; 2 — в селективно-легированной структуре с концентрацией носителей ~$2 \cdot 10^{17}$ см$^{-3}$.

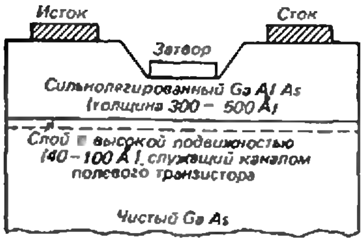

Исток
Сток
Затвор
Сильнолегированный GaAlAs
(толщина 300 – 500 Å)
Слой с высокой подвижностью
(40 – 100 Å), служащий каналом
полевого транзистора
Чистый GaAs

Рис. 5. Полевой транзистор на основе селективно-легированной структуры. На границе сильно легированного GaAlAs и GaAs создается селективно-легированный слой с высокой подвижностью электронов.

Оптическая ИС содержит полупроводниковый лазер и 36 полевых транзисторов, предназначенных для ввода в световой луч логической информации. Сигнал, переданный лазером, улавливается другими кристаллами ЭВМ, где он вновь превращается в электрический. Один луч лазера заменяет сотни проводников, которые необходимо протянуть между БИС, образующими большие ЭВМ.

Новые материалы для изготовления транзисторов разрабатываются сейчас главным образом на основе селективно-легированных структур. За этим новым даже для специалистов термином скрывается такая красивая и плодотворная идея, что мы расскажем об этих структурах подробнее.

Как известно из школьного курса физики, подвижность носителей тока зависит от того, как часто они испытывают столкновения при движении внутри кристалла. Чем эти столкновения реже, тем выше подвижность электронов и дырок.

Важным источником столкновений являются примеси, существующие в полупроводниковом кристалле. Чем меньше примесей содержит полупроводник, тем выше в нем подвижность носителей. Таким образом, казалось бы, ясно, в чем должен состоять главный путь совершенствования полупроводниковых материалов,— в максимальной очистке от примесей.

Дело, однако, обстоит не так просто. Для создания полевых и биполярных транзисторов требуется материал с довольно высокой концентрацией свободных носителей (~$2 \cdot 10^{17}$ см$^{-3}$). А свободные носители в полупроводнике возникают при введении в него примесей. Электроны — при введении донорской примеси, дырки — акцепторной. Получается заколдованный круг: хочешь иметь в полупроводнике желаемую концентрацию носителей — вводи примеси. А введешь примесь,— понизится подвижность.

Идея селективно-легированных структур состоит в том, чтобы пространственно разделить примеси и носители, которые благодаря этим примесям создаются. Примесь (например, донорная) вводится в полосу материала 1 (рис. 3). Возникшие электроны переходят в расположенную в непосредственной близости полоску материала 2, в которую примесь не вводится. И полоска материала 2, содержащая электроны, но не содержащая примеси, служит каналом полевого транзистора. (Такие структуры поэтому иногда называют еще и структурами с пространственным переходом электронов.)

Разумеется, не любые два материала годятся для изготовления такого «бутерброда», или, как часто говорят, «сэндвич-структуры». Заслуга исследователей, предложивших структуру с селективным легированием, и состоит в том, что они поняли, какие именно материалы могут образовать пару с желаемыми свойствами. Ими оказались GaAs и тройное соединение GaAlAs.

На основе селективно-легированных структур, использующих свойства гетероперехода GaAs/GaAlAs уже созданы полевые транзисторы с уникальными свойствами. Время переключения их составляет 0,01 нс, а энергия, потребляемая при переключении,— всего 10 фДж (1 фДж (читается фемтоджоуль) $=10^{-15}$ Дж).

Какой большой выигрыш в подвижности позволяет получить использование селективно-легированных структур, можно видеть из рис. 4.

На рис. 5 показан полевой транзистор, выполненный на основе селективно-легированной структуры. При концентрации электронов в канале полевого транзистора ~$2 \cdot 10^{17}$ см$^{-3}$ подвижность их выше, чем в GaAs-транзисторе примерно в 2 раза при комнатной температуре (300 К) и примерно в 100 раз при температуре 80 К.

Помимо структуры GaAs/GaAlAs, исследуются возможности создания полевых транзисторов на основе других селективно-легированных структур.

Создание новых элементов для ЭВМ будущих поколений

Объемные интегральные схемы. Сегодня на кремниевой пластине размером 5×5 мм удается разместить до 500 000 транзисторов. Предполагается, что к концу 80-х годов на кремниевой (и арсенид-галлиевой) пластине такого же размера будет размещаться несколько миллионов транзисторов. Однако для ЭВМ будущих поколений даже такая огромная плотность упаковки окажется недостаточной. Поэтому уже сейчас ведется работа над созданием интегральных схем нового типа — объемных ИС, каждая из которых должна содержать десятки и сотни миллионов полупроводниковых приборов.

Объемная ИС напоминает слоеный пирог. Каждый слой этого пирога — уже знакомая нам плоская ИС.

После того как заканчивается формирование обычной плоской ИС на полупроводниковой пластине: изготавливаются все транзисторы, соединения между ними, внешние выводы и т. д., сверху наращивается слой диэлектрика. Затем поверх диэлектрика наращивается слой полупроводника. На этом полупроводниковом слое создается вторая ИС и т. д.

В корпус помещается теперь не пластинка, а «кубик», содержащий много ИС. При этом соединения между плоскими ИС выполняются внутри «кубика» сразу в процессе изготовления объемной ИС. В результате число внешних соединений резко уменьшается. Возрастает надежность и уменьшается стоимость схемы.

Полупроводниковые элементы оптических ЭВМ. В ЭВМ информация, как мы знаем, хранится и обрабатывается в виде электрических сигналов. Однако уже с середины 70-х годов начались работы по созданию ЭВМ совсем иного типа — оптических ЭВМ.

В современных ЭВМ «нулю» и «единице» — двум числам, с помощью которых записывается вся хранимая и перерабатываемая машиной информация, условно соответствуют закрытое и открытое состояние транзисторов. В проектируемых оптических ЭВМ «единице» соответствует прохождение света через оптическую ячейку, «нулю» — поглощение света в ячейке.

Предполагается, что луч полупроводникового лазера, введенный в световод (рис. 6), будет направляться к полупроводниковым оптическим ячейкам, прозрачность которых может изменяться десятки миллиардов раз в секунду с малыми затратами энергии.

Удивительные элементы совершенно необычных ЭВМ

Природа подсказывает нам, что увеличение быстродействия — не единственный путь усовершенствования интеллектуальных возможностей ЭВМ. Клетки человеческого мозга — нейроны — переключаются за время, приблизительно в миллион раз большее, чем «клетки» современных ЭВМ. Однако именно Человек изобрел и ЭВМ и очень многие другие замечательные вещи.

Как устроен человеческий мозг, почему он работает с такой замечательной эффективностью — эти вопросы интенсивно изучаются и еще очень далеки от разрешения. Однако уже сегодня сделаны первые шаги по созданию биомолекулярных ИС — основы будущих биологических ЭВМ. Запатентован метод изготовления ИС на основе белкового материала — полилизина. Созданы молекулярные переключатели, белковые полевые транзисторы, биодатчики сигналов, срабатывающих при ядерных, биологических или химических воздействиях. Предполагается, что плотность упаковки элементов в таких биополимерных структурах приблизится к плотности упаковки структур, ответственных за фотосинтез в зеленых листьях растений и составит более миллиарда на 1 мм^2. Есть основания надеяться, что биомолекулярные ИС будут не изготавливать, а выращивать, как живую ткань.

Впрочем, если эти надежды оправдаются, такие элементы не будут иметь отношения к полупроводникам.

Но в ближайшее десятилетие именно прогресс в области полупроводниковой электроники определит и уровень достижений в разработке современных ЭВМ.

Рис. 6. Полупроводниковый лазер на основе GaAlAs с длиной волны ~1 мкм. Справа — оптическое волокно диаметром примерно 100 мкм, по которому проходит излучение.

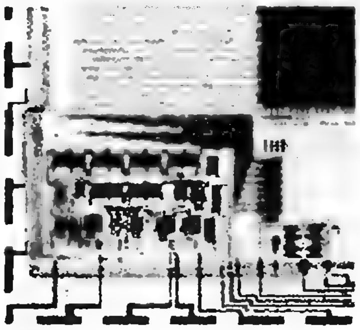
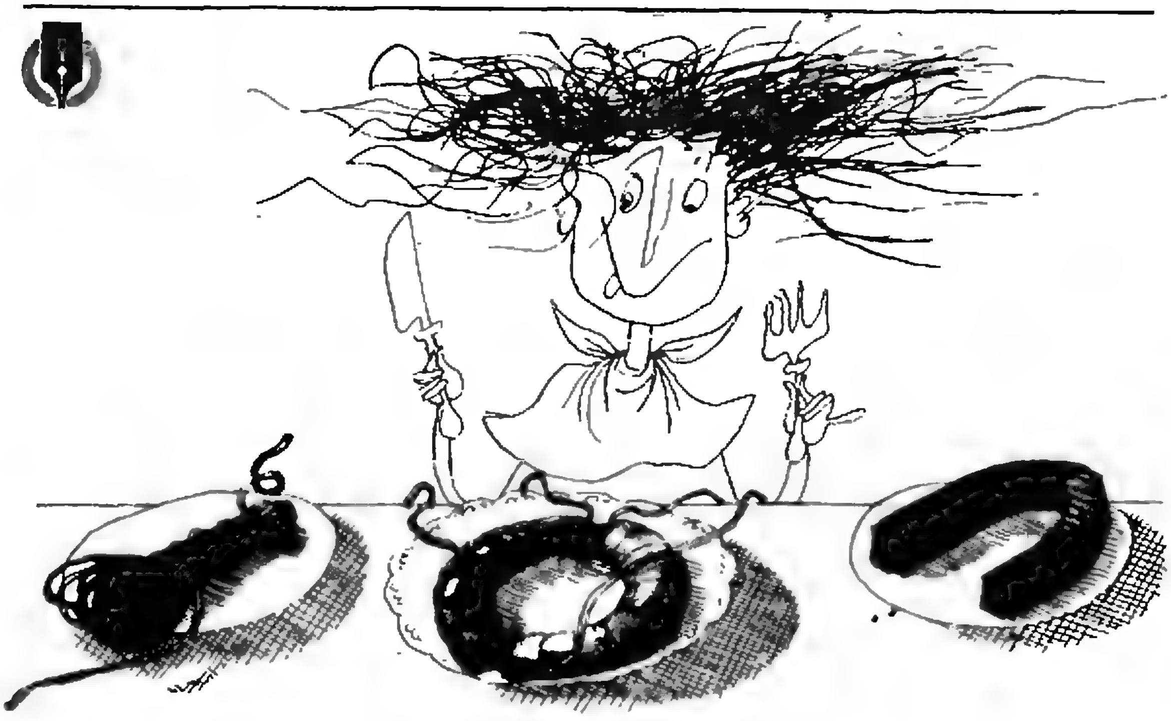


Рис. 7. Одно из перспективных направлений создания ЭВМ следующих поколений основано на использовании явления сверхпроводимости. В структурах из слоев сверхпроводника, разделенных пленкой диэлектрика («сэндвич-структуры»), при очень низких температурах наблюдается эффект Джозефсона. Такие структуры могут находиться в двух устойчивых состояниях — в зависимости от величины протекающего тока на них появляется или исчезает электрическое напряжение. Этим способом удалось создать элементы памяти с быстродействием ~0,01 нс и фантастически малым тепловыделением ~0,1 фДж. На снимке показана часть интегральной схемы, разработанной в исследовательской лаборатории фирмы «IBM», в которую входят 2048 сверхпроводящих ячеек памяти.



Электромагнитная индукция

Доктор физико-математических наук
С. М. КОЗЕЛ

Явление электромагнитной индукции было открыто Фарадеем в 1831 году. Это открытие показало, что между электрическим и магнитным полями имеется тесная связь — изменяющееся во времени магнитное поле порождает электрическое. Примерно через 30 лет Максвеллу удалось показать, что изменяющееся электрическое поле в свою очередь порождает магнитное. В этих двух великих открытиях прошлого века заключена, по существу, вся современная наука об электромагнитных полях. Они позволили предсказать существование радиоволн, дать объяснение электромагнитной природы света.

В результате многочисленных и разнообразных опытов Фарадей установил количественную связь между ЭДС индукции $\mathscr{E}_{\text{инд}}$ и скоростью изменения магнитного потока Φ, пронизывающего замкнутый контур (закон Фарадея):

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

В более строгой математической записи $\mathscr{E}_{\text{инд}}$ выражается через первую производную магнитного потока по времени: $\mathscr{E}_{\text{инд}} = -\Phi'(t)$.

Опыты по электромагнитной индукции, поставленные Фарадеем, можно разделить на две группы. К первой группе относятся опыты с проводниками, движущимися в магнитном поле. В этом случае возникновение ЭДС индукции объясняется действием силы Лоренца. При движении проводника его свободные заряды движутся вместе с ним. Сила Лоренца, действующая на эти заряды, вызывает их перемещение относительно проводника.

На рисунке 1 изображена схема одного из таких опытов. В магнитном поле постоянного магнита находится замкнутая проволочная рамка, в цепь которой включен гальванометр Г. Рамка удаляется со скоростью $\vec{v}$ от южного полюса магнита, а ее плоскость остается перпендикулярной оси магнита. При движении в рамке возникает индукционный ток. Формула Фарадея позволяет найти направление индукционного тока.

Вопрос 1. *Каков физический смысл знака «—» в формуле для* $\mathscr{E}_{\text{инд}}$?

Для определения направления индукционного тока нам необходимо прежде всего задать положительное направление тока в рамке и направление положительной нормали к плоскости рамки (которая определяет знак магнитного потока). Эти два направления должны быть согласованы по правилу правого винта (буравчика). Так, если на рисунке 1 выбрать направление положительной нормали $\vec{n}$ к плоскости рамки слева направо, то положительное направление тока должно быть выбрано против часовой стрелки (если смотреть на рамку со стороны магнита). При таком выборе магнитный поток, пронизывающий контур рамки, $\Phi > 0$, но при удалении рамки от магнита поток уменьшается и, следовательно, $\Delta\Phi/\Delta t < 0$. Из закона Фарадея следует, что $\mathscr{E}_{\text{инд}} > 0$. Если рамка обладает активным сопротивлением R, то индукционный ток $I = \mathscr{E}_{\text{инд}}/R > 0$. Это означает, что ток будет течь против часовой стрелки.

Разобранное здесь правило знаков часто ускользает от внимания абитуриентов. А между тем знак «—» в законе Фарадея обеспечивает выполнение закона сохранения энергии. В нашем примере на каждый элемент рамки, по которому течет индукционный ток, будет действовать сила Ампера $\vec{F}$. Горизонтальная составляющая этой силы направлена против движения рамки. Таким образом, в соответствии с законом сохранения и превращения энергии рамка будет испытывать торможение, а в самой рамке будет выделяться джоулево тепло.

Индукционный ток в рамке возникает не только при ее поступательном движении, но и при вращении или деформации рамки в магнитном поле. Важно только, чтобы изменялся магнитный поток, пронизывающий рамку.

Опыт показывает, что если рамку оставить неподвижной, а перемещать магнит, то индукционные явления протекают точно так же, как и при движении рамки. Индукционный ток зависит только от относительного движения рамки и магнита. Закон Фарадея применим и в этом случае, однако объяснение явления теперь оказывается совершенно другим. В неподвижных контурах сила Лоренца не может вызвать движения зарядов по проводникам. Ответственным за возникновение $\mathscr{E}_{\text{инд}}$ в этом случае является электрическое поле, возникающее при изменении магнитного поля. Это поле называют вихревым, потому что, в отличие от электростатического поля, его силовые линии могут быть замкнуты.

Вопрос 2. *Какова количественная связь вихревого электрического поля с $\mathscr{E}_{\text{инд}}$?*

По определению электродвижущая сила равна работе сил, действующих на единичный положительный заряд при его перемещении по замкнутой траектории. В электростатическом поле эта работа всегда равна нулю (такие поля называют потенциальными). В вихревом электрическом поле она может быть отлична от нуля. Эта работа и равна $\mathscr{E}_{\text{инд}}$.

В качестве примера рассмотрим магнитное поле между полюсами электромагнита (рис. 2). Пусть, для простоты, полюсы цилиндрические, так что магнитное поле в области, близкой к оси, можно считать однородным. Если магнитное поле будет изменяться со временем, то в зазоре электромагнита возникнет вихревое электрическое поле, силовые линии которого представляют собой концен-

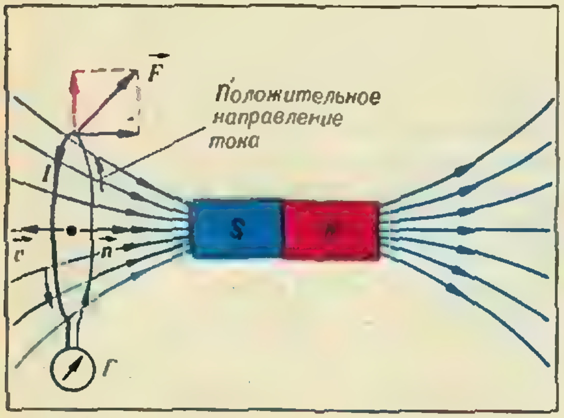


Рис. 1.

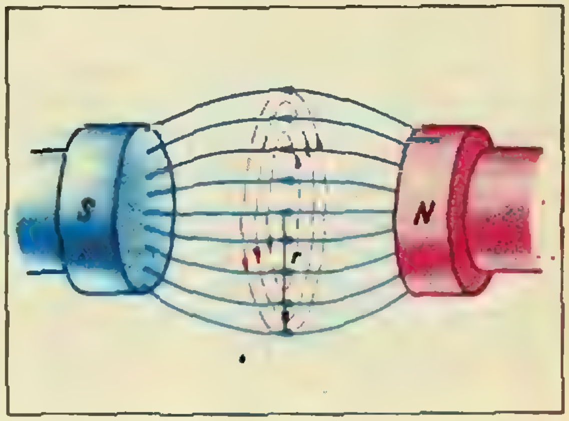


Рис. 2.

трические окружности. Выделим окружность радиусом r. Работу вихревого электрического поля при перемещении единичного положительного заряда по этой окружности можно записать в виде

$$E(r)\cdot 2\pi r = \mathscr{E}_{\text{инд}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta B}{\Delta t}\pi r^2.$$

Отсюда

$$E(r) = -\frac{r}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Направление линий напряженности $\vec{E}$ вихревого электрического поля на рисунке 2 показано для случая, когда индукция $\vec{B}$ магнитного поля возрастает со временем.

Представление о вихревом электрическом поле было введено Максвеллом. По Максвеллу, сущность явления электромагнитной индукции состоит в возникновении вихревого электрического поля, которое может возбуждаться не обязательно в проводниках. Оно может возникнуть и в пространстве, где нет никаких проводников. Вихревое электрическое поле, порожденное изменяющимся магнитным полем, может проявиться в действии на отдельные заряженные частицы в вакууме, как, например, в ускорителе электронов — бетатроне (см. задачу 4).

Рассмотрим теперь ряд задач на индукционные явления в движущихся и неподвижных проводниках.

Задача 1. *По двум вертикальным параллельным рейкам, замкнутым в верхней части через резистор с сопротивлением $r=1{,}1$ Ом и батарею с ЭДС $\mathscr{E}=1$ В, без трения скользит стержень CD, длина которого $l=10$ см и масса $m=10$ г (рис. 3). Система находится в однородном магнитном поле с индукцией $B=1$ Тл. Вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости чертежа и направлен к читателю. Найдите установившуюся скорость стержня. При каком соотношении между параметрами задачи установившаяся скорость будет направлена вверх?*

Рассмотрим контур $ACDK$, заштрихованный на рисунке 3. При движении стержня в нем будет возникать $\mathscr{E}_{\text{инд}}$. За положительное направление тока в этом контуре выберем направление против часовой стрелки. Тогда положительная нормаль к плоскости контура направлена к читателю и, следовательно, магнитный поток $\Phi>0$. При движении стержня вниз магнитный поток через контур увеличивается: $\Delta\Phi/\Delta t>0$. Если скорость падения обозначить через v, то $\mathscr{E}_{\text{инд}} = -\Delta\Phi/\Delta t = -vlB$.

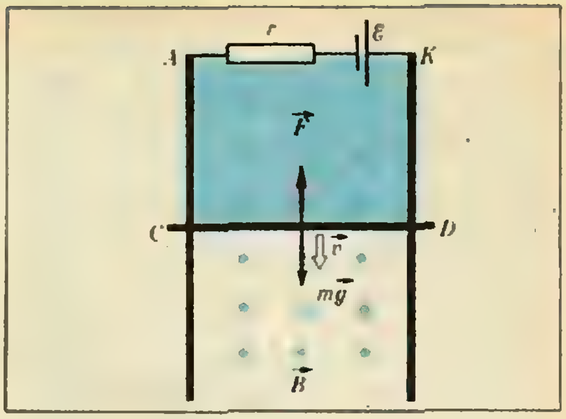


Рис. 3.

Запишем теперь закон Ома для контура $ACDK$:

$$Ir = -\mathscr{E} + \mathscr{E}_{\text{инд}} = -\mathscr{E} - vlB.$$

К этому уравнению нужно добавить условие постоянства скорости: при установившемся движении сила тяжести $m\vec{g}$ компенсируется амперовой силой $\vec{F}$, действующей на стержень со стороны магнитного поля. Применяя правило левой руки, легко убедиться, что амперова сила будет направлена вверх тогда, когда ток в стержне течет справа налево, то есть при $I<0$. Следовательно,

$$mg = F = -IBl.$$

Отсюда

$$v = \frac{1}{Bl}\left(\frac{mgr}{Bl} - \mathscr{E}\right).$$

Подставляя числовые данные, найдем: $v=1$ м/с>0 — стержень действительно движется вниз.

Для того чтобы установившаяся скорость оказалась направленной вверх, должно выполняться условие

$$\mathscr{E} > \frac{mgr}{Bl} = 1{,}1 \text{ В}.$$

Обратим внимание на то, что из написанных формул вытекает очень важное энергетическое соотношение:

$$I^2r = -\mathscr{E}I - vlBI = -\mathscr{E}I + mgv.$$

Джоулево тепло I^2r, выделяющееся в единицу времени на сопротивлении r, равно сумме работ батареи $-\mathscr{E}I$ (эта работа положительна, так как $I<0$) и силы тяжести mgv за это же время. Магнитное поле работы не совершает!

Задача 2. *В однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}1$ Тл находится плоская проволочная рамка площадью $S=100$ см^2 так, что ее плоскость перпендикулярна линиям индукции. Рамка замкнута на гальванометр Г. На какой угол повернули рамку, если при повороте через гальванометр протек заряд $q=10^{-3}$ Кл? Полное сопротивление рамки вместе с гальванометром $R=1$ Ом.*

При повороте рамки возникает ЭДС индукции $\mathscr{E}_{\text{инд}}=-\Delta\Phi/\Delta t$, и в рамке появляется ток

$$I=\frac{\mathscr{E}_{\text{инд}}}{R}=-\frac{1}{R}\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Вспомним, что знак «—» в этом соотношении определяет направление тока.

Заряд, протекший через цепь гальванометра за время Δt, есть

$$\Delta q=I\Delta t=-\frac{1}{R}\Delta\Phi.$$

Отсюда следует, что полный заряд q будет определяться полным изменением магнитного потока при повороте рамки на угол φ:

$$\Phi_2-\Phi_1=-BS(1-\cos\varphi);$$

$$q=-\frac{\Phi_2-\Phi_1}{R}=\frac{BS}{R}(1-\cos\varphi).$$

Подставляя числовые данные, получим $\varphi=90°$.

Заметим, что результат не зависит от того, каким способом была повернута рамка — быстро или медленно, равномерно или нет.

Вопрос 3. *Будет ли зависеть от способа поворота рамки работа внешних сил?*

Утвердительный ответ на этот вопрос вытекает из того, что силы, действующие на стороны рамки в магнитном поле, пропорциональны индукционному току, то есть скорости изменения магнитного потока $\Delta\Phi/\Delta t$. Таким образом, при быстрых поворотах рамки внешние силы должны совершать бо́льшую работу, чем при медленных.

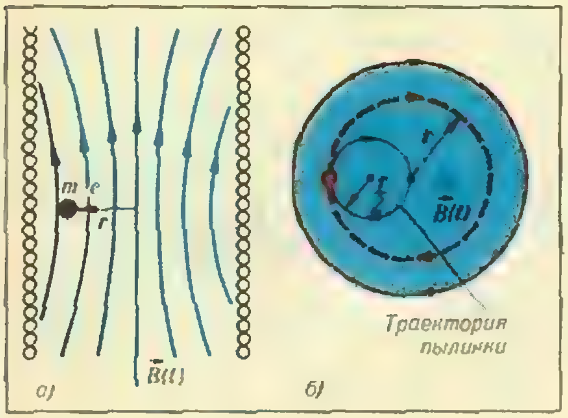


Рис. 4.

Задача 3. *Внутри катушки на расстоянии r от ее оси находится положительно заряженная пылинка, масса которой m и заряд e (рис. 4, а). Вначале ток в катушке равен нулю, и пылинка неподвижна. Затем в катушке включили ток, и индукция магнитного поля в ней достигла величины B_0. Предполагая, что за время нарастания магнитного поля смещение пылинки пренебрежимо мало, найдите ее скорость и траекторию движения в установившемся режиме. Поле в катушке считать однородным, силой тяжести и сопротивлением воздуха пренебречь.*

В этой задаче обсуждается простейшая модель индукционного ускорителя. Заряженная пылинка ускоряется вихревым электрическим полем, возникающим при изменении магнитного поля. Силовые линии электрического поля представляют собой концентрические окружности с центром на оси катушки. Мы показали ранее, что электрическое поле на окружности радиусом r (рис. 4, б) определяется соотношением

$$|E|=\frac{r}{2}\frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Сила, действующая на пылинку, $|F|=e|E|$. Импульс этой силы за время Δt равен $|F|\Delta t=er\Delta B/2$. Обратим внимание на то, что здесь, как и в задаче 2, результат не зависит от характера процесса и определяется только полным изменением магнитного потока. Из второго закона Ньютона найдем изменение импульса пылинки, а значит, и ее скорость в установившемся режиме:

$$v=\frac{|F|\Delta t}{m}=\frac{er}{2m}B_0.$$

Последующее движение пылинки в однородном магнитном поле происходит под действием силы Лоренца. Поскольку скорость пылинки перпендикулярна магнитным линиям, пылинка будет равномерно двигаться по окружности радиуса

$$R=\frac{mv}{eB_0}=\frac{r}{2}.$$

Задача 4. *В ускорителе электронов — бетатроне — роль ускоряющего поля играет вихревое электрическое поле, возбуждаемое изменением магнитного потока, пронизывающего орбиту электронов. Считая радиус орбиты электронов неизменным, определите необходимое для этого в данный момент времени соотношение между средним магнитным полем $B_{ср}$, пронизывающим орбиту электронов, и магнитным полем на орбите B. Магнитное поле параллельно оси симметрии вакуумной камеры бетатрона.*

Физика этой задачи состоит в том, что вихревое электрическое поле E и сообщаемая этим полем электрону скорость v определяются изменением среднего значения магнитного поля, пронизывающего орбиту, а сила Лоренца, удерживающая электрон, зависит от магнитного поля на самой орбите.

Проводя те же рассуждения, что и при решении предыдущей задачи, запишем

$$|E|=\frac{r}{2}\frac{\Delta B_{ср}}{\Delta t}, \quad v(t)=\frac{er}{2m}B_{ср}(t).$$

Из условия движения электрона по орбите $evB=mv^2/r$ получим

$$B(t)=\frac{mv(t)}{er}=\frac{B_{ср}(t)}{2}.$$

Таким образом, для стабильной работы бетатрона нужно, чтобы среднее магнитное поле внутри орбиты в любой момент времени было в два раза больше поля на орбите. Следовательно, магнитное поле в центральной части орбиты должно быть больше, чем на самой орбите. Это достигается специальным выбором конфигурации магнитов.

В заключение рассмотрим интересное применение закона электромагнитной индукции к сверхпроводящим катушкам. Сверхпроводники широко используются при создании сильных электромагнитов. В замкнутой сверхпроводящей обмотке ток может циркулировать длительное время без источника энергии.

Допустим, что у нас есть короткозамкнутая рамка из сверхпроводника. Пусть ток в рамке равен нулю. Внесем рамку во внешнее однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, направленной перпендикулярно плоскости рамки.

Вопрос 4. *Какой магнитный поток пронизывает рамку?*

Надо отметить, что многие абитуриенты отвечают на этот вопрос так: магнитный поток равен произведению BS, где S — площадь рамки. Этот ответ неверен. Правильный ответ состоит в том, что магнитный поток, пронизывающий рамку, по-прежнему будет равен нулю. Этот результат вытекает из закона Фарадея. Действительно, для сверхпроводящей замкнутой цепи закон Ома записывается в виде $0=-\Delta\Phi/\Delta t$. В левой части этого соотношения стоит падение напряжения на нулевом сопротивлении сверхпроводника, в правой — ЭДС индукции. Отсюда следует, что $\Phi=\mathrm{const}$. Таким образом, замкнутый сверхпроводящий контур является консерватором магнитного потока. Он сохраняет тот магнитный поток, который пронизывал контур в момент перехода в сверхпроводящее состояние. Этот поток нельзя изменить никакими внешними полями (до тех пор, пока сохраняется сверхпроводимость).

Физический механизм, обеспечивающий сохранение потока, состоит в том, что при изменении внешнего магнитного потока в контуре появляется индукционный ток, магнитное поле которого полностью компенсирует изменение внешнего магнитного потока.

Задача 5. *На какую величину изменится ток в круговой петле из сверхпроводника, если надеть ее на длинный соленоид, который подключен к батарее с ЭДС $\mathscr{E}$, как показано на рисунке 5? Полное сопротивление цепи соленоида r, индуктивность петли L, индуктивность соленоида L_0, его число витков N.*

Пусть I_0 и I — начальное и конечное значения тока в петле. Заметим, что ток в соленоиде не изменяется и остается равным $\mathscr{E}/r$, так что собственный магнитный поток соленоида равен $L_0\mathscr{E}/r$. При этом каждый виток соленоида пронизывает магнитный поток $L_0\mathscr{E}/(rN)$. Такой же поток (внешний по отношению к петле) пронизывает и петлю, надетую на соленоид. Но полный магнитный поток в петле должен остаться неизменным. Поэтому

$$LI\pm L_0\mathscr{E}/(rN)=LI_0,$$

или

$$I_0-I=\pm L_0\mathscr{E}/(LrN).$$

Двузначность в этих формулах связана с двумя возможностями взаимной ориентации магнитных полей соленоида и петли. Знак «+» соответствует одинаковой ориентации полей, знак «—» — разной. В первом случае ток в петле после надевания ее на соленоид уменьшается, во втором — увеличивается. Картина магнитных линий, изображенная на рисунке 5, соответствует второму случаю.

Упражнения

1. По железнодорожным рельсам, изолированным друг от друга, идет поезд со скоростью $v=60$ км/ч. Вертикальная составляющая магнитного поля Земли $B=0{,}5\cdot10^{-4}$ Тл. Что покажет вольтметр, включенный между рельсами, в следующих случаях: а) поезд приближается к прибору; б) поезд проходит над прибором; в) поезд удаляется от прибора? Ширина колеи $l=1{,}2$ м.

2. На железный цилиндрический сердечник, через который проходит однородное магнитное поле, создающее магнитный поток $\Phi=\Phi_0\cos\omega t$, соосно надето тонкое кольцо из диэлектрика радиусом r и площадью сечения S. Определите напряженность электрического поля в диэлектрике. Какой ток протекал бы по кольцу, если бы оно было сделано из проводника с удельным сопротивлением ρ? Индуктивностью кольца пренебречь.

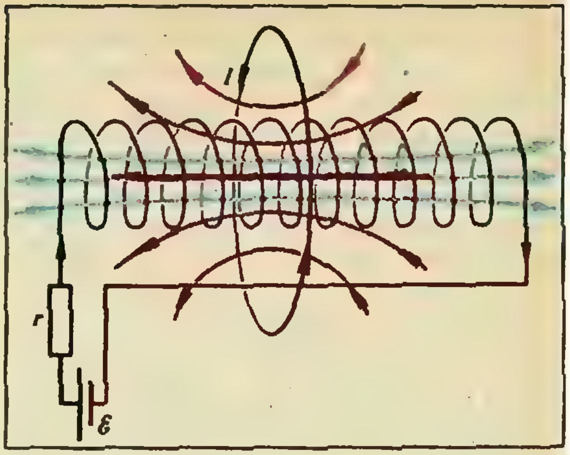


Рис. 5.

3. Постоянное напряжение на линии электровоза $\mathscr{U}=500$ В. При движении электровоза со скоростью $v=72$ км/ч ток в обмотке электромотора $I=1000$ А, а пусковой ток $I_0=2000$ А. Какую силу тяги развивает электровоз при движении с указанной скоростью? Какой при этом КПД электромотора? Считать, что разгон происходит без изменения сопротивления цепи электромотора (то есть без пускового реостата).

4. Простейшая динамомашина состоит из прямоугольной рамки площадью S с числом витков n и сопротивлением r. Рамка вращается в однородном магнитном поле с индукцией B. Определите средний момент сил, приложенных к рамке, и среднюю мощность, затрачиваемую на ее вращение. Динамомашина работает на внешнюю нагрузку с сопротивлением R.

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М941—М955, Ф953—Ф967, справились с задачами М941—М947, М949, М952, Ф953, Ф957, Ф959, Ф961, Ф962, Ф964. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

А. Абанов (Красноярск) 48; *Х. Агаев* (с. Тюркоба Аз. ССР) 48; *Р. Агаширинов* (с. Хурай Аз. ССР) 51; *В. Акопян* (Ереван) 48, 50; *М. Александров* (Москва) 48, 53, 54; *А. Алексейчук* (Одесса) 48; *М. Альт* (Одесса) 51; *Ю. Антимиров* (Рига) 48, 50; *Я. Аргентов* (Алма-Ата) 48; *Д. Aроцкер* (Киев) 51; *С. Аршава* (Северодонецк) 51; *А. Асташкевич* (Томск) 48, 50, 51, 53, 55; *А. Барабанов* (Киев) 51; *А. Баран* (Киев) 48, 50, 53; *А. Баран* (Минск) 48, 50, 51, 53. 55; *Р. Безрукавников* (Калуга) 48, 50; *Д. Бияшев* (Алма-Ата) 48, 50; *Е. Богомол* (Алма-Ата) 48, 50, 51; *С. Бондарчук* (Винница) 51; *Р. Валиев* (Фрунзе) 48, 51; *Я. Варшавский* (Харьков) 48, 50, 51, 53, 55; *А. Винничук* (Винница) 48, 50; *П. Вольфбейн* (Киев) 48, 50; *Т. Газарян* (Ереван) 48, 50, 51, 53; *Д. Гамарник* (Тбилиси) 48, 50; *О. Геворков* (Тбилиси) 48; *О. Гендельман* (Харьков) 48, 50, 54; *Р. Гендлер* (Ташкент) 48, 50, 51, 54, 55; *О. Геупель* (Дрезден, ГДР) 48, 50, 51; *А. Глуцюк* (Харьков) 48, 50, 51; *Р. Гой* (Львов) 51; *А. Гороховский* (Киев) 48, 51, 54; *Д. Гребнева* (Алма-Ата) 48, 50; *Н. Григорьева* (Андропов) 48, 51, 53, 54; *Р. Гринив* (Львов) 51, 55; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 48, 51; *А. Джафаров* (с. Тюркоба Аз. ССР) 48; *М. Добрицын* (Москва) 48, 50, 51, 53—55; *М. Дудник* (Алма-Ата) 51; *А. Дульнев* (Киев) 55; *А. Дынников* (Жуковский) 48, 51, 53; *И. Дынников* (Жуковский) 48, 51, 53; *Д. Ермишин* (Мытищи) 51; *С. Железовская* (Саратов) 48, 51; *Д. Житний* (Киев) 48; *В. Журавлев* (Гайворон) 48, 50; *П. Задорожный* (Киев) 48, 51, 53; *Д. Зайцев* (Киев) 48, 51, 55; *Е. Зельцер* (Киев) 50; *Б. Зон* (Харьков) 51, 55; *А. Иванов* (Первомайск Николаевской обл.) 48, 50; *М. Игнатьев* (Саратов) 48, 51; *В. Ильиных* (Алма-Ата) 48, 51; *В. Калашников* (Москва) 51; *И. Кан* (Семипалатинск) 51; *В. и И. Каповичи* (Хабаровск) 48, 50; *Н. Каппаров* (Алма-Ата) 48; *А. Каринский* (Невинномысск) 48, 50; *А. Каткова* (Алма-Ата) 51; *О. Кирнасовский* (Винница) 48, 50; *А. Киселев* (Ленинград) 48, 50, 51, 53—55; *А. Козинский* (Гайворон) 51; *Ю. Кондратенко* (Киев) 48, 50; *А. Кононенко* (Киев) 48; *А. Коршков* (Мозырь) 48, 53; *Е. Костюк* (Винница) 51; *В. Кращенко* (Алма-Ата) 48, 50; *Б. Кругликов* (Харьков) 48, 50, 51; *Н. Крылов* (Ленинград) 48, 50; *М. Кукс* (Львов) 48, 51; *Е. Култанов* (Аркалык) 48; *А. Купчишин* (Алма-Ата) 48; *М. Куринной* (Харьков) 48, 50, 51, 53—55; *С. Кутайцев* (Конаково) 48; *Н. Кушлевич* (Москва) 48, 50, 51, 53; *Д. Лазиков* (Киев) 48; *А. Ларкин* (Конаково) 48, 50; *Л. Леняшин* (Ленинград) 48, 50, 51, 53; *О. Лимешко* (Куйбышев) 48. 51, 53; *А. Литвак* (Ленинград) 48, 50, 51, 53—55; *М. Литвинов* (Киев) 48, 51, 53; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 48, 51; *Н. Малетин* (Ангарск) 51; *К. Мамуров* (Душанбе) 48, 50, 51, 55; *Д. Матюхов* (Евпатория) 48; *Ю. Махлин* (Москва) 48; *А. Мельцер* (Ленинград) 48, 51; *Б. Меркулов* (Куйбышев) 48, 50; *А. Минасян* (Ереван) 48; *Г. Минасянц* (Ереван) 48, 50, 51, 53; *Т. Мисирпашаев* (Москва) 48, 51, 54; *Г. Михалкин* (Ленинград) 48, 50, 51, 53—55; *Е. Мокшин* (Магнитогорск) 48; *М. Мунькин* (Алма-Ата) 48, 50, 51, 53; *А. Нагорный* (Слуцк) 48; *А. Некрасов* (Бельцы) 48, 51; *Ю. Ним* (п. Черноголовка Московской обл.) 48, 51; *О. Ниц* (Одесса) 48, 51, 53; *Е. Орынбасаров* (Алма-Ата) 48, 50; *Е. Осипов* (Алма-Ата) 51; *Д. Пастур* (Харьков) 50, 51, 53—55; *Г. Пельц* (Одесса) 51; *И. Пермякова* (п. Березовка Красноярского края) 54; *А. Петрова* (Ленинград) 48, 51; *Я. Печатников* (Ленинград) 48, 51; *А. Покровский* (Киев) 48, 51, 54, 55; *В. Полинов* (Магнитогорск) 48, 51; *М. Померанцев* (Черкассы) 48, 50, 54; *И. Портной* (Одесса) 48, 51, 53; *А. Португалов* (Киев) 51; *А. Пришляк* (Киев) 48, 50, 51, 53, 55; *В. Протасов* (Москва) 48, 50; *Т. Радько* (Корсунь-Шевченковский) 48, 50; *А. Райскин* (Алма-Ата) 51; *И. Раскина* (Витебск) 48, 53; *В. Ратнюк* (Евпатория) 50, 51; *Б. Ревунец* (Киев) 51, 53; *А. Ройтерштейн* (Ленинград) 48, 50, 51, 53; *С. Рубан* (Днепропетровск) 48, 50, 51; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 48; *З. Салканова* (Алма-Ата) 48; *И. Самовол* (Гайворон) 48, 50, 51; *Р. Сибилев* (Ленинград) 48, 51, 53—55; *И. Симоненко* (Великие Луки) 51, 53; *И. Симочкин* (Херсон) 55; *В. Слободянюк* (Киев) 48; *А. Смирнов* (Алма-Ата) 48; *С. Солянин* (п. Протвино Московской обл.) 55; *С. Стафеев* (Петрозаводск) 51, 55; *Д. Сторожук* (Киев) 50; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 48, 50, 51, 55; *В. Судаков* (Тбилиси) 48, 50, 51, 53, 54; *Ж. Сушинскас* (Вильнюс) 48, 51, 53; *Д. Тажибаева* (Алма-Ата) 51; *Д. Тамаркин* (Горький) 48, 50; *Ю. Телюк* (Павлодар) 48, 50; *В. Тищенко* (Киев) 51; *К. Тищенко* (Минск) 48, 50, 51, 54; *А. Ткаченко* (Киев) 48; *Г. Топровер* (Волгоград) 48, 53; *Д. Туляков* (Жданов) 48, 50, 53; *В. Тумаркина* (Винница) 48, 51; *М. Тумаш* (Львов) 48, 51; *С. Тупаева* (Евпатория) 48; *Ю. Тышко* (Ленинград) 50; *Р. Ульмасов* (Душанбе) 48; *З. Усенова* (Алма-Ата) 48; *И. Устиловский* (Москва) 48, 50, 51, 53—55; *В. Филимоненков* (Свердловск) 48, 50, 51, 53; *В. Фрасинич* (Гайворон) 51; *М. Хованов* (Москва) 48; *Ю. Хохлов* (Ленинград) 48, 50, 51, 53, 55; *В. Цвиркунов* (Киев) 48, 50; *А. Чагиров* (Алма-Ата) 48, 50, 51; *К. Чурашев* (Новосибирск) 48, 50, 51; *Ю. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) 48, 51, 53, 54; *С. Шейнин* (Молодечно) 48; *М. Шефтер* (Москва) 48, 51, 53; *И. Шехтман* (Киев) 50; *П. Шрабштейн* (Москва) 51; *Б. Шраер* (Ленинград) 48, 50, 51, 53; *В. Шульга* (Евпатория) 48, 50; *Т. Юрьева* (Алма-Ата) 48; *Е. Якуб* (Бахчисарай) 48.

Физика

А. Абанов (Красноярск) 54, 66, 67; *И. Абрамчук* (Винница) 58, 60; *С. Анатольев* (Ярославль) 54, 55; *В. Башкиров* (Чебоксары) 55, 65; *К. Бедов* (Челябинск) 54—56, 60, 65, 67; *С. Беловолов* (Новосибирск) 65; *И. Бена* (Васлуй, СРР) 54—56, 58, 66, 67; *А. Беренгольц* (Кишинев) 54; *С. Бобылев* (Березники) 55, 56, 58, 60, 65—67; *С. Болдырев* (Мытищи) 66, 67; *Ю. Боровский* (Киев) 54—56, 58, 60, 66, 67; *Ш. Бреннер* (Хуст) 56; *В. Быков* (Киев) 54, 55; *А. Быцко* (Ленинград) 54, 55, 66; *О. Верцимаха* (Киев) 55; *А. Гаек* (Днепропетровск) 58; *О. Гендельман* (Харьков) 58, 63, 65—67; *В. Гринберг* (Москва) 55; *Д. Дементьев* (Нальчик) 65; *О. Денисов* (Хабаровск) 55; *А. Дода* (Корсунь-Шевченковский) 56, 66, 67; *В. Душацкий* (Киев) 54, 56, 60, 66; *А. Дынников* (Жуковский) 54, 55, 58, 60, 63, 65—67; *Д. Ежиков* (Минск) 55; *А. Жариков* (Киев) 54—56, 58, 60, 65—67; *Э. Жасинас* (Шяуляй) 66, 67; *Д. Зайцев* (Киев) 63; *В. Зелов* (Новосибирск) 54, 55, 58; *Б. Зингерман* (Самарканд) 54—56, 58, 67; *И. Иванов* (Калуга) 55, 56; *С. Иванов* (Уфа) 58, 66, 67; *Р. Исаенко* (Сыктывкар) 55, 63, 67; *П. Кадурин* (Киев) 55, 56; *В. Калацкий* (Солигорск) 55, 56, 58; *В. Каменькович* (Харьков) 56; *В. Кирьяшкин* (Саратов) 54, 56; *П. Кларк* (Тула) 55, 60, 63, 65—67; *Ю. Кондратенко* (Киев) 54; *А. Краковский* (Харьков) 56; *Б. Крутов* (Воронеж) 54; *А. Курачев* (Новосибирск) 55, 63, 66; *Д. Ладиков* (Киев) 54; *В. Литвин* (Днепропетровск) 55; *Ю. Лобзаков* (Киев) 58, 60; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 55, 58, 66; *И. Лугач* (Винница) 66; *И. Луценко* (Донецк) 54—56, 58, 60, 63, 65—67; *П. Лушников* (Москва) 54, 56, 58, 60; *О. Маров* (Канев) 60; *С. Маслов* (Москва) 55, 58, 65; *В. Мелик-Алавердян* (Ереван) 58, 60, 66; *Т. Мисирпашаев* (Москва) 55, 63, 65, 67; *Л. Митошерю* (СРР) 54, 55; *Е. Михалюк* (Минск) 56; *Д. Могилевцев* (Шклов) 56, 66; *А. Мудрик* (Брест) 66, 67; *С. Настенко* (Киев) 60; *А. Недачин* (Киев) 54; *Г. Николаишвили* (Тбилиси) 54—56, 58, 60, 65—67; *С. Новиков* (Херсон) 56, 66; *А. Оводенко* (Донецк) 56, 58, 60, 66; *В. Овчаров* (Шостка) 55; *О. Осауленко* (Киев) 55, 56, 58, 60; *Р. Паламарчук* (Нежин) 54, 55; *А. Парецкий* (Минск) 55, 56, 58, 60, 66, 67; *Е. Петров* (Минск) 54—56, 58, 60; *А. Покровский* (Киев) 58; *Б. Полищук* (Серпухов) 56; *О. Посудневский* (Береза) 54, 55, 58, 60, 66, 67; *Т. Пустогова* (Киев) 54; *А. Путилин* (Минск) 56; *А. Пяллинг* (Новосибирск) 58, 65—67; *С. Рахамов* (Казань) 54, 55; *С. Ревков* (Киев) 60, 65—67; *А. Розенберг* (Уфа) 58, 65, 66; *Н. Ромец* (Киев) 66, 67; *С. Рося* (Минск) 54—56, 58, 60, 63, 66, 67; *А. Рудницкий* (Рига) 56; *Ю. Рыбалочка* (Киев) 54—65, 58, 60, 65—67; *Р. Сагайдак* (с. Матугов Черкасской обл.) 54, 56, 58, 60, 65, 66; *Т. Сагайдак* (Канев) 58, 66; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 55, 56, 66; *Б. Самойлов* (Киев) 54—56, 58, 60, 65—67; *В. Сандомирский* (Братск) 56, 58, 60; *А. Сиваченко* (Москва) 54; *А. Сидоренко* (Киев) 66; *М. Ситников* (Климовск) 54—56, 58, 66; *С. Скобаро* (п. Коряжма Архангельской обл.) 56, 58; *А. Снижко* (Запорожье) 55, 58, 63, 66, 67; *А. Сомов* (Киев) 58, 60; *С. Сочнев* (Киев) 54, 55; *А. Ставицкий* (Баку) 54, 55, 66; *В. Степурин* (Винница) 65; *И. Стрешинский* (Киев) 58, 60, 65, 66; *И. Струговщиков* (Киев) 58, 60; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 56, 60, 66, 67; *С. Сухов* (Киев) 54; *В. Тарнецкий* (Алма-Ата) 66; *Б. Татиевский* (Киев) 54, 55, 58; *А. Тейтельбойль* (п. Черноголовка Московской обл.) 58; *А. Ткаченко* (Киев) 58; *С. Толмачев* (Минск) 55, 56; *С. Тужанский* (Винница) 58, 60; *М. Тумаш* (Львов) 54, 55; *А. Тюрин* (Николаев) 60, 66, 67; *С. Ушаков* (Ярославль) 54, 55; *М. Федоров* (Ульяновск) 65—67; *Г. Финкельштейн* (п. Черноголовка Московской обл.) 56, 63, 65—67; *А. Хохров* (Киев) 66, 67; *Ю. Чернявский* (п. Раздольное Крымской обл.) 67; *Н. Чух* (Киев) 58; *Л. Шаповаленко* (Канев) 58, 65, 66; *В. Шаповалов* (Донецк) 54, 55; *Е. Шаронов* (Уфа) 66, 67; *Г. Швец* (Киев) 54—56, 58, 60, 65—67; *И. Шехтман* (Киев) 63, 66; *А. Шуляк* (с. Молодецкое Черкасской обл.) 54, 55, 65—67; *М. Юдин* (Запорожье) 55, 63, 65—67; *О. Юсухно* (Киев) 54, 55, 58, 63, 66, 67.

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1985 году

Предлагаем подборку задач вступительных экзаменов по математике и физике в некоторые университеты — Белорусский (1), Горьковский (2), Донецкий (3), Омский (4), Саратовский (5), Уральский (6) и институты — Владимирский педагогический (7), Горьковский политехнический (8), Киевский педагогический (9), Ленинградский педагогический (10), Ленинградский технологический (11), Минский радиотехнический (12), Московский авиационный технологический (13), Московский институт электронной техники (14), Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта (15), Рижский политехнический (16), Тбилисский педагогический (17), Томский политехнический (18), Ярославский педагогический (19).

Математика

Задачи письменного экзамена

Алгебра

1(4). Дорога от пункта A до пункта B идет сначала по ровному месту, затем в гору. Автомобиль, выехав из A в B, двигался по ровному месту со скоростью 70 км/ч, в гору — со скоростью 60 км/ч. Доехав до B, он тотчас повернул назад и двигался под гору со скоростью 80 км/ч, а по ровному участку — со скоростью 75 км/ч. Найдите длину ровного участка пути, если на весь путь от A до B и назад автомобиль затратил 3 ч 29 м и проехал за это время 250 км.

2(1). На один продукт два раза была снижена цена, каждый раз на 20 %. На другой продукт, бывший до снижения в одной цене с первым, снизили цену один раз на x %. Каким должно быть x, чтобы после всех указанных снижений цен оба продукта были вновь в одной цене?

3(2). Шестизначное число начинается слева цифрой 1. Если эту цифру перенести с первого места слева на последнее место справа, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найдите первоначальное число.

4(3). Некоторый раствор состоит из двух веществ, входящих в отношении 3:4, а другой содержит те же вещества в отношении 1:3. Из скольких частей обоих растворов можно получить третий, содержащий те же вещества в отношении 1:2?

5(9). Два всадника выезжают одновременно из пунктов A и B навстречу один другому. Первый всадник прибывает в B через 27 мин, а второй в A через 12 мин после встречи. За сколько минут первый всадник проедет весь путь от A до B?

6(7). Два мотоциклиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B. К моменту встречи прошло менее 45 мин и первый мотоциклист проехал 3/8 расстояния от A до B. Определите, за какое время второй мотоциклист проедет расстояние от B до A, если через 45 мин после начала движения расстояние между мотоциклистами было равно половине расстояния между A и B.

7(3). Двое рабочих могут выполнить некоторую работу за 30 дней. После шестидневной совместной работы первый из рабочих (работая один) может закончить ее за 40 дней. Сколько дней каждый из рабочих, работая один, должен затратить на выполнение всей работы?

8(14). В геометрической прогрессии $a_8=10$. Найдите произведение $a_1a_2\ldots a_{14}a_{15}$.

9. Вычислите:

а) (15) $\dfrac{\left(0{,}2:0{,}125+1\frac{4}{5}:2\frac{4}{25}-0{,}1\right)\cdot\frac{3}{7}}{\left(\frac{3}{8}+0{,}5^5\right)\cdot 625^{-1/4}:0{,}3}$;

б) (15) $9^{\frac{1}{\log_4 3}+\frac{1}{2}\log_3 4}+27^{\frac{1}{\log_6 3}}+16^{-\frac{1}{\log_3 4}}$;

в) (4) b^b, если $a^b=8$, $b^c=10$, $a^c=2$.

г) (14) $\log_{30}8$, если $\lg 5=a$, $\lg 3=b$;

д) (7) $\operatorname{tg}\alpha$, если $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$;

е) (14) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}\cdot\cos\frac{2\pi}{10}\cdot\cos\frac{\pi}{10}$;

ж) (14) $\cos 10^\circ\cdot\operatorname{tg}40^\circ+\sin 10^\circ$;

з) (2) $\sin 70^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 10^\circ$.

10. Упростите выражение:

а) (2) $$\frac{1}{\sqrt{a^2-4}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\times$$

$$\times\frac{3a^2\cdot\frac{1}{\sqrt{3(a^2-4)}}-\sqrt{3(a^2-4)}}{a^2\left(1+\frac{3(a^2-4)}{a^2}\right)}$$

и найдите допустимые значения a;

б) (10) $$\sqrt{\frac{1+\cos(\pi/2-\alpha)}{1+\cos(3\pi/2-\alpha)}}+$$

$$+\sqrt{\frac{1+\sin(\pi+\alpha)}{1-\cos(5\pi/2+\alpha)}},$$ если $\pi/2<\alpha<3\pi/2$.

11. Решите уравнения:

а) (1) $\dfrac{2x^2-3x+5}{3x+5}+\dfrac{2(3x+5)}{2x^2-3x+5}=3$;

б) (14) $4-5x=|5x-4|$;

в) (2) $|x+1|+1=\dfrac{x+1}{|x|}$;

г) (9) $|x+7|=|x-2|+|x-3|$;

д) (19) $|x^2+x-2|=x+2$;

е) (12) $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$;

ж) (3) $\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x-x^2}-\sqrt{x}=0$;

з) (3) $5x^2+35x-\sqrt{x^2+7x-1}=4$;

и) $\sqrt{3-x} + \sqrt{2x-6} = 0$;
к) (13) $(9-x^2)\sqrt{2-x} = 0$.

12. Решите показательные и логарифмические уравнения:

а) (18) $16 \cdot 2^{3x} = \frac{4^{x-3}}{32}$;

б) (18) $3 \cdot 2^{2(\sqrt{x}-1)} - 2^{\sqrt{x}} = 8$;

в) (3) $(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}})^x + (\sqrt[3]{6-\sqrt{35}})^x = 12$;

г) (2) $\lg(x^2+2x+1) = \lg^2(x+1)+1$;

д) (1) $\lg(2x^2+21x+9) - \lg(2x+1) = 1$;

е) (12) $\frac{\log_3 2x}{\log_3(4x-15)} = 1$;

ж) (10) $\sqrt{3\log_2(-x)} = \log_2(-x)$;

з) (3) $4(\log_x\sqrt{3})^2 - 4\log_x 3\sqrt{3} + 5 = 0$.

13. Решите тригонометрические уравнения:

а) (13) $\cos 4x = -2\cos^2 x$;
б) (4) $2(1-\cos 2x) = \sqrt{3}\ \mathrm{tg}\, x$;
в) (3) $2\cos 3x = \sqrt{3}\cos x - \sin x$;
г) (10) $\sin^6 x - \sin^4 x = \cos^4 x - \cos^6 x$;
д) (4) $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x = 0$;

е) (19) $3\sin^2 x + \frac{5}{2}\sin 2x = 1 + 6\cos^2 x$;

ж) (13) $\frac{\sin 5x}{\sin 2x \cdot \cos 3x} = 1$;

з) (6) $2(x-3)\sin x = |x-3|$;

и) (7) $2\mathrm{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 7$;

к) (13) $\sin^3 x + 1/2\sin 2x = 1 - \cos^3 x$;

л) (3) $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, 2x = \sin 3x \cdot \cos x$.

14 (2). Найдите все целые числа k, при которых уравнение

$$\cos kx = 1 + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

имеет решения, и решите это уравнение.

15. Решите системы уравнений:

а) (9) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}\sqrt{y} + \sqrt{x}\sqrt[3]{y} = 12, \\ xy = 64; \end{cases}$

б) (15) $\begin{cases} 5^x - 9y = 0, \\ 3^x - 25y = 0; \end{cases}$

в) (1) $\begin{cases} y^{5x^2-51x+10} = 1, \\ xy = 5; \end{cases}$

г) (14) $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2) = 2, \\ -2\log_{1/4} + \log_2 y = 1; \end{cases}$

д) (2) $\begin{cases} \frac{1}{2}\lg x + \frac{1}{2}\lg y - \lg(4-\sqrt{x}) = 0, \\ 25\sqrt{x}\cdot\sqrt{y} - 125 \cdot 5^{\sqrt{y}} = 0; \end{cases}$

е) (4) $\begin{cases} 3^x \log_3 \frac{y}{3} = 3^x + \log_{3y} 5, \\ 3^{x-1} + \log_3 y^{2/3} + 1 = 0. \end{cases}$

16 (6). При каких зивчениях параметра p наибольший корень уравнения $x^2-(p+1)px+p^3=0$ больше чем 1/2?

17 (3). При каких значениях a уравнение

$$2^{2x} - (2a+1)2^x + a^2 + a = 0$$

имеет решения? Найдите эти решения.

18 (4). При каких a уравнение

$$4x|x| + (a-7)x + 1 = 0$$

имеет ровно два разных корня.

19. Решите неравенства

а) (3) $\frac{x+1}{x^2-7x+6} \geqslant 0$;

б) (14) $4|x+2| < 2x+10$;

в) (14) $(x-1)\sqrt{-x^2+x+6} \geqslant 0$;

г) (14) $\sqrt{13-3x} > x-1$;

д) (14) $\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{2}\cos\frac{\pi x}{4} \geqslant 2^{1-x} + \sqrt{(1-x)(x+2)}$;

е) (19) $0{,}3^{\log_4(x-5)} > 1$;

ж) (6) $\log_{\frac{1}{4}}(x+7) \leqslant \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$;

з) (3) $\log_{x-5}(x-3) < \log_{x-5}(x-5{,}5)$;

и) (4) $\log_2(2^x+1) + \log_2 3 > \log_2(2^x-1) + x + 1$;

к) (2) $\frac{\lg^2 x + 2\lg x - 6}{\lg x} < 1$;

л) (9) $\frac{5}{4}\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 2x > \cos 2x$;

м) (1) $\frac{m}{mx+1} + \frac{1}{mx-1} < \frac{1}{1-m^2x^2}$, если $m \leqslant 0$.

20 (10). Найдите область определения функции

$$f(x) = \lg\sqrt{\frac{x^2-x-20}{14+5x-x^2}}.$$

21 (4). Найдите площадь фигуры, задаваемой на плоскости условиями:

а) (9) $\begin{cases} y \geqslant |x|, \\ y < 0{,}5x + 1{,}5; \end{cases}$

б) (9) $2|x| + |y| \leqslant 2$.

Анализ

1 (13). Решите неравенство $\frac{y'+2}{y'-1} < 2$, если $y = l^{-3x} + 2x + 16$.

2 (3). При каких значениях x производная функции $y = 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x) - \sin 3x$ равна 0?

3 (3). Найдите промежутки, на которых функция $f(x) = 4^x - 6 \cdot 2^x + x\ln 16 - 1$ монотонно возрастает.

4 (15). Исследуйте функцию $f(x) = (x+1)e^{-5x}$ на экстремум, найдите ее промежутки монотонности.

5 (13). Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на отрезке $[-2, 1]$.

6 (3). Найдите критические точки функции $y = x^3 - 20x^2$ и исследуйте их на максимум и минимум.

7 (9). Докажите, что уравнение $3^x - 3x - 4 = 0$ не имеет корней в промежутке $[1, 2]$.

8 (13). На параболе $y = 2x^2 - 3x + 8$ найдите точки, касательные в которых проходят через начало координат.

9 (6). Для каждого значения параметра a найдите наибольшее значение функции $y = 1 + ax - x^2$ на промежутке $[1; 2]$.

10 (9). Среди всех равнобедренных трапеций с площадью S и острым углом α найдите ту, периметр которой наименьший. Найдите этот периметр.

11 (1). Объем правильной треугольной призмы равен V. Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

12 (9). Докажите, что $\ln(1+x)<x$, если $x>0$.

Геометрия

1 (3). Известно, что точка касания вписанной окружности делит один из катетов прямоугольного треугольника на отрезки длины 3 см и 7 см, считая от вершины прямого угла. Найдите длину второго катета.

2 (3). В прямоугольном треугольнике дан катет a и биссектриса прямого угла a. Найдите гипотенузу.

3 (14). Основание равнобедренного треугольника $\sqrt{32}$, медиана боковой стороны 5. Найдите длины боковых сторон.

4 (15). В равнобедренном треугольнике высота равна 8, а основание относится к боковой стороне как 6:5. Найдите радиус вписанного круга.

5 (14). В треугольнике ABC сторона AB имеет длину 3 м, высота CD, опущенная на сторону AB, имеет длину 3 м. Основание D высоты CD лежит на стороне AB, длина отрезка AD равна длине стороны BC. Найдите длину стороны AC.

6 (2). В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M, а на стороне BC — точка N. Отрезки AN и BM пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если площади треугольников AMO, ABO, BNO равны соответственно S_1, S_2, S_3.

7 (15). В параллелограмме $ABCD$ величина угла BCD равна $\pi/3$, длина стороны AB равна a. Биссектриса угла BCD пересекает сторону AD в точке N. Найдите площадь треугольника NCD.

8 (10). В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей 2 см и 4 см. Найдите площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны.

9 (2). В грани двугранного угла, равного α, проведена прямая, составляющая угол β с ребром двугранного угла. Найдите угол наклона между этой прямой и другой гранью.

10 (12). Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если ее высота 9, а апофема — 18.

11 (10). Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой имеет длину a и образует с боковой гранью угол α.

12 (2). В треугольной пирамиде два непересекающихся ребра имеют длины a и b, а каждое из остальных ребер — длину c. Найдите объем пирамиды.

13 (3). В основании пирамиды лежит треугольник, длины сторон которого равны 12 см, 10 см и 10 см. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

14 (13). Основанием пирамиды служит треугольник с углами α и β. Высота пирамиды равна h, а боковые ребра образуют с плоскостью основания угол γ. Найдите объем пирамиды.

15 (14). Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды 8, двугранный угол при боковом ребре 120°. Определите площадь боковой поверхности пирамиды.

16 (3). Двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды равен α. Найдите величину плоского угла боковой грани при вершине пирамиды.

17 (14). Пирамида, основание которой — прямоугольник со сторонами 6 и 7, вписана в сферу. Высота пирамиды проходит через вершину основания и равна 6. Определите радиус сферы.

18 (6). Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка P лежит на ребре CC_1, причем $|C_1P|=2|CP|$. Найдите угол между плоскостями BD_1P и ABC.

19 (9). В параллелепипеде три ребра, выходящие из одной вершины, имеют одинаковую длину. Два из этих трех ребер взаимно перпендикулярны, а третье образует с каждым из них острый угол. Объем параллелепипеда равен V. Найдите площади диагональных сечений параллелепипеда.

20 (4). Радиус основания конуса равен R. Площадь боковой поверхности конуса в 3π раз больше площади осевого сечения. Найдите объем конуса.

21 (12). Через точку касания двух внешне касающихся шаров проведена плоскость так, что площади полученных сечений равны 144π и 81π. Разность между площадями поверхностей этих шаров равна 700π. Определите радиус меньшего шара.

Задачи устного экзамена

1 (7). Производительность труда в январе оказалась выше плановой на 5 %, а в феврале снизилась на 5 % по сравнению с январской. Сравните ее с плановой.

2 (9). Является ли рациональным число

$$\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt{3}?$$

3. Вычислите:

а) (9) $\lg \operatorname{tg} 1^\circ+\lg \operatorname{tg} 2^\circ+\ldots+\lg \operatorname{tg} 89^\circ$;

б) (18) $\cos 20^\circ+\cos 40^\circ+\cos 60^\circ+\ldots+\cos 180^\circ$;

в) (18) $49^{1-\log_7 2}-5^{-\log_5 4}$.

4 (18). Упростите выражение

$$4+a^{1/2}-\frac{a-a^{-2}}{a^{1/2}-a^{-1/2}}+\frac{1-a^{-2}}{a^{1/2}+a^{-1/2}}+\frac{2}{a^{3/2}}.$$

5. Решите уравнения:

а) (18) $\dfrac{x^2}{x-6}+\dfrac{6x}{6-x}=0$;

б) (18) $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=155$,

в) (7) $3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x$;

г) (18) $\lg\dfrac{x+9}{x+1}=\lg x$;

д) (6) $|2+\log_{1/5} x|+3=|1+\log_5 x|$;

е) (6) $\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x}=\sqrt{2}\left(\cos x-\dfrac{1}{2}\right)$;

ж) (6) $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=1+\cos x$.

6. Решите неравенства:

а) (7) $\dfrac{3-x}{x-4}<\dfrac{2}{3}$;

б) (6) $x^2-|3x+2|+x>0$.

7 (7). Докажите, что $\sqrt{ab}<0{,}5(a+b)$, где $a>0$, $b>0$.

8 (7). Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{x^2-x-6}\cdot(100-x^2)^{-0{,}5}.$$

9. Постройте графики:

а) (7) $y=\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x$; б) (6) $y=\dfrac{\sin x}{|\sin x|}\cdot x$;

в) (9) $y=\dfrac{|\sin x|}{\sin x}$; г) (6) $y=2^{\log_2(x^2-x-6)}$;

д) (6) $|y|<\log_2 x$; е) (6) $\begin{cases} x+y<3, \\ x+y>x^2+2x; \end{cases}$

ж) (9) $\frac{x^2+y^2}{x} > 2$.

10 (9). Исследуйте на четность (нечетность) функции

а) $y=\ln(x+\sqrt{x+1})$; б) $y=\sin\frac{x^3-x^2}{x-1}$.

11 (9). Докажите, что $\sin x > \frac{2}{\pi}x$, если $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

12 (18). Боковая сторона описанной равнобедренной трапеции равна 12 см. Найдите ее периметр.

13 (6). Докажите, что в прямоугольном треугольнике произведение длин отрезков, высекаемых на гипотенузе вписанной окружностью, равно площади треугольника.

14 (6). Две окружности радиусов r и $3r$ касаются внешним образом. Найдите площадь фигуры, заключенной между окружностями и их общей касательной.

Физика

Задачи устного и письменного экзаменов

Механика

1 (15). Поезд идет со скоростью $v_1=108$ км/ч. Пассажир этого поезда, сидящий у окна, видит в течение $t=18$ с встречный поезд, длина которого $l=900$ м. Определите скорость встречного поезда.

2 (17). Эскалатор метро поднимает неподвижно стоящего на нем пассажира в течение $t_1=1$ мин. По неподвижному эскалатору пассажир поднимается за $t_2=3$ мин. Сколько времени будет подниматься пассажир по движущемуся эскалатору?

3 (17). Мальчик съехал на санках с горы длиной $l_1=40$ м за $t_1=10$ с, а затем проехал по горизонтальному участку еще $l_2=20$ м до остановки (рис. 1). Найдите скорость в конце горы, ускорение на каждом участке, общее время движения и среднюю скорость на всем пути.

4 (19). Тело свободно падало с некоторой высоты H и последние $h=196$ м прошло за $t=4$ с. Сколько времени падало тело? Чему равна высота H?

5 (8). Тело падает с некоторой высоты в течение двух секунд. Найдите скорость, с которой нужно подбросить его вертикально вверх, чтобы оно поднялось на высоту, в два раза превышающую первоначальную.

6 (1). Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_0=30$ м/с. Некоторую точку A тело проходит дважды с разницей во времени $\Delta t=2$ с. Начертите график скорости движения тела и по этому графику определите высоту, на которой находится точка A.

7 (8). Определите, на каком расстоянии от цели необходимо сбросить вымпел с самолета, летящего на высоте $h=123$ м со скоростью $v=360$ км/ч. Сопротивлением воздуха пренебречь.

8 (17). Минутная стрелка часов в 3 раза длиннее секундной. Найдите отношение линейных скоростей концов стрелок.

9 (18). Тело массой $m=10$ кг находится на наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha=30°$ с горизонтом. Коэффициент трения $\mu=0{,}6$. Какую силу, направленную вдоль плоскости, нужно приложить к телу, чтобы перемещать его вниз по плоскости с ускорением $a=2$ см/с^2? Результат представьте в единицах СИ и округлите до десятых.

10 (15). Автомобиль массой $m=5$ т движется с постоянной скоростью $v=36$ км/ч по выпуклому мосту радиусом $R=100$ м. Найдите силу давления автомобиля на середину моста.

11 (8). Шарик, подвешенный на нити длиной l, вращается в горизонтальной плоскости так, что нить составляет угол α с вертикалью. Определите скорость вращения шарика.

12 (4). На правом конце стержня длиной $l=30$ см прикреплен шар радиусом $r=6$ см. Где находится центр тяжести этой системы, если масса стержня вдвое меньше, чем масса шара?

13 (1). Лестница прислонена к гладкой вертикальной стене под углом $\alpha=30°$ (рис. 2). Сможет ли человек подняться по лестнице до ее середины прежде, чем лестница начнет скользить, если коэффициент трения между лестницей и горизонтальным полом $\mu=0{,}3$? Массой лестницы и трением о стену можно пренебречь.

14 (2). На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска массой M. По ней начинает со скоростью v_0 скользить шайба массой $M/2$. Из-за трения между шайбой и доской через некоторое время скольжение шайбы по доске прекратится. Какова при этом будет скорость шайбы?

15 (14). Тело движется равномерно по окружности радиусом $R=0{,}5$ м, обладая кинетической энергией $E_k=10$ Дж. Какова сила, действующая на тело, и чему равна работа этой силы?

16 (13). Санки массой m соскальзывают с горы высотой h и, пройдя некоторое расстояние, останавливаются. Определите работу, которую нужно совершить, чтобы втащить санки обратно на гору.

17 (5). Шарик массой $m=10$ г падает с высоты $h=2$ м и упруго отражается от установленного на неподвижной тележке щита, плоскость которого наклонена к горизонту под углом $\alpha=45°$. Найдите скорость тележки после отражения шарика. Трением качения тележки пренебречь. Масса тележки со щитом $M=90$ г.

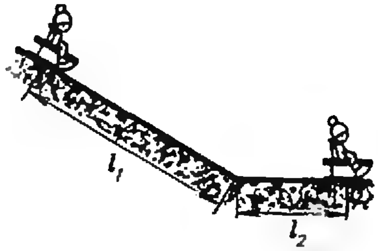


Рис. 1.

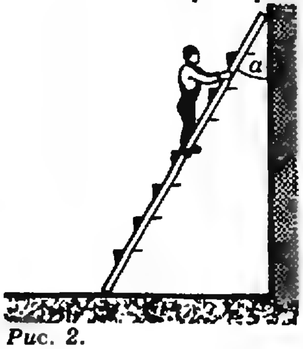


Рис. 2.

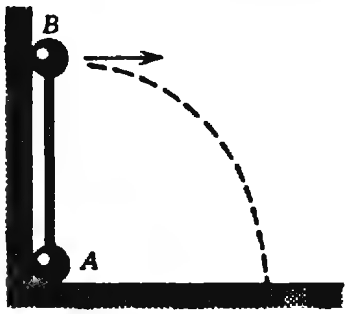


Рис. 3.

18 (1). Два пластилиновых шара, массы которых относятся как 1:3, подвешены на одинаковых нитях и касаются друг друга. Шары симметрично развели в противоположные стороны и одновременно отпустили. При ударе шары слиплись. Какая часть кинетической энергии шаров при этом превратилась в тепло? Силы трения не учитывайте.

19 (12). Гантелька представляет собой невесомый стержень длиной l с двумя небольшими шариками на концах, масса каждого из которых m (рис. 3). Гантелька стоит в углу, образованном двумя взаимно перпендикулярными гладкими стенками. От содрагания гантелька начинает падать. С какой силой действует шарик A на вертикальную стенку в тот момент, когда стержень составляет угол α с вертикалью?

20 (5). На какой глубине в пресной воде давление в три раза больше атмосферного $p_a=10^5$ Па?

21 (13). В сообщающиеся сосуды налили воду, а затем в один из сосудов налили масло. Найдите разность уровней воды в сосудах, если высота масла $h=40$ см. Плотность воды $\rho_1=10^3$ кг/м^3, плотность масла $\rho_2=8\cdot10^2$ кг/м^3.

22 (19). Определите массу льдины, плавающей в пресной воде, если объем выступающей части льдины $V=2$ м^3.

23 (2). В цилиндрический сосуд радиусом R налита вода. На сколько повысится уровень воды, если в сосуд поместить деревянный брусок массой M?

24 (4). В воде с глубины $h=5$ м поднимают до поверхности камень объемом $V=0{,}6$ м^3. Плотность камня $\rho=2500$ кг/м^3. Найдите работу по подъему камня.

25 (12). Однородный алюминиевый цилиндр подвесили на пружине и отпустили, полностью погрузив его в воду. При этом растяжение пружины уменьшилось в $n=1{,}6$ раза. Рассчитайте по этим данным плотность алюминия.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1 (4). Определите число атомов натрия в $V=1$ см^3. Относительная атомная масса натрия $A=23$, плотность $\rho=1{,}5\cdot10^3$ кг/м^3.

2 (18). Дан график зависимости давления от объема для идеального газа (рис. 4). Постройте график этого же процесса в координатах: объем, температура, измеренная по шкале Цельсия (V, t).

3 (2). На плоскости V, T изображен процесс, который происходит при постоянном давлении и при постоянном объеме (рис. 5). Как при этом изменяется масса газа?

4 (5). Вертикальный закрытый с обоих концов цилиндр высотой $H=0{,}6$ м разделен на две равные части подвижным поршнем массой $m=20$ кг. В нижней части цилиндра находится $m_1=8\cdot10^{-5}$ кг водорода. В верхней части цилиндра — кислород. Температура обоих газов $T=300$ К. Сколько кислорода находится в цилиндре?

5 (11). Из баллона объемом $V_1=200$ л, содержащего гелий при температуре $T_1=273$ К под давлением $p_1=2\cdot10^6$ Па, израсходовали часть газа, занявшего при нормальных условиях объем $V_2=1000$ л. При измерении давления в баллоне после этого получено значение $p_2=1{,}4\cdot10^6$ Па. При какой температуре произведено измерение?

6 (14). В сосуде находится смесь азота и водорода. При температуре T, когда азот полностью диссоциирован на атомы, давление равно p (диссоциацией водорода пренебречь). При температуре $3\,T$, когда диссоциированы полностью оба газа, давление в сосуде равно $4\,p$. Каково отношение масс водорода и азота в смеси?

7 (13). Моль идеального газа из состояния с температурой $T=100$ К расширяется изобарно, а затем изохорно переходит в состояние с начальной температурой (рис. 6). Во сколько раз изменился при этом объем газа, если для перевода газа из начального состояния в конечное к нему подвели количество теплоты $Q=831$ Дж?

8 (12). Коэффициент полезного действия некоторой тепловой машины составляет $\alpha=60$ % от коэффициента полезного действия идеальной машины, работающей по циклу Карно. Температура нагревателей и холодильников этих машин одинакова. Пар поступает в машину при температуре $t_1=200$ °С, а температура конденсатора машины $t_2=60$ °С. Мощность машины $N=314$ кВт. Сколько угля расходует машина за $\tau=1$ ч работы? Удельная теплота сгорания угля $q=3{,}14\cdot10^7$ Дж/кг.

9 (1). В герметически закрытом сосуде находится воздух, температура которого $t_1=100$ °С, а относительная влажность $\varphi_1=3{,}5$ %. Какой станет относительная влажность воздуха, если его охладить до температуры $t_2=29$ °С, при которой давление насыщенного водяного пара $p_{н2}=30{,}0$ мм рт. ст.? Изменением объема сосуда при его охлаждении можно пренебречь.

10 (19). С какой высоты должны свободно падать дождевые капли, чтобы при ударе о землю испариться? Начальная температура капель $t=20$ °С.

Основы электродинамики

1 (1). Точки A и B расположены на одной линии напряженности электростатического поля точечного заряда (рис. 7). Напряженность поля в точке A E_1, в точке B E_2. Определите напряженность в точке C, расположенной посередине между точками A и B.

2 (19). Шарик массой $m=50$ мг подвешен на

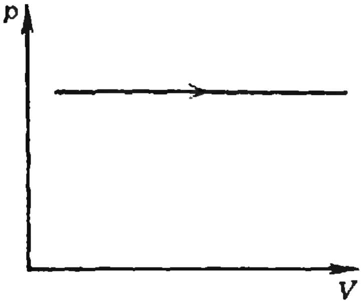


Рис. 4.

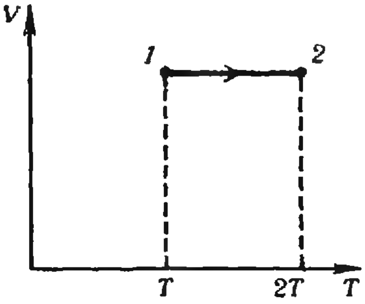


Рис. 5.

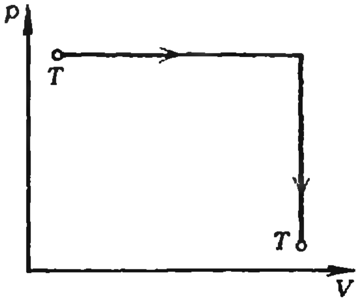


Рис. 6.

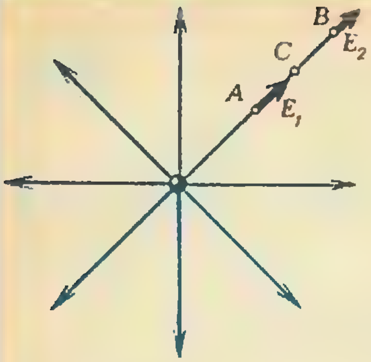


Рис. 7.

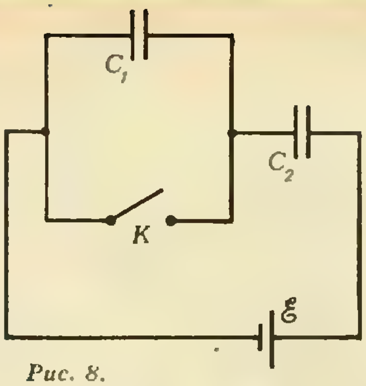


Рис. 8.

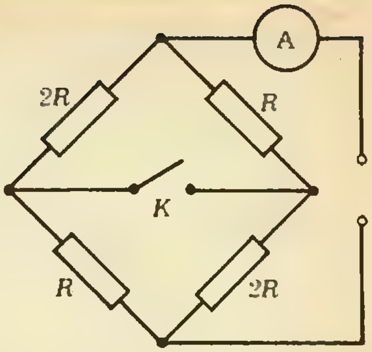


Рис. 9.

непроводящей нити и имеет заряд 10^{-8} Кл. На расстоянии $l=32$ см от него снизу подносится другой маленький шарик. Каким должен быть по величине и знаку его заряд, чтобы натяжение нити увеличилось вдвое?

3 (18). Плоский конденсатор присоединен к источнику постоянного напряжения с ЭДС $\mathscr{E}=200$ В. На сколько уменьшится напряженность электрического поля в конденсаторе, если расстояние между его пластинами увеличить от $d_1=1$ см до $d_2=2$ см? Результат представьте в киловольтах на метр.

4 (2). На рисунке 8 приведена электрическая цепь, в которой $\mathscr{E}=10$ В, $C_1=C_2=10$ мкФ. Какой заряд протечет через батарею после замыкания ключа K? Изменится ли при этом заряд конденсатора емкостью C_1?

5 (4). Конденсатор емкостью C_1 зарядили до напряжения $U_1=500$ В. При параллельном подключении этого конденсатора к незаряженному конденсатору емкостью $C_2=4$ мкФ вольтметр показал $U_2=100$ В. Найдите емкость C_1.

6 (8). Плоский воздушный конденсатор заполнили керосином (диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon=2$), зарядили, сообщив ему энергию $W=2 \cdot 10^{-5}$ Дж, и отключили от источника питания. Определите, какая энергия будет запасена в конденсаторе, если из него слить керосин.

7 (17). Кабель состоит из двух стальных жил сечением $S_1=0,6$ мм^2 каждая и четырех медных жил сечением $S_2=0,85$ мм^2 каждая. Каково падение напряжения на каждом километре кабеля при силе тока $I=0,1$ А? Удельное сопротивление стали $\varrho_1=12 \cdot 10^{-8}$ Ом · м, меди $\varrho_2=1,7 \cdot 10^{-8}$ *Ом · м.*

8 (1). При замкнутом ключе K (рис. 9) сила тока, текущего через амперметр, равна $I_1=0,45$ А. Какой ток будет течь через амперметр при разомкнутом ключе? Напряжение на клеммах считайте постоянным.

9 (11). Два соединенных последовательно вольтметра подключены к источнику тока с внутренним сопротивлением r; их показания $U_1=8$ В и $U_2=4$ В. Если подключить к источнику только второй вольтметр, то он покажет $U_3=10$ В. Чему равна ЭДС источника?

10 (14). Первый аккумулятор имеет КПД η_1, второй, замкнутый на такое же сопротивление,— η_2. Каким будет КПД, если замкнуть на это сопротивление оба аккумулятора, соединенные последовательно?

11 (4). Троллейбус массой $M=11$ т движется равномерно со скоростью $v=36$ км/ч. Найдите силу тока в обмотке двигателя, если напряжение $U=550$ В и КПД $\eta=80$ %. Коэффициент сопротивления движению $\mu=0,02$.

12 (16). Спираль электрического чайника изготовлена из нихромовой проволоки сечением $S=0,5$ мм^2. В чайнике находится $m=3$ кг воды, и он подключен к сети с напряжением $U=220$ В. Вода в чайнике за $\tau=5$ мин нагревается от $t_1=10$ °C до $t_2=100$ °C ($c=4,2 \times 10^3$ Дж/(кг · К)). Какой длины должна быть проволока ($\varrho=1,1 \cdot 10^{-6}$ Ом · м), если коэффициент полезного действия чайника $\eta=80$ %?

13 (16). Сколько времени нужно хромировать детали, чтобы покрыть их слоем толщиной $d=40$ мкм при плотности тока $j=1200$ А/м^2 ($M=52 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $\varrho=7 \cdot 10^3$ кг/м^3, $n=6$, $F=9,65 \cdot 10^4$ Кл/моль)?

14 (1). Под каким напряжением передается электроэнергия на расстояние $L=100$ км, если при плотности постоянного тока $j=5,0 \times 10^4$ А/м^2 потери на нагревание алюминиевых ($\varrho=2,8 \cdot 10^{-8}$ Ом · м) проводов двухпроводной линии электропередачи составляют $\alpha=5,0$ % от передаваемой мощности?

15 (14). С помощью камеры Вильсона, помещенной в магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, наблюдают упругое рассеяние α-частиц на ядрах дейтерия. Найдите начальную энергию α-частицы, если радиусы кривизны начальных участков траекторий ядра отдачи и рассеянной α-частицы оказались одинаковыми и равными r. Обе траектории лежат в плоскости, перпендикулярной линиям индукции магнитного поля. Заряд протона e, его масса m.

16 (1). Два проволочных кольца разного диаметра расположены в одной плоскости в однородном магнитном поле, индукция которого с течением времени изменяется по закону $B=\alpha t$, где α — известная постоянная величина. В каком кольце индуцируется больший ток, *если оба они изготовлены из одного и того же* материала и массы их одинаковы?

17 (12). Плоская проволочная квадратная рамка со стороной a находится в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной ее плоскости. Затем рамку: а) изгибают в прямоугольник с отношением сторон 1:2; б) вытягивают в одну линию. Определите заряды, протекающие по рамке при каждом изменении ее формы. Сопротивление рамки R.

Колебания и волны

1 (14). Часы снабжены маятником в виде шарика на тонкой проволоке. При сравнении показаний этих часов с эталоном оказалось, что при $t_1=0$ °C они спешат на 8 с в сутки, а при температура $t_2=20$ °C отстают на 10 с в сутки. Определите коэффициент линейного расширения материала проволоки.

2 (12). Математический маятник длиной l и массой m раскачивают так, что каждый раз, когда маятник проходит положение равновесия, на него в течение короткого промежутка времени t действует сила F_1 направ-

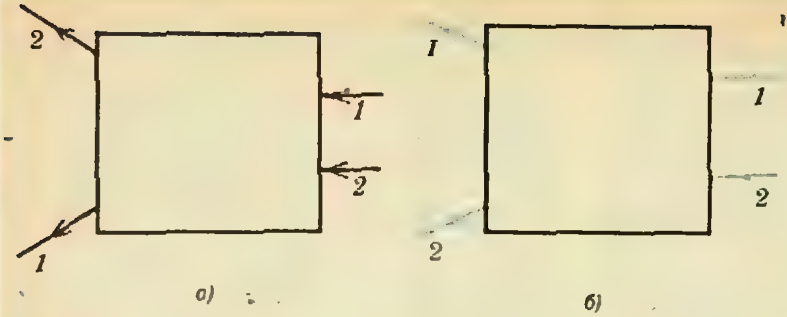


Рис. 10.

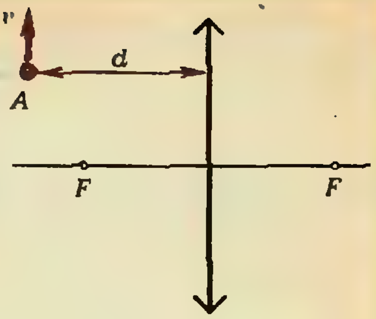


Рис. 11.

ленная параллельно скорости. Через сколько колебаний маятник отклонится на 90°?

3(5). Волны набегают на берег под углом $\alpha=45°$. Определите скорость перемещения гребня волны вдоль берега, если расстояние между гребнями $l=5$ м, а частота вертикальных колебаний воды $\nu=0{,}25$ Гц.

4 (14). Расстояние между гребнями волны в море $l=5$ м. При встречном движении катера волна за $t=1$ с ударяет о корпус катера 4 раза, а при попутном — 2 раза. Найдите скорости катера и волны.

5 (12). Из пункта A в пункт B дважды был послан звуковой сигнал частотой $\nu=50$ Гц, причем во второй раз при температуре на $\Delta T=20$ К выше, чем в первый. Число волн, укладывающихся на расстоянии от A до B, во второй раз оказалось, как и в первый, четным, но на две меньше. Определите расстояние между пунктами, если при повышении температуры на $\Delta t=1$ К скорость звука увеличилась на $\Delta v=0{,}5$ м/с. Скорость звука в первом опыте принять равной $v_1=330$ м/с.

Оптика

1 (19). Свая длиной $l=2$ м выступает над поверхностью воды на $h=1$ м. Определите длину тени от сваи на дне озера, если угол падения лучей света $\alpha=30°$. ($n=1{,}33$.)

2(8). Найдите путем построения ход луча до собирающей линзы, если он вышел из линзы на расстоянии $a=1$ см от главной оптической оси под углом $\alpha=30°$ к ней. Фокусное расстояние линзы $F=5$ см.

3(17). В каком случае линза, находящаяся в ящике (рис. 10), будет собирающей и в каком — рассеивающей? Найдите построением оптический центр и фокус линзы в каждом случае.

4(1). Сходящийся пучок лучей падает на рассеивающую линзу с фокусным расстоянием — F и собирается в точку в главном фокусе линзы. На каком расстоянии от линзы соберется пучок, если рассеивающую линзу заменить собирающей с таким же по модулю фокусным расстоянием?

5(19). При помощи собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=6$ см рассматривают монету диаметром $D=1{,}25$ см. При этом получают мнимое изображение ее, диаметр которого $D'=5$ см. Найдите расстояние от монеты до линзы и от линзы до изображения монеты.

6(14). Предмет находится перед рассеивающей линзой на расстоянии mF. На каком расстоянии от линзы получится мнимое изображение и во сколько раз оно будет меньше самого предмета?

7(18). Точка A движется с постоянной скоростью $v=2\cdot10^{-2}$ м/с в направлении, показанном на рисунке 11. С какой скоростью движется изображение этой точки, если $d=0{,}15$ м, а фокусное расстояние линзы $F=0{,}1$ м? Результат представьте в сантиметрах в секунду.

8(11). Машина, двигающаяся со скоростью $v=81$ км/ч, фотографировалась с расстояния $L=200$ м. Определите время экспозиции, с которой производилось фотографирование, если изображение на пленке сместилось на $\Delta l=0{,}01$ мм. Фокусное расстояние объектива фотоаппарата $F=4{,}5$ см.

9(12). Объектив телевизионного передатчика отбрасывает изображение свободно падающего предмета, находящегося перед ним на расстоянии $d=5$ м, на светочувствительный слой передающей трубки. Определите фокусное расстояние объектива передатчика, если известно, что изображение движется с ускорением $a=0{,}2$ м/с^2.

10(17). Вода освещена красным светом, для которого длина волны в воздухе $\lambda=0{,}7$ мкм. Какой будет длина волны в воде ($n=1{,}33$)? Какой цвет видит человек, открывший глаза под водой?

11(13). Определите абсолютный показатель преломления среды, в которой свет с энергией кванта $E=4{,}4\cdot10^{-19}$ Дж имеет длину волны $\lambda=3\cdot10^{-7}$ м ($h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с, $c=3\cdot10^8$ м/с).

12(5). Монохроматический источник излучает зеленый свет с длиной волны $\lambda=5{,}3\cdot10^{-7}$ м. Определите число световых квантов, излучаемых источником в секунду, если он потребляет мощность $P=100$ Вт, а его КПД $\eta=0{,}5$ % ($h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с).

13(12). Найдите изменение импульса металлической пластинки при вылете из нее одного электрона. Работа выхода $A=4{,}5$ эВ, энергия кванта света $E=4{,}9$ эВ (1 эВ$=1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж). Считать, что свет падает на пластинку нормально, а фотоэлектрон вылетает перпендикулярно пластинке.

Публикацию подготовили
А. А. Егоров, В. А. Тихомирова

Формулы для sin nx и cos nx

(см. с. 25)

Если $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ есть n-я строка треугольника Паскаля, то

$$\operatorname{tg} nx=\frac{a_2\operatorname{tg} x-a_4\operatorname{tg}^3 x+\ldots}{a_1-a_3\operatorname{tg}^2 x+a_5\operatorname{tg}^4 x-\ldots}.$$

В частности,

$$\operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$$

(хорошо известная формула),

$$\operatorname{tg} 3x=\frac{3\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x},$$

$$\operatorname{tg} 4x=\frac{4\operatorname{tg} x-4\operatorname{tg}^3 x}{1-6\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}$$

и т. д.

Электромагнитная индукция

1. Во всех случаях вольтметр покажет $U=Blv=10^{-3}$ мВ.

2. $E=\frac{\Phi_0\omega}{2\pi r}\sin\omega t$; $I=\frac{\Phi_0\omega S}{2\pi r\rho}\sin\omega t$.

3. При вращении якоря электромотора возникает ЭДС индукции. Поэтому закон Ома для цепи электромотора запишется в виде

$$IR=\mathscr{E}+\mathscr{E}_{\text{инд}}. \qquad (*)$$

Сопротивление цепи R найдем из условия, что при пуске (то есть при $v=0$) $\mathscr{E}_{\text{инд}}=0$: $R=\mathscr{E}/I$. Умножив обе части равенства (*) на I, можно записать

$$\mathscr{E}I-I^2R=-\mathscr{E}_{\text{инд}}I.$$

Левая часть этого соотношения представляет собой разность мощности генератора ($\mathscr{E}I$) и мощности джоулевых потерь (I^2R). Отсюда следует, что $-\mathscr{E}_{\text{инд}}I=N$ — это полезная механическая мощность, равная произведению Fv, где F — сила тяги мотора. Таким образом, получаем

$N=-\mathscr{E}_{\text{инд}}I=\mathscr{E}I(1-I/I_0)=250$ кВт,
$F=N/v=1{,}25\cdot 10^4$ Н,
$\eta=N/(\mathscr{E}I)=50\,\%$.

4. $M_{\text{ср}}=\frac{(BSn)^2\omega}{2(r+R)}$; $N_{\text{ср}}=M_{\text{ср}}\omega=\frac{(BSn)^2\omega^2}{2(r+R)}$.

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1985 году

Математика

Задачи письменного экзамена

Алгебра

1. 105 км. 2. 36 %. 3. 142 857. 4. 7 : 8. 5. 45 мин. 6. 48 мин. 7. 50 и 75. 8. 10^{15}. 9. а) 3; б) 198; в) 1000; г) $3(1-a)/b+1$; д) $-3/4$; е) $1/4$; ж) 1; з) $1/8$. 10. а) $\frac{\sqrt{a^2-4}}{a^2-3}$; $|a|>2$; б) $-2/\cos\alpha$. 11. а) $\{-1/2;\ 0;\ 3;\ 5\}$; б) $]-\infty;\ 4/5]$; в) $\left\{\frac{-3+\sqrt5}{2};\ \frac{-1+\sqrt5}{2}\right\}$; г) $\left\{-\frac23;\ 12\right\}$; д) $\{-2;\ 0;\ 2\}$; е) $\{4\}$; ж) $\{0\}$; з) $\varnothing$; и) $\{3\}$; к) $\{-3;\ 2\}$. 12. а) $\{-15\}$; б) $\{4\}$; в) $\{3;\ -3\}$; г) $\{9\}$; д) $\{1/2\}$; е) $\{7;\ 5\}$; ж) $\{-8;\ -1\}$; з) $\{3;\ \sqrt[3]{3}\}$. 13. а) $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{3}(3l\pm1)$ $(k,\ l\in Z)$; б) $x_1=k\pi$; $x_2=(-1)^l\frac{\pi}{6}+\frac{\pi l}{2}$ $(k,\ l\in Z)$; в) $x_1=\frac{\pi(12k-1)}{24}$; $x_2=\frac{\pi(12l+1)}{12}$ $(k,\ l\in Z)$; г) $x=\frac{k\pi}{2}$ $(k\in Z)$; д) $x_1=-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x_2=\pm\frac{2\pi}{3}+2l\pi$ $(k,\ l\in Z)$; е) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $x_2=-\operatorname{arctg}7/2+l\pi$ $(k,\ l\in Z)$; ж) $x_1=\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$; $x_2=\frac{\pi}{4}(2l+1)$; з) $x_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$, $k\geqslant2$, $x_2=(-1)^{l+1}\frac{\pi}{6}+\pi l$, $l\in Z$, $l\leqslant0$, $x_3=3$; и) $x_1=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $x_2=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi l$ $(k,\ l\in Z)$; к) $x_1=2\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi l$ $(k,\ l\in Z)$; л) $x_1=k\pi$ $(k\in Z)$.

14. $k=4l$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi m$ $(l,\ m\in Z)$.

15. а) $\{(64;\ 1);\ (1;\ 64)\}$; б) $\left\{\left(-2;\ \frac{1}{225}\right)\right\}$; в) $\left\{\left(\frac15;\ 25\right);\ (5;\ 1);\ \left(10;\ \frac12\right)\right\}$; г) $\{(\sqrt2;\ \sqrt2)\}$; д) $\{(4;\ 1);\ (1;\ 9)\}$; е) $\left\{\left(1;\ \frac{1}{27}\right)\right\}$.

16. $p\in\left]-\infty;\ -\frac{1}{\sqrt2}\right[\cup\left]\frac12;\ +\infty\right[$.

17. $x_1=\log_2(a+1)$, $x_2=\log_2 a$ при $a>0$; $x=\log_2(a+1)$ при $-1<a\leqslant0$; $\varnothing$ при $a\leqslant-1$.

18. $a=3$. Указание. При $x<0$ уравнение имеет вид $-4x^2+(a-7)x+1=0$ и поэтому имеет один отрицательный корень. При $x\geqslant0$ получим $4x^2+(a-7)x+1=0$. Чтобы полученное уравнение имело один положительный корень, необходимо обращение в нуль его дискриминанта и неравенство $a<7$.

19. а) $]-1;\ 1[\cup]6;\ +\infty[$; б) $[-3;\ 1]$; в) $\{-2\}\cup[1;\ 3]$; г) $]-\infty;\ 3]$; д) $\{1\}$; е) $[5;\ 6]$; ж) $[-1;\ 2[$; з) $[5{,}5;\ 6[$; и) $]0;\ \log_2 3]$; к) $]0;\ 10^{-3}[\cup]1;\ 100[$; л) $\pi/6+\pi n<x<\frac{5\pi}{6}+\pi n$ $(n\in Z)$; м) $\left]-\infty;\ \frac{m-2}{m^2+m}\right[\cup\left]\frac1m;\ -\frac1m\right[$ при $m<-1$; $]-1;\ 1[$ при $m=-1$; $\left]\frac1m;\ \frac{m-2}{m^2+m}\right[\cup\left]-\frac1m;\ +\infty\right[$ при $-1<m<0$; R при $m=0$.

20. $[-4;\ -2]\cup[5;\ 7]$. 21. а) 3; б) 4.

Анализ

1. $]0;\ \infty[$. 2. $x_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$; $x_2=l\pi$ $(k,\ l\in Z)$. 3. $]-\infty;\ 0[\cup]1;\ +\infty[$. 4. Возрастает при $x<-\frac45$, $x=-\frac45$ — точка максимума, убывает при $x>-\frac45$. 5. $y_{\min}=y(-1)=0$; $y_{\max}=y(-2)=17$. 6. $x=0$ — точка максимума; $x=2$ — точка минимума. 7. Указание.

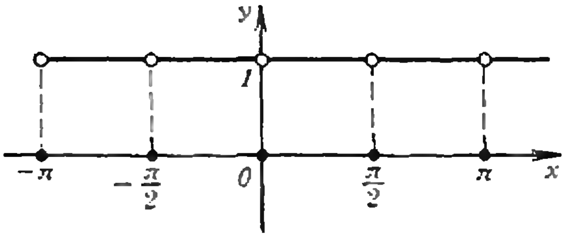


Рис. 1.

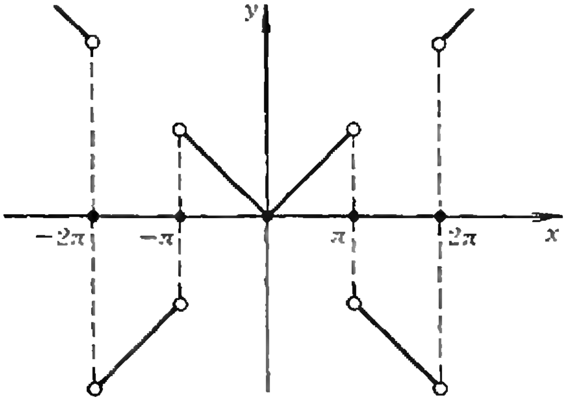


Рис. 2.

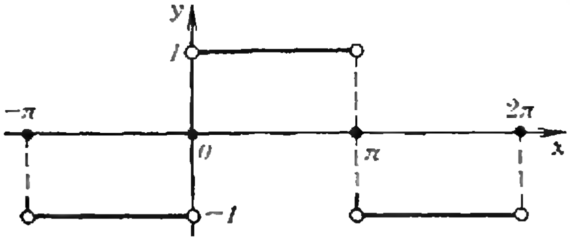


Рис. 3.

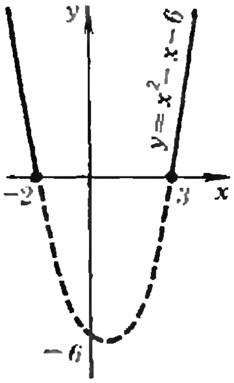


Рис. 4.

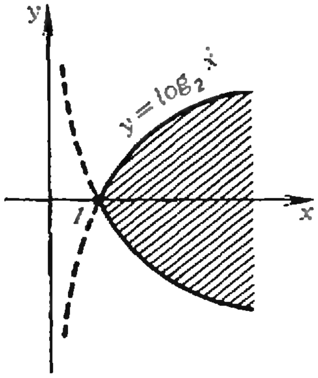


Рис. 5.

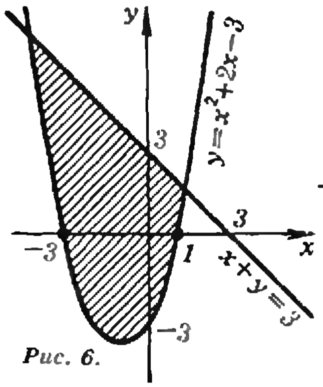


Рис. 6.

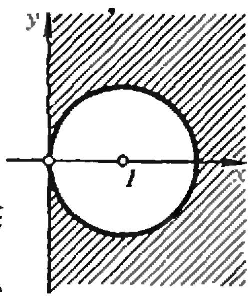


Рис. 7.

Функция, стоящая в левой части уравнения, возрастает при $x \in [1; 2]$, при этом $\varphi(2) = -1 < 0$. **8.** $(-2; 22)$, $(2, 10)$. **9.** a при $a<2$; $1+\frac{a^2}{4}$ при $2 \leqslant a < 4$; $2a-3$ при $a \geqslant 4$. **10.** $\sqrt{S/\sin\alpha}$. **11.** $\sqrt[3]{4V}$. **12.** **Указание.** Докажите, что функция $\varphi(x)=x-\ln(1+x)$ возрастает при $x \geqslant 0$.

Геометрия

1. 21/2 см. **2.** $\frac{a\sqrt{2(a^2+d^2)-ad\sqrt{2}}}{a\sqrt{2}-d}$. **3.** 6. **4.** 3. **5.** 7. **6.** $\frac{S_2(S_2^2+S_1S_2+S_1S_3+S_2S_3)}{S_2^2-S_1S_3}$. **7.** $a^2\sqrt{3}/4$. **8.** 4 см². **9.** arcsin (sin α sin β). **10.** 1458. **11.** $a^3\sin\alpha/12\sqrt{3-4\sin^2\alpha}$. **12.** $\frac{ab}{12}\sqrt{4c^2-a^2-b^2}$. **13.** 100. **14.** $2/3h^3\operatorname{ctg}^2\gamma\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)$. **15.** $64\sqrt{2}$. **16.** 2arctg cos α. **17.** 5,5. **18.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{3}$. **19.** $\sqrt{2}\sqrt[3]{v^2}\cdot\sqrt{-\cos 2\alpha}$, $-\sqrt{2}\sqrt[3]{v^2}/\cos 2\alpha$. **20.** $2\pi R^3/3\sqrt{5}$. **21.** 15.

Задачи устного экзамена

1. В феврале производительность труда была ниже плановой. **2.** Является. **Указание.** $26-15\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^3$. **3.** а) 0. б) −1. **Указание.** ($\cos 20°+\cos 160°=\cos 40°+\cos 140°= \dots = \cos 80°+\cos 100°=0$); в) 12. **4.** 4. **5.** а) $\{0\}$; б) $\{2\}$; в) $\{0; 1/2\}$; г) $\{3\}$; д) $[25; +\infty[$; е) $x=4\pi/3+2k\pi$ $(k \in Z)$; ж) $x_1=\pi(1+2k)$, $x_2=\arccos(\sqrt{5}-2)+2\pi l$ $(k, l \in Z)$. **6.** а) $]-\infty; 3{,}4[\cup]4; +\infty[$; б) $]-\infty; -2-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{3}; +\infty[$. **7.** **Указание.** $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqslant 0$. **8.** $[-10; -2[\cup]3; 10]$. **9***) а) см. рис. 1; б) см. рис. 2; в) см. рис. 3; г) см. рис. 4; д) см. рис. 5; е) см. рис. 6; ж) см. рис. 7. **10.** а) нечетная; б) ни четная, ни нечетная. **11.** **Указание.** Рассмотрите функцию $\frac{\sin x}{x}$ и докажите, что она убывает на интервале $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. **12.** 48. **13.** **Указание.** По известной формуле $S=rp$, где r — радиус вписанной окружности, а p — полупериметр треугольника. Если a и b — длины отрезков, упомянутых в условии, то $p=a+b+r$. Поэтому $S=r(a+b+r)$. С другой стороны, по теореме Пифагора $(a+b)^2=(a+r)^2+(b+r)^2$, откуда $ab=r(a+b+r)=S$. **14.** $r^2\left(4\sqrt{3}-\frac{11}{6}\pi\right)$.

ФИЗИКА

Механика

1. $v_2=l/t-v_1=20$ м/с $=72$ км/ч.
2. $t_3=t_1t_2/(t_1+t_2)=3/4$ мин $=45$ с.
3. $v_1=2l_1/t_1=8$ м/с; $a_1=2l_1/t_1^2=0{,}8$ м/с²; $a_2=-2l_1^2/(t_1^2l_2)=-1{,}6$ м/с²; $t=t_1(1+l_2/l_1)=15$ с; $v_{ср}=l_1/t_1=4$ м/с.
4. $t_п=h/(gt)+t/2=7$ с; $H=gt_п^2/2=240{,}1$ м.
5. $v=\sqrt{2gt}\approx 28$ м/с.
6. $h_A=40$ м (см. рис. 8).
7. $l=v\sqrt{2h/g}\approx 500$ м.
8. $v_м/v_с=1/20$.
9. $F=m(a+g(\mu\cos\alpha-\sin\alpha))=2{,}1$ Н.
10. $F_д=m(g-v^2/R)=44$ кН.
11. $v=\sqrt{gl\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}$.

---

*) Жирные точки на оси Ox на рисунках 1—4 не принадлежат графикам.

12. $x=(2{,}5l+2r)/3=29$ см (от левого конца стержня).
13. Сможет.
14. $v=v_0/3$.
15. $F=2E_k/R=40$ Н; $A=0$.
16. $A=2mgh$.
17. $v_т=\sqrt{\frac{2m^2gh}{M(M+m)}}\approx0{,}7$ м/с.
18. $a=3/4$.
19. $F=mg(3\cos\alpha-2)\sin\alpha$ при $\alpha<\arccos(2/3)$, $F=0$ при $\alpha\geqslant\arccos(2/3)$.
20. $h=2p_a/(\rho g)=20$ м.
21. $x=h\rho_2/\rho_1=32$ см.
22. $m=\rho_л\rho_вV/(\rho_в-\rho_л)=1{,}8\cdot10^4$ кг$=18$ т.
23. $x=M/(\pi R^2\rho_в)$.
24. $A=(\rho-\rho_в)Vgh=45$ кДж.
25. $\rho=\rho_вn/(n-1)\approx2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1. $N=N_A\rho V/M\approx4\cdot10^{22}$ (здесь $N_A=6{,}02\times\times10^{23}$ моль$^{-1}$, $M=A\cdot10^{-3}$ кг/моль).
2. См. рис. 9.
3. $m_2/m_1=1/2$.
4. $m_2=m_1M_2/M_1-mM_2gH/(2RT)\approx5\cdot10^{-4}$ кг.
5. $T_2=\frac{T_1p_2V_1}{p_1V_1-p_0V_2}\approx255$ К (здесь $p_0=10^5$ Па).
6. $m_a/m_в=14$.
7. $V_2/V_1=1+Q/(RT)=2$.
8. $m=\frac{NT_1\tau}{(\alpha/100\%)q(T_1-T_2)}\approx202{,}7$ кг.
9. $\varphi_2=\varphi_1(p_{н1}/p_{н2})(T_2/T_1)\approx72\%$.
10. $H=(c(t_к-t)+\lambda)/g\approx2{,}65\cdot10^5$ м$=265$ км (здесь $c=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К), $t_к=100$ °С, $\lambda==2{,}3\cdot10^6$ Дж/кг).

Основы электродинамики

1. $E_C=\frac{4E_1E_2}{(\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2})^2}$.
2. $q'=-4\pi\varepsilon_0mgl^2/q\approx-5{,}6\cdot10^{-7}$ Кл.
3. $\Delta E=\mathscr{E}(d_2-d_1)/(d_1d_2)=10$ кВ/м.
4. $q=C\mathscr{E}/2=5\cdot10^{-5}$ Кл; $q_1'=0$.
5. $C_1=C_2U_2/(U_1-U_2)=1$ мкФ.
6. $W'=\varepsilon W=4\cdot10^{-3}$ Дж.
7. $U=\frac{I\rho_1\rho_2l}{2(2\rho_1S_2+\rho_2S_1)}\approx0{,}48$ В.
8. $I_2=3/9I_1=0{,}4$ А.
9. $\mathscr{E}=U_1U_3/(U_3-U_2)\approx13{,}3$ В.
10. $\eta=\frac{\eta_1\eta_2}{\eta_1+\eta_2-\eta_1\eta_2}$.
11. $I=\frac{\mu Mgv}{(\eta/100\%)U}=50$ А.
12. $l=\frac{(\eta/100\%)U^2S\tau}{\rho cm(t_2-t_1)}\approx4{,}5$ м.
13. $t=\rho dFn/(Mj)\approx2600$ с≈43 мин.
14. $U=2\rho Lj/(\alpha/100\%)=5{,}6$ кВ.

15. $W=3(erB)^2/(4m)$.
16. Токи в обоих кольцах одинаковы.
17. а) $q=Ba^2/(9R)$; б) $q=Ba^2/R$.

Колебания и волны

1. $\alpha=1{,}6\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$.
2. $n=\frac{m}{2Ft}\sqrt{2gl}$.
3. $v=2l\nu\cos\alpha=1{,}75$ м/с.
4. $v_к=3l/t=15$ м/с; $v_в=l/t=5$ м/с.
5. $l=\frac{2v_1(v_1+\Delta v\Delta T/\Delta t)}{v\Delta v\Delta T/\Delta t}\approx450$ м.

Оптика

1. $x=h\operatorname{tg}\alpha+(l-h)\sin\alpha/\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}\approx0{,}98$ м.
2. См. рис. 10.
3. См. рис. 11.
4. $f=F/3$.
5. $d=F(1-D/D')=4{,}5$ см; $f=dD'/D=18$ см.
6. $f=Fm/(m+1)$; $k=m+1$.
7. $v'=vF/(d-F)=4$ см/с.
8. $t\approx\Delta L/(vF)\approx2\cdot10^{-3}$ с.
9. $F=ad/(g+a)=0{,}1$ м.
10. $\lambda'=\lambda/n\approx0{,}53$ мкм; красный.
11. $n=ch/(\lambda E)\approx1{,}5$.
12. $N=(\eta/100\%)P\lambda/(hc)\approx1{,}3\cdot10^{18}$ с$^{-1}$.
13. $\Delta P=E/c+\sqrt{2m(E-A)}\approx3{,}4\cdot10^{-25}$ кг·м/с ($m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг).

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 5)

1. Если Пете x лет, то Пете, его братьям и отцу вместе $x+(x+3)+(x-3)+x/3+3x=95$ лет, откуда $19x/3=95$, $x=15$. Значит, Пете 15 лет, братьям 18, 12 и 15 лет, а отцу 45 лет.
2. $932+9338=10\,270$.
3. Давление тела на дно уменьшается за счет увеличения выталкивающей силы.
4. Ответ изображен на рисунке 12. **Решение.** Обозначим числа, которые надо расставить в образовавшиеся 11 частей, так: $x_1, \ldots, x_5, y_1, \ldots, y_5, z$, где z — число, поставленное в центр пятиугольника, а $x_1, \ldots, x_5, y_1, \ldots, y_5$ расставлены, как показано на рисунке 13. Поскольку сумма чисел от 1 до 11 равна 66, сумма чисел в каждом треугольнике, все вершины которого являются вершинами пятиугольника, равна 22. Если обозначить $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=X$, $y_1++y_2+y_3+y_4+y_5=Y$ и рассмотреть все упомянутые треугольники, мы получим соотношения:

$$\begin{cases}2X+Y=5\cdot22,\\X+3Y+5z=5\cdot22,\\X+Y+z=66.\end{cases}$$

Отсюда $X=45$, $Y=20$, $z=1$.
Итак, в центре пятиугольника стоит 1. Далее, поскольку $X=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=45$ и каждое из чисел $x_1, \ldots, x_5$ не больше 11, это равенство возможно лишь в случае $X=7+8+9+10+11$. Ставим на место x_5 число 11. Нетрудно заме-

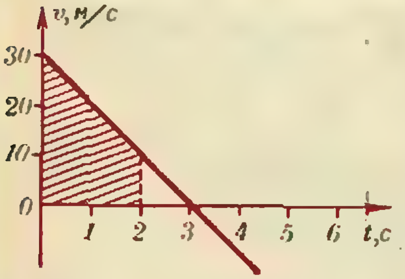


Рис. 8.

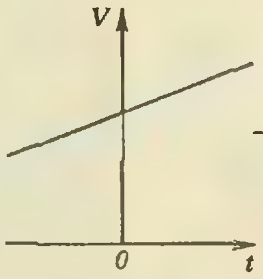


Рис. 9.

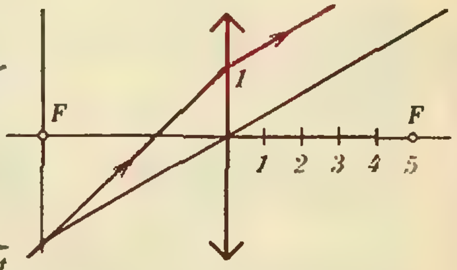


Рис. 10.

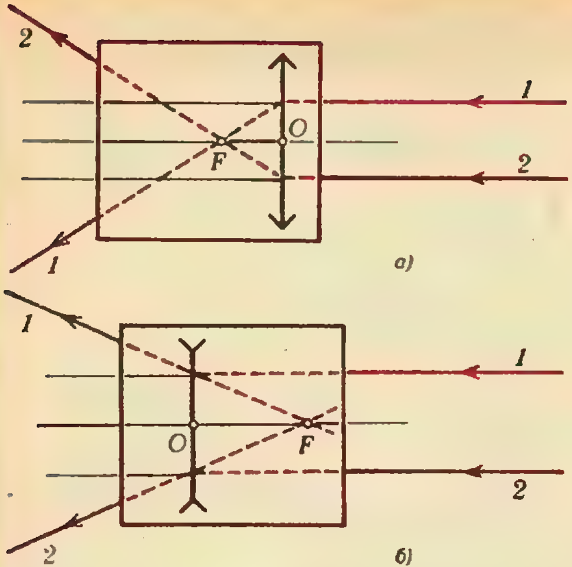


Рис. 11.

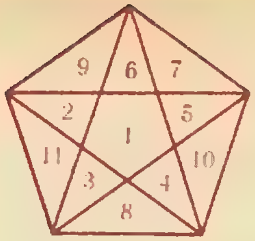


Рис. 12.

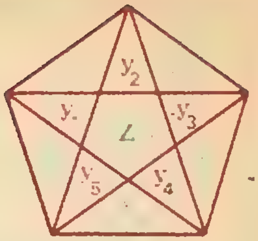


Рис. 13.

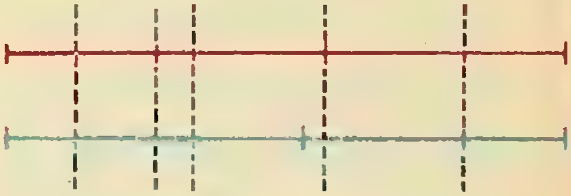


Рис. 14.

тить, что тогда сумма чисел y_2, z и y_4 равна 11 (сравните треугольники, в которых расставлены числа x_1, y_1, x_5 и x_1, y_1, y_2, z, y_4). Поскольку $z=1$, получаем $y_2+y_4=10$. Так как y_1, y_2, ..., y_5 — это числа 2, 3, 4, 5, 6, последнее равенство возможно лишь при $y_2=4$, $y_4=6$ (или $y_4=4$, $y_2=6$). Точно так же $x_1+y_1=11$ и $x_4+y_5=11$. Постепенно получаем нужную расстановку чисел.

5. Такое распиливание всегда возможно: расположите красные и синие палочки в два ряда, один под другим (рис. 14), и произведите распилы так, как указано на рисунке.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 3)

Задание 5 (С. Лойд, 1857 г.). 1. Cd6 Kpb1 2. Kpb3 (первые два хода белых можно переставить) 2... Kpa1 3. Ca3! Kpb1 4. Kc3+ Kpa1 5. Cb2×.

Задание 6 (А. Шуряков, 1983 г.). Единственное поле для белого ферзя — b8. Очевидно, в этой позиции ход черных, они берут на b8, и мата нет. При любом другом положении ферзя черным уже мат или первым же ходом белых.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян
Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, А. А. Варламов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, П. И. Чернуский, В. Б. Юдин
Фото представили:
В. А. Коновалов, А. М. Орехов, А. Н. Поляков

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Т. С. Вайсберг

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

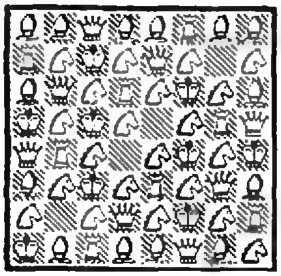
Сдано в набор 17.04.86. Подписано к печати 21.05.86
Т-11522. Бумага 70×108 1/16
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,37
Тираж 202 543 экз.
Цена 40 коп. Заказ 1006

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

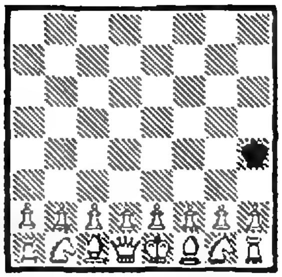
ШАХМАТНЫЕ РЕКОРДЫ

Известно, что на обычной доске можно расставить самое большее 8 ферзей, не угрожающих друг другу, 8 ладей, 14 слонов, 32 коня или 16 королей (см. «Квант» 1983, № 3). Выдающийся мастер головоломок, автор множества занимательных математических задач, в том числе с шахматным сюжетом, Г. Дьюдени придумал такую позицию, в которой на доске в безопасности одновременно находятся 8 ферзей, 8 ладей, 14 слонов (три максимума!), 21 конь и 8 королей (одноименные фигуры не бьют друг друга). Итого 59 фигур. Этот рекорд держался с прошлого века и казался незыблемым. Но вот совсем недавно читатель журнала В. Попов из Донецка побил старинный рекорд!



Как мы видим, при 8 ферзях, 8 ладьях, 14 слонах и 21 коне королей теперь 9, и общее число фигур увеличилось на одну — 60! Примечательно, что четыре пустых поля расположены на одной диагонали. Кто сумеет еще улучшить рекорд?

Следующая позиция как бы связывает между собой двух великих изобретателей головоломок — американца С. Лойда и англичанина Г. Дьюдени. Лойд обнаружил, что при исходном расположении белых фигур и одиноком черном короле поле h4 — единственное, на котором он может получить мат в 3 хода: 1.d4 Kpg4 2.e4+ Kph4 3.g3×, 1...Kph5 2.Фd3 Kph4(g4) 3.Фh3×.



Дьюдени заинтересовал другой вопрос: как быстрее всего эта позиция может получиться в настоящей шахматной партии? Поскольку белым нужно съесть 15 черных фигур и пешек, а на первом ходу взятие невозможно, решение содержит не менее 16 ходов. Дьюдени придумал партию, в которой позиция на диаграмме возникает после 16 ходов белых и 16 ходов черных. Рекорд держался очень долго, пока в 1933 году В. *Томпсон* не улучшил его на полхода!

1.Кc3 d5 2.К:d5 g6 3.К:e7 b5 4.К:g6 a6 5.К:h8 Cd7 6.К:f7 Фg5 7.К:g5 Кf6 8.К:h7 Кe4 9.К:f8 Кc3 10.К:d7 Кb1 11.К:b8 Кpf7 12.К:a6 Кpg6 13.К:c7 Кph5 14.К:b5 Лa3 15.К:a3 Кph4 16.К:b1.

В отличие от предыдущего случая на сей раз рекорд является абсолютным, побить его невозможно.

История помнит невероятные происшествия, когда победа достигалась только одними пешками. Вот две рекордные партии.

Ковардж — Новак (Брно, 1921 г.). **Ферзевый гамбит. 1.d4 d5 2.c4 e6 3.Кc3 c5 4.Cf4 cd 5.С:b8 d4:c3 6.Ce5 cb.** Белые сдались (7.С:b2 Cb4+).

Борохов — Файн (Пасадена, 1932 г.). **Защита Алехина. 1.e4 Кf6 2.e5 Кd5 3.c4 Кb6 4.d4 Кc6 5.d5 К:e5** (5...Кb4 6.c5 К6:d5 7.a3, также выигрывая одними пешками) **6.c5 Кbc4 7.f4. Черные сдались.**

Спертым матом партия обычно завершается лишь в миттельшпиле или эндшпиле, более короткие партии попадают в коллекцию курьезов. Вот несколько уникальных примеров из практики.

Алехин — Аллис (Польша, 1935 г.). **Защита Каро-Канн. 1.e4 c6 2.d4 d5 3.Кc3 de 4.К:e4 Кd7 5.Фe2 Кgf6?? 6.Кd6×!** Любопытно, что коллекция коротких и парадоксальных партий содержит десяток точно таких же встреч с матом конем на d6. Выбранный образец примечателен тем, что белыми здесь играл чемпион мира.

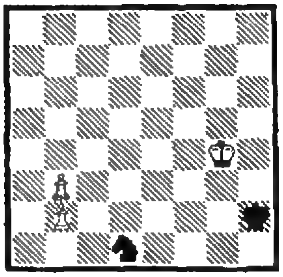
Грантер — Гейли (Шотландия, 1894 г.). **Сицилианская защита. 1.e4 c5 2.Кf3 Кc6 3.d4 cd 4.К:d4 e5 5.Кb5 Кge7 6.Кd6×.**

Марьянович — Живанов (Панчево, 1946 г.). **Сицилианская защита. 1.e4 c5 2.Кc3 Кc6 3.Кge2 g6 4.d3 Cg7 5.Ce3 Кd4 6.g3?? Кf3×.**

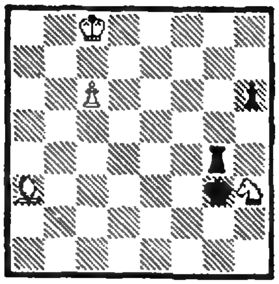
Иванов — Мартынов (Москва, 1973 г.). **Французская защита. 1.e4 e6 2.d4 d5 3.Кc3 de 4.К:e4 Кe7 5.Cd3 g6 6.Кf6×.**

Официально в шахматах не фиксируются рекорды числа ходов, но в истории соревнований известны партии-марафоны. Самой продолжительной долгое время считалась партия А. Вольф — О. Дурас (Карлсбад, 1907 г.). Игравший белыми Вольф дал мат королю соперника на 168-м ходу. Любопытно, что тот же Дурас однажды проиграл Д. Яновскому на 161-м ходу (Сан-Себастьян, 1911 г.). Но рекордной, по-видимому, является партия Г. Пильник — М. Черняк (Мар-дель-Плата, 1950 г.). Она продолжалась более 22 часов и завершилась вничью на 191-м ходу. В чемпионатах СССР рекорд держит поединок И. Кан — И. Бондаревский (Ленинград, 1939 г.), в нем ничья была зафиксирована на 142-м ходу.

Конкурсные задания



11. Белые начинают и выигрывают.



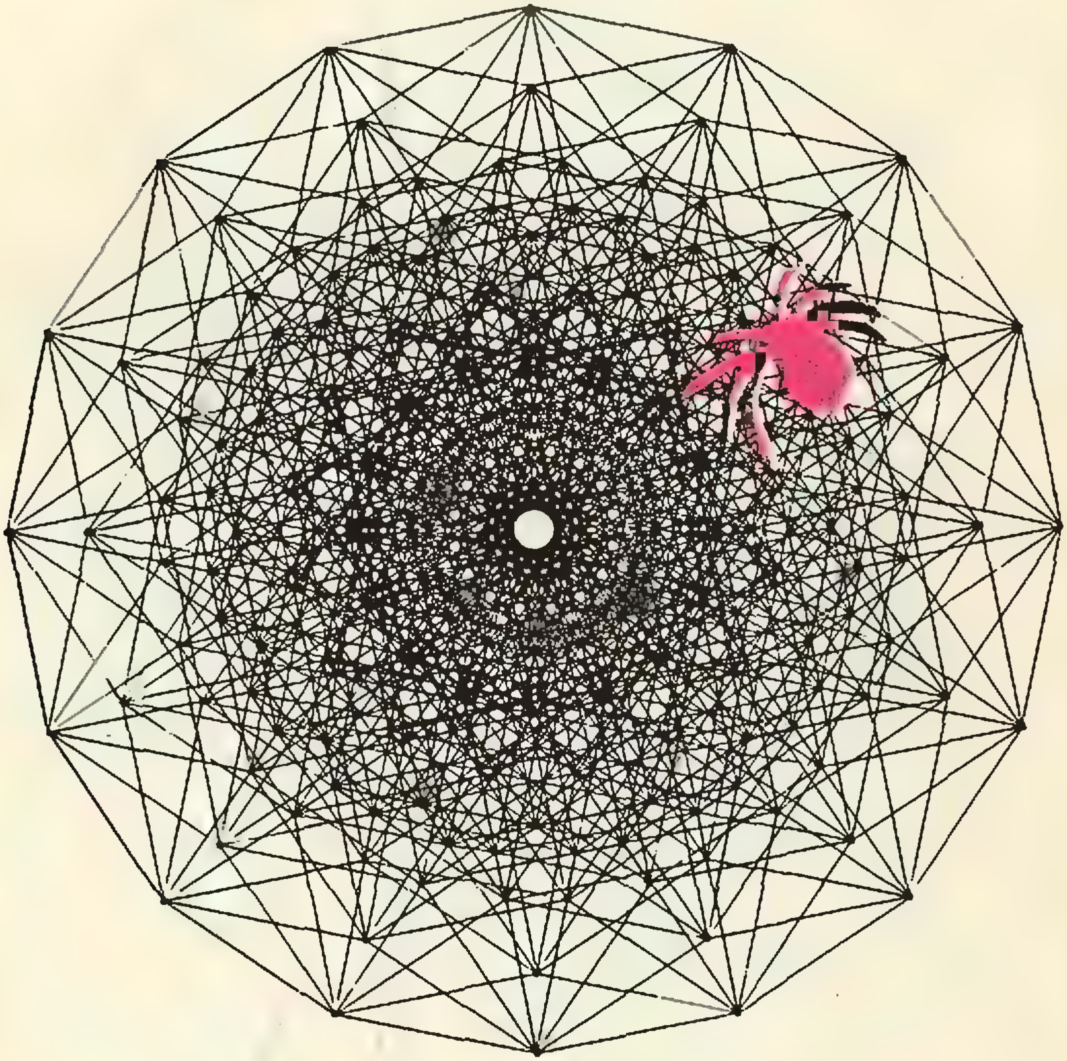
12. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 20 августа 1986 г. с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 11, 12».

На X Всесоюзной летней школе юных программистов можно было пообщаться и с компьютером «Агат», и с главным организатором этих школ академиком А. П. Ершовым. Теперь персональный компьютер — не редкость и в обычной средней школе, где уже год проводятся уроки по основам информатики и вычислительной техники.

Цена 40 коп.

Индекс 70465



Здесь показана проекция на плоскость «восьмимерного куба», построенная компьютером по программе А. Д. Коршунова. Куб спроектирован из «восьмимерного пространства» на обычную (двумерную) плоскость параллельно направлению, мало отличающемуся от главной диагонали куба. Получившееся хитросплетение ребер куба чем-то напоминает паутину. Видимо поэтому, пока рисунок готовился в редакции, в паутине завелся паук, которого наш художник уже не сумел отделить от паутины...

Что такое «многомерный куб» — в частности восьмимерный — рассказано в статье С. В. Дужина и В. Н. Рубцова в этом номере. Познакомившись с этой статьей, вы поймете, что восьмимерный куб имеет «грани» размерностей 2, 3, 4, 5, 6, 7. Любителям геометрии мы предлагаем, двигаясь по паутине, указать несколько граней каждой размерности. А любителям алгебры и арифметики — найти, сколько граней каждой размерности имеется у восьмимерного куба.

НОМЕР
7

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант **7** 1986

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

	В НОМЕРЕ:	**IN THIS ISSUE:**
2	*Р. Русев.* Журнал ЦК Коммунистического союза молодежи им. Димитрова «Математика» и его развитие	*R. Rusev.* The Bulgarian young communist league's magazine „Mathematics" and its development
5	*К. Г. Банков.* Об одной теореме Кронекера	*K. G. Bankov.* About a theorem of Kronecker
8	*И. П. Крылов.* Намагниченный атомарный водород	*I. P. Krylov.* Magnetized atomary hydrogen
15	*А. А. Варламов.* Тайны волшебной лампы	*A. A. Varlamov.* Mysteries of the magic lamp
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
22	*Е. Э. Коломейцев.* Ионы в растворах	*E. E. Kolomeytsev.* Ions in solutions
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
25	*Й. Б. Табов.* Об одном способе задания окружности	*Y. B. Tabov.* About a way of defining circles
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
27	Задачи	Problems
28	Морская кадриль (по мотивам *Л. Кэрролла*)	The lobster quadrille (after *L. Carroll*)
	Математический кружок	**Mathematics circle**
32	*С. Ц. Харалампиев.* Полюс и поляра относительно окружности	*S. Ts. Kharalampiev.* Poles and polars with respect to a circle
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
35	Задачи М991—М995; Ф1003—Ф1007	Problems M991—M995; P1003—P1007
37	Решения задач М971—М975; Ф983—Ф987	Solutions M971—M975; P983—P987
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
45	*Г. В. Дорофеев.* Как расположены корни трехчленов?	*G. V. Dorofeev.* How are roots of trinomials located?
	Игры и головоломки	**Puzzles and games**
50	*Д. И. Вакарелов.* Путешествия по графам	*D. I. Vakarelov.* In the realm of graphs
	Информация	**Information**
58	Заочная школа при НГУ	Novosibirsk University correspondance school
61	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Смесь *(64)*	**Miscellaneous** *(64)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Загадочные маневры *(3-я с. обложки)*	Strange manoeuvres (3*rd cover page*)

На фотографии, помещенной на первой странице обложки, запечатлен момент из «жизни» светильника «Радуга». Замечательные физические явления, которые протекают в этом светильнике, обсуждаются в статье «Тайны волшебной лампы»

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1986

математика

Журнал ЦК Коммунистического союза молодежи им. Димитрова «Математика» и его развитие

Народная Республика Болгария — страна зрелого социалистического общества. Ее гражданин — творческая личность, борец и преобразователь. Он ищет и анализирует, открывая новые пути в науке и практике. Поэтому ему мало просто получить современные знания, он должен научиться самостоятельно и действенно мыслить, творчески относиться к проблемам жизни. Отсюда необходимость в подготовке кадров, которые были бы способны быстро ориентироваться в изменяющихся условиях, в новейших достижениях науки и техники, самостоятельно решать назревшие проблемы. Мы должны так подготовить подрастающее поколение, чтобы оно могло органически соединить достижения научно-технической революции с преимуществами социалистической системы, создавать и внедрять новое в науке и производстве.

Математика всегда лежала в основе технического прогресса, поэтому Болгарская коммунистическая партия и правительство рассматривают как жизненно важный вопрос о повышении математической культуры молодежи.

В 1962 году Секретариат ЦК БКП принял решение о создании журнала «Математика» для учащихся средних школ. Журнал должен был выходить шесть раз в год и на него возлагались следующие задачи:

— знакомить школьников в популярной и привлекательной форме с крупными достижениями математики, ее историей и ее творцами;

— более глубоко и подробно разъяснять вопросы, изучаемые в школьном курсе математики;

— подчеркивать практические приложения математики и ее воспитательное значение;

— помогать во внеклассной математической работе учащихся;

— отражать интересные события международной математической жизни;

— знакомить учащихся с ведущими отечественными математиками;

— помещать материалы по занимательной математике.

Эти задачи наш журнал начал решать в своих научно-популярных статьях и рубриках: «Из истории математики», «Знаменитые математики», «Конкурсные задачи», «Задачи», «Задачи на аттестат зрелости», «Занимательная математика» и др.

«Школьные» темы

Научно-популярные статьи связаны с учебными программами; с одной стороны, они относятся к темам, которые расширяют познания школьников в данном вопросе, а с другой — к темам, углубляющим их познания. Среди этих тем назовем следующие:

1. Основные виды отображений множеств и числовые отображения.
2. Определенный интеграл и его приложения.
3. Принципы непрерывности.
4. Векторы и их приложения.
5. Свойства треугольников и четырехугольников.
6. Правильные пирамиды.
7. Уравнения и системы уравнений.
8. Неравенства и системы неравенств.
9. Алгебраические операции и их свойства.

В журнале рассматриваются не только темы из классических разделов математики, но также такие разделы, как комбинаторный анализ, математическая логика, теория решеток и графов, математическая лингвистика, многие главы вычислительной математики, то есть те разделы, которые можно объединить под общим названием.

Дискретная математика

Цели, которые преследуют статьи этого направления, следующие:

1. Усиление прикладной направленности. Связь между дискретной математикой, использованием ЭВМ и вычислительной математики, с одной стороны, и приложениями к экономическим и гуманитарным дисциплинам, с другой, делают изучение дискретной математики необходимым для большей части специальностей средних учебных заведений.

2. Ознакомление с математическим моделированием. Дискретные модели имеют свои особенности, которые позволяют их специально выделить (линейное программирование, математические модели языков и др.).

3. Раскрытие существенной роли дискретной математики для повышения вычислительной культуры учащихся.

4. Ознакомление с комбинаторным анализом, приобретающим в наше время все большее значение в прикладной математике. С комбинаторикой также связаны многие разделы теории вероятностей и других дисциплин.

5. Повышение логической грамотности учащихся.

Какие именно темы этого направления должны быть освещены — трудный вопрос. Но редколлегия журнала считает, что ими должны быть в первую очередь статьи, которые можно связать с темами школьного курса.

Научное мировоззрение

В связи с одной из основных задач средней школы — воспитанием научного мировоззрения — журнал «Математика» публикует статьи, показывающие происхождение математических понятий, разъясняющие роль математических абстракций, силу математических методов, которые позволяют просто и в определенных условиях исчерпывающе решать сложные вопросы естествознания — физики, биологии, астрономии и других наук. Акцентируя специальным образом внимание на философских основах математики, мы способствуем более глубокому осмыслению предмета и его методов, более широкому взгляду на сам предмет и его место в системе научных знаний, на его роль как движущую силу прогресса. Вот примеры статей этого направления: «Математика и объективная реальность», «Математический способ мышления», «Математика как профессия», «Талант и эстетика в научном творчестве», «Музыка математики», «Математический подход при физических рассмотрениях».

История математики

Огромную роль в становлении научного мировоззрения молодежи играет ознакомление с историей науки и научных открытий. На необходимость научного подхода указывают и классики марксизма-ленинизма. Изучая сложный путь, пройденный наукой, в известной степени приближаешься к пониманию ее роли сегодня. Приведем несколько примеров статей, преследующих эту цель: «Идеи Н. И. Лобачевского», «Из истории математики», «Первые шаги из истории счета», «Математика древних народов Месопотамии», «Из истории логарифмов», «От числа до цифры».

Отметим также специальное место, которое мы отводим на рассказы о развитии болгарской математики.

В рубрике «Знаменитые математики» читатели знакомятся с жизнеописанием крупных ученых в области математики и, с учетом уровня подготовки читателей, с обзорами научного творчества этих ученых. Мы помещаем и биографии видных болгарских математиков и некоторые их первые работы.

Журнал «Математика» стимулирует исследовательскую работу учеников посредством рубрик «Ученическое творчество» и «Конкурсные задачи». Еще в самом первом номере журнала в рубрике «Ученическое творчество» была помещена статья ученика 9-го класса «Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим некоторых чисел». В течение первых лет существования журнала под этой рубрикой выходили преимущественно статьи, содержащие оригинальные решения задач с международных олимпиад. Позже редколлегия журнала стала более активно руководить ученическим творчеством, и на страницах журнала стали появляться рефераты со школьных теоретических конференций по математике.

Рубрика «Конкурсные задачи»

Эта рубрика, созданная с самого рождения журнала «Математика», ставила своей целью привлечение наиболее способных учащихся к самостоятельной творческой работе на уровне задач международных олимпиад. В известной степени здесь были реализованы прогрессивные концепции Дьёрда Пойа, состоящие в том, что в классе можно создавать такую обстановку, что ученики сами стремятся к определенной исследовательской работе.

В период от 1962 по 1967 мы публиковали задачи (и затем их решения) и списки учеников, наилучшим образом решающих эти задачи. После 1968 года публикуются оригинальные решения и обобщения задач самих школьников, а с 1969 года также и составленные школьниками задачи. При этом большое значение придается способности ставить и решать задачи, возникающие при изучении реального мира, природы.

Разделы для младших школьников

С 1980 года журнал «Математика» выпускает 10 номеров ежегодно. Основные цели и задачи журнала не изменились, но он расширился за счет материалов для младших школьников (4—6 классы). Созданы рубрики «Статьи для младших» и «Задачи для младших». В статьях для младших изучаются прежде всего ситуации, близкие к практике и к интуитивным представлениям, дается предпочтение занимательному элементу, диалогу. Главная их роль, однако, состоит в том, чтобы с раннего возраста прививать учащимся вкус к красоте математических рассуждений и, в рамках возможного, навыки самостоятельной работы. Особенно тщательно подбираются задачи для младших школьников. Учащиеся 5, 6 и 7 классов имеют возможность участвовать в заочно-очном конкурсе по решению этих задач. Двадцать лучших семиклассников получают право без конкурсных экзаменов продолжить свое образование в математической гимназии.

Информатика

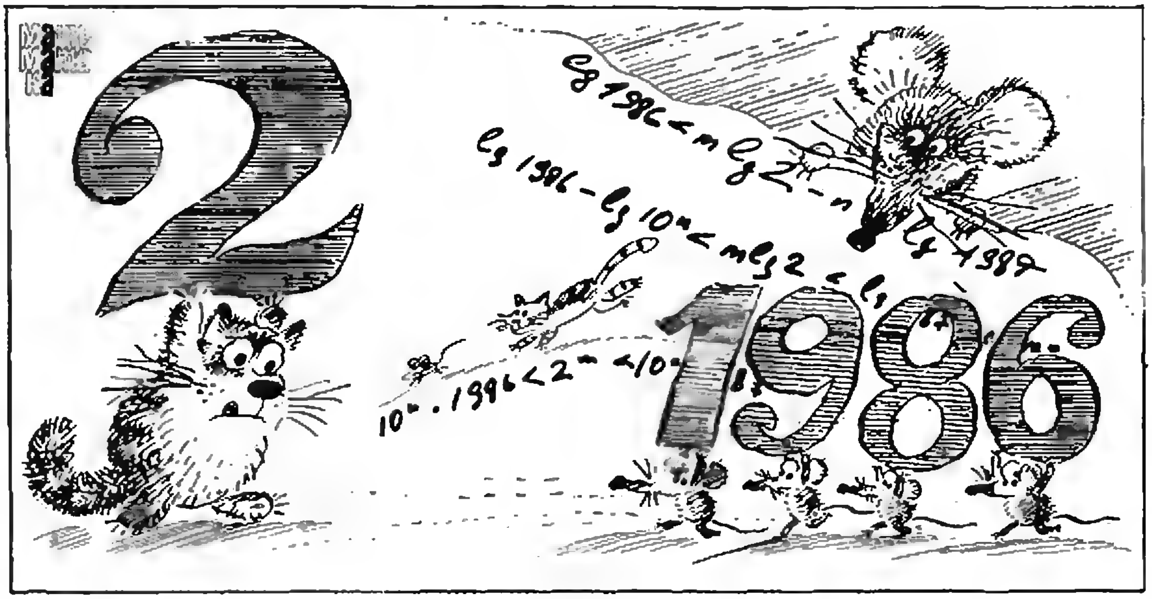
Начиная с первого номера 1985 года наш журнал увеличил свой объем. При этом дополнительный объем отводится теперь под новую рубрику, посвященную вопросам информатики. Ее цели, определенные экономической жизнью страны, следующие:

1. Развивать интеллектуальные способности учащихся, знакомить их с такими математическими понятиями, как система, модель, информация, алгоритм, программное управление, формальные языки и т. п.
2. Расширять и углублять понятие о математическом моделировании на примере реальных устройств и технологий, управленческих и обслуживающих процессов, знакомить с их исследованием, оптимизацией и алгоритмизацией.
3. Раскрывать возможности информатики и математики для решения научно-технических и экономических задач и на их основе знакомить с количественными методами решения.

В заключение отметим, что вот уже более 20 лет журнал «Математика» является добрым помощником учащихся средней школы. Об этом говорит хотя бы тираж журнала, который возрос от 15.000 (в 1962 году) до 78.000 (в 1986 году).

Коллектив редакции стремится максимально полно удовлетворять интересы читателя, помогать в подготовке кадров с широкими математическими познаниями. Вот почему мы постоянно ищем разнообразные формы контактов с читателями.

Главный редактор журнала
«Математика»
Р. Русев



Об одной теореме Кронекера

К. Г. БАНКОВ (НРБ)

Теорема, о которой здесь пойдет речь, играет заметную роль в теории чисел. Однако нам она интересна по другой причине: с ее помощью удается просто решать элементарно формулируемые, но по существу трудные задачи. Прежде чем привести саму теорему, мы рассмотрим две такие задачи.

Задача 1. *Докажите, что существует степень числа 2, десятичная запись которой начинается с цифр 1986.*

Чтобы решить эту задачу, нужно найти такую степень $m \in N$, чтобы

$$10^n \cdot 1986 < 2^m < 10^n \cdot 1987$$

для некоторого n. Логарифмируя по основанию 10, получаем

$$\lg 1986 + \lg 10^n < m \lg 2 < \lg 1987 + \lg 10^n,$$

или

$$\lg 1986 < m \lg 2 - n < \lg 1987.$$

Задача будет решена, если мы сумеем найти такие натуральные n и m, чтобы одно из чисел вида

$$m \lg 2 - n, \quad m, n \in \mathrm{N} \qquad (1)$$

попало в маленький интервал $(\lg 1986, \lg 1987)$.

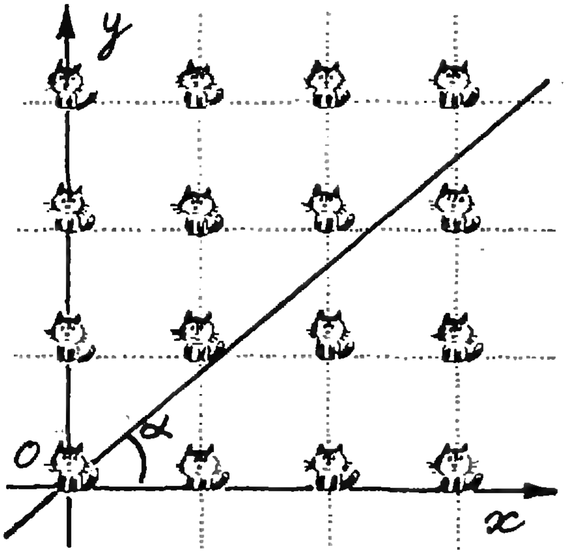
Задача 2. *В вершинах целочисленной квадратной сетки нарисованы одинаковые маленькие коты* (рис. 1). *Докажите, что луч $y = kx$, $x \geqslant 0$ пересечет, кроме центрального, хотя бы еще одного кота, если число k — иррационально.*

Пусть $2\varepsilon_0$ — «ширина кота», иначе говоря, пусть центральный кот пересекает ось Ox по отрезку $[-\varepsilon_0; \varepsilon_0]$. Для определенности предположим, что луч расположен в первом квадранте (остальные случаи аналогичны). Тогда луч пересекает прямые $y = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ по точкам с абсциссами $\alpha, 2\alpha, \ldots, n\alpha, \ldots$, где $\alpha = 1/k$. Задача будет решена, если мы найдем такие натуральные n и m, что

$$m - \varepsilon_0 < n\alpha < m + \varepsilon_0,$$

или

$$-\varepsilon_0 < n\alpha - m < \varepsilon_0,$$



то есть сумеем установить, что одно из чисел вида

$$n\alpha - m, n, m \in \mathbf{N}, \qquad (2)$$

попадает в маленький интервал $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$.

Замечательная идея теоремы Кронекера*) состоит в том, что такие множества, как (1) и (2), содержат числа, лежащие вообще в **любом** интервале. Чтобы дать точную формулировку этой теоремы, нам потребуется одно определение.

Числовое множество $A \subset \mathbf{R}$ называется *всюду плотным* (в $\mathbf{R}$), если любой интервал содержит элемент этого множества. Иными словами, A *всюду плотно* в $\mathbf{R}$, если для любых чисел $x, y \in \mathbf{R}$, $x < y$ существует $a \in A$, такой что $x < a < y$.

Упражнения

1. Укажите, какие из следующих множеств всюду плотны в $\mathbf{R}$: а) все рациональные числа; б) все иррациональные числа; в) все числа вида $n + 5m/17$ $(n, m \in \mathbf{Z})$; г) все числа вида $n + k/m$ $(n, k, m \in \mathbf{Z})$.

2. Пусть множество A всюду плотно в $\mathbf{R}$ и $r \neq 0$ — действительное число. Докажите, что тогда множества

$$B = \{a + r;\ a \in A\},\ C = \{ra,\ a \in A\}$$

тоже всюду плотны в $\mathbf{R}$.

Теорема Кронекера. *Для произвольного иррационального числа* $\alpha \neq 0$ *множество*

$$\{m\alpha + n;\ m, n \in \mathbf{Z}\} \qquad (3)$$

всюду плотно в $\mathbf{R}$.

Доказательство. Нужно установить, что для любых двух чисел x, y, для которых $x < y$, существует число вида $m\alpha + n$, где $m, n \in \mathbf{Z}$ такое, что $x < m\alpha + n < y$. Обозначим через δ длину интервала $\Delta = (x; y)$ и разделим интервал $[0; 1]$ на конечное число интервалов $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, каждый из которых имеет длину меньше, чем δ. Отметим теперь, что для любого целого числа m, очевидно, существует целое n, для которого число $m\alpha + n$ лежит на отрезке $[0; 1]$. Так как целых чисел бесконечно много, а отрезок $[0; 1]$ разделен на конечное число интервалов, существуют целые числа m_1, m_2, n_1, n_2, для которых $m_1 \neq m_2$ и числа $m_1\alpha + n_1$ и $m_2\alpha + n_2$ лежат в одном и том же интервале Δ_i. Это означает, что число $a = (m_1 - m_2)\alpha + (n_1 - n_2)$ по абсолютному значению меньше, чем δ. Кроме того, равенство $a = 0$ не может быть верно, потому что из него вытекает, что $\alpha = \dfrac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2}$ — рациональное число. Из сказанного следует, что некоторое число, кратное a, которое также имеет вид $m\alpha + n$, где m, n — целые числа, будет принадлежать $\Delta = (x; y)$; теорема доказана.

Замечание. Теорема остается верной, если множество (3) заменить на множество

$$\{m\alpha - n;\ m, n \in \mathbf{N}\}. \qquad (4)$$

Это легко выводится из доказанной теоремы; вывод мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Возвращаясь теперь к множествам (1) и (2), мы видим, что они удовлетворяют условиям теоремы: задачи 1 и 2 тем самым решены. (Мы считаем известным, что число $\lg 2$ иррационально; впрочем, это несложно доказать.)

Упражнение 3. Покажите, что в задаче о котах условие иррациональности k нельзя опустить.

Рассмотрим еще несколько задач, решения которых используют теорему Кронекера.

Задача 3. *Докажите, что существует квадрат натурального числа, десятичная запись которого начинается с любых предварительно заданных цифр.*

Решение. Найдем квадрат натурального числа, первые цифры десятичной записи которого — $a_0a_1\ldots a_S$. Обозначим через A число $A = \overline{a_0a_1\ldots a_S}$. Будем теперь искать такое натуральное число n, чтобы для некоторого натурального числа k были верны неравенства

$$A \cdot 10^k < n^2 < (A+1) \cdot 10^k,$$

или $\lg A < 2\lg n - k < \lg (A+1)$.

Если мы выберем число n равным $n = 2^m$, а число k — четным, $k = 2t$, то

$$\lg A < 2m\lg 2 - 2t < \lg (A+1). \qquad (5)$$

Согласно теореме, замечанию (см. (4)) и упражнению 2, множество

$$\{2m\lg 2 - 2t;\ m, t \in \mathbf{N}\}$$

является всюду плотным, и, следовательно, существуют числа m и t, для которых верно (5). Задача решена.

Для решения следующих задач нам потребуется еще такое утверждение:

Лемма. *Если две непрерывные функции принимают одинаковые значения, когда аргументами являются элементы одного и того же всюду плотного множества, то они совпадают всюду.*

Эта лемма «геометрически очевидна»; ее формальное доказательство малопривлекательно (хотя и нетрудно), поэтому мы его не приводим.

Задача 4. *Докажите, что функция*

$$f(x) = \sin \pi x + \sin \pi\sqrt{2}x$$

непериодическая.

Решение. Допустим, что функция f периодическая, и обозначим через $T \neq 0$ один из ее периодов. Тогда равенство

---

*) Леопольд Кронекер (1823—1891) — выдающийся немецкий математик, специалист по алгебре и теории чисел.

$$\sin \pi(x+T)+\sin \pi\sqrt{2}(x+T)= \\ =\sin \pi x+\sin \pi\sqrt{2}x \qquad (6)$$

верно для любого действительного числа x. Если в этом равенстве мы заменим x произвольным четным числом $2m$, то получим

$$\sin \pi T+\sin \pi\sqrt{2}(2m+T)=\sin (\pi\sqrt{2}\cdot 2m).$$

Используя снова периодичность функции sin, получаем равенство

$$\sin \pi T+\sin \pi\sqrt{2}\left(2m+\frac{2n}{\sqrt{2}}+T\right)= \\ =\sin \pi\sqrt{2}\left(2m+\frac{2n}{\sqrt{2}}\right),$$

которое верно для любых двух целых чисел m и n. Согласно теореме упражнения 2 множество

$$\left\{2m+\frac{2n}{\sqrt{2}};\ m,\ n \text{ — целые числа}\right\}$$

является всюду плотным. Это означает, что функции $\sin \pi T+\sin \pi\sqrt{2}(x+T)$ и $\sin \pi\sqrt{2}x$ принимают одинаковые значения, когда их аргументами являются элементы одного и того же всюду плотного множества и, следовательно (по лемме), совпадают всюду, то есть равенство

$$\sin \pi T+\sin \pi\sqrt{2}(x+T)=\sin \pi\sqrt{2}x \qquad (7)$$

верно для любого действительного числа x. Вычитая (7) из (6), получаем

$$\sin \pi(x+T)\ \sin \pi T=\sin \pi x.$$

В последнем равенстве полагаем $x=T$; получим

$$\sin 2\pi T-\sin \pi T=\sin \pi T,$$

или

$$\sin \pi T(\cos \pi T-1)=0.$$

Из последнего равенства следует, что T — целое число. Тогда из (7) следует

$$\sin \pi\sqrt{2}(x+T)-\sin \pi\sqrt{2}x=0,$$

или

$$\sin \pi\sqrt{2}\,\frac{T}{2}\cos \pi\sqrt{2}\left(x+\frac{T}{2}\right)=0.$$

Так как существуют значения x, для которых $\cos \pi\sqrt{2}\left(x+\frac{T}{2}\right)\neq 0$, то $\sin \pi\sqrt{2}\,\frac{T}{2}=0$; отсюда вытекает, что $\sqrt{2}\,\frac{T}{2}$ — целое число. Но, с другой стороны, T — также целое число и $T\neq 0$, значит $\sqrt{2}$ — рациональное число, что неверно. Полученное противоречие доказывает, что функция f непериодична.

Вот еще одна задача, связанная с рассмотренной выше функцией.

Задача 5. *Докажите, что функция*

$$f(x)=\sin \pi x+\sin \pi\sqrt{2}x$$

не может принять значения 2, но принимает значения, сколь угодно близкие к числу 2.

Решение. Если мы допустим, что $f(x)=2$ для некоторого x, то будут выполнены одновременно равенства $\sin \pi x=1$ и $\sin \pi\sqrt{2}x=1$, откуда непосредственно следует, что число $\sqrt{2}$ рационально, а это неверно. Следовательно, $f(x)<2$ для любого числа.

Если x — произвольное число вида $2m+\frac{1}{2}$, где m — целое число, функция f принимает вид

$$f(x)=1+\sin \pi\sqrt{2}\left(2m+\frac{1}{2}\right).$$

Покажем, что можно найти такое целое число m, для которого $\sin \pi\sqrt{2}\left(2m+\frac{1}{2}\right)$ сколь угодно близко к числу 1. Имея в виду непрерывность функции sin, достаточно найти такие целые числа m и n, что число $\sqrt{2}\left(2m+\frac{1}{2}\right)$ произвольно близко к числу $2n+\frac{1}{2}$. Поэтому достаточно доказать, что для любого положительного ε существуют целые числа m и n, для которых

$$2n+\frac{1}{2}-\varepsilon<\sqrt{2}\left(2m+\frac{1}{2}\right)<2n+ \\ +\frac{1}{2}+\varepsilon.$$

Преобразуем последнюю цепочку неравенств к виду

$$1-2\varepsilon-\sqrt{2}<4m\sqrt{2}-4n<1+2\varepsilon-\sqrt{2}.$$

Теперь все следует из теоремы и упражнения 2.

Задача 6. *Найдите все непрерывные действительные функции f, для которых $f(x)=f(x+1)=f(x+\sqrt{2})$.*

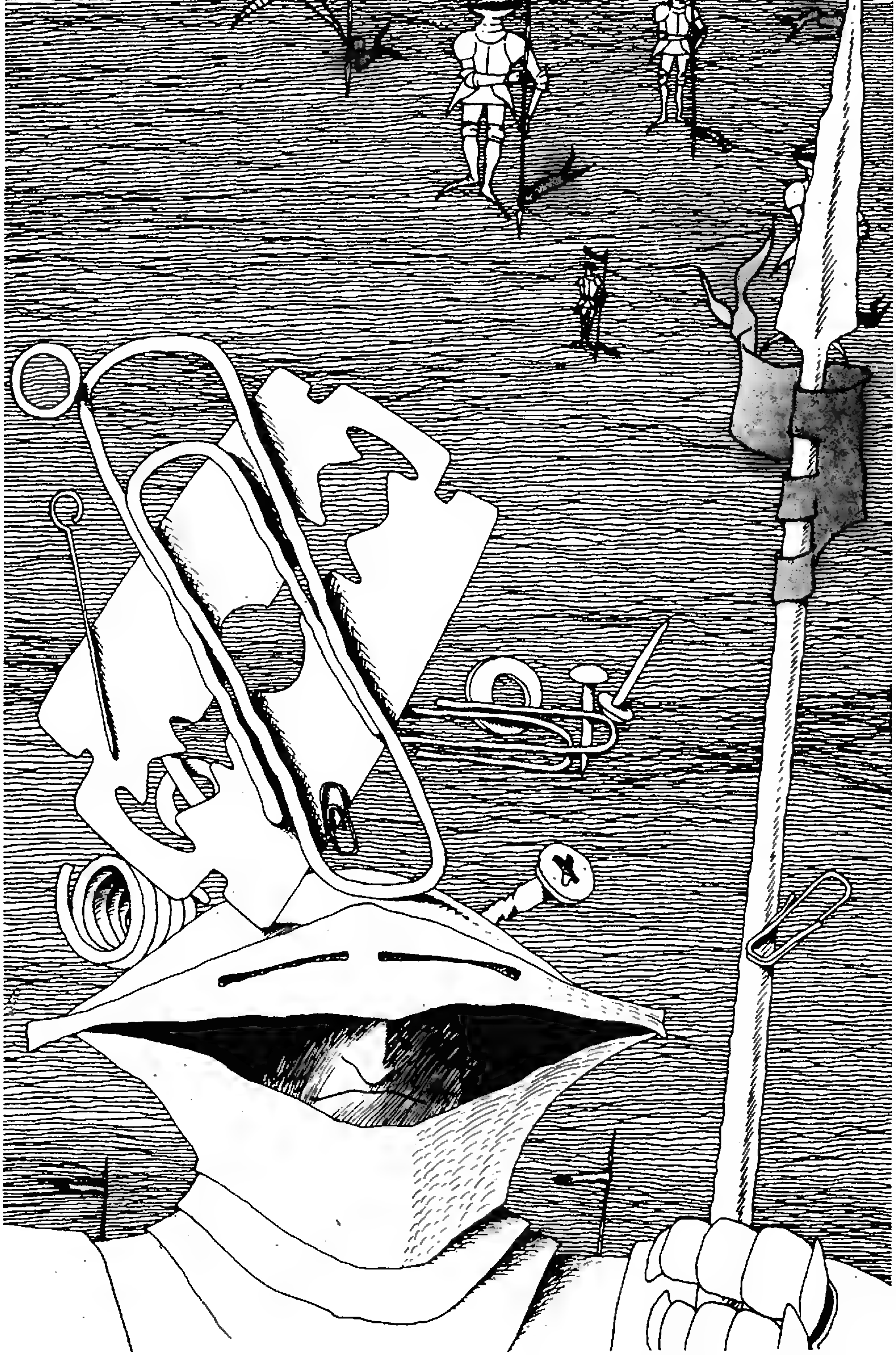
Решение. Пусть f — непрерывная функция, для которой $f(x)=f(x+1)=f(x+\sqrt{2})$. Это означает, что числа 1 и $\sqrt{2}$ — периоды функции f. Тогда периодами функции f являются также все числа вида $m+n\sqrt{2}$, где m и n — целые числа, то есть для любых двух целых чисел m и n верно равенство $f(x+m+n\sqrt{2})=f(x)$. Последнее равенство означает, что $f(x+y)$ и $f(x)$ принимают одинаковые значения, когда y принадлежит всюду плотному множеству

$$\{m+n\sqrt{2};\ m,\ n \text{ — целые числа}\}.$$

Тогда согласно лемме получаем, что равенство $f(x+y)=f(x)$ верно для каждого числа y, то есть каждое (действительное) число является периодом функции f. Теперь, если x_1 и x_2 — два различных числа, мы положим $y=x_2-x_1$, и тогда

$$f(x_1)=f(x_1+(x_2-x_1))=f(x_2).$$

Следовательно, решением задачи 6 будут все функции вида $f(x)=a$, где a — постоянная.



Намагниченный атомарный водород

Доктор физико-математических наук
И. П. КРЫЛОВ

Водород — самое распространенное вещество во Вселенной. Пылающие звезды и холодный межзвездный газ на 90 % состоят из водорода — элемента № 1 периодической системы. Остальные 10 % почти полностью составляет гелий — элемент № 2. На долю всех более тяжелых элементов, столь важных у нас на Земле, в космических масштабах приходится всего лишь 1/1000 часть общего количества вещества. Водород на Земле существует в молекулярном виде, в то же время в космосе водород — в основном атомарный. В чем тут дело? Можно ли создать и сохранить атомарный водород на Земле? Как это сделать? Ответы на эти вопросы вы получите, прочитав эту статью. Межзвездный газ чрезвычайно разрежен: в среднем 1 атом водорода в 1 см^3. Какие максимальные плотности атомарного водорода можно получить в лаборатории? Ответ на этот вопрос меняется изо дня в день, ибо сейчас ученые в передовых физических лабораториях усердно работают над увеличением этой плотности.

Все земные газы при понижении температуры становятся жидкими, а потом твердеют. Наиболее упорно превращению газа в жидкость сопротивлялся гелий. Лишь при понижении температуры до нескольких градусов вблизи абсолютного нуля (—273,15 °С) гелий стал жидким. Впервые это удалось сделать почти 80 лет назад. Но элемент № 2 не сдался полностью: в отличие от остальных элементов он не твердеет при нормальном давлении даже при абсолютном нуле. Становится ли жидким атомарный водород? Уверенного ответа на этот вопрос ученые сейчас дать не могут. Есть основание считать, что элемент № 1 в атомарном виде еще более капризен, чем элемент № 2, и не только не затвердеет, но даже и не превратится в жидкость. Но лучше давайте по порядку.

«Земной» и «космический» водород: молекулы и атомы

В учебнике читаем: «водород — легкий бесцветный газ, превращающийся в жидкость при —253 °С и затвердевающий при —259 °С». Все это говорится про обычный «земной» водород, или, выражаясь точным языком, про молекулярный водород H_2. Свойства «космического», атомарного водорода H, совсем другие. Начнем с самого начала. Вспомним, как устроен атом водорода — простейший атом в природе.

Атом водорода образован двумя элементарными частицами: протоном и электроном. Их электрические заряды равны по величине и противоположны по знаку. Протон заряжен положительно, в 1836 раз тяжелее электрона и служит ядром атома с размером менее 10^{-12} см. Электрон движется вокруг ядра. Однако его движение подчиняется особым квантовым законам. По современным представлениям нельзя считать, что электрон движется по какой-то определенной орбите. Он как бы «размазан»: предпринимая независимые попытки определить местонахождение электрона в абсолютно одинаковых атомах водорода, мы будем обнаруживать электрон в самых разных точках вокруг ядра.*) Так возникает образ электронного облака, плотность которого указывает, где более, а где менее вероятно обнаружить электрон (рис. 1). Электронное облако в атомах не имеет четкой границы; однако при превышении некоторого расстояния плотность спадает очень быстро. Это расстояние можно принять за радиус атома. Для атома водорода эта величина называется боровским радиусом и равна $a=0{,}53\cdot10^{-10}$ м$=$ $=0{,}53$ Å (здесь использована единица длины ангстрем — 1 Å$=10^{-10}$ м).

Электрон, а вместе с ним и весь атом водорода, обладает магнитными свойствами: в магнитном поле он ведет себя как магнитная стрелка. Как будто электрон «намагничен», у него есть северный и южный полюса. Это свойство наглядно изображают с помощью стрелки, показывающей на-

---

*) См. статью «Соотношение неопределенностей» в «Кванте» № 7 за 1985 год

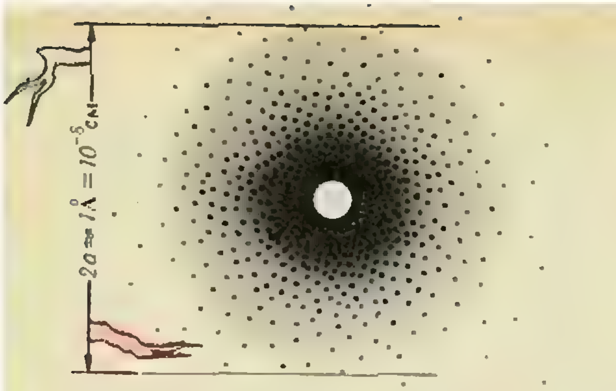


Рис. 1. Протон в центре электронного облака — простейший атом в природе.

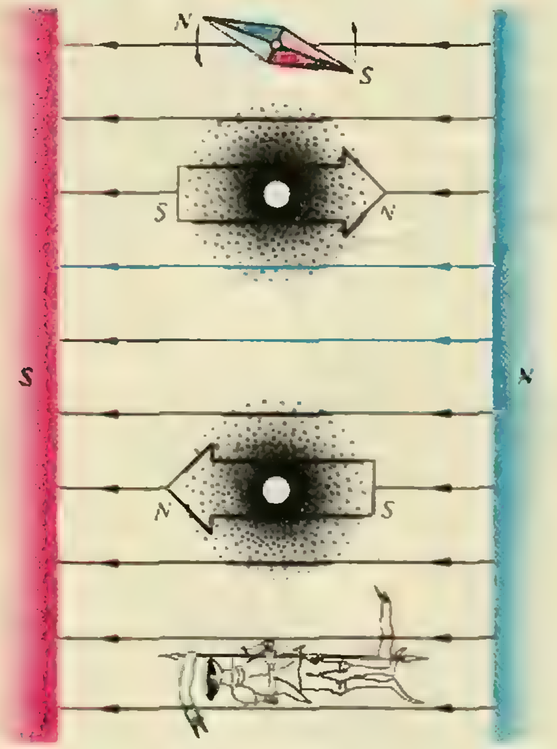


Рис. 2. Атом водорода в магнитном поле ведет себя как магнитная стрелка — он ориентируется вдоль силовых линий поля. Однако в отличие от стрелки электронный магнитик не может занимать промежуточных положений: он имеет только две ориентации: против поля или по полю.

правление магнитного момента*) (рис. 2).

Как известно, магнитная стрелка в магнитном поле поворачивается вдоль силовых линий, изменяя свою ориентацию непрерывно. В отличие от нее электронный магнитик не может занимать промежуточных положений. Квантовые законы позволяют ему иметь только две ориентации: по полю и против поля. К такому необычному квантовому поведению электрона надо просто привыкнуть. В микромире многое происходит совсем иначе, чем в обычной жизни.

Молекула водорода

Рассмотрим теперь, что происходит при сближении двух атомов водорода. Атомы в целом нейтральны, так что на больших расстояниях электрические силы отсутствуют. При уменьшении расстояния электронные облака начинают перекрываться (рис. 3). Из законов квантовой механики следует, что характер деформации облаков определяется взаимной ориентацией магнитных моментов электронов. Если стрелки, показывающие направление магнитных моментов, смотрят в одну сторону (см. рис. 3), то электронные облака между ядрами разрежены. В этом случае преимущество имеют силы отталкивания, действующие между одноименными зарядами. Во втором случае электронные облака в области между ядрами более плотны, чем в удаленных точках. При этом одерживают верх силы притяжения. Подчеркнем, что силы взаимодействия между атомами — электрические силы; силы магнитного взаимодействия в этом случае очень малы.

Взаимодействие атомов удобно описывать с помощью графика зависимости потенциальной энергии взаимодействия U от расстояния между атомами r. На рисунке 4 приведены эти графики для параллельной (↑↑) и антипараллельной (↑↓) ориентаций магнитных моментов атомов водорода. Положительный знак потенциальной энергии, как обычно, соответствует отталкиванию, отрицательный — притяжению. Как видно из рисунка, на малых расстояниях даже в случае антипараллельной ориентации (↑↓) атомы начинают отталкиваться. Это происходит потому, что притяжение электронных облаков к «чужим» ядрам уже не может компенсировать оттталкивание положительно заряженных ядер. Устойчивому положению равновесия соответствует минимум потенциальной энергии. При этом два атома водорода в состоянии ↑↓ расположатся на расстоянии $r_0 = 0{,}7$ Å.

---

*) В «Кванте» № 3 за этот год в разделе «Школа в «Кванте» была опубликована статья, посвященная магнитному моменту.

Образуется устойчивая система — молекула водорода. Энергия образования молекулы — «глубина ямы» на графике $U(r)$ — составляет $E_0=4{,}5$ эВ. При «слиянии» атомов в молекулу, называемом рекомбинацией, эта энергия — энергия рекомбинации — должна быть отдана окружающим телам. При обратном процессе, называемом диссоциацией, эта энергия — энергия диссоциации — должна быть доставлена из внешнего источника. Заметим еще раз, что в состоянии ↑↑ атомы водорода вообще не могут образовать молекулу.

Графики потенциальной энергии обладают большой наглядностью: система стремится двигаться так, как двигались бы санки на скользкой горе, склон которой изображен на графике. Для графика ↑↑ санки уехали бы вправо, в область больших расстояний. Это означает, что атомы отталкиваются и удаляются друг от друга. На графике ↑↓ имеется склон, по которому санки двигались бы влево, к началу координат, что соответствует притяжению атомов водорода.

Как происходят столкновения

Обычно магнитные моменты атомов ориентированы случайно. Половина столкновений происходит в состоянии ↑ ↑, а другая половина — в состоянии ↑ ↓.

Интересно, что далеко не каждое столкновение двух атомов водорода в состоянии ↑↓ приведет к образованию молекулы, то есть к рекомбинации. Обращаясь к нашей иллюстрации с санками, мы легко себе представим, что, прикатившись на совершенно скользкую гору откуда-то справа, санки соскользнут вниз, в яму, но по инерции вылетят на противоположный склон и остановятся на высоте, с которой они начали скатываться на правом склоне. Затем санки опять поедут вниз, опять проскочат дно ямы и уедут вправо с той же кинетической энергией, с какой приехали. Ясно, что это обратимое движение происходит в силу закона сохранения энергии при условии полного отсутствия трения. Для реальных гор часть кинетической энергии всегда уходит на работу против сил трения, то есть в тепло, и санки рано или поздно остановятся на дне ямы. При сближении атомов водорода также справедлив закон сохранения энергии. И здесь уже нет никаких трущихся поверхностей. Если сталкиваются только два атома, то им нечему передать свою энергию. При столкновении атомы сблизятся, проскочат по инерции устойчивое положение, сойдутся до полной остановки, а потом опять разлетятся, как абсолютно упругие шарики. Для образования же молекулы необходимо столкновение сразу трех тел: двух атомов водорода и еще чего-нибудь. Третьим телом может быть любой

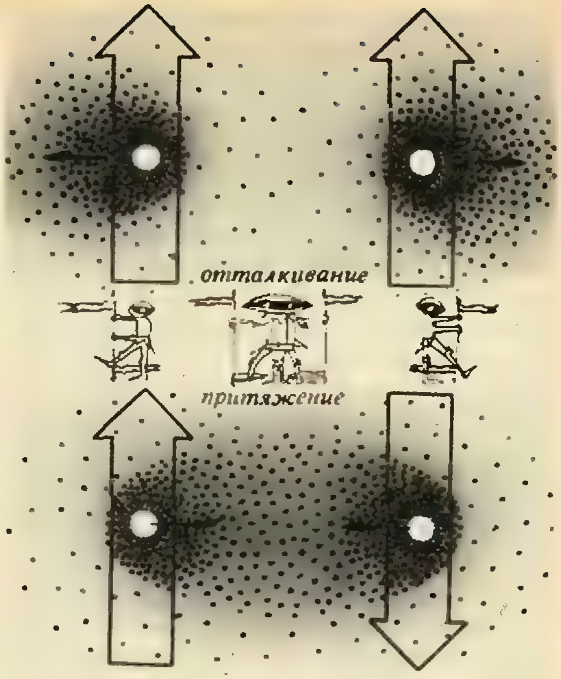


Рис. 3. При параллельной (↑ ↑) ориентации магнитных моментов электронное облако между ядрами разрежено, при антипараллельной (↑ ↓) — сгущено.

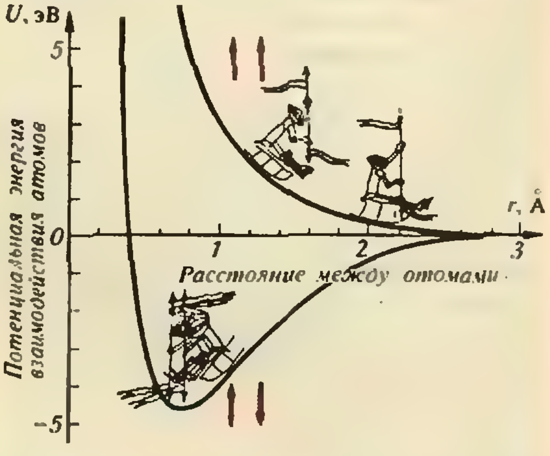


Рис. 4. «Горка» потенциальной энергии двух атомов водорода в состоянии ↑ ↑. Минимум для графика ↑ ↓ — «яма» глубиной 4,5 эВ: дно «ямы» соответствует расстоянию $r_0=0{,}7$ Å.

атом или молекула или их скопление — в общем, что-нибудь, способное унести излишек кинетической энергии двух атомов водорода, слипшихся в молекулу, то есть энергию рекомбинации. Для сталкивающихся атомов водорода, состоящих из заряженных частиц и обладающих магнитными моментами, в принципе существует возможность отдать энергию рекомбинации, излучив свет ультрафиолетового диапазона. Однако эта возможность очень маловероятна. Согласно оценкам, при обычных тепловых скоростях движения атомов водорода на десятки миллиардов столкновений лишь в одном случае произойдет излучение света и образование молекулы. Раз свет может излучаться при образовании молекулы, то возможен и обратный процесс — разрушение молекулы за счет поглощения энергии ультрафиолетового света — так называемая фотодиссоциация. Хотя этот процесс тоже маловероятен, но молекула как стабильное образование может ждать сколько угодно и в конце концов при облучении ультрафиолетовым светом будет разрушена.

Теперь мы можем понять, почему в космических условиях разреженный межзвездный газ — водород — находится в атомарном состоянии. В разреженном газе преимущественно происходят парные столкновения частиц, а тройные столкновения чрезвычайно редки. Рекомбинация происходит лишь при тройных столкновениях атомов и идет очень медленно. В то же время ультрафиолетовое излучение звезд пронизывает все космическое пространство и с достаточной скоростью производит фотодиссоциацию образовавшихся молекул. Реальное соотношение скоростей рекомбинации и диссоциации таково, что доля молекул в межзвездном водороде мала.

Напротив, в газе высокой плотности, соответствующей давлению в земной атмосфере, вероятность тройных столкновений достаточно велика, и рекомбинация быстро приводит к исчезновению атомарного водорода.

Атомарный водород в лаборатории

Как получить и сохранить атомарный водород в земных условиях? Получать его из молекулярного газа довольно просто в газоразрядных трубках; это научились делать уже около сотни лет назад. Сохранить атомарный водород в течение длительного промежутка времени очень трудно, и лишь совсем недавно, несколько лет назад, удалось увеличить время хранения до нескольких часов. Начнем с методики получения атомарного водорода.

Современная промышленность широко использует водород. Наиболее распространенным способом его получения (конечно, в молекулярной форме) является электролиз воды. Но как обеспечить диссоциацию молекулы водорода, то есть разделить ее на атомы? Еще в начале нашего столетия знаменитый физик Ленгмюр заметил, что часть молекул водорода разлагается на атомы при соприкосновении с раскаленной вольфрамовой нитью. Однако эта термическая диссоциация малоэффективна. Гораздо лучше молекулы разваливаются в электрическом разряде. Если стеклянную трубку длиной $10 \div 30$ см заполнить газом под низким давлением $p = 10^{-3} \div 10^{-4}$ атм, укрепить на концах трубки электроды и приложить к столбу газа постоянное напряжение $U = 1 \div 3$ кВ (рис. 5, *а*), то газ начнет светиться и через него пойдет ток. Говорят, что в трубке загорелся разряд. При этом часть атомов ионизируется, то есть электроны отрываются от ядер и разгоняются электрическим полем. Такие ускоренные электроны сталкиваются с молекулами и разрушают их. При столкновениях между собой атомы опять рекомбинируют в молекулы. Особенно часто это происходит на поверхности стекла, которое служит третьим телом и принимает часть энергии рекомбинации. Поверхностная и объемная рекомбинации определяют динамическое равновесие: за любой промежуток времени число молекул, диссоциированных электронным ударом, равно числу молекул, образовавшихся за счет рекомбинации атомов. При этом число атомов держится на стационарном уровне. Отношение $N_{\text{атомов}}/(N_{\text{атомов}} + N_{\text{молекул}})$ называется степенью диссоциации и может достигать 90 % и более.

Разряд можно устроить более удобным и еще более эффективным способом, если взять высокочастотный генератор (рис. 5, *б*).

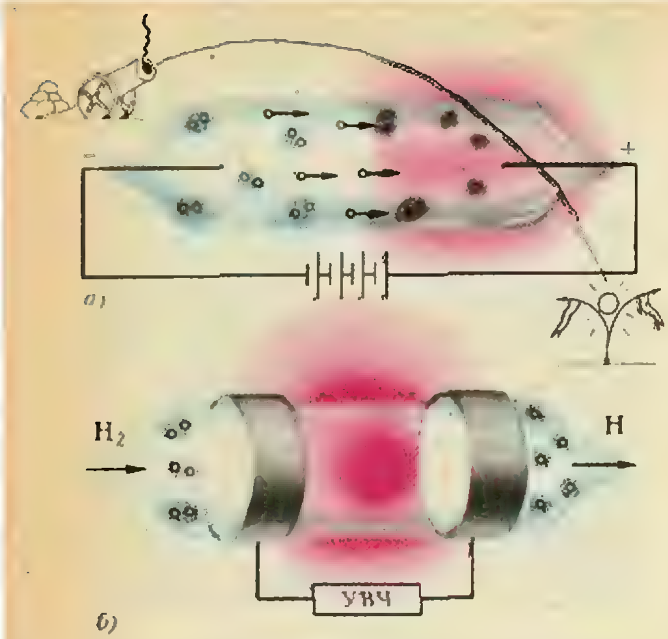


Рис. 5. а) Электроны разгоняются в разрядной трубке сильным электрическим полем и, сталкиваясь с молекулами H_2, разваливают их на атомы.
б) В безэлектродной разрядной трубке переменное поле от высокочастотного генератора мощностью ~ 100 Вт производит почти 100 %-ую диссоциацию. Трубка ярко светится малиновым светом.

Подавая с одного конца трубки молекулярный газ, с другого конца мы можем забирать поток атомарного водорода.

К сожалению, это лишь частичный успех. После выключения разряда за тысячные доли секунды все атомы рекомбинируют. Перед нами встает более сложная задача: как сохранить атомарный водород?

Магнитная ловушка вблизи абсолютного нуля

Внимательно прочитав предыдущие страницы и немного подумав, вы догадаетесь, как в принципе решить поставленную задачу. В самом деле, достаточно устроить так, чтобы все атомы сталкивались в состоянии ↑↑. Как показывает верхний график на рисунке 4, при таких столкновениях молекула вообще не может образоваться. Но как перевести атомарный водород в такое состояние? Ясно: надо включить магнитное поле. Во внешнем поле все атомы водорода — элементарные магнитики — повернутся вдоль поля и не смогут образовывать молекулы. Это все правильно, но... есть много помех. Если по стрелке компаса слегка ударить, то она начнет колебаться, и вы не сможете узнать направление на север, пока стрелка не успокоится. Элементарные магнитики атомов все время подвергаются ударам со стороны других атомов в результате никогда не прекращающегося теплового движения. Поэтому даже в самых сильных магнитах, которые создают поля $B \approx 30$ Тл, при комнатной температуре ($T = 300$ К) магнитные моменты атомов водорода ориентируются по полю и против поля практически с равной вероятностью 1/2. Лишь создав поле в тысячи тесла, мы смогли бы ориентировать атомы при комнатной температуре. Но таких магнитных полей мы создавать не умеем. Зато мы легко можем понизить температуру! Техника получения низких температур $T \lesssim 1$ К сейчас доступна многим лабораториям. К тому же при этих температурах магнит можно сделать из сверхпроводящего провода. Небольшие сверхпроводящие магниты позволяют получать магнитные поля $B \approx 10$ Тл. Наконец мы пришли к правильному техническому решению проблемы хранения атомарного водорода: камера в поле сверхпроводящего магнита при температуре не выше $T \approx 1$ К.

Сверхпроводящий магнит проще всего изготовить, намотав сверхпроводящую проволоку на цилиндрический каркас. Такую катушку еще иначе называют соленоидом. Пропустив по проволоке электрический ток, мы получим магнитное поле, максимальное внутри катушки, где и следует разместить водородную камеру. Помимо ориентации атомов соленоид сыграет еще одну важную роль: он втянет атомные магнитики в область сильного поля (так же, как притягивает стрелку компаса). Поэтому вблизи центра соленоида концентрация ориентированных атомов будет гораздо больше, чем вдали от магнита (рис. 6).

Поляризованный атомарный водород — самый летучий

В первых опытах, поставленных несколько лет назад в Амстердамском университете, была получена и сохранялась в течение нескольких часов концентрация n около 10^{15} атомов

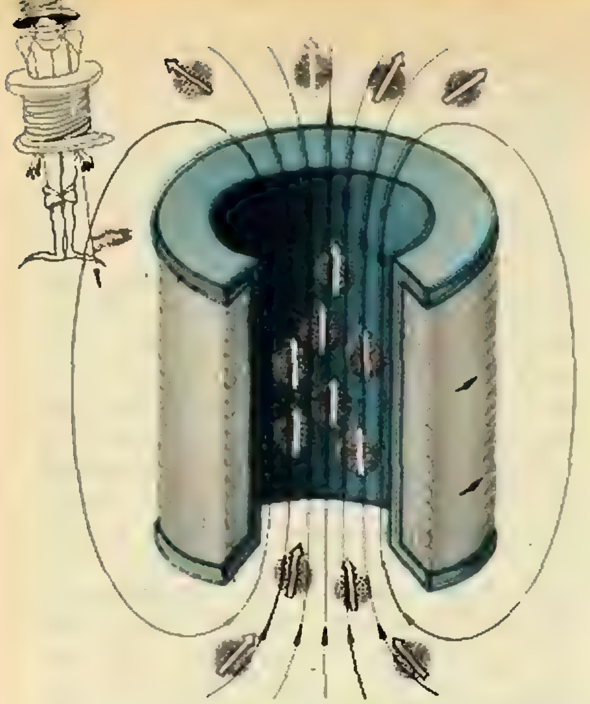


Рис. 6. Цилиндрическая катушка с током (соленоид) создает магнитное поле, которое втягивает магнитные атомы в область сильного поля внутри катушки и поворачивает их магнитные моменты вдоль поля.

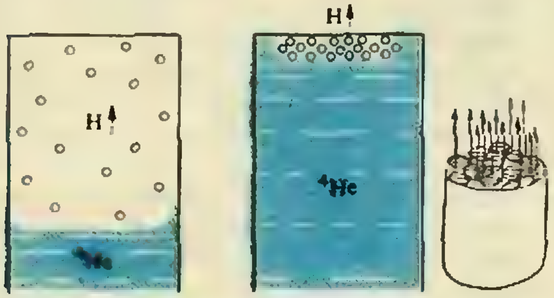


Рис. 7. Сжатие атомарного водорода «поршнем» из жидкого гелия. При очень низких температурах паров гелия практически нет.

водорода в 1 кубическом сантиметре ($n \sim 10^{15}$ см$^{-3}$). Много это или мало? По сравнению с межзвездным газом ($n = 1 \div 10$ см$^{-3}$) это очень много. По сравнению с обычным газом при нормальных условиях это довольно мало. Напомним, что при 0 °С и давлении 1 атм в 1 см^3 газа содержится около $2{,}7 \cdot 10^{19}$ частиц. Так что в первых опытах атомарный водород был весьма разрежен.

Но по мере совершенствования техники концентрация быстро возрастала. Наибольший успех принес простой и хорошо известный прием — сжатие. Все знают, как сжимают воздух в цилиндре с подвижным поршнем. Так же можно сжать и атомарный водород. Но при соприкосновении с поверхностями всех веществ, кроме жидкого гелия, атомы очень быстро рекомбинируют. Поэтому внутреннюю поверхность камеры, в том числе и поршень, покрывают пленкой жидкого гелия. Можно обойтись и без поршня; вернее, использовать в качестве поршня поверхность жидкого гелия. В начале водород заполняет почти весь объем камеры. Поднимая уровень жидкого гелия, газ можно сжать в маленький пузырек и повысить концентрацию H в сотни и тысячи раз (рис. 7). Таким способом год назад удалось достичь рекордной величины $n = 5 \cdot 10^{18}$ см$^{-3}$. Это значение уже сравнимо с плотностью газа при нормальных условиях. Получить больше мешает все та же рекомбинация.

Однако правильно ли сравнивать теплый комнатный воздух с очень холодным атомарным водородом? Конечно, чтобы лучше оценить достигнутое, надо сравнить свойства различных газов при низкой температуре. Эксперименты с атомарным водородом проводились при $T = 0{,}5$ К. Эту температуру мы и выберем для сравнения. Манометрический датчик непосредственно измерял давление p, а концентрация n подсчитывалась по формуле идеального газа. Так, приведенное выше значение для n было получено по измеренной величине давления $p = 35$ Па. Давайте посмотрим, каких давлений можно достичь с другими газами.

Как известно, если сжимать газ при постоянной достаточно низкой температуре, то максимальное давление равно давлению насыщенных паров $p_{н.п.}$ данного вещества. Дальнейшее сжатие не будет увеличивать давление газа, а будет приводить к переходу в жидкую или твердую фазу. При $T = 0{,}5$ К давление насыщенных паров для всех веществ, за исключением гелия, практически равно нулю. Для природного изотопа ^{4}He оно очень мало: $p_{н.п.} = 0{,}002$ Па; для искусственного ^{3}He оно существенно выше: $p_{н.п.} = 21$ Па, но все же меньше рекорда давления атомарного водорода. При таком сравнительном анализе еще большее впечатление производят данные, полученные при понижении температуры. Самая низкая температура, при которой до настоящего времени проводились

(Окончание см. на с. 21)

...„Симметриады" появляются внезапно. Их образование напоминает извержения. Океан вдруг начинает блестеть, как будто несколько десятков квадратных километров его поверхности покрыты стеклом. Через некоторое время стеклянистая оболочка выбрасывается вверх в виде чудовищного пузыря, в котором, искажаясь и преломляясь, отражается весь небосклон, солнце, тучи, горизонт...

Станислав Лем. „Солярис"

Тайны волшебной лампы

Кандидат физико-математических наук
А. А. ВАРЛАМОВ

Фотография, помещенная рядом с эпиграфом, сделана не на Солярисе, не из космического корабля, погружающегося в мрачные глубины атмосферы Юпитера, и не из иллюминатора батискафа, рискнувшего подобраться к извергающемуся подводному вулкану. На ней изображен работающий светильник «Радуга», который, хотя и не всегда, можно купить в магазинах «Подарки». Он таит в себе множество непростых и красивых явлений.

Устройство светильника весьма несложно. Он представляет собой прозрачную цилиндрическую колбу, в основание которой, под стеклянным дном, вмонтирована обычная электрическая лампа. Стекло у дна прикрыто цветным светофильтром, а по его периметру идет металлическая спираль (рис. 1). Колба примерно на 1/6 часть своего объема заполнена воскообразным веществом (о котором мы в дальнейшем будем говорить как о «веществе А»), а затем почти доверху залита прозрачной жидкостью (о ней мы будем говорить как о «веществе Б»). По каким соображениям выбираются эти вещества и какими свойствами они должны обладать, мы выясним чуть позднее, изучая явления, происходящие в светильнике.

Наблюдения лучше всего проводить в темноте, когда «Радуга» служит единственным источником света. Включим же ее в сеть и наберемся терпения. Как мы увидим, события, происходящие в светильнике, можно разбить на несколько фаз. Первую из них мы условно назовем фазой покоя и накопления сил.

Вещество А аморфно, то есть не имеет строго упорядоченной структуры. С повышением температуры оно размягчается и постепенно переходит в жидкое состояние. Отметим важное различие между переходом

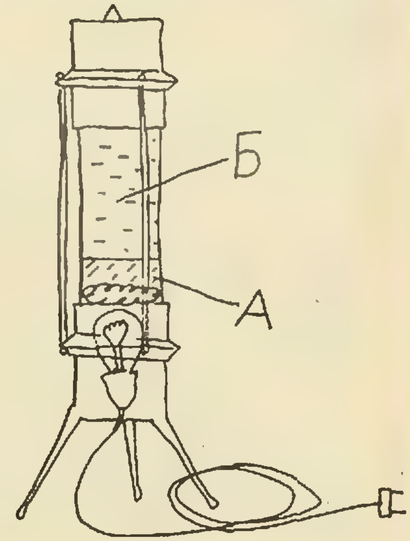
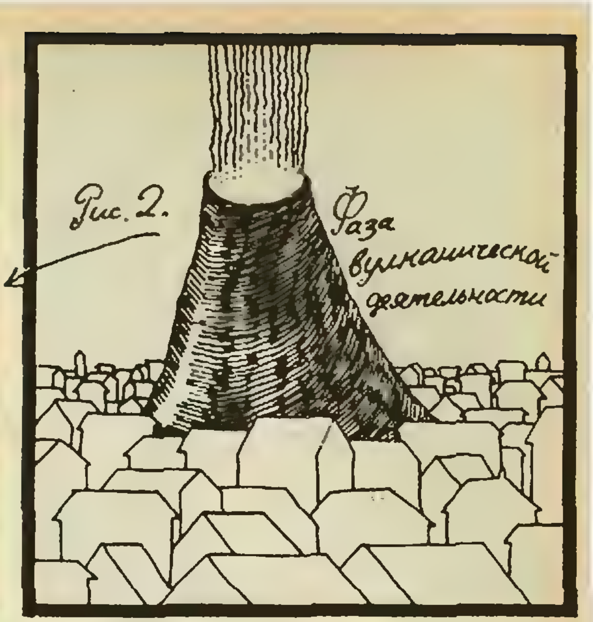


Рис. 1.



в жидкость кристаллического и аморфного веществ. Для первого этот переход происходит лишь при определенной температуре и требует затраты энергии — теплоты плавления, которая расходуется на разрушение кристаллической структуры вещества. Для аморфного же вещества твердое и жидкое состояния принципиально не различаются. Просто с повышением температуры вязкость аморфного вещества уменьшается, и оно становится все более и более текучим.

Включенная в сеть лампочка, освещающая снизу, сквозь светофильтр, красновато-зеленым светом внутренность цилиндра, служит также и источником тепла. На дне возле лампы образуется «горячее пятно» (область повышенной температуры). В этой области вещество А начинает размягчаться, в то время как ни верхняя корка, ни, тем более, жидкость Б прогреться еще не успевают и пока остаются холодными. По мере нагревания все бо́льшая часть вещества А становится жидкой, его твердая корка становится все тоньше и тоньше. Вследствие теплового расширения объем расплавившихся нижних слоев вещества А стремится возрасти, давление под коркой увеличивается, и в какой-то момент жидкость А проламывает твердую корку и пузырями вырывается вверх. На дне как бы заработал вулкан. Фаза покоя и накопления сил завершена — ее сменяет фаза вулканической деятельности (рис. 2).

Вещества А и Б подобраны так, что плотность разогретого жидкого вещества А, вырывающегося из трещины в корке, оказывается несколько меньше плотности еще холодного вещества Б. Поэтому порции вещества А одна за другой всплывают вверх. По дороге в холодной жидкости Б они остывают и, достигая поверхности, отвердевают, принимая самые причудливые формы. При застывании плотность вещества А становится несколько больше плотности жидкости Б, и «осколки» начинают медленно опускаться. Однако некоторые из них надолго зависают у поверхности. Причиной плавания мелких осколков на поверхности может служить сила поверхностного натяжения. Дело в том, что жидкость Б не смачивает вещество А, поэтому действующая на полузатопленные осколки сила поверхностного натяжения направлена вверх и стремится вытолкнуть их из жидкости. Благодаря этому же эффекту удерживаются на поверхности воды водомерки, плавает смазанная жиром стальная игла.

Между тем избыточное давление в нижней части сосуда, под коркой, уже сброшено, края трещины оплавились, и сквозь этот кратер с небольшой скоростью продолжают вытекать очередные порции расплавленного вещества А. Однако теперь они не отрываются ото дна, а медленно вытягиваются из кратера в форме удлиняющейся вверх струи. Поверхность этой струи, соприкасаясь с хо-

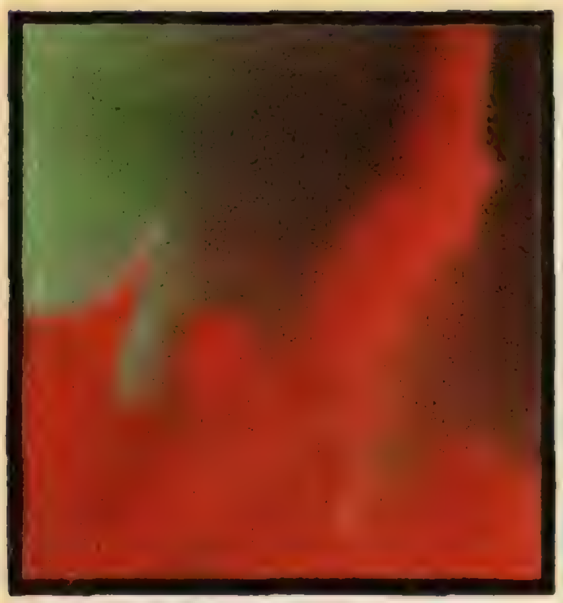
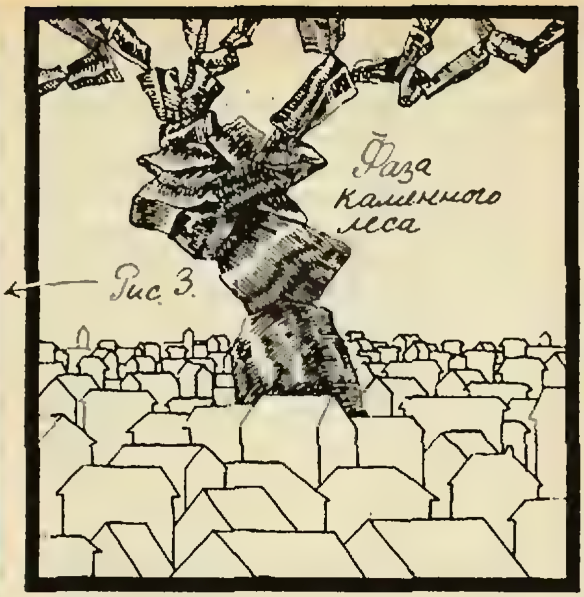


Рис. 3.



лодной жидкостью Б, быстро отвердевает, образуя подобие ствола. Посмотрев на этот ствол «напросвет», вы наверняка удивитесь: он тонкостенный и заполнен внутри ... жидкостью Б. Дело в том, что, когда струя расплавленного вещества А выходит из кратера и устремляется вверх, в какой-то момент для дальнейшего роста ей не достает вещества А. Внутри струи создается разрежение, и где-то на границе образующегося ствола и кратера возникает разлом, в который устремляется холодная жидкость Б. Верхняя же часть струи еще продолжает свое движение вверх. Так жидкость Б заполняет ствол изнутри, охлаждая и формируя его внутренние стенки, после чего они окончательно отвердевают.

В нижней части светильника тем временем по-прежнему идет процесс плавления, и очередной шар расплавленного вещества А выходит из кратера. Он поднимается вверх уже внутри образовавшейся трубки. Поднявшись до ее верхнего конца, он за счет своей еще разогретой массы удлиняет ее. С каждой новой порцией вещества А трубка удлиняется, образуя растущий вверх гофрированный ствол (рис. 3). Рядом с ним, раздвинув опавшие осколки вулканической деятельности, через некоторое время может вырасти еще один или несколько таких стволов. Стволы причудливо переплетаются, подобно стеблям экзотических растений, среди каменных глыб, усеивающих дно, и продолжающих опускаться по мере нагревания жидкости Б осколков. Картина на время замирает. Эту фазу можно назвать фазой каменного леса.

Если в этот момент выключить светильник, то «окаменевший лес» останется в нем неизменным — к первоначальному состоянию светильник сам вернуться не сможет. Однако, несмотря на фейерверк происшедших событий, до рабочего режима мы еще не дошли, поэтому оставим светильник включенным и продолжим наблюдения.

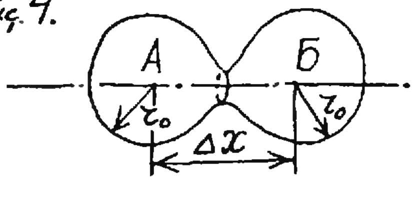
Время идет, жидкость Б прогревается, лежащие на дне осколки начинают оплавляться, а уходящие вверх стволы постепенно оседают вниз. Однако среди бывших осколков вы не увидите расплющенных капель — все они постепенно принимают сферическую форму. В обычных условиях расплющивание капель на несмачиваемой поверхности происходит благодаря силе тяжести. Она противодействует силам поверхностного натяжения, стремящимся придать капле форму шара — тела, поверхность которого при заданном объеме минимальна. В светильнике на каплю кроме силы тяжести и поверхностного натяжения действует сила Архимеда, которая почти полностью компенсирует силу тяжести. Поэтому капля оказывается как бы в состоянии невесомости, и уже ничто не мешает ей принять сферическую форму.

Для одной капли сферическая

форма в состоянии невесомости является энергетически наиболее выгодной. Для двух же или нескольких лежащих рядом и касающихся друг друга капель выгоднее было бы слиться воедино — поверхность одного большого шара меньше, чем общая поверхность нескольких малых с той же полной массой (рассчитайте это самостоятельно), и следовательно, поверхностная энергия у одной большой капли меньше. Однако, взглянув вновь на светильник, вы убедитесь, что там все еще спокойно сосуществуют несколько почти сферических капель вещества А, и пока, кажется, они вовсе не собираются сливаться в одну. А ведь вы, наверное, не раз наблюдали, как ртутные или водяные капли на несмачиваемой поверхности сливаются почти мгновенно. От чего же зависит время слияния двух капель?

Над этим вопросом ученые задумывались довольно давно. Тем более, что он совсем не праздный, а, как оказалось, имеет огромное практическое значение. Так, он непосредственно связан с пониманием физических процессов, происходящих в порошковой металлургии, где спрессованные металлические зерна «спекают» в вещества, обладающие уникальными свойствами. В 1944 году замечательный советский физик Я. И. Френкель предложил простейшую модель такого процесса, в результате чего появилась его пионерская работа, заложившая физические основы порошковой металлургии. Идея, лежащая в основе этой работы, позволит нам оценить время слияния.

Рис. 4.



Пусть две одинаковые жидкие капли начинают соприкасаться. В месте касания образуется перешеек (рис. 4), который постепенно, по мере слияния капель, растет. Для оценки времени слияния τ проще всего воспользоваться энергетическими соображениями. Всего в «активе» у системы двух капель имеется энергия $\Delta E_п$, равная разности поверхностных энергий начального и конечного состояний (то есть двух отдельных капель радиуса r_0 и одной «общей» радиуса r): $\Delta E_п = 8\pi\sigma r_0^2 - 4\pi\sigma r^2$. Так как при слиянии капель их полный объем не меняется, то $\frac{4}{3}\pi r^3 = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi r_0^3$, откуда $r = r_0 2^{1/3}$. Таким образом, $\Delta E_п = 4\pi\sigma(2 - 2^{2/3})r_0^2$. Согласно идее Френкеля, этот избыток энергии должен быть израсходован на работу против сил вязкого трения, возникающих в процессе перемещения вещества капель и окружающей среды при их слиянии. Оценку этой работы мы проведем по порядку величины. Для силы вязкого трения мы воспользуемся выражением Стокса, справедливым для случая шара радиуса R, движущегося со скоростью v в жидкости с вязкостью η: $F = 6\pi\eta R v$. Будем считать, что вязкость $\eta_А$ вещества, из которого состоят капли, гораздо больше вязкости окружающей среды, поэтому в формулу Стокса подставим именно $\eta_А$. Далее, вместо R подставим r_0. Эта же величина характеризует и масштаб перемещения массы жидкости при слиянии капель: $\Delta x \sim r_0$. Таким образом, для работы сил вязкого трения находим:

$$\Delta A \sim 6\pi\eta_А r_0^2 v.$$

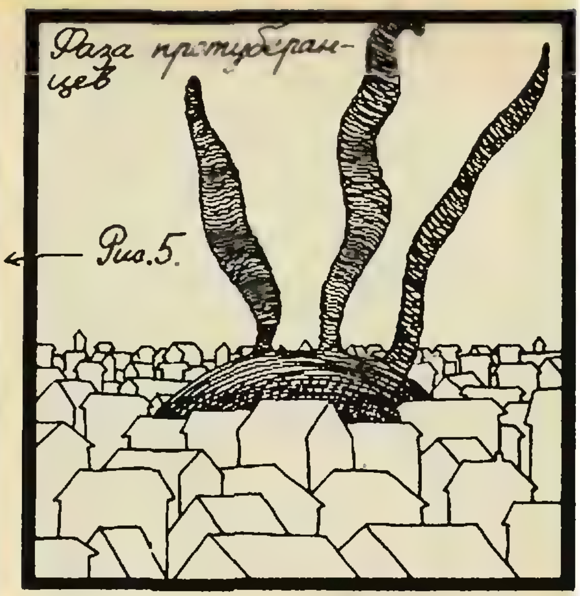
Видно, что чем быстрее капли сливаются, тем больше энергии на это требуется (из-за возрастания сил вязкого трения). Но запас энергии у нас ограничен: $\Delta E_п = 4\pi\sigma(2 - 2^{2/3})r_0^2$. Этим и определяется искомое время слияния капель $\tau_Ф$ (так называемое френкелевское время слияния). Оценивая скорость процесса как $v \sim (r_0/\tau_Ф)$, находим:

$$\Delta A \sim 6\pi\eta_А r_0^3/\tau_Ф \sim 4\pi\sigma(2 - 2^{2/3})r_0^2,$$

откуда

$$\tau_Ф \sim (r_0\eta/\sigma).$$

Для капель воды с $r_0 \sim 1$ см, $\sigma \sim 0{,}1$ Н/м и $\eta \sim 10^{-3}$ кг/(м · с) это время составляет всего лишь 10^{-4} с. Однако для значительно более вязкого глицерина (при 20 °С $\sigma_{гл} \sim 0{,}01$ Н/м, а $\eta \sim 1$ кг/(м · с)) соответствующее время $\tau_Ф$ составит уже ~ 1 с. Для различных жидкостей, в зависимости от их вязкости и поверхностного натяжения, $\tau_Ф$ может меняться в весьма широких пределах.



Важно, что благодаря сильной зависимости вязкости от температуры это время может существенно меняться и для одной и той же жидкости. Так, вязкость глицерина при изменении температуры от 20 °С до 30 °С уменьшается в 2,5 раза. Поверхностное натяжение от температуры зависит гораздо слабее (в указанном диапазоне температур $\sigma_{гл}$ уменьшается всего лишь на несколько процентов). Поэтому можно считать, что зависимость френкелевского времени слияния от температуры определяется именно температурной зависимостью вязкости.

Вернемся теперь к шарам, лежащим на дне светильника. Пока температура жидкости Б не высока, вязкость аморфного вещества А большая. Теперь понятно, что именно по этой причине шары и не сливаются. Точно так же не сольются два восковых шарика, если их при комнатной температуре привести в соприкосновение или даже сдавить. Однако стоит их подогреть, как вязкость воска резко уменьшится, и жидкие шары сольются довольно быстро. Отметим и важную роль состояния поверхности шаров: если она неровная и сильно загрязнена, то перемычке между шарами образоваться трудно.

Слияние капель необходимо для дальнейшего функционирования светильника, и в его конструкции предусмотрен специальный механизм «перелива» вещества А из отдельных капель в уже расплавившуюся основную массу. Это — упоминавшаяся выше металлическая пружина, идущая по периметру дна светильника. Она хорошо разогрета, и при соприкосновении с ней капли вещества А прогреваются, вязкость их падает и они «охотно» втекают в основную массу.

Итак, на дне сосуда образовалась единая жидкая масса вещества А. Однако, благодаря продолжающемуся нагреву, спокойной она оставаться не может. Начинается фаза протуберанцев.

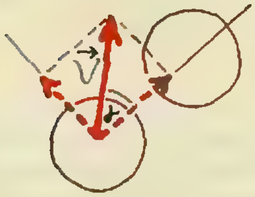
Оторвавшийся от поверхности протуберанец под действием выталкивающей силы медленно уходит вверх (рис. 5), постепенно принимая форму шара. Поднявшись в верхнюю часть светильника, где жидкость Б из-за своей низкой теплопроводности до сих пор не прогрелась, этот шар несколько охлаждается (оставаясь все же жидким) и медленно опускается вниз, на вздувающуюся поверхность. Однако, как мы уже выяснили, влиться в нее ему не так-то просто, и он довольно долго подпрыгивает на ней, постепенно скатываясь к периферии; здесь пружинка «вскрывает» его поверхность, и бывший протуберанец завершает свое путешествие, возвратившись в породившую его стихию.

Лампочка в основании цилиндра продолжает греть систему, и процесс рождения протуберанцев продолжается. По мере повышения температуры темп его нарастает. Отрываясь от поверхности, протуберанцы оставля-

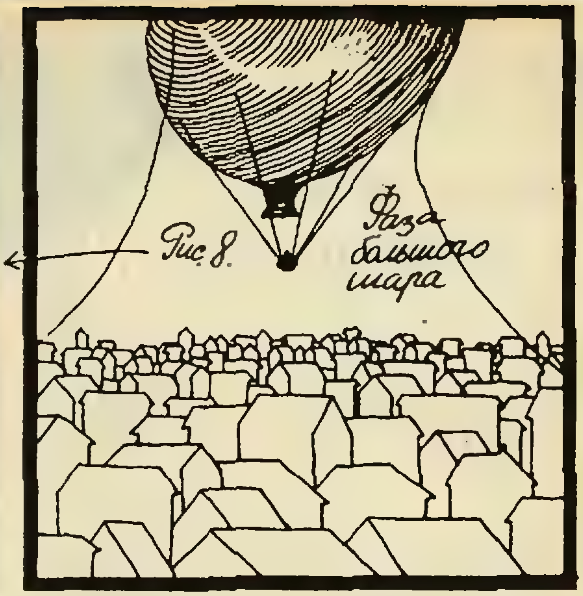
Рис. 6.
Фаза столкновений и катастроф

ют висеть «между небом и землей» одинокие капли, которые никак не решат — то ли им устремиться вдогонку, то ли вернуться в родную стихию. И вот уже в цилиндре одновременно находится до десятка жидких шаров, одни из которых поднимаются вверх, другие опускаются вниз (рис. 6) — начинается фаза столкновений и катастроф. Именно эта, наиболее длительная и зрелищная фаза, рассматривается создателями как рабочий режим светильника.

Шары в светильнике сталкиваются, меняют направление своего движения, но вам не удастся наблюдать их слияние в процессе такого соударения. Как мы уже выяснили, шарам выгоднее (с энергетической точки зрения) слиться воедино. Но на это нужно время. Понятно, что время, которое им «отпущено»,— это время соударения t. Если $\tau_ф$ больше t — шары не успеют слиться и разойдутся. Чем же определяется время соударения? В светильнике в основном происходят косые удары (рис. 7), при которых размягченные шары, легко деформируясь, скользят один по другому. В этом случае характерное время соударения $t\sim(r_0/v)$. Скорость шаров в светильнике всего несколько сантиметров в секунду, радиусы шаров — несколько сантиметров. Так что $t\sim1$ с, и за такое время шары слиться не успевают. Вот и приходится им «бродить» в светильнике, на время залегая на дне, повисая вверху, сталкиваясь, но не сливаясь.



Фаза столкновений и катастроф длится очень долго, 5—7 часов. По прошествии этого времени инструкция рекомендует выключить светильник. Однако при определенных (достаточно высоких) температурах окружающего воздуха эта фаза может оказаться не последней. После того как в светильнике устанавливается стационарное распределение температуры по высоте (вся жидкость Б окончательно прогревается), плотности веществ А и Б практически сравниваются. Все вещество А собирается в один большой шар, который зависает у дна, оголив светофильтр. Со временем этот шар, из-за касания со стенками цилиндра, несколько остывает, его плотность немного увеличивается и он медленно опускается на дно. Коснувшись дна, шар получает дополнительную порцию тепла и возвращается на прежнее место. Здесь он замирает до тех пор, пока снова не остынет, после чего описанный процесс повторяется. Эту, не предусмотренную инструкцией, фазу можно назвать фазой большого шара (рис. 8).



Давайте теперь, разобравшись во многих деталях поведения светильника, взглянем на это явление в целом. Напрашивается вопрос: почему вообще возникают эти непрерывно сменяющие друг друга, повторяющиеся процессы рождения, столкновений и гибели шаров? Понятно, что вся «движущая сила» процесса заключена в разности температур между верхним и нижним концами лампы («нагревателем» и «холодильником»). Если предположить, что поток тепла распространяется благодаря теплопроводности жидкости Б, то ее температура будет просто плавно меняться по высоте и ничего необычного в системе происходить не будет. Появление шаров, так же как и конвекция, является следствием неустойчивостей, возникающих при определенных условиях в системах, в которых из-за разности температур на границах распространяются потоки тепла.*) Отысканием общих закономерностей таких явлений занимается новая, бурно развивающаяся наука — синергетика.

---

*) Рассмотрению подобных вопросов посвящена статья «Конвекция и самоорганизующиеся структуры», опубликованная в «Кванте» № 9 за 1985 год.

Намагниченный атомарный водород

(Начало см. на с. 8)

эксперименты с атомарным водородом, была $T \approx 0{,}2$ К. При этой температуре было достигнуто давление атомарного водорода лишь $p=4$ Па. Но для очень холодного газа это огромная величина. В самом деле, при столь низкой температуре ^{4}He имеет пренебрежимо малое давление $p_{\text{н.п.}} \approx 10^{-14}$ Па, да и наиболее летучий ^{3}He уже практически весь вымерз и дает всего лишь $p_{\text{н.п.}} \approx 0{,}001$ Па.

Итак, экспериментальная физика достигла большого успеха. Получено новое вещество — газ, создающий сравнительно высокое давление при очень низких температурах. Это вещество получило обозначение $\mathrm{H}\downarrow$, где стрелка у символа водорода напоминает, что атомы находятся в сильном магнитном поле и их магнитные моменты направлены вдоль поля. Вещество полностью намагничено. Сравнение цифр для давления показывает, что намагниченный атомарный водород $\mathrm{H}\downarrow$ — самое летучее вещество в природе. Теория предсказывает, что при не очень больших давлениях $\mathrm{H}\downarrow$ останется газом вплоть до абсолютного нуля. Лишь при давлениях в несколько десятков атмосфер он может сконденсироваться. Так ли это, покажут будущие эксперименты.

Ионы в растворах

Е. Э. КОЛОМЕЙЦЕВ

> *Я в течение всей моей жизни не забуду, когда я впервые узнал имя Сванте Аррениуса. Это было в июне 1884 года, когда мне попала в руки его работа. Было слишком трудно ее сразу одолеть, и я провел лихорадочную ночь со скверными снами. То, что было написано в работе, настолько отличалось от привычного и известного, что я сначала был склонен все в целом принять за бессмыслицу.*
>
> В. Оствальд

Слова, приведенные в эпиграфе, относятся к одной из первых работ по электролитической диссоциации известного шведского физико-химика С. Аррениуса. Несколько позже за создание теории этого явления Аррениус был удостоен Нобелевской премии.

Под электролитической диссоциацией понимают распад молекул растворяемого вещества на положительные и отрицательные ионы под влиянием электрического поля молекул растворителя. Растворы, в которых такой процесс произошел и потому они способны проводить электрический ток, называют электролитами.

На рисунке 1 изображен простейший прибор, с помощью которого можно определить, является данный раствор электролитом или нет. Прибор состоит из батарейки, лампочки для карманного фонаря и двух электродов, например графитовых стержней. Если при опускании электродов в раствор лампочка загорается, значит, исследуемый раствор — электролит.

Опыт 1. Приготовим растворы

Автор этой статьи Евгений Коломейцев — ученик 10 класса московской средней школы.

поваренной соли, сахара, уксуса и соды в воде. Исследуем каждый из них на проводимость электрического тока. Мы увидим, что растворы соли и соды хорошо проводят ток, уксус проводит гораздо хуже, а раствор сахара совсем не проводит электрический ток.

Теперь повторим один из опытов Аррениуса по электропроводности растворов. Для этого нам понадобится уксусная эссенция (Осторожно! Берегитесь ожога!) и прибор, с которым мы проводили предыдущий опыт. Только вместо одной батарейки лучше взять две, соединенные последовательно.

Опыт 2. Нальем в стакан немного уксусной эссенции и замкнем цепь. Лампочка не горит. Теперь будем наливать в стакан воду, одновременно следя за лампочкой. Мы увидим, что в какой-то момент лампочка загорится и затем будет светиться все ярче и ярче. Наблюдая это явление, Аррениус пришел к выводу, что молекулы воды «разрывают» молекулы растворенного вещества на ионы, и чем больше первых (то есть чем разбавленней раствор), тем больше носителей электричества появляется в растворе.

Говоря о ионах, мы должны хорошо представлять их поведение в растворах. Попробуем, например, установить на опыте скорость перемещения ионов.

Опыт 3. Возьмем блюдце или мелкую тарелку. Положим на дно промокашку, смоченную в растворе поваренной соли, и поверх промокашки насыплем кристаллики марганцовокислого калия. На противоположных концах укрепим два графитовых электрода и подключим их к источнику (к двум батарейкам, соединенным последовательно). Кристаллики начнут растворяться, и мы увидим, что в сторону положительного электрода потянутся малиновые язычки. Измерив скорость их передвижения, что нетрудно сделать с помощью часов и линейки, можно оценить скорость перемещения ионов в растворе. Понятно, что она будет зависеть от многих факторов, и прежде всего — от напряжения источника. Для сравнения приведем несколько значений средней скорости движения ионов под действием электрического поля, напряженность которого равна единице (такую скорость называют подвижностью ионов):

ионы	подвижность (в м²/(В · с))
H^+	$32 \cdot 10^{-8}$
Na^+	$4,5 \cdot 10^{-8}$
Cl^-	$6,5 \cdot 10^{-8}$
NO_3^-	$6,4 \cdot 10^{-8}$

Скорость ионов зависит также от температуры и от концентрации раствора. Попробуйте убедиться в этом самостоятельно.

Действие электрического тока не проходит для электролита бесследно. Оно вызывает необратимые химические изменения в нем.

Опыт 4. Приготовим раствор поваренной соли, добавим в него несколько капель фенолфталеина и опустим концы электродов, соединенных с полюсами батарейки. Через некоторое время у отрицательного электрода раствор окрасится в малиновый цвет. Это свидетельствует о том, что в растворе появилась щелочь, то есть произошла химическая реакция.

Действительно, при замыкании цепи положительные ионы натрия Na^+ начали двигаться к катоду, а отрицательные ионы хлора Cl^- — к аноду. На катоде происходит реакция восстановления натрия

$$Na^+ + e^- = Na_0,$$

который тут же реагирует с водой, в результате чего и образуется щелочь:

$$2Na + 2H_2O = 2NaOH + H_2\uparrow.$$

На аноде в это время происходит другой процесс — образование газообразного хлора:

$$2Cl^- - 2e^- = Cl_2\uparrow.$$

Вот почему этот опыт надо проводить в хорошо проветриваемом помещении

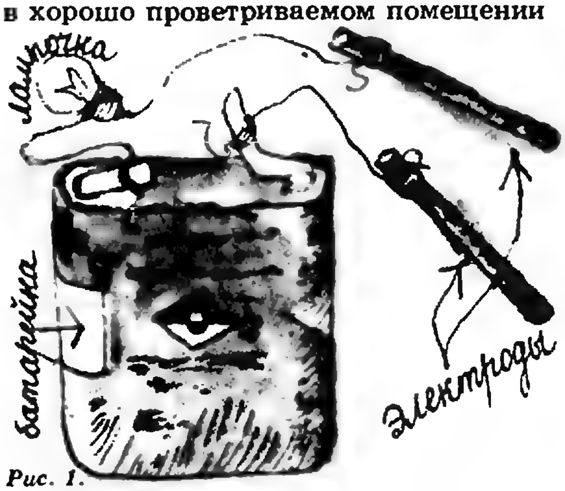


Рис. 1.

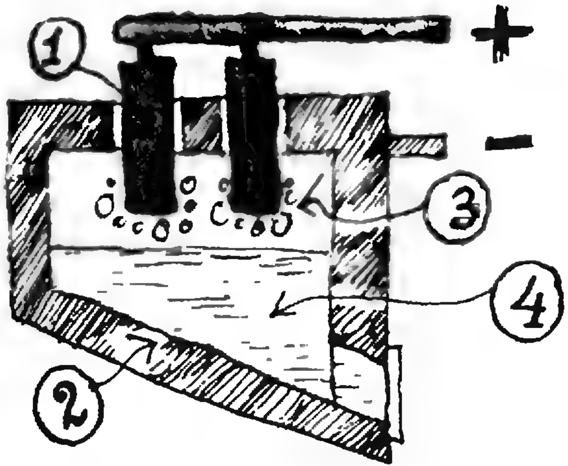


Рис. 2. Схема промышленной установки (электролизера) для получения чистого алюминия: 1 — графитовый анод, 2 — железный с графитовой обкладкой катод, 3 — расплав оксида алюминия и криолита, 4 — чистый алюминий.

и стараться закончить его как можно быстрее.

Итак, при прохождении электрического тока через электролиты (их называют также проводниками второго рода, в отличие от проводников первого рода, например металлов, в которых носителями тока являются свободные электроны) в них происходят химические превращения. В результате вещества, входящие в состав электролита, могут выделяться в свободном виде. Такое явление называют электролизом.

Электролиз находит большое практическое применение. Прежде всего — для получения чистых металлов. Так, например, можно получать магний, натрий, алюминий. В настоящее время весь промышленный алюминий получают в специальных установках — электролизерах (рис. 2) — электролизом расплава смеси оксида алюминия (Al_2O_3) и криолита (Na_3AlF_6). При этом на катоде происходит следующая реакция:

$$Al^{3+} + 3e^- = Al^0.$$

Понятно, что алюминий мы получать не будем, но немного меди получить попробуем.

Опыт 5. Приготовим концентрированный раствор сульфата меди ($CuSO_4$) и опустим в него два графитовых электрода, подключенных к полюсам батарейки. Через некоторое время на катоде появится красный налет меди:

$$Cu^{2+} + 2e^- = Cu^0.$$

Давайте станем на несколько минут алхимиками и попробуем один металл «превратить» в другой. Для этого повторим предыдущий опыт, только вместо отрицательного электрода опустим в раствор алюминиевую пуговицу (например, от школьной формы). В процессе электролиза вместо алюминиевой «получится» медная пуговица.

Покрытие предметов слоем металла при помощи электролиза называется гальваностегией. Металлизовать можно не только металлические предметы, но и предметы из дерева, ткани. При достаточной аккуратности вы сможете изготовить изделие, не уступающее по красоте ювелирному. Так, например, можно покрыть слоем меди листья растений, кружева, мертвых насекомых. Для того чтобы сделать их жесткими, надо подержать их несколько минут в расплавленном воске. Затем равномерно покрыть слоем графита, чтобы сделать их проводящими, и опустить в гальваническую ванну.

Теперь займемся другой, не менее интересной работой — изготовлением гальванопластических копий. В качестве оригинала можно взять какое-нибудь рельефное изображение, например из гипса, или изготовить его самим из парафина. Чтобы получить медную копию, надо сначала тщательно натереть поверхность оригинала графитовым порошком, а потом обмотать его тонкой медной проволокой так, чтобы она касалась графитового слоя. Проволоку нужно присоединить к отрицательному полюсу батарейки и заготовленную форму погрузить в 20-процентный раствор медного купороса. Дальше процесс происходит так же, как и при получении медного покрытия. Когда толщина слоя меди достигнет 1—2 миллиметров, форму из раствора следует вынуть и осторожно отделить от нее металлическую копию.

Способ электролитического получения металлических копий открыл русский ученый Б. С. Якоби. Гальванопластика сразу же нашла широкое практическое применение. В частности — в полиграфической промышленности, что позволило значительно повысить качество печати текста и иллюстраций. Сам Якоби много сделал для внедрения гальванопластики в типографское и монетное дело, а также для производства художественных изделий. И в настоящее время области применения гальванопластики в технике обширны и разнообразны.

Об одном способе задания окружности

И. Б. ТАБОВ (НРБ)

Как известно, окружность определяется как геометрическое место точек, одинаково удаленных от фиксированной точки O. Но существует и много других способов задания окружности. Мы рассмотрим здесь один из них.

Пусть P — точка, l — исходящий из нее луч. Отметим на луче m, также исходящем из точки P и образующем с лучом l острый или прямой угол φ, точку M, находящуюся от P на расстоянии $a\cos\varphi$, где a — фиксированное положительное число (рис. 1).

Теорема. *При изменении угла φ в промежутке от $-\pi/2$ до $\pi/2$ точки M составляют окружность диаметра a, проходящую через точку P и симметричную относительно луча l.*

(Со знаком «плюс» мы откладываем углы в направлении против часовой стрелки, со знаком «минус» — в направлении по часовой стрелке.)

Доказательство. Пусть R — точка нашей окружности, диаметрально противоположная точке P, и пусть M — произвольная точка нашей окружности (рис. 2). Тогда $\angle PMR=\pi/2$, и значит,

$$PM=PR\cdot\cos(\angle MPR)=a\cos\varphi.$$

(Случаи $M=R$ ($\varphi=0$) и $M=P$ ($\varphi=\pm\pi/2$) требуют, строго говоря, отдельного рассмотрения, которое мы оставляем читателю.) Таким образом, все точки окружности принадлежат нашему геометрическому месту, а так как окружность пересекает каждый луч m, то никаких других точек рассматриваемое геометрическое место не содержит. Теорема доказана.

Заметим, что если в описании геометрического места выражение $a\cos\varphi$ заменить выражением $a\cos(\varphi+\delta)$ (и, конечно, условие, что угол φ — острый или прямой, заменить условием, что $\cos(\varphi+\delta)\geqslant 0$), мы получим окружность диаметра a, проходящую через точку P и симметричную относительно луча, составляющего с l угол δ (рис. 3).

Наконец, если вместо выражения $a\cos\varphi$ написать выражение $a\sin\varphi$ (и условие $\sin\varphi\geqslant 0$), то мы получим окружность диаметра a, касающуюся луча l в точке P (рис. 4).

Продемонстрируем полезность нашего наблюдения на решении одной нестандартной задачи.

Задача 1. *Дан равнобедренный прямоугольный треугольник $A_0A_1A_2$ с прямым углом при вершине A_0. Для произвольной точки C на описанной вокруг треугольника $A_0A_1A_2$ окружности отметим на луче A_0C такую точку M, что*

$$A_0M=A_1C+A_2C-A_0C.$$

Найдите геометрическое место точек M.

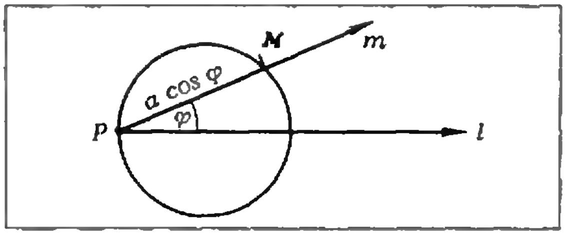


Рис. 1.

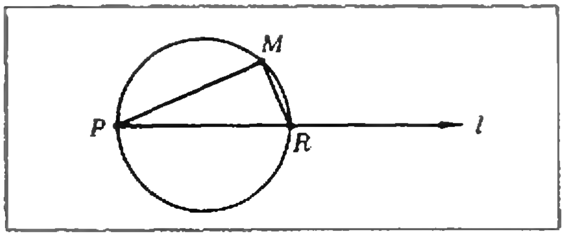


Рис. 2.

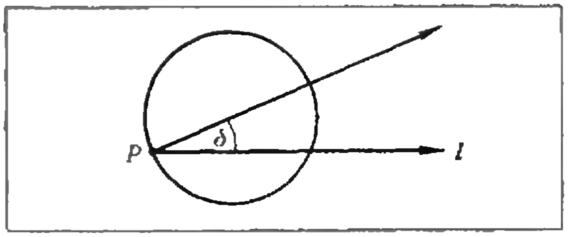


Рис. 3.

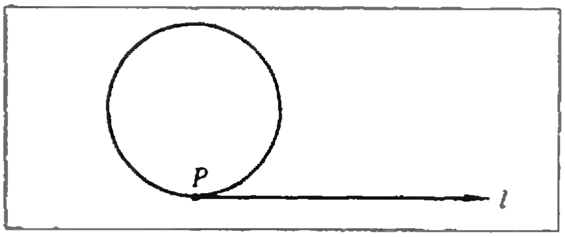


Рис. 4.

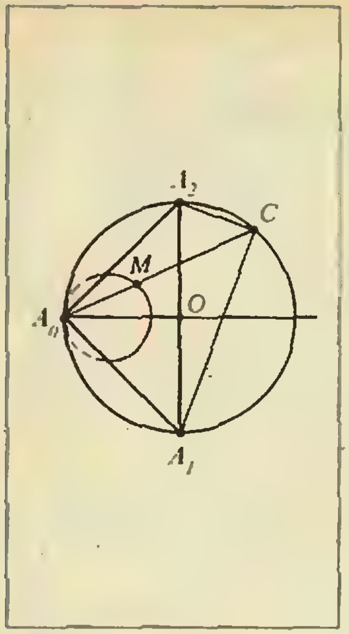


Рис. 5.

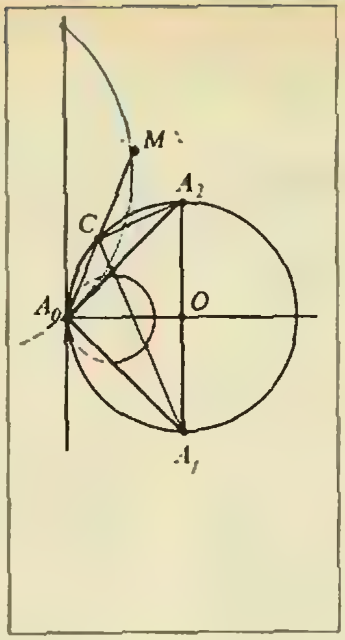


Рис. 6.

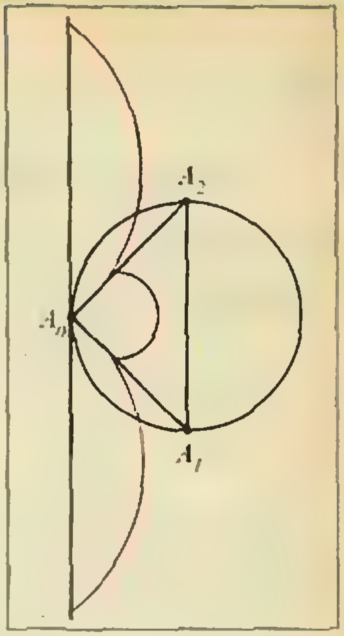


Рис. 7.

Решение. Примем диаметр нашей окружности за 1 и обозначим через φ угол CA_0O, где O — центр окружности. Тогда, очевидно (рис. 5),

$$A_0C=\cos\varphi,$$
$$A_1C=|\sin(\varphi+\pi/4)|,$$
$$A_2C=|\sin(\varphi-\pi/4)|.$$

Рассмотрим три случая.

1. $-\pi/4\leqslant\varphi\leqslant\pi/4$. Тогда

$$A_0M=\sin(\varphi+\pi/4)-\sin(\varphi-\pi/4)-\cos\varphi=\sqrt{2}\cos\varphi-\cos\varphi=(\sqrt{2}-1)\cos\varphi.$$

Таким образом, соответствующая часть геометрического места будет *дугой окружности диаметра* $\sqrt{2}-1$, *проходящей через точку* A_0 *и симметричной относительно луча* A_0O (рис. 5). Поскольку угол φ пробегает промежуток $[-\pi/4;\ \pi/4]$ длин $\pi/2$ (а не π, как выше), мы получаем, что эта дуга равна полуокружности диаметра $\sqrt{2}-1$ (на рисунке 5 она выделена красным цветом).

2. $\pi/4<\varphi<\pi/2$. Тогда

$$A_0M=\sin(\varphi+\pi/4)+\sin(\varphi-\pi/4)-\cos\varphi=\sqrt{2}\sin\varphi-\cos\varphi=$$
$$=\sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\varphi-\sqrt{\frac{1}{3}}\cos\varphi\right)=\sqrt{3}\cos(\varphi+\delta),$$

где $\delta=\arccos\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$. Таким образом, соответствующая этим значениям φ часть геометрического места будет *дугой окружности диаметра* $\sqrt{3}$, *проходящей через точку* A_0 *и симметричной относительно луча, проходящего через* A_0 *и образующего с лучом* A_0O *указанный угол* δ. Впрочем, для построения этой окружности можно этот угол и не вычерчивать: достаточно заметить, что нужная нам окружность проходит через ту же точку луча A_0A_2, что и предыдущая окружность (рис. 6). Поскольку в данном случае длина промежутка изменения φ равна $\pi/4$, нужная нам дуга составляет **четверть** вышеупомянутой окружности диаметра $\sqrt{3}$ (мы показали ее на рисунке 6 синим цветом), причем точка этой окружности, соответствующая значению $\varphi=\pi/2$, нашему геометрическому месту не принадлежит.

3. $-\pi/2<\varphi<-\pi/4$. Этот случай симметричен случаю 2, и ответ симметричен предыдущему ответу относительно луча A_0O.

Окончательный **ответ** к задаче 1 изображен на рисунке 7.

Задача 2. Дан многоугольник $A_0A_1A_2\ldots$ $\ldots A_n$, вписанный в окружность c. Для произвольной точки C окружности c отметим на луче A_0C такую точку M, что

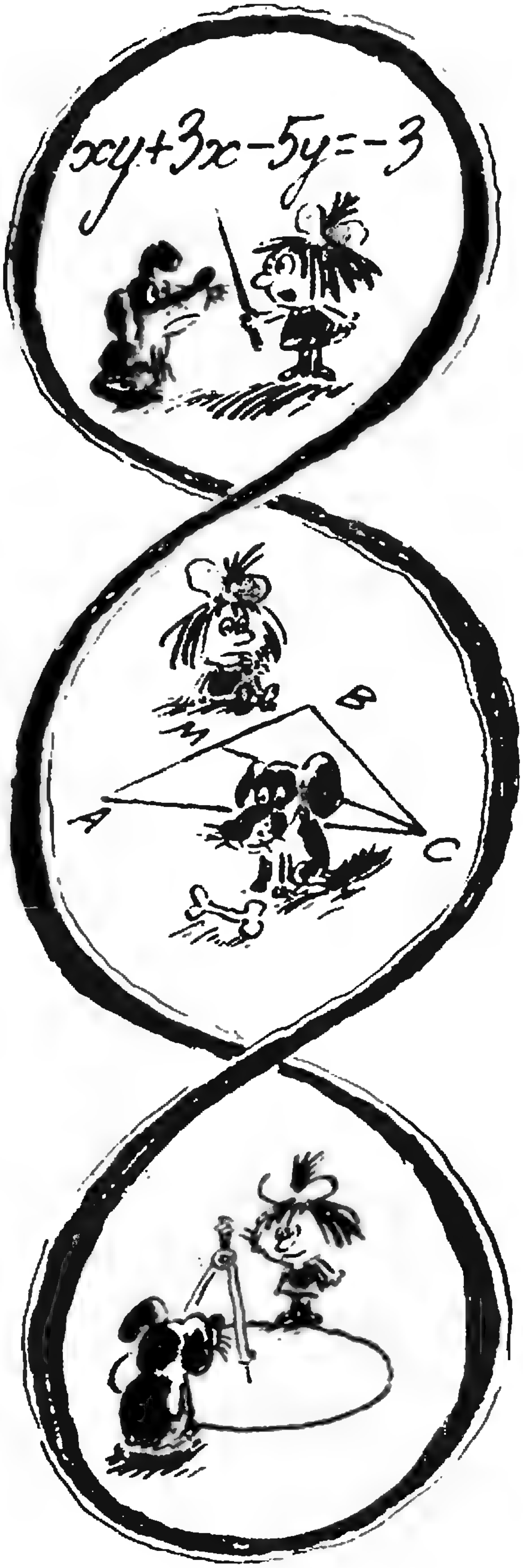
$$A_0M=|x_0\cdot A_0C+x_1\cdot A_1C+\ldots+x_n\cdot A_nC|,$$

где $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — некоторые числа.

Найдите множество, которое описывает точка M, когда C пробегает окружность c.

Задача 3 (это — задача М853 из «Задачника «Кванта», см. «Квант», 1984, № 3). Квадрат $ABCD$ вращается вокруг своего неподвижного центра. Найдите множество, которое описывает середина отрезка PQ, где P — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на неподвижную прямую l, а Q — середина стороны AB.

КВАНТ для младших школьников



Задачи

1. Решите в целых числах уравнение

$$xy+3x-5y=-3.$$

2. Все точки некоторой окружности произвольным образом окрашены в два цвета. Докажите, что найдется равнобедренный треугольник с одноцветными вершинами, вписанный в эту окружность.

3. К сумме цифр двузначного числа A прибавили квадрат этой суммы и получили число A. Найдите, чему равно A.

4. Пусть CM — медиана треугольника ABC. Известно, что $\angle CAB+\angle MCB=90^\circ$. Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный или равнобедренный.

5. На окружности радиуса 10 расположены несколько непересекающихся дуг общей длины 32. Докажите, что для любой прямой найдется хорда окружности, параллельная этой прямой, концы которой принадлежат двум таким дугам.

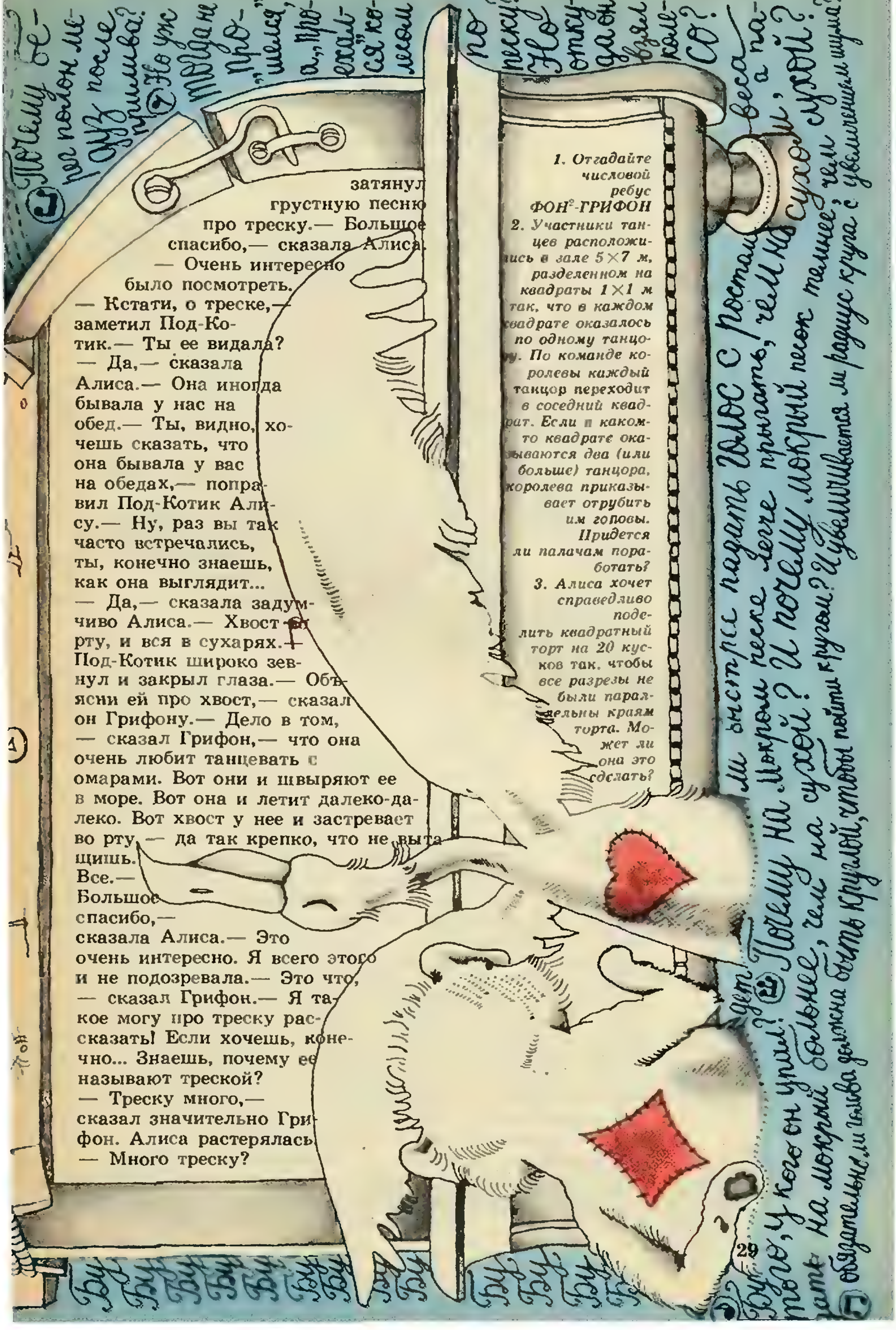
Эти задачи нам предложили *А. П. Савин* и болгарские авторы *К. Коларов, И. Тонов, С. Савчев, И. Проданов.*

Морская кадриль

Если морская кадриль — это что-то вроде: „Под-Котик подставил под ножку подушку; Под-Котик подбросил Под-Кошку-подружку; Под-Мышку, подложку, подкову, поднос Под-Котик Под-Кошке в подарок поднёс", то на что она больше похожа — на морское танго или морской вальс? И вообще, от какого из этих танцев бегут самые сильные волны?

Обязательно ли идентичные симптомы состояния Под-Котика при застрявшей в горле кости и при удушении рыданиями требуют аналогичного способа выхода из него — битья по спине?

Под-Котик глубоко вздохнул и вытер глаза. Он, видно хотел что-то сказать, но его душили рыдания. — Ну, прямо словно кость у него в горле застряла,— сказал Грифон. И принялся трясти Под-Котика и бить его по спине. Наконец Под-Котик заговорил: — Ты, должно быть, никогда не видала живого омара... — За-то я его пробова...—начала Алиса, но спохватилась и покачала головой. — Нет, не видала.— Значит, ты не имеешь понятия, что такое морская кадриль с омарами.— Нет, не имею,— вздохнула Алиса.— А что это за танец? — Прежде всего,— начал Грифон,— все выстраиваются в ряд на морском берегу...— В два ряда! — закричал Под-Котик.— Тюлени, лососи, морские черепахи и все остальные. И как только очистишь берег от медуз... — А это не так-то просто,— вставил Грифон.— Делаешь сначала два шага вперед...— продолжал Под-Котик.— Взяв подручку омара! — закричал Грифон.— Конечно,— подтвердил Под-Котик.— Делаешь два прохода вперед, кидаешься на партнеров...— Меняешь омаров и возвращаешься назад тем же порядком,— закончил Грифон.— А потом,— продолжал Под-Котик,— швыряешь...— Омаров! — крикнул Грифон, — Подальше в море...— Плывешь за ними! — завопил Грифон. — Кувыркаешься разок в море! — воскликнул Под-Котик и прошелся колесом по песку. Вот и вся первая фигура,— сказал Под-Котик внезапно упавшим голосом.— Это, должно быть, очень красивый танец,— заметила Алиса.— Вставай,— приказал Грифону Под-Котик.— Покажем ей первую фигуру.— И они заплясали. Под-Котик



затянул грустную песню про треску.— Большое спасибо,— сказала Алиса.— Очень интересно было посмотреть.

— Кстати, о треске,— заметил Под-Котик.— Ты ее видала?

— Да,— сказала Алиса.— Она иногда бывала у нас на обед.— Ты, видно, хочешь сказать, что она бывала у вас на обедах,— поправил Под-Котик Алису.— Ну, раз вы так часто встречались, ты, конечно знаешь, как она выглядит...

— Да,— сказала задумчиво Алиса.— Хвост во рту, и вся в сухарях.— Под-Котик широко зевнул и закрыл глаза.— Объясни ей про хвост,— сказал он Грифону.— Дело в том, — сказал Грифон,— что она очень любит танцевать с омарами. Вот они и швыряют ее в море. Вот она и летит далеко-далеко. Вот хвост у нее и застревает во рту,— да так крепко, что не вытащишь. Все.— Большое спасибо,— сказала Алиса.— Это очень интересно. Я всего этого и не подозревала.— Это что, — сказал Грифон.— Я такое могу про треску рассказать! Если хочешь, конечно... Знаешь, почему ее называют треской?

— Треску много,— сказал значительно Грифон. Алиса растерялась.

— Много треску?

1. Отгадайте числовой ребус

ФОН^2-ГРИФОН

2. Участники танцев расположились в зале 5×7 м, разделенном на квадраты 1×1 м так, что в каждом квадрате оказалось по одному танцору. По команде королевы каждый танцор переходит в соседний квадрат. Если в каком-то квадрате оказываются два (или больше) танцора, королева приказывает отрубить им головы. Придется ли палачам поработать?

3. Алиса хочет справедливо поделить квадратный торт на 20 кусков так, чтобы все разрезы не были параллельны краям торта. Может ли она это сделать?

Почему берег полон медуз после прилива? Но уж тогда не „прошелся", а „проехался" колесом по песку? Но откуда он взял колесо?

…дет ……ли быстрее падать голос с постам… веса того, у кого он упал? Почему на мокром песке легче прыгать, чем на сухом, а падать на мокрый больнее, чем на сухой? И почему мокрый песок темнее, чем сухой?

♫ обязательно ли голова должна быть круглой, чтобы пойти кругом? И увеличивается ли радиус круга с увеличением шума?

Бу Бу Бу Бу Бу Бу Бу Бу Бу

Бу Бу Бу Бу Бу

— переспросила она с недоумением.— Ну да,— подтвердил Грифон.— Рыба она так себе, толку от нее мало, а треску много. — Очень любит поговорить, — продолжал Грифон.— Другой такой трещотки не сыщешь! И друзей себе таких же подобрала. Ходит к ней один старичок Судачок. С утра до ночи судачит. А еще Щука забегает — так она всех щучит. Бывает и Сом — этот во всем сомневается... А как соберутся все вместе, такой подымут шум, что голова кругом идет. Тут Под-Котик открыл глаза.— Ну, хватит об этом,— проговорил он.— Расскажи теперь ты про свои приключения.— Я с удовольствием расскажу все, что случилось со мной сегодня с утра,— сказала неуверенно Алиса.— А про вчера я рассказывать не буду, потому что тогда я была совсем другая.— Объясни, какая, — сказал Под-Котик.— Нет, сначала приключения,— нетерпеливо перебил его Грифон.— Объяснять очень долго.— И Алиса начала рассказывать все, что с нею случилось с той минуты, как она увидела Белого Кролика. Сначала ей было немножко не по себе: Грифон и Под-Котик придвинулись к ней так близко и так широко раскрыли глаза и рты. Но потом она осмелела. Грифон и Под-Котик молчали, пока она не дошла до встречи с Синей Гусеницей и попытки прочитать ей «Папу Вильяма». Тут Под-Котик глубоко вздохнул и сказал: — странно! — Страннее некуда! — подхватил Грифон.— Все слова не те,— задумчиво произнес Под-Котик. — Хорошо бы она нам что-нибудь почитала. Вели ей начать. И он посмотрел на Грифона, словно тот имел над Алисой власть.— Встань и читай «Это голос Лентяя»,— приказал Алисе Грифон. Она встала и начала читать. Но мысли ее были так заняты омарами и морскою кадрилью, что она и не знала, что говорит. Слова получились, действительно, странные. Это голос Омара. Вы слышите крик? — Вы меня разварили! Ах, где мой парик? И поправивши носом жилетку и бант, он идет на носочках, как лондонский франт. Если отмель пустынна и тихо кругом, он кричит, что акулы ему нипочем. Но лишь только вдали заприметит акул, он забьется в песок и кричит караул? — Совсем не похоже на то, что читал я в школе, — заметил Грифон — это ужасный вздор! — Алиса ничего не сказала; она села и закрыла лицо руками; ей уж и не

4. Алиса однажды сказала Грифону: «Когда Под-Котику было столько, сколько нам с тобой вместе, то тебе было столько, сколько мне сейчас. А когда ему было столько, сколько тебе сейчас, то тебе тогда было...» Сколько лет тогда было Грифону?

12*4* делилось на 72.

Полюс и поляра относительно окружности

С. Ц. ХАРАЛАМПИЕВ (НРБ)

От редакции. В этой заметке рассказано об очень красивых задачах, решаемых с помощью понятий полюса и поляры относительно окружности. Болгарские школьники знакомы с этими понятиями, которые, однако, не входят в программы школ в СССР. Поэтому редакция предпослала заметке небольшое введение об основных свойствах полюса и поляры.

Введение: полюс, поляра и их свойства

Две точки P и Q называются *сопряженными* относительно окружности (k), если окружность с диаметром PQ ортогональна окружности (k) (рис. 1). Множество всех точек, сопряженных точке P относительно окружности $k(O;\ r)$, называется *полярой* точки P относительно (k). Далее мы зафиксируем окружность $k(O;\ n)$, и поэтому будем опускать слова «относительно (k)».

Свойство I (*построение поляры*). Поляра точки P является прямой; она может быть построена так, как показано на рисунке 2. Если прямая l служит полярой для точки P, говорят еще, что P является *полюсом* прямой l.

Свойство II (*построение полюса*). У любой прямой, не проходящей через центр окружности, имеется единственный полюс; он может быть построен так, как показано на рисунке 3.

Свойство III (*взаимность*). Поляра l_P любой точки P, принадлежащей поляре l_Q точки Q, проходит через Q.

Свойство IV (*характеристическое свойство*). Для точек M поляры l_P точки P и только для них выполняется соотношение

$$\boxed{OM^2-PM^2=2r^2-OP^2.} \qquad (1)$$

Доказательства этих свойств мы оставляем читателям.

Применения понятий полюса и поляры

Пример 1 (полярное свойство касательных). *Если из точки P проводить*

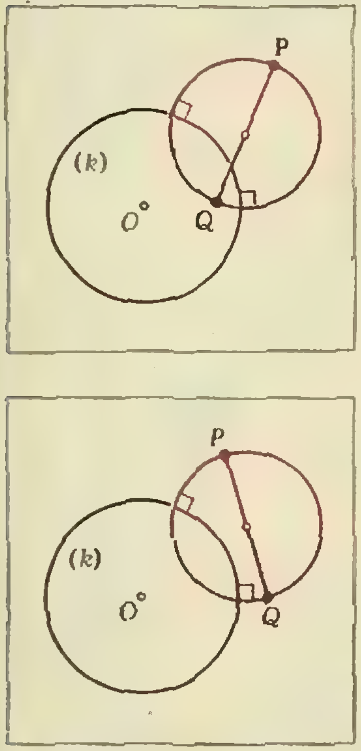


Рис. 1.

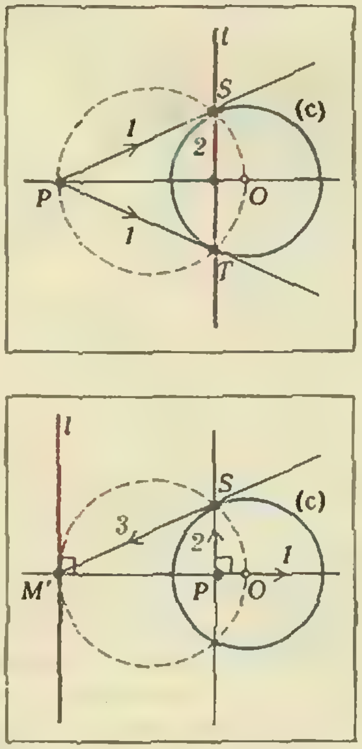


Рис. 2.

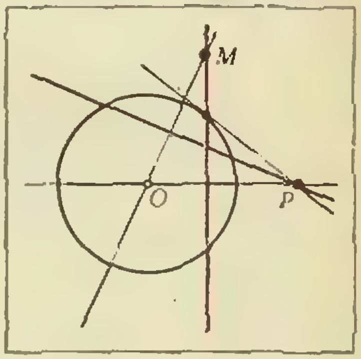


Рис. 3.

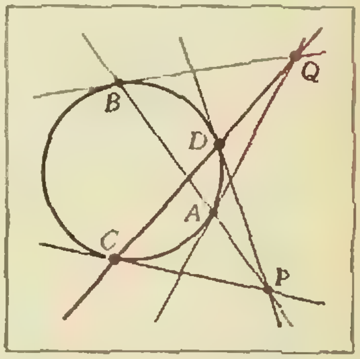


Рис. 4

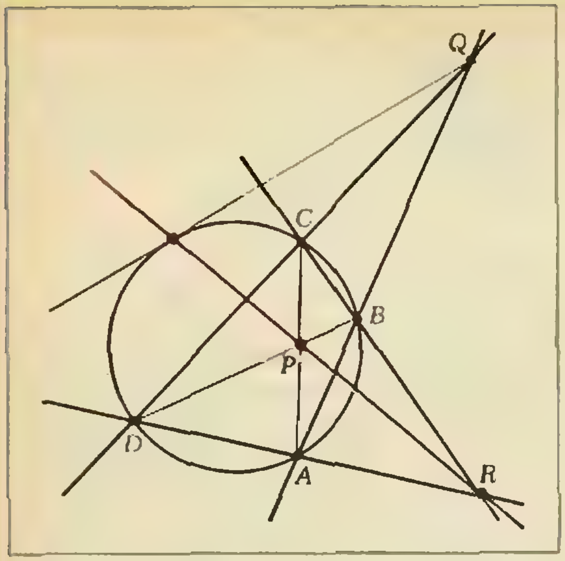


Рис. 5.

секущие окружности (k), а через пары точек сечения строить касательные к окружности, то точки пересечения пар касательных все лежат на одной прямой.

Доказательство. Покажем, что этой прямой будет поляра точки P относительно (k). Для этого проведем касательные PC и PD к окружности и соединим C и D: прямая CD и будет полярой P относительно (k) по свойству 1. Пусть PAB — секущая, Q — точка пересечения касательных к (k) в точках A и B (рис. 4; мы пока не знаем, что $Q \in CD$!). Прямая AB является (по тому же свойству) полярой Q относительно (k). Но P лежит на AB, значит (по свойству взаимности), Q лежит на CD.

Пример 2 (полярное свойство секущих). *Если из точки Q проводить пары секущих окружности (k), то точки пересечения диагоналей получающихся вписанных четырехугольников, так же, как точки пересечения противоположных сторон, все лежат на одной прямой.*

Доказательство. Покажем, что этой прямой будет поляра точки Q относительно (k) (рис. 5). Пусть $P=(AC)\cap(BD)$, $Q=(AB)\cap(CD)$, $R=(AD)\cap(BC)$. Мы докажем, что *поляры точек P, Q и R относительно (k) являются соответственно QR, PR и PQ*, откуда, в частности, следует и утверждение примера 2.

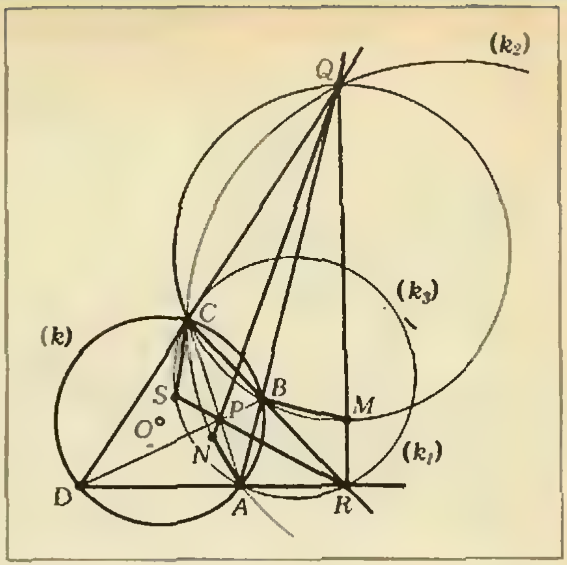


Рис. 6.

Около треугольников QBC, QAC и RAC опишем окружности (k_1), (k_2) и (k_3), пересекающие QR, QP и PR соответственно в точках M, N и S (рис. 6). Так как

$$\sphericalangle BMR=\sphericalangle BCQ=\sphericalangle BAD, \sphericalangle ANP=\sphericalangle ACQ=\sphericalangle PBQ, \sphericalangle RAP=\sphericalangle RSC, \quad (2)$$

четырехугольники $MBAR$, $NABP$ и $SCBP$ вписаны в окружности. Тогда по свойству секущей

$$QM\cdot QR=QB\cdot QA=OQ^2-r^2, \quad (3)$$
$$RM\cdot QR=RB\cdot RC=OR^2-r^2, \quad (3')$$
$$QN\cdot QP=QA\cdot QB=OQ^2-r^2, \quad (4)$$
$$NP\cdot QP=AP\cdot PC=r^2-OP^2, \quad (4')$$
$$RS\cdot RP=RC\cdot RB=OR^2-r^2, \quad (5)$$
$$PS\cdot RP=AP\cdot PC=r^2-OP^2. \quad (5')$$

Если неравенства (3) и (3′) сложить, из (4) вычесть (4′) и из (5) вычесть (5′), получим

$$RQ^2=OQ^2+OR^2-2r^2 \quad (6)$$
$$PQ^2=OP^2+OQ^2-2r^2 \quad (7)$$
$$PR^2=OP^2+OR^2-2r^2 \quad (8)$$

Равенства (7) и (8), (6) и (7), (6) и (8) показывают, что точки

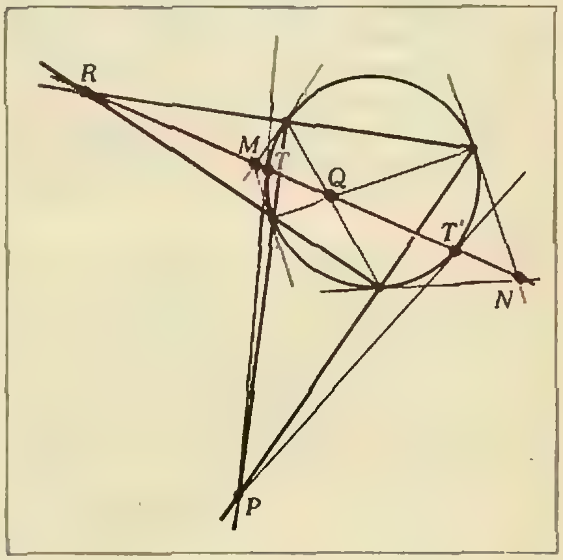


Рис. 7.

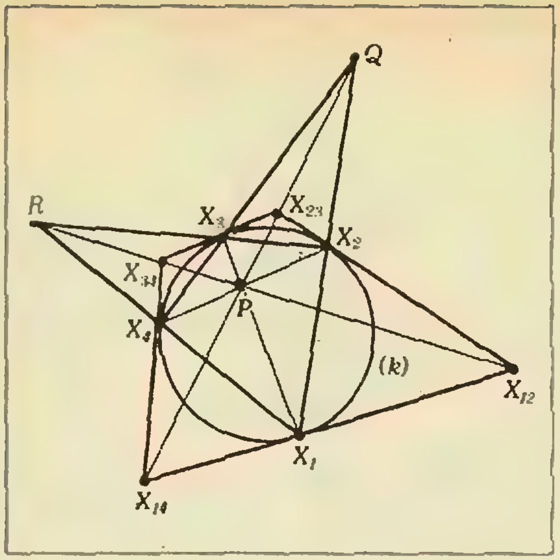


Рис. 8.

Q и R, P и R, P и Q лежат соответственно на полярах точек P, Q и R, что и утверждалось.

Своеобразным итогом разобранных примеров служит рисунок 7. На нем показано, сколько разных замечательных точек лежит на поляре: точки касания (T и T'), пересечение диагоналей (Q), противоположных сторон (R) и касательных (M, N).

Пример 3 (теорема Брюкара). *Пусть P, Q и R являются соответственно точками пересечения диагоналей и противоположных сторон вписанного в окружности $k(O;\ r)$ четырехугольника $ABCD$. Тогда ортоцентр треугольника PQR совпадает с центром O.*

Доказательство. Из предыдущей задачи следует, что точки $P=(AC)\cap(BD)$, $Q=(AB)\cap(CD)$ и $R=(AD)\cap(BC)$ относительно окружности (k) имеют в качестве поляр соответственно прямые QR, PR и PQ. Тогда $OP\perp QR$, $OQ\perp PR$, $OR\perp PQ$, то есть O является ортоцентром.

Пример 4. *Пусть $X_1X_2X_3X_4$ является четырехугольником, вписанным в окружность (k), а X_{ij} является точкой пересечения касательных (k) в точках X_i и X_j $(i\neq j,\ i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$. Тогда у диагоналей четырехугольников $X_1X_2X_3X_4$, $X_{12}X_{23}X_{34}X_{14}$ общая точка пересечения.*

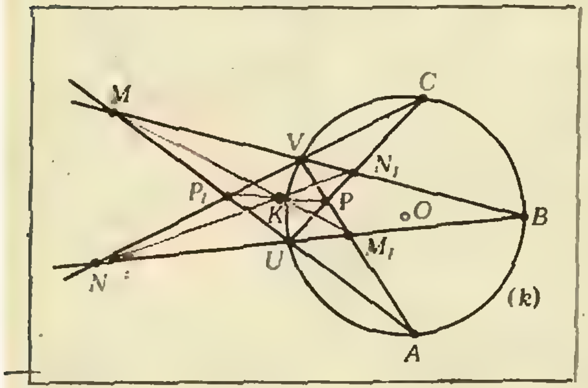


Рис. 9.

Доказательство. Пусть $P=(X_1X_3)\cap(X_2X_4)$, $Q=(X_1X_2)\cap(X_3X_4)$ и $R=(X_1X_4)\cap(X_2X_3)$ (рис. 8). Но X_1X_2 и X_3X_4 являются секущими окружности (k), проходящими через точку O, поэтому точки пересечения X_{12} и X_{34} пар касательных к (k) в точках (X_1, X_2) и (X_3, X_4) будут находиться на поляре PR точки Q. По аналогии устанавливается, что точки X_{23} и X_{14} лежат на поляре PQ точки R, вследствие чего $(X_{14}X_{23})\cap(X_{12}X_{34})=(PR)\cap(PQ)=P$.

Пример 5. *На окружности даны пять точек: U, V, A, B, C. Построены три пары точек: $M=(UA)\cap(VB)$ и $M_1=(UB)\cap(VA)$, $N=(UB)\cap(VC)$ и $N_1=(UC)\cap(VB)$, $P=(UC)\cap(VA)$ и $P_1=(UA)\cap(VC)$. Тогда прямые MM_1, MN_1 и PP_1 имеют общую точку или параллельны* («Математика в школе», 1982, № 2, задача 2480).

Доказательство. Пусть $K=(MM_1)\cap(NN_1)$ и $K_1=(MM_1)\cap(PP_1)$. Четырехугольники $ABVU$ и $BCVU$ вписаны в (k) (рис. 9), поэтому поляра точки K проходит через точки пересечения пар прямых UV, AB и UV, BC, то есть поляра K является прямой UV. По аналогии четырехугольники $ABVU$ и $ACVU$ вписаны в (k), поэтому поляра точки K_1 проходит через точки пересечения пар прямых UV, AB и UV, AC, то есть поляра K_1 — это прямая UV. Точки K и K_1 имеют одну и ту же поляру, поэтому $K\equiv K_1$. Если прямые MM_1 и MN_1 параллельны (их точка пересечения K — «бесконечно удаленная» точка), то тогда UV — диаметр окружности (k), поэтому $PP_1\parallel MN_1$.

Задачи

1. Даны окружность (k) и прямая p. Построена окружность (k_1) с центром $O_1\in p$ и радиусом, равным длине касательной от O_1 к (k), пересекающая (k) в точках P и Q. Докажите, что когда O_1 описывает p, хорды PQ параллельны или проходят через постоянную точку.

2. Окружности $k_1(O_1;\ r_1)$ и $k_2(O_2;\ r_2)$ пересекаются в точках A и B так, что $\sphericalangle O_1AO_2=\sphericalangle O_1BO_2=90^\circ$. Построена окружность с центром $O\in AB$ и радиусом, равным отрезку касательной от O к одной из окружностей (k_1) и (k_2), пересекающая (k_1) и (k_2) соответственно в точках P_1, Q_1 и P_2, Q_2. Докажите, что хорды P_1Q_1 и P_2Q_2 проходят через точки O_2 и Q_1.

задачник кванта

Задачи

M991—M995; Ф1003—Ф1007

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 октября 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7 — 86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «M991, M992» или «Ф1003». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию и имя пишите печатными буквами.

Задачи M991—M995 нам предложила редакция журнала «Математика» (НРБ).

M991. В треугольнике ABC проведены высота CH и медиана CK. На стороне AB выбраны точки E и F так, что $\angle ACE=\angle BCF$, и на лучи CE и CF опущены перпендикуляры AM и BN (рис. 1). Докажите, что точки M, H, K и N лежат на одной окружности.

M992. Среди 90 выпускников одной математической гимназии у каждого не менее 10 друзей. Докажите, что любой выпускник может пригласить в гости трех других так, что среди четырех собравшихся у каждого будет не менее двух друзей.

M993. а) Найдите 11 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых — квадрат натурального числа.

б)* Докажите, что при $2<n<11$ не существует n последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых — квадрат.

M994.* При каком наибольшем значении k неравенство

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\geqslant k(ab+bc+ca)^2$$

выполнено при всех значениях a, b и c?

M995. Функция $y=f(x)$ при всех x определена, непрерывна и удовлетворяет условию

$$f(f(x))=f(x)+x.$$

а) Найдите две такие функции f.

б)* Докажите, что других таких функций нет.

Ф1003. Локомотив движется по круговому пути радиуса R со скоростью v. К нему на тросе длиной L прикреплен легкий воздушный шар, который движется с постоянной по величине скоростью на высоте H. Определите траекторию установившегося движения шара.

Д. Ю. Григорьев

Ф1004. Тонкий однородный стержень, который может свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец стержня, неподвижно висит над водой (рис. 2); длина стержня l, плотность материала ρ (ρ меньше плотности воды). Медленно опуская ось, стержень погружают в воду. Найдите зависимость между углом отклонения стержня от вертикали и расстоянием от оси до поверхности воды; постройте график этой зависимости.

Д. В. Белов

Ф1005. Имеется печь, в которой постоянно поддерживается температура T_1, и холодильник, температура в котором $T_0 < T_1$. В холодильнике установлена катушка с намотанной на ней длинной проволокой. Конец проволоки выходит из холодильника, входит в печь и закреплен на катушке, установленной там. Катушки вращаются так, что проволока сматывается с холодной катушки на горячую, двигаясь со скоростью v. Сечение проволоки s, объемная теплоемкость c. Чтобы температуры T_1 и T_0 не изменились, пришлось увеличить на ΔE_x мощность печи и на столько же уменьшить холодопроизводительность холодильника. Найдите ΔE_x. Считать, что теплообмен проволоки с окружающей средой не зависит от скорости движения проволоки.

Д. В. Павлов

Ф1006. Определите сопротивление схемы из резисторов, показанной на рисунке 3. Значения сопротивлений указаны в омах.

С. С. Кротов

Ф1007. На шар, составленный из двух полушарий, которые сделаны из стекол с показателями преломления n_1 и n_2 ($n_1 > n_2$), падает луч света. Шар начинают вращать с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной направлению луча (рис. 4). Найдите максимальный размер светового пятна на экране, установленном непосредственно за шаром.

Л. Г. Маркович

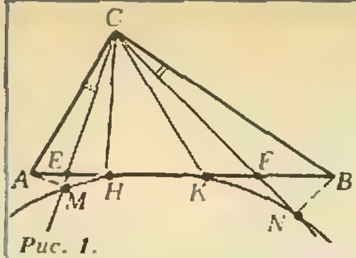


Рис. 1.

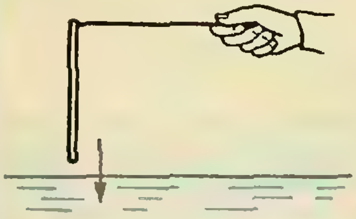


Рис. 2.

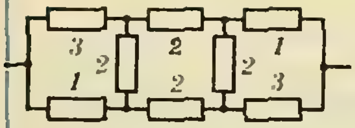


Рис. 3.

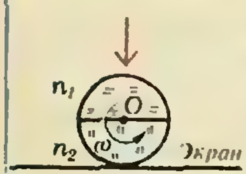


Рис. 4.

Problems

M991 — M995; P1003 — P1007

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than October 15th to the following address: USSR, Moscow, 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelo-

M991. CH and CK are the altitude and the median of triangle ABC. The points E and F are chosen on the side AB so that $\angle ACE = \angle BCF$, and perpendiculars AM and BN are lowered on the rays CE and CF (see figure Рис. 1). Prove that M, H, K and N lie on one circle.

M992. Each of the 90 alumni of a mathematical gymnasium has at least 10 friends. Prove that any alumnus can invite three other alumni so that among the four each has at least two friends.

M993. a) Find 11 successive natural numbers whose sum of squares is the square of a natural number.
b)* Prove that if $2 < n < 11$, then it is impossible to find n successive natural numbers whose sum of squares is a square.

M994.* For what largest value of k the inequality

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c) \geqslant k(ab+bc+ca)^2$$

holds for all values of a, b and c?

M995. The function $y=f(x)$ is, for all x, defined, continuous and satisfies the condition

$$f(f(x))=f(x)+x.$$

a) Find two such functions f.
b)* Prove that there are no others.

P1003. A locomotive moves along a circular track of radius R with velocity v. An aerostat is tied to the locomotive pe write the words: “KVANT'S PROBLEMS” and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

Problems M991—M995 were proposed to us by the Bulgarian magazine «Matematika».

by a rope of length L and moves with constant speed at the altitude H. Determine the trajectory of the aerostat's established motion.

D. Yu. Grigoriev

P1004. A thin uniform rod which can rotate freely in the vertical plane about a horizontal axis passing through its upper extremity hangs motionless above water (see figure Рис. 2); the length of the rod is l, its density ϱ (ϱ is less than the density of water). Slowly lowering the axis, the rod is immersed in water. Find and plot the dependence between the angle formed by the rod with the vertical and the distance from the axis to waterlevel.

D. V. Belov

P1005. A heater in which a constant temperature T_1 is maintained and a refrigerator with inner temperature $T_0<T_1$ contain coils of wire. The wire from the coil in the refrigerator comes out of it and goes into the heater to the other coil. The coils rotate so that the wire from the cold coil moves toward the hot coil with velocity v. The wire section area is s, the volume specific heat is c. In order to keep the temperatures T_0 and T_1 constant, it was necessary to increase the power of the heater by ΔE_x and decrease the production of cold by the refrigerator by the same magnitude. Find ΔE_x.

D. V. Pavlov

P1006. Determine the resistance of the resistor circuit schown on figure Рис. 3. The resistances are given in ohms.

S. S. Krotov

P1007. A light ray falls on a solid sphere made out of two glass hemisheres of refraction indices n_1 and n_2 ($n_1>n_2$). The sphere is rotated with angular velocity ω about an axis perpendicular to the ray (see figure Рис. 4). Find the maximal size of the spot obtained on a screen placed directly behind the sphere.

L. G. Markovich

Решения задач

M971—M975; Ф983—Ф987

M971. *Восемь волейбольных команд провели турнир в один круг (каждая сыграла с каждой один раз). Докажите, что можно выбрать из них такие четыре команды A, B, C, D, что A выиграла у B, C и D, B выиграла у C и D, C выиграла у D.*

Поскольку суммарное число выигрышей всех команд равно числу проигрышей и каждая команда провела 7 матчей, среднее число выигрышей, приходящееся на команду, равно 3,5. Следовательно, хотя бы одна из команд — назовем ее A — выиграла не менее 4 матчей. Аналогично на каждую из 4 команд, проигравших A, приходится в среднем 1,5 выигрыша в матчах между ними, поэтому одна из них — назовем ее B — выиграла не менее чем у двух. Из этих двух команд одна (C) выиграла у другой (D). Команды A, B, C, D образуют искомую четверку.

Легко видеть, что утверждение задачи можно обобщить: *если в турнире участвовало 2^{n-1} команд, то всегда можно выбрать n команд A_1, ..., A_n так, что каждая из них выиграла у всех команд с большими номерами.*

Интересно выяснить, при каком наименьшем N (в зависимости от n) выделенное условие выполняется для любого турнира с участием N команд. Схемы турниров, изображенные на рисунках 1 и 2 (где стрелки проведены от выигравших команд к проигравшим), показывают, что при $n=3$, $N=3$ и $n=4$, $N=7$ наше условие уже не выполнено. (Заметим, что на обоих рисунках все команды равноправны, причем на рисунке 2 три команды, проигравшие какой-то одной, образуют такую же схему, как на рисунке 1.) Следовательно, в этих двух случаях наименьшее допустимое значение N равно 2^{n-1}. Читателям предлагается ответить на вопрос, верно ли это для $n=5$, 6, ...

А. Т. Украинцев

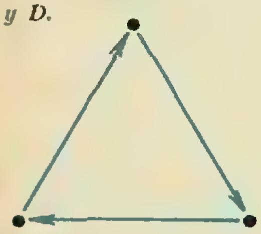


Рис. 1.

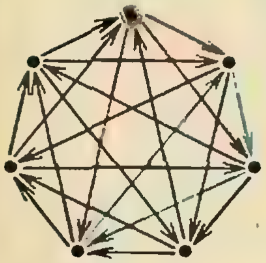


Рис. 2.

M972. *Последовательность x_1, x_2, ... задается условиями $x_1=1/2$, $x_{n+1}=x_n^2+x_n (n=1, 2, \ldots)$. Найдите целую часть числа*

$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\ldots+\frac{1}{x_{100}+1}.$$

Ответ: 1. Ясно, что

$$\frac{1}{x_n+1}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_n(x_n+1)}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}},$$

поэтому рассматриваемая сумма равна $1/x_1-1/x_{100}=2-1/x_{100}$. Последовательность x_n, очевидно, возрастает и $x_2=3/4$, $x_3=(3/4)^2+3/4>1$, следовательно, и $x_{100}>1$, то есть $1<2-1/x_{100}<2$.

А. А. Анджанс

◆

M973. *В треугольнике ABC проведены высота AH и биссектриса BE. Докажите, что если $\angle BEA=45°$, то и $\angle EHC=45°$.*

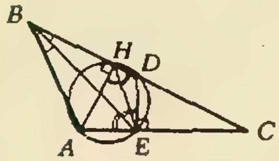


Рис. 1.

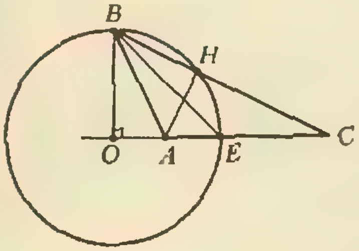


Рис. 2.

Достаточно доказать, что *HE* — биссектриса угла *AHC*.

Проведем из точки *E* перпендикуляр к *AC*; пусть *D* — точка его пересечения с *BC* (рис. 1). Треугольники *BEA* и *BED* равны по стороне *BE* и прилежащим к ней углам ($\angle BEA=\angle BED=45°$), поэтому $AE=ED$. А поскольку точки *A*, *E*, *H* и *D* лежат на одной окружности (ибо сумма углов *AHD* и *AED* равна $90°+90°=180°$), углы *AHE* и *EHD* равны как вписанные углы, опирающиеся на равные хорды *AE* и *ED*.

Другое решение опирается на известную теорему о биссектрисе: *если BE — биссектриса треугольника ABC, то $AE:EC=AB:BC$* (см., например, «Квант», 1985, № 2, с. 29). Легко видеть, что справедлива и обратная к ней теорема, поэтому достаточно доказать, что $AH:HC=AB:BC$. Обозначая углы треугольника при вершинах *A*, *B*, *C* через α, β, γ, получим, что $AH:HC=\operatorname{tg}\gamma$ и по теореме синусов $AB:BC=\sin\gamma:\sin\alpha$. Но $\sin\alpha=\sin(\beta+\gamma)=\sin(90°-\gamma)=\cos\gamma$ (так как $\beta/2+\gamma=\angle AEB=45°$), то есть $\sin\gamma:\sin\alpha=\operatorname{tg}\gamma$.

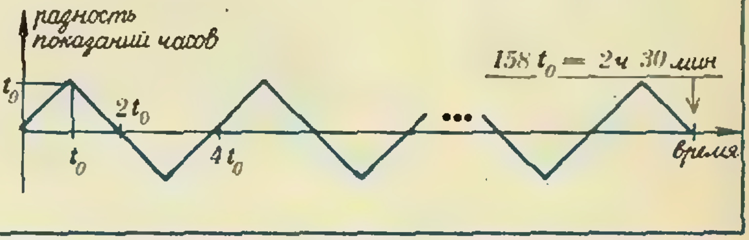
Заметим еще, что рассматриваемый в задаче треугольник можно охарактеризовать тем, что центр *O* окружности, проходящей через точки *B*, *H* и *E*, совпадает с проекцией точки *B* на прямую *AC* (рис. 2). (Эта окружность является так называемой окружностью Аполлония для точек *A* и *C*, то есть для ее точек *X* отношение $AX:XB$ постоянно.) Отсюда можно получить еще одно решение.

И. Ф. Шарыгин,
В. Н. Дубровский

◆

M974. *Двое играют в шахматы с часами. После того как оба сделали по 40 ходов, часы обоих показывали 2 часа 30 минут.*
а) Докажите, что в партии был момент, когда часы одного обгоняли часы другого более чем на 1 минуту 50 секунд.
б) Можно ли утверждать, что в некоторый момент разница показаний часов была не менее 2 минут?

а) Пусть абсолютная величина разности показаний часов ни в какой момент не превышает $t=1$ мин 50 с. Тогда время, затраченное первым шахматистом на первый ход, не превышает t, а время, затраченное на любой из следующих ходов, не превышает $2t$ (если время обдумывания какого-либо хода больше $2t$, то в начале или в конце этого отрезка времени разность показаний часов будет больше t). Таким образом, общая длительность партии, равная 5 ч $=300$ мин, не превышает $80\cdot 2t-t=159t$, то есть $t\geqslant 300/159$ мин >1 мин 50 с. Полученное противоречие показывает, что в



некоторый момент разность показаний часов превысит 1 мин 50 с.

б) **Ответ**: нельзя. Если на самый первый ход (точнее, по шахматной терминологии, «полуход») в партии было затрачено время $t_0=300/158$ мин, на каждый из 78 следующих — $2t_0$, а на 80-й, последний — t_0, то общее время обдумывания для каждого шахматиста равно $39 \cdot 2t_0+t_0=$ $=79t_0=2$ ч 30 мин, а разность показаний часов в любой момент не превосходит $t_0<2$ мин; график изменения разности приводится на странице 38.

С. В. Фомин

◆

М975. *На «шахматной доске» $n \times n$ полей стоит 20 различных фигур. Известно, что каждая фигура с любого поля бьет не более 20 полей.*

а) Докажите, что при $n=100$ эти фигуры можно переставить так, чтобы они не били друг друга.

б) Пусть дополнительно известно, что если фигуру сдвинуть, то множество полей, которые она бьет, тоже параллельно сдвинется (на тот же вектор). Докажите, что при $n=30$ эти 20 фигур можно расставить так, чтобы они не били друг друга.

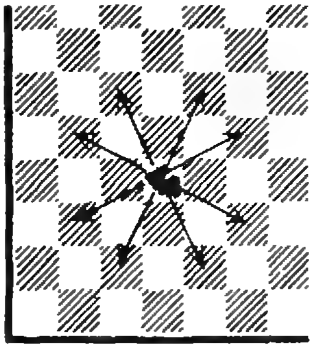
а) Рассмотрим всевозможные расстановки наших 20 фигур на доске 100×100 и оценим долю p тех расстановок, при которых хотя бы одна фигура бьет какую-то другую. Легко оценить долю расстановок, при которых данная фигура A бьет данную фигуру B: при любом положении A для фигуры B имеется $100^2-1=9999$ свободных полей, из них не более 20 находятся под ударом фигуры A; следовательно, эта доля не превосходит 20/9999. А поскольку число (упорядоченных) пар фигур (A, B) равно $20 \cdot 19=380$,

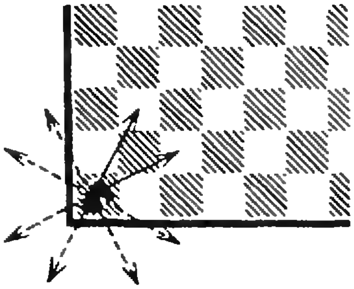
$$p \leqslant 380 \cdot \frac{20}{9999} < 1,$$

поэтому существуют позиции, в которых ни одна фигура не бьет другую (их доля равна $1-p>0$).

Отметим, что наша оценка довольно грубая — позиции, в которых несколько фигур бьют другие, мы учли столько раз, сколько в них таких пар фигур.

б) Будем ставить фигуры на доску последовательно. Если первая фигура уже поставлена, то вторую нельзя ставить на 1) поле, занятое первой фигурой, 2) поля, находящиеся под ударом первой (их не более 20), 3) поля, с которых вторая фигура бьет первую. Покажем, что в 3-й группе также не более 20 полей.





Пусть $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ — векторы, соединяющие центр поля, занятого 2-й фигурой, с центрами полей, которые она бьет. Этот набор векторов не меняется при сдвиге фигуры, однако некоторые из них могут выходить за края доски (на рисунках показаны такие векторы для двух положений шахматного коня). Поля, с которых 2-я фигура бьет 1-ю, получаются, если отложить от поля, занятого 1-й фигурой, векторы $-\vec{v}_1$, $-\vec{v}_2, \ldots, -\vec{v}_k$ — их не более 20.

Таким образом, для 2-й фигуры число запретных полей не превосходит 41. Поставим ее на одно из оставшихся полей, тогда для 3-й фигуры будет не более $2 \cdot 41=82$ запретных полей и т. д. Для 20-й фигуры число запретных полей не превосходит $19 \cdot 41=779<900$, поэтому и ее можно будет поставить на доску с соблюдением условий задачи.

Обратите внимание на принципиальную разницу решений двух пунктов нашей задачи: в отличие от решения задачи б) решение задачи а) никак не помогает найти нужную расстановку — это, как говорят, «чистое доказательство существования».

А. К. Толпыго

Ф983. *На шероховатом столе лежит брусок массой $m=1$ кг; коэффициент трения покоя бруска о стол $\mu_0=1$, коэффициент трения скольжения $\mu=0,9$. К бруску прикреплена пружина жесткостью $k=1$ Н/м. Пружину начинают тянуть в горизонтальном направлении так, что ее свободный конец движется с постоянной скоростью $v=1$ м/с (рис. 1). Как будет двигаться брусок?*

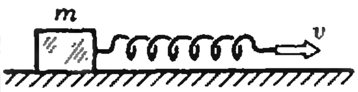


Рис. 1.

Будем рассматривать движение системы поэтапно.

Первый этап: брусок неподвижен, пружина растягивается. Это происходит до тех пор, пока в некоторый момент времени t_1 сила натяжения пружины ($|kx_1|$) не достигнет значения максимальной силы трения покоя ($\mu_0 mg$); с этого момента брусок начнет двигаться.

Найдем $t_1: kx_1=\mu_0 mg$, или $k(vt_1)=\mu_0 mg$, откуда

$$t_1=\mu_0\frac{mg}{kv}\approx 10 \text{ с}.$$

Введем обозначение $k/m=\omega^2$. Тогда

$$t_1=\mu_0 g/v\omega^2.$$

В этот момент растяжение пружины

$$x_1=vt_1=\mu_0\frac{g}{\omega^2}.$$

Второй этап. С момента времени t_1 брусок начинает двигаться. Рассмотрим это движение в системе координат, которая движется со скоростью $\vec{v}$. В этой системе (обозначим ее c) в момент времени t_1 брусок имеет скорость $-\vec{v}$ и координату $x=0$, пружина растянута на $x_1=vt_1$. Дальнейшее движение бруска происходит под действием силы упругости $f_{\text{упр}}=kx_1$ и силы трения скольжения $f=\mu mg$, направленной в сторону, противоположную направлению вектора $\vec{v}$ (так направлена скорость бруска относительно стола, который в системе c имеет постоянную скорость $-\vec{v}$). Вспомним, что под действием упругой силы и постоянной силы (в данном случае — трения) тело совершает гармонические колебания:

$$x_c=x_{c\max}\sin(\omega t+\varphi)+x_0 \left(\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\right), \qquad (1)$$

где x_0 — положение равновесия, которое определяется условием

$$k(x_1-x_0)-\mu mg=0\Rightarrow$$

$$x_0=x_1-\frac{\mu mg}{k}=x_1-\mu\frac{g}{\omega^2}=\Rightarrow\Delta\mu\frac{g}{\omega^2},$$

где $\Delta\mu=\mu_0-\mu$.

Скорость бруска при этом изменяется по закону

$$v_c=x_c'=x_{c\max}\,\omega\cos(\omega t+\varphi). \qquad (2)$$

Найдем значение $x_{c\max}$ и φ. Для этого подставим в (1) и (2) значения $t=t_1$, $x_c=x(t_1)=0$, $x'(t_1)=-v$:

$$0=x_{c\max}\sin(\omega t_1+\varphi)+\Delta\mu\frac{g}{\omega^2}.$$

$$-v=x_{c\max}\omega\cos(\omega t_1+\varphi).$$

Перепишем эти уравнения в такой форме:

$$x_{c\max}\sin(\omega t_1+\varphi)=-\Delta\mu\frac{g}{\omega^2}, \qquad (3)$$

$$x_{c\max}\cos(\omega t_1+\varphi)=-\frac{v}{\omega}. \qquad (4)$$

Возведя (3) и (4) в квадрат и сложив получившиеся выражения, найдем:

$$x^2_{c\,\max} = \frac{(\Delta\mu)^2 g^2}{\omega^4} + \frac{v^2}{\omega^2} \approx 2\ \text{м}^2,\ x_{c\,\max} \approx 1{,}4\ \text{м}.$$

Поделив (3) на (4), получим:

$$\operatorname{tg}(\omega t_1 + \varphi) = \Delta\mu \frac{g}{v\omega}$$

$$(\sin(\omega t_1 + \varphi) < 0,\ \cos(\omega t_1 + \varphi) < 0)$$

откуда

$$\varphi = \pi + \operatorname{arctg}\frac{\Delta\mu \cdot g}{v\omega} - \omega t_1 \approx \frac{5\pi}{4}.$$

Перейдем теперь в неподвижную систему отсчета (в момент времени t_1 начала координат в обеих системах совпадают):

$$x = x_c + v(t - t_1) = x_{c\,\max}\sin(\omega t + \varphi) + v(t - t_1) +$$

$$+ \Delta\mu\frac{g}{\omega^2} = \sqrt{2}\ \sin\left((t-10) + \frac{5\pi}{4}\right) + (t-10) + 1\ (\text{м}),$$

$$x' = x_{c\,\max}\omega\cos(\omega t + \varphi) + v =$$

$$= \sqrt{2}\cos\left((t-10) + \frac{5\pi}{4}\right) + 1\ (\text{м/с}).$$

Эти уравнения описывают движение бруска от момента времени t_1 до момента t_2, когда скорость бруска станет равной 0 и силу трения скольжения заменит сила трения покоя. В момент t_2

$$x' = x_{c\,\max}\omega\cos(\omega t_2 + \varphi) + v = 0.$$

Вспомним, что угол $\theta = \omega t_1 + \varphi$ находится в третьей четверти. При дальнейшем росте t ($t > t_1$) угол этот будет расти, $\cos(\omega t + \varphi)$ также будет расти, следовательно, и скорость будет расти, оставаясь положительной. Когда $(\omega t + \varphi)$ окажется во второй (шестой) четверти, $\cos(\omega t + \varphi)$ будет отрицательным, и когда он станет равным $\cos(\omega t_1 + \varphi)$, скорость бруска станет равной нулю. Таким образом,

$$t_2 = t_1 + \frac{2\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{\Delta\mu \cdot g}{v\omega}\right)}{\omega} \approx 15\ \text{с},$$

$$x(t_2) \approx 7\ \text{м}.$$

Заметим, что силы натяжения пружины в моменты t_2 и t_1 связаны соотношением

$$f(t_1) - \mu mg = -(f(t_2) - \mu mg) \Rightarrow f(t_2) = 2\mu mg - f(t_1).$$

Но $f(t_1) = \mu_0 mg$; поэтому

$$f(t_2) = mg(2\mu - \mu_0) < \mu_0 mg.$$

Значит, в момент t_2 брусок остановится и не будет двигаться до момента t_3, когда $f(t_3)$ станет равной

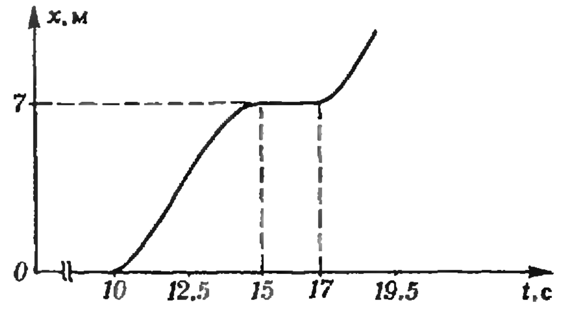


Рис 2

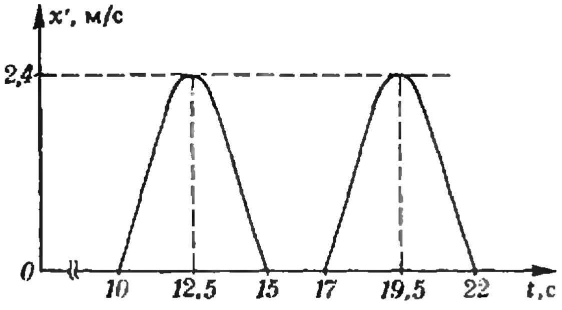


Рис 3.

по модулю $\mu_0 mg$. Интервал времени $t_3 - t_2$, очевидно, равен

$$t_3 - t_2 = \frac{f(t_3) - f(t_2)}{kv} = \frac{2(\mu_0 - \mu)g}{v\omega^2} \approx 2 \text{ с.}$$

Затем цикл повторяется, так что $t_4 - t_3 = t_2 - t_1$, и т. д. Графики функций $x(t)$ и $x'(t)$ приведены на рисунках 2 и 3 (см. с. 41).

И. И. Мазин

◆

Ф984. *При колке дров топор иногда застревает в расщелине полена. В таких случаях дальше колют либо так, как показано на рисунке 1, либо — как на рисунке 2. Какой способ более эффективен?*

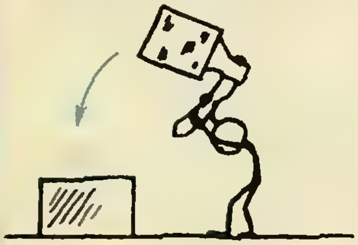


Рис. 1.

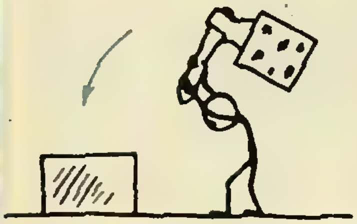


Рис. 2.

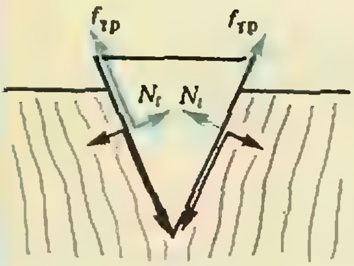


Рис. 3.

По мере того как топор входит в полено, увеличивается расщелина между половинами полена по обе стороны от топора: эти половины испытывают сжатие в направлениях, перпендикулярных «щекам» топора; происходит накопление упругой деформации в дереве. Разрыв (раскол) полена происходит в момент, когда эта деформация достигнет определенного «максимально выдерживаемого» значения.

Будем считать, что перед ударом о «наковальню» в первом и во втором случаях система топор + полено имеет одну и ту же энергию. При ударе о наковальню часть этой энергии переходит в тепло. В первом случае (дерево внизу) удар неупругий, во втором — упругий. Значит, в первом случае потери энергии при ударе (ΔE_1) больше, чем во втором (ΔE_2). Оставшаяся энергия расходуется на работу против сил трения при взаимном перемещении топора и полена и на увеличение энергии упругой деформации в полене. Запишем этот энергетический баланс:

$$E_1' = E - \Delta E_1 = A_1 + U_1,$$
$$E_2' = E - \Delta E_2 = A_2 + U_2.$$

Из сказанного выше ясно, что $E_2' > E_1'$, то есть

$$A_2 + U_2 > A_1 + U_1.$$

Понятно, что если $U_2 > U_1$, то второй способ более эффективен.

При одном и том же перемещении топора относительно полена из одинаковых начальных положений, то есть при одном и том же значении A ($A_1 = A_2$), очевидно, $U_2 > U_1$. Покажем, что величины A и U пропорциональны друг другу.

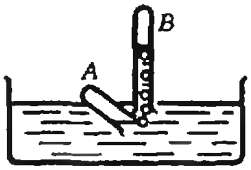
Работа A совершается против силы трения, которая меняется при смещении топора относительно полена, поскольку меняется сила нормальной реакции N_t (рис. 3). Энергия U_t равна работе, совершаемой силой нормального давления топора на дерево. Эта сила в любой момент времени численно равна силе нормальной реакции N_t. Из всего сказанного ясно, что условие $A_2 + U_2 > A_1 + U_1$ означает, что и $A_2 > A_1$, и $U_2 > U_1$, и следовательно, второй способ — удар о наковальню топором — более эффективен.

Т. С. Петрова

◆

Ф985. *В сосуд, заполненный жидким эфиром, погружают перевернутую пробирку А. Из нее сразу же начинают*

Сразу же, как только пустую пробирку A опустили в сосуд с эфиром, началось испарение эфира внутрь пробирки. Этот процесс и приводит к появлению *выходить пузырьки. Пузырьки «собирают» в первоначально полностью заполненную эфиром пробирку B (см. рисунок), длина которой в два раза больше, чем длина пробирки A. При этом из пробирки B вытесняется 2/3 первоначального объема эфира. Температура в комнате поддерживается равной 20 °C, давление равно нормальному атмосферному. Объясните происходящее явление и определите по имеющимся в задаче данным давление насыщенных паров эфира при указанной температуре.*



Ф986. *Две хорошо очищенные пластины, платиновая и вольфрамовая, находятся в вакууме, образуя плоский конденсатор. Пространство между ними заполняют окисью углерода CO. Определите возникающую при этом разность потенциалов между пластинами. Считайте, что молекулы CO осаждаются на поверхности металла с образованием химической связи углерод — металл; молекула CO представляет собой диполь (рис. 1).* $|\Delta q|\cdot l=3{,}3\times\times10^{-31}$ *Кл · м.*

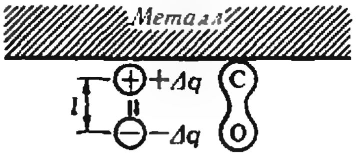


Рис. 1.

пузырьков, выходящих из пробирки A,— ведь суммарное давление воздуха и паров эфира в ней должно поддерживаться равным атмосферному давлению p_0 (можно пренебречь увеличением давления из-за погружения пробирки в эфир — оно не превосходит нескольких мм рт. ст.). Пузырьки перестанут выходить, когда прекратится испарение эфира внутрь пробирки A, то есть когда давление паров эфира там станет равным давлению насыщенных паров $p_н$ и суммарное давление будет равно $p_н+p_в=p_0$, где $p_в$ — давление воздуха.

Аналогичное условие должно выполняться и в пробирке B. При этом воздух, занимавший в пробирке A объем V_0, в пробирке B будет занимать объем $\frac{4}{3}V_0$. Пользуясь законом Бойля — Мариотта, можем записать:

$$p_0V_0=p_в\left(V_0+\frac{4}{3}V_0\right)=\frac{7}{3}p_вV_0,$$

откуда находим $p_в=\frac{3}{7}p_0$. Теперь легко определить давление насыщенных паров эфира:

$$p_н=p_0-p_в=\frac{4}{7}p_0\approx 430 \text{ мм рт. ст.}$$

А. И. Буздин

◆

У атомов металла (вольфрама и платины), находящихся на поверхности пластины, и у атомов углерода в молекуле окиси углерода CO имеются ненасыщенные химические связи. Взаимодействие окиси углерода с чистой поверхностью металла приводит к возникновению сильной химической связи между атомом C и поверхностным атомом металла. Эта реакция сопровождается выделением тепла. При этом окись углерода осаждается на поверхности металла, образуя монослой, причем на каждый атом металла, расположенного на поверхности пластины, приходится одна молекула CO и ось молекулы перпендикулярна поверхности металла (рис. 1).

Вблизи поверхности платиновой пластины можно выделить две плоскости P_1 и P_1', находящиеся на расстоянии l друг от друга и проходящие через центры атомов углерода и кислорода соответственно. Будем считать, что положительные заряды (дипольные заряды $+\Delta q$) расположены в плоскости P_1 с поверхностной плотностью заряда $+\sigma_1$, а отрицательные — в плоскости P_1' с поверхностной плотностью заряда $-\sigma_1$ (рис. 2).

Аналогично, вблизи поверхности вольфрамовой пластины расположены две разноименно заряженные плоскости P_2 и P_2' с поверхностной плотностью заряда $+\sigma_2$ и $-\sigma_2$ соответственно.

Таким образом, расчет разности потенциалов U между пластинами вольфрама и платины сводится к определению разности потенциалов между двумя парами разноименно заряженных плоскостей:

$$U=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}l-\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}l=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\varepsilon_0}l. \qquad (1)$$

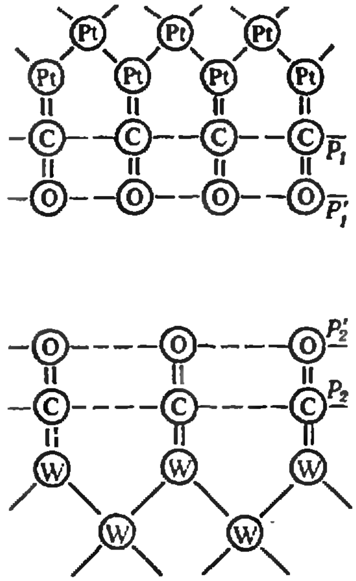


Рис. 2.

Среднее число атомов металла, находящихся на единичной площади его поверхности (поверхностная плотность атомов γ), определяется через объемную плотность атомов соотношением

$$\gamma = n^{2/3}, \tag{2}$$

где n — объемная плотность атомов металла. В свою очередь объемная плотность атомов равна

$$n = \frac{\rho N_A}{M}, \tag{3}$$

где ρ — плотность металла, N_A — число Авогадро, M — молярная масса металла. Ясно, что

$$\sigma = \Delta q \cdot \gamma. \tag{4}$$

Учитывая соотношения (2)—(4), искомую разность потенциалов представим в виде

$$U = \frac{\Delta q \cdot l}{\varepsilon_0} N_A^{2/3} \left(\left(\frac{\rho_W}{M_W} \right)^{2/3} - \left(\frac{\rho_{Pt}}{M_{Pt}} \right)^{2/3} \right).$$

Подставив численные значения ($\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ Ф/м, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, $\rho_W = 19{,}1 \times 10^3$ кг/м^3, $\rho_{Pt} = 21{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3, $M_W = 0{,}184$ кг/моль, $M_{Pt} = 0{,}195$ кг/моль), получим $U = 24$ мВ.

В заключение следует заметить, что в решении задачи допущено упрощение — мы не учли, что в кристаллической структуре атомы вольфрама и платины расположены в определенном порядке и, следовательно, при различных срезах различное число атомов металла оказывается на его поверхности. Поэтому формула (2) требует уточнения для каждого конкретного случая расположения атомов на поверхности металла. Кроме того, в различных плоскостях поверхностные атомы обладают различной валентностью, и это тоже надо учитывать.

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

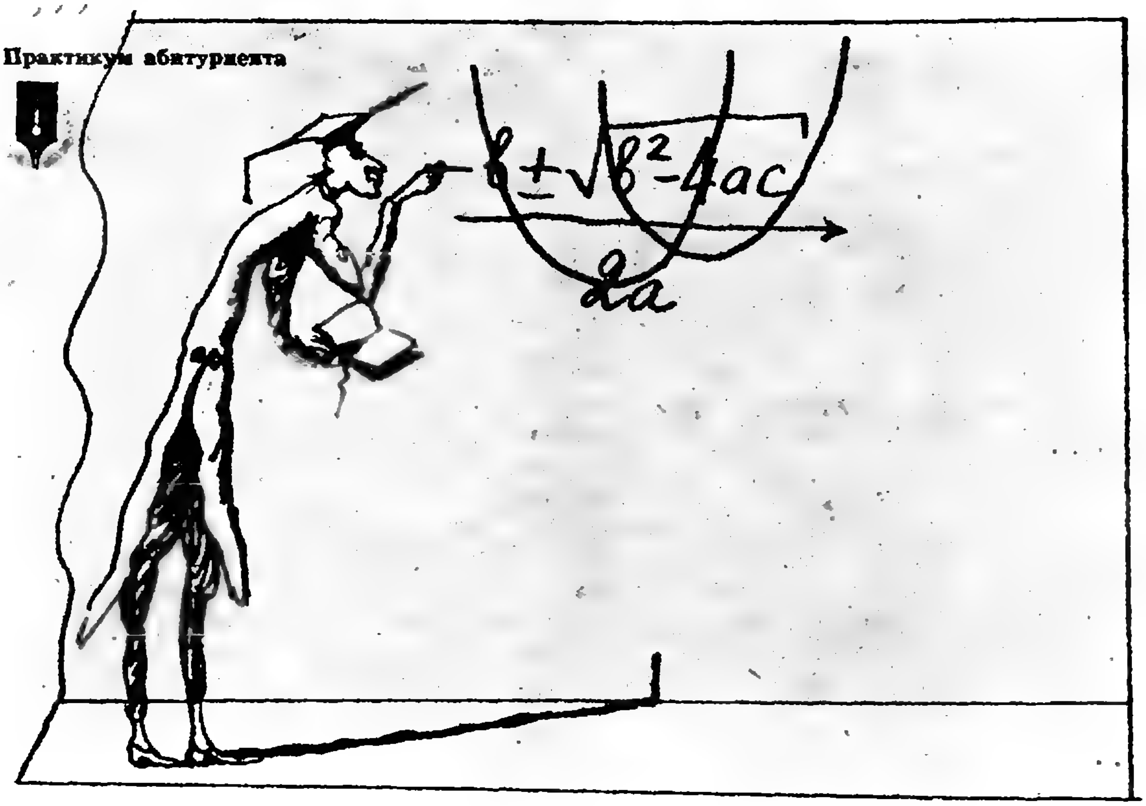
◆

Ф987. *На картине И. Левитана «Март» тени на снегу, отбрасываемые деревьями в ясный солнечный день, голубого цвета. Не правильнее ли (с физической точки зрения) было нарисовать их темными, бесцветными (черными или серыми)?*

Освещенность любого участка поверхности земли создается как прямыми солнечными лучами, так и рассеянным в атмосфере солнечным светом. Как известно, граница тени задает область, куда не попадают прямые солнечные лучи. Если бы вообще никакие лучи в эту область не попадали, то соответствующие участки были бы бесцветными (черными).

В ясный солнечный день (когда на небе почти нет облаков) рассеянный солнечный свет, приходящий на землю, «имеет синюю окраску» (цвет неба). Попадая в область «прямой» тени, этот свет отражается от белого снежного покрова без существенного поглощения (таково свойство белого снега) и придает тени синий цвет. Описанный эффект тем более нагляден, чем чище снежный покров.

А. С. Бутов



Как расположены корни трехчленов?

Доктор физико-математических наук
Г. В. ДОРОФЕЕВ

Эта статья посвящена решению задач, в которых так или иначе ставится вопрос о взаимном расположении корней (как правило, иррациональных) двух квадратных трехчленов. По своему математическому содержанию эти задачи достаточно просты, однако с вычислительной точки зрения большинство из них представляет серьезные трудности. Попробуйте, например, ответить на вопрос.

При каких значениях a корни уравнений

$$x^2+\frac{8}{a}x-2a=0 \quad \text{и} \quad x^2+\frac{6}{a}x-a=0$$

различны и перемежаются (то есть между двумя корнями одного уравнения находится ровно один корень другого уравнения)?

Вы убедитесь, что выписывание корней этих трехчленов требует кропотливого сравнения их друг с другом при различных значениях параметра a.

В то же время из графических соображений ясно, что *корни двух квадратных трехчленов $f(x)$ и $g(x)$ с одинаковыми положительными коэффициентами при x^2 (и положительными дискриминантами) перемежаются тогда и только тогда, когда точка пересечения графиков функций $f(x)$ и $g(x)$ находится ниже оси абсцисс.* На алгебраическом языке это означает, что *общее значение функций $f(x)$ и $g(x)$ отрицательно*. В нашем случае $f(x)=g(x)\Leftrightarrow x=\frac{a^2}{2}$ и $f\left(\frac{a^2}{2}\right)=\frac{a^4}{4}+2a$; поэтому условию задачи удовлетворяют решения неравенства $a^4+8a<0$, или $-2<a<0$.

Этот пример показывает, что взаимное расположение корней двух квадратных трехчленов зависит от их поведения в точке x_0, в которой эти трехчлены принимают одинаковое значение (существенно, что точка x_0 — единственная!).

Шесть критериев для различных случаев расположения корней

Пусть квадратные трехчлены $f(x)=ax^2+px+q$ и $g(x)=ax^2+rx+s$ имеют каждый два различных корня (x_1, x_2 и x_3, x_4 соответственно, $x_1>x_2$,

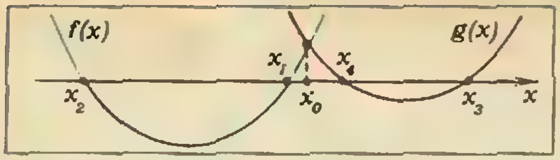

f(x)
g(x)
x_1
x_4
x_2
x_0
x_3
x

Рис. 1.

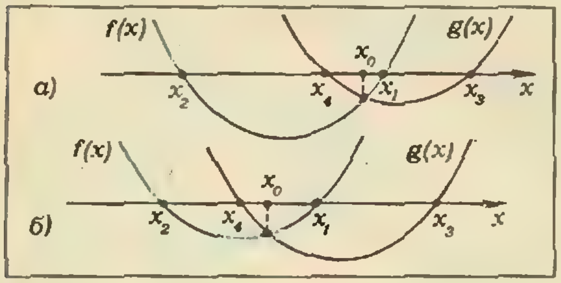

f(x)
g(x)
а)
x_0
x_2
x_4
x_1
x_3
x
f(x)
g(x)
б)
x_0
x_2
x_4
x_1
x_3
x

Рис. 2.

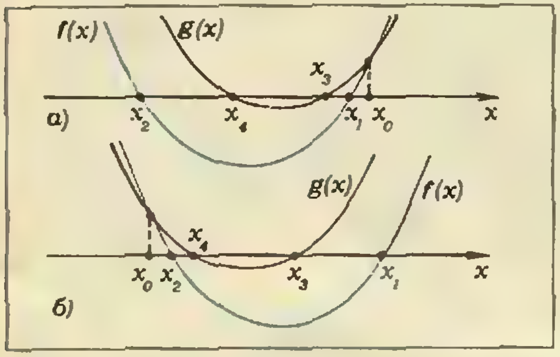

f(x)
g(x)
x_3
а)
x_2
x_4
x_1
x_0
x
g(x)
f(x)
x_4
x_0
x_2
x_3
x_1
x
б)

Рис. 3.

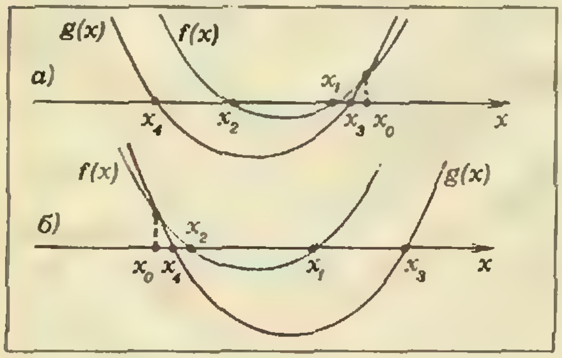

g(x)
f(x)
а)
x_1
x_4
x_2
x_3
x_0
x
f(x)
g(x)
б)
x_2
x_0
x_4
x_1
x_3
x

Рис. 4.

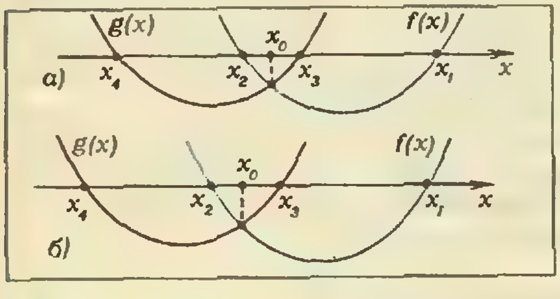

g(x)
f(x)
x_0
а)
x_4
x_2
x_3
x_1
x
g(x)
f(x)
x_0
x_4
x_2
x_3
x_1
x
б)

Рис. 5.

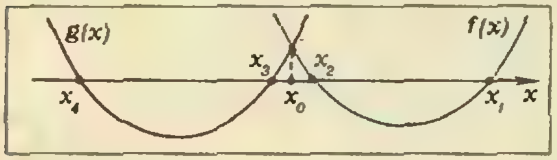

g(x)
f(x)
x_3
x_2
x_4
x_0
x_1
x

Рис. 6.

$x_3 > x_4$), причем у $f(x)$ и $g(x)$ нет общих корней и $p \neq r$. Пусть x_0 — корень (единственный) уравнения $f(x)=g(x)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. $x_2 < x_1 < x_4 < x_3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f(x_0) > 0,\ f'(x_0) > 0,\ g'(x_0) < 0)$;
2. $x_2 < x_4 < x_1 < x_3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f(x_0) < 0,\ f'(x_0) > g'(x_0))$;
3. $x_2 < x_4 < x_3 < x_1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f(x_0) > 0,\quad g'(x_0)\,[f'(x_0) - g'(x_0)] > 0$;
4. $x_4 < x_2 < x_1 < x_3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f(x_0) < 0,\quad f'(x_0)\,[g'(x_0) - f'(x_0)] > 0)$;
5. $x_4 < x_2 < x_3 < x_1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f(x_0) < 0,\ f'(x_0) < g'(x_0))$;
6. $x_4 < x_3 < x_2 < x_1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f(x_0) > 0,\ f'(x_0) < 0,\ g'(x_0) > 0)$.

Перечисленные утверждения проиллюстрированы на рисунках 1—6. Если вы забудете формулировку какого-нибудь критерия, это не страшно: ее всегда можно восстановить, пользуясь такими рисунками. Также нетрудно заметить, что критерии 4, 5, 6 получаются из критериев 3, 2, 1 переменой местами $f(x)$ и $g(x)$ (это видно и из сравнения соответствующих рисунков). Поэтому мы докажем только первые три критерия.

Нам понадобятся следующие известные (весьма полезные) свойства квадратного трехчлена:
если $f(x)$ — квадратный трехчлен с положительными старшим коэффициентом и дискриминантом, x_1 и x_2 — его корни, а x_0 — некоторое значение переменной, то

$$x_0 < x_2 < x_1 \Leftrightarrow (f(x_0) > 0,\ f'(x_0) < 0);$$
$$x_2 < x_1 < x_0 \Leftrightarrow (f(x_0) > 0,\ f'(x_0) > 0);$$
$$x_2 < x_0 < x_1 \Leftrightarrow f(x_0) < 0,$$

(см. рисунок 7).

Пусть теперь $h(x) = f(x) - g(x)$. Легко видеть, что $h(x)$ — линейная функция, отличная от константы ($p \neq r$). Поэтому она монотонна (убывает или возрастает). Это означает, что если для некоторых $a < b$ выполняется неравенство $h(a) < h(b)$ (или $h(a) > h(b)$), то и для любых $c < d$ справедливо неравенство $h(c) < h(d)$ (или $h(c) > h(d)$).

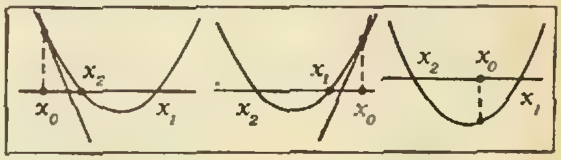

x_2
x_0
x_1
x_1
x_2
x_0
x_2
x_0
x_1

Рис. 7.

Доказательство критерия 1

Необходимость (⇒). Пусть $x_2 < x_1 < x_4 < x_3$. Тогда $f(x_4) > 0$, $h(x_4) = f(x_4) - g(x_4) = f(x_4) > 0$. Точно так же $g(x_1) > 0$, и поэтому $h(x_1) < 0$. Из неравенств $x_1 < x_4$ и $h(x_1) < h(x_4)$ получаем, что $h(x)$ — возрастающая функция.

Так как $h(x_0) = 0$, имеем $h(x_1) < h(x_0) < h(x_4)$, откуда $x_1 < x_0 < x_4$. Итак, оба корня $f(x)$ меньше x_0, откуда $f(x_0) > 0$, $f'(x_0) > 0$. Аналогично оба корня $g(x)$ больше x_0, откуда $g'(x_0) < 0$. Необходимость критерия 1 доказана. Достаточность (⇐). Пусть $f(x_0) > 0$, $f'(x_0) > 0$, $g'(x_0) < 0$. Из первых двух неравенств вытекает, что оба корня $f(x)$ меньше x_0, а из неравенств $g(x_0) > 0$, $g'(x_0) < 0$ следует, что оба корня $g(x)$ больше x_0, и таким образом, $x_2 < x_1 < x_0 < x_4 < x_3$.

Доказательство критерия 2

Необходимость (⇒). Пусть $x_2 < x_4 < x_1 < x_3$. Тогда $f(x_4) < 0$, $g(x_1) < 0$, так что $h(x_4) < 0 < h(x_1)$, и поскольку $x_4 < x_1$, получаем, что $h(x)$ — возрастающая функция. Следовательно, $h'(x) > 0$ при любом x; в частности, $h'(x_0) > 0$, откуда $f'(x_0) > g'(x_0)$.

С другой стороны, из условий $h(x_4) < h(x_0) < h(x_1)$ получаем, что $x_4 < x_0 < x_1$, так что $x_2 < x_0 < x_1$, откуда $f(x_0) < 0$. Достаточность (⇐). Пусть $f(x_0) < 0$, $f'(x_0) > g'(x_0)$. Тогда $h'(x_0) > 0$, и поскольку $h'(x)$ — постоянная функция, $h'(x) > 0$ при любом x, то есть $h(x)$ — возрастающая функция.

Из условия $f(x_0) = g(x_0) < 0$, получаем $x_2 < x_0 < x_1$, $x_4 < x_0 < x_3$, и так как $h(x)$ возрастает, $0 = h(x_0) < h(x_1)$, $h(x_4) < h(x_0) = 0$, откуда

$$g(x_1) = f(x_1) - h(x_1) < 0,$$
$$f(x_4) = h(x_4) + g(x_4) < 0;$$

следовательно, $x_4 < x_1 < x_3$, $x_2 < x_4 < x_1$, то есть $x_2 < x_4 < x_1 < x_3$.

Доказательство критерия 3

Необходимость (⇒). Пусть $x_2 < x_4 < x_3 < x_1$. Тогда $g(x_1) > 0$, $g(x_2) > 0$, откуда $h(x_1) < 0$, $h(x_2) < 0$, и поэтому на отрезке $[x_2;\ x_1]$ линейная функция $h(x)$ не обращается в нуль, так что либо $x_0 < x_2 < x_1$, либо $x_2 < x_1 < x_0$.

Если $x_0 < x_2 < x_1$, то x_0 лежит в промежутке убывания обоих трехчленов, так что $f'(x_0) < 0$, $g'(x_0) < 0$. Кроме того, $h(x_0) > h(x_2)$, так что $h(x)$ — убывающая функция, $h'(x) < 0$ для любого x, и в частности, $h'(x_0) < 0$, то есть $f'(x_0) - g'(x_0) < 0$. Поэтому произведение $g'(x_0)[f'(x_0) - g'(x_0)]$ положительно.

Аналогично рассматривается случай $x_2 < x_1 < x_0$.

Достаточность (⇐). Пусть $f(x_0) > 0$, и предположим сначала, что $g'(x_0) > 0$, $f'(x_0) - g'(x_0) > 0$. Тогда оба корня $g(x)$ меньше x_0, то есть $x_4 < x_3 < x_0$. Кроме того, $h(x)$ — возрастающая функция, так что $h(x_4) < x_3 < h(x_0)$, откуда $f(x_4) < 0$, $f(x_3) < 0$. Поэтому $x_2 < x_4 < x_1$, $x_2 < x_3 < x_1$, то есть $x_2 < x_4 < x_3 < x_1$.

Аналогично рассматривается случай $g'(x_0) < 0$, $f'(x_0) - g'(x_0) < 0$.

Решение неравенств

Применение доказанных критериев во многих случаях облегчает решение неравенств. Переходя к конкретным примерам, заметим, что выражение $f'(x_0) - g'(x_0)$, фактически фигурирующее в критериях 2—5, равно разности $p - r$. Поэтому на практике, например, критерием 2 удобно пользоваться в виде $(f(x_0) < 0,\ p > r)$.

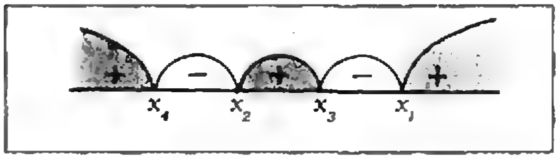


Рис. 8.

Решим теперь несколько неравенств.

1. $(x^2 + 13x - 49)(x^2 + 14x - 50) > 0$. Обозначая $f(x) = x^2 - 13x - 49$, $g(x) = x^2 + 14x - 50$, мы легко находим, что $x_0 = 1$, $f(1) = -35$, и так как $13 < 14$ (см. критерий 5), корни этих трехчленов связаны неравенствами $x_4 < x_2 < x_3 < x_1$. Применяя *метод интервалов* (см. «Квант», № 12, 1985, с. 18 и рисунок 8), находим решения данного неравенства: $x < x_4$, $x_2 < x < x_3$, $x > x_1$, или, выписывая корни,

$$x < -7 - 3\sqrt{11},\ -\frac{13 + \sqrt{365}}{2} < x < -7 + 3\sqrt{11},\ x > \frac{\sqrt{365} - 13}{2}.$$

2. $|x^2 + 6x - 11| < -2x^2 - 13x + 24$. Перепишем это неравенство в виде

$$2x^2 + 13x - 24 < x^2 + 6x - 11 < -2x^2 - 13x + 24.$$

Мы должны, следовательно, решить систему неравенств $f(x) < 0$, $g(x) < 0$, где

$$f(x) = 3x^2 + 21x - 39,$$
$$g(x) = 3x^2 + 19x - 35$$

(мы умножим трехчлен $f(x)$ на 3, чтобы уравнять старшие коэффициенты $f(x)$ и $g(x)$).

Имеем: $x_0 = 2$, $f(2) > 0$, $g'(2) > 0$, $p - r > 0$ и (см. критерий 3) $x_2 < x_4 < x_3 < x_1$. Следовательно, решениями системы $f(x) < 0$, $g(x) < 0$, а значит, и исходного неравенства являются значения $x_4 < x < x_3$, то есть

$$-\frac{19 + \sqrt{781}}{2} < x < \frac{\sqrt{781} - 19}{2}.$$

3. $|x^2 + 6x - 11| \leqslant |2x^2 + 13x - 26|$.

Поскольку обе части неравенства неотрицательны, после возведения в квадрат его можно записать в виде

$$(x^2 + 6x - 11)^2 \leqslant (2x^2 + 13x - 26)^2,$$

и, перенося все в правую часть и разлагая разность квадратов на множители, получаем неравенство $f(x)g(x) \geqslant 0$, где

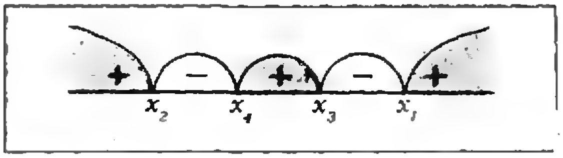
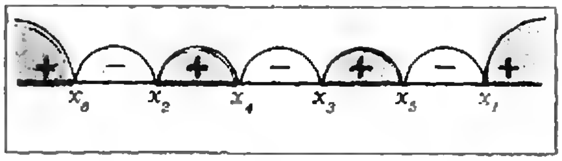


Рис. 9.



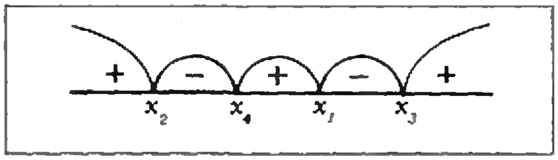


Рис. 11.

$$f(x)=3x^2+21x-45,$$
$$g(x)=3x^2+19x-37.$$

Тогда $x_0=4$, $f(4)>0$, $g'(4)>0$, $p-r>0$ и снова по критерию 3 $x_2<x_4<x_3<x_1$. Применяя метод интервалов, получаем решения исходного неравенства (см. рис. 9):

$$x\leqslant-\frac{7+\sqrt{109}}{2},\ -\frac{19+\sqrt{805}}{6}\leqslant x\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\sqrt{805}-19}{6},\ x\geqslant\frac{\sqrt{109}-7}{2}.$$

4. $\dfrac{x^2-x-4}{4-|3x^2-2x-7|}\leqslant 0.$

Умножим обе части этого неравенства на положительное выражение $(4+|3x^2-2x-7|)^{-1}$. Разложив на множители разность квадратов в знаменателе, после упрощений получим неравенство

$$\frac{x^2-x-4}{(3x^2-2x-3)(3x^2-2x-11)}\geqslant 0.$$

Положив $f(x)=3x^2-3x-12$, $g(x)=3x^2-2x-3$, $h(x)=3x^2-2x-11$, будем выяснять взаимное расположение их корней $x_{1,2}$, $x_{3,4}$, $x_{5,6}$.

Коэффициенты при x у трехчленов $g(x)$ и $h(x)$ равны, так что наши критерии неприменимы. Однако это обстоятельство даже упрощает решение. Действительно, $h(x)=g(x)-8$, так что $h(x_{3,4})=g(x_{3,4})-8=-8<0$, и следовательно, корни $g(x)$ расположены между корнями $h(x)$, то есть

$$x_6<x_4<x_3<x_5.$$

Для трехчленов $f(x)$ и $g(x)$ имеем $x_0=-9$,

$$f(-9)>0,\quad f'(-9)<0,\quad g'(-9)<0,$$
$$-3<-2,$$

и по критерию 3

$$x_2<x_4<x_3<x_1.$$

Для трехчленов $f(x)$ и $h(x)$ имеем $x_0=-1$, $f(-1)<0$, $-3<-2$, и по критерию 5

$$x_6<x_2<x_5<x_1.$$

Таким образом, $x_6<x_2<x_4<x_3<x_5<x_1$, и следовательно, решениями данного неравенства (см. рис. 10) являются

$$x<\frac{1-\sqrt{34}}{3},\ \frac{1-\sqrt{17}}{2}\leqslant x<\frac{1-\sqrt{10}}{3},$$
$$\frac{1+\sqrt{10}}{3}<x<\frac{1+\sqrt{34}}{3},\ x\geqslant\frac{1+\sqrt{17}}{2}.$$

5. $(x^2+2x+4-a)(x^2-2x-a)<0.$

Положим $f(x)=x^2+2x+4-a$, $g(x)=x^2-2x-a$. Заметим, что если дискриминант одного из этих трехчленов отрицателен, то этот трехчлен положителен при всех x, и для соответствующих значений a данное неравенство сводится к квадратному. Рассмотрение этих случаев мы предоставляем читателям и будем считать, что оба дискриминанта положительны, что выполняется при $a>3$. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ имеют по два различных корня $x_{1,2}$ и $x_{3,4}$. При этом $x_0=-1$, $f(-1)=3-a<0$, $2>-2$ и по критерию 2 $x_2<x_4<x_1<x_3$. Поэтому при $a>3$ решениями данного неравенства являются (см. рис. 11)

$$-1-\sqrt{a-3}<x<1-\sqrt{a+1},$$
$$-1+\sqrt{a-3}<x<1+\sqrt{a+1}.$$

Полное решение неравенства с учетом «особых» значений параметра $a=3$ и $a=-1$ (когда один из дискриминантов равен 0) записывается в виде: при $a\leqslant-1$ решений нет; при $-1<a<3$ получаем $1-\sqrt{a+1}<x<1+\sqrt{a+1}$; при $a>3$ получаем $-1-\sqrt{a-3}<x<1-\sqrt{a+1}$, $-1+\sqrt{a-3}<x<1+\sqrt{a+1}$.

6. *При каких значениях a система неравенств*

$$2x^2-3ax-9\leqslant 0,\ x^2+ax-2\geqslant 0$$

имеет решение?

Заметим, что каждый из квадратных трехчленов

$$f(x)=2x^2-3ax-9 \text{ и}$$
$$g(x)=2x^2+2ax-4$$

имеет два различных корня, и

$$f(x)\leqslant 0\Leftrightarrow x_2\leqslant x\leqslant x_1,$$
$$g(x)\geqslant 0\Leftrightarrow x\leqslant x_4 \text{ или } x\geqslant x_3.$$

Для того чтобы данная система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы отрезок $[x_2;\ x_1]$ имел хотя бы одну общую точку с одним из лучей $[-\infty;\ x_4]$ и $[x_3;\ +\infty]$. Это выполняется (без учета возможности совпадения корней) во всех наших критериях, кроме четвертого: система не имеет решений тогда и только тогда, когда $x_4 < x_2 < x_1 < x_3$.

Так как $f(x)=g(x) \Leftrightarrow ax=-1$, то при $a \neq 0$ имеем $x_0=-\frac{1}{a}$,

$$f\left(-\frac{1}{a}\right)=\frac{2}{a^2}-6,\quad f'\left(-\frac{1}{a}\right)=-\frac{4}{a}-3a,$$

$$g'\left(-\frac{1}{a}\right)=-\frac{4}{a}+2a$$

и по критерию 4 должна выполняться система неравенств

$$2-6a^2>0,\quad -\left(\frac{4}{a}+3a\right)5a>0.$$

Легко убедиться, что эта система не имеет решений, так что «плохих» значений $a \neq 0$ не существует, то есть при любых $a \neq 0$ данная система имеет решение. Поскольку при $a=0$ она также имеет решение, решениями задачи 6 являются все значения a.

7. *При каких значениях a множество решений системы неравенств* $x^2+2x+a+1 \geqslant 0,\ x^2+x+2a-1 \leqslant 0$ *представляет собой отрезок длины 1?*

Дискриминанты трехчленов

$$f(x)=x^2+2x+a+1 \text{ и }$$
$$g(x)=x^2+x+2a-1$$

равны соответственно $-4a$ и $5-8a$, поэтому при $a>5/8$ заданная система не имеет решений, а при $0<a<5/8$ она равносильна неравенству $g(x) \leqslant 0$ и выполняется на отрезке $[x_4;\ x_3]$. Из условия

$$x_3-x_4=1 \Leftrightarrow \sqrt{5-8a}=1 \Leftrightarrow a=1/2$$

и так как $0<1/2<5/8$, получаем, что $a=1/2$ является решением задачи.

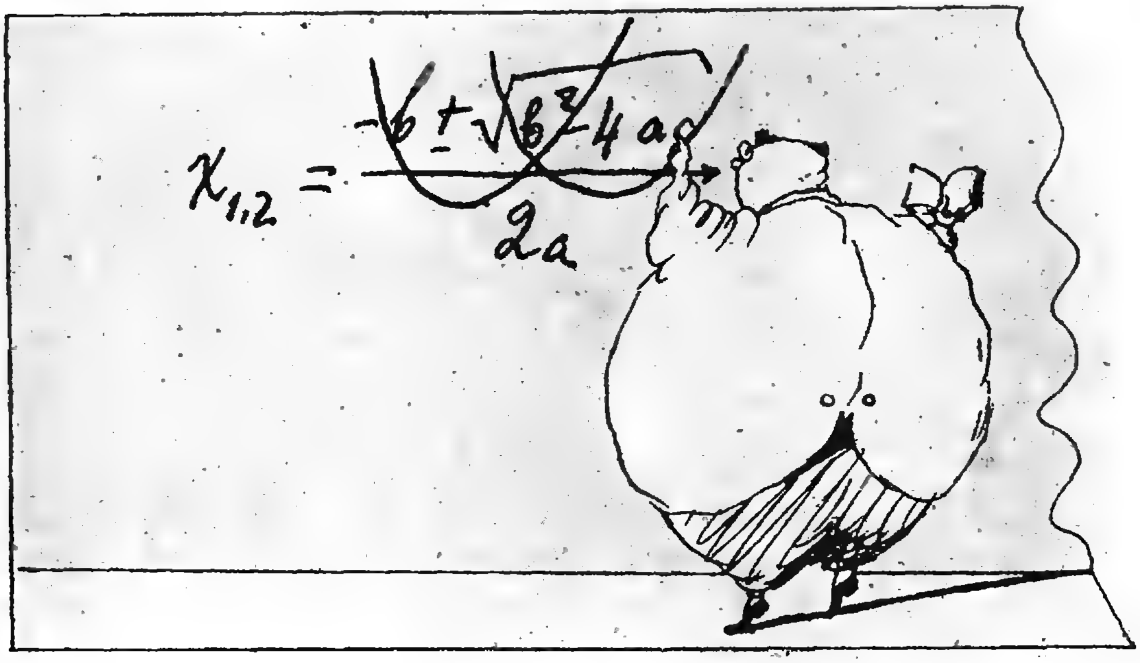
При $a=0$ и при $a=5/8$ решениями системы являются соответственно $-(1+\sqrt{5})/2<x<(\sqrt{5}-1)/2$ и $x=-1/2$, так что $a=0$ и $a=5/8$ не являются решениями задачи.

Далее считаем, что $a<0$. Находим $x_0=a-2$, $f(a-2)=a^2-a+1>0$, $f'(a-2)=2a-2<0$ и $2>1$, так что (см. критерий 4) $x_4<x_2<x_1<x_3$. Поэтому условие задачи выполняется при $x_1-x_2=1$, откуда находим $a=-1$. Ответ: $a=-1$ и $a=1/2$.

Заметим, что критерии 1—6 не предусматривают случая, когда трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют общий корень. На практике, как правило, случай совпадения корней лучше рассматривать отдельно, как «особый».

Упражнения.
Решите неравенства:

1. $|x^2+10x+5|<|2x^2+21x+8|$.
2. $|x-a|<3x-x^2-1$.
3. $16a^4x^4-8a^2x^2+16x+a-4 \geqslant 0$ $(a>0)$.
4. Решите систему неравенств $3x^2+2kx-k-1 \leqslant 0$ $(k=1, 2, \ldots, 10)$.



Путешествия по графам

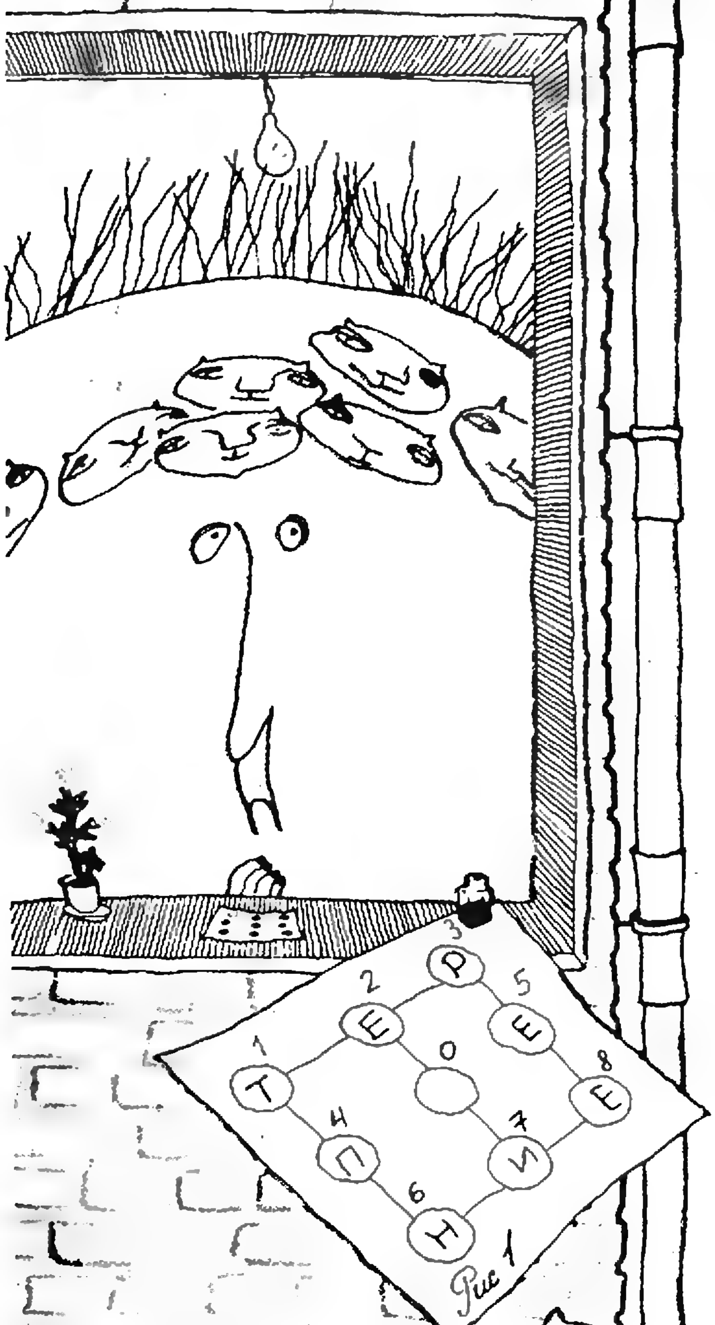
Д. И. ВАКАРЕЛОВ (НРБ)

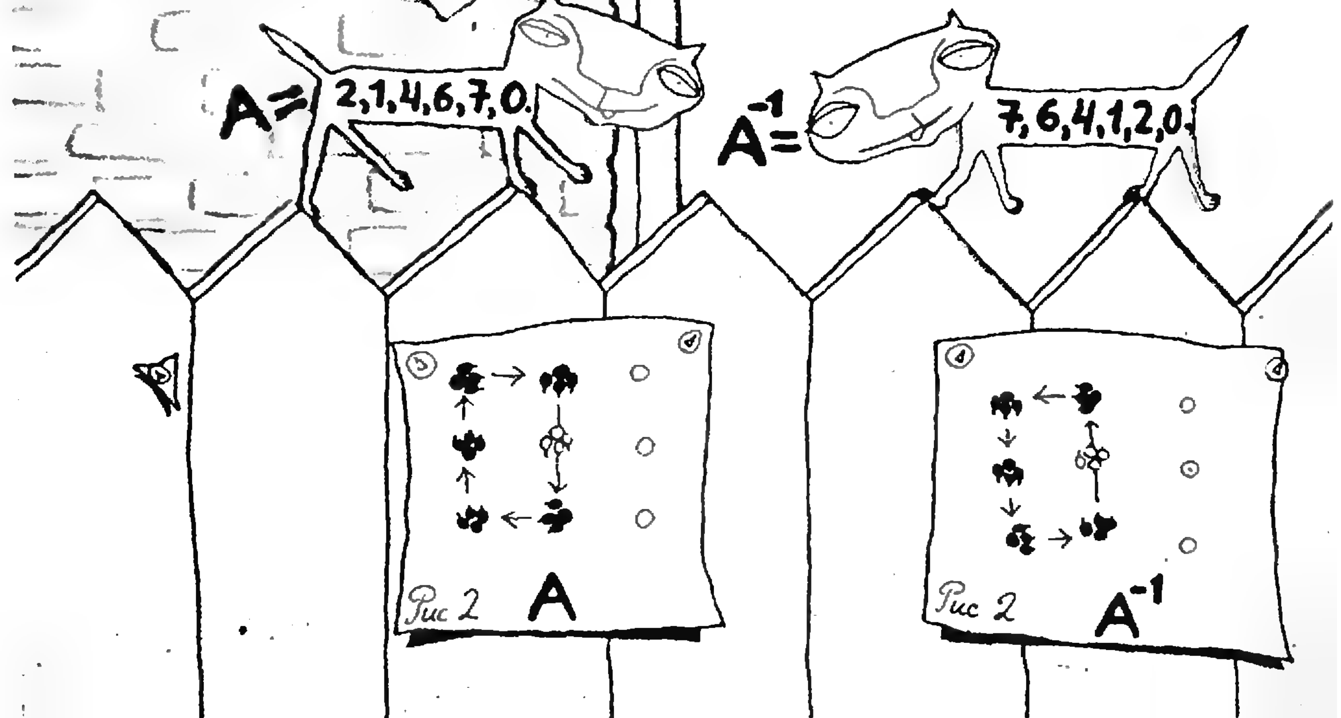
Появление знаменитого кубика Рубика вызвало большой интерес к головоломкам и играм, основанным на перестановках каких-либо предметов. Для математика такие головоломки интересны прежде всего потому, что поиск их решения подчас представляет собой весьма непростую математическую задачу, требующую большого интеллектуального напряжения и остроумия.

Мы предлагаем вам широкий класс игр, обобщающих знаменитую игру в «пятнадцать» Сэма Ллойда. Некоторые из них по трудности не уступают кубику Рубика, причем, в отличие от него, очень просты в изготовлении, так что каждый может придумать и изготовить сколько угодно таких головоломок. Мы расскажем о двух играх этого класса, а затем дадим их общее описание.

Головоломка ТЕРПЕНИЕ

Вырежьте из картона восемь кружков с пятикопеечную монету и напишите





на каждом из них одну из букв слова ТЕРПЕНИЕ. На листе бумаги начертите схему, изображенную на рисунке 1, которую будем называть *игровым полем*. Кружки игрового поля будем называть *ячейками*, а написанные около них числа — *номерами* ячеек. Ячейки, соединенные отрезками, будем называть *соседними*. Расположите кружки-фишки в произвольном порядке в ячейках игрового поля так, чтобы центральная ячейка (№ 0) осталась свободной. Под *ходом* будем понимать перемещение некоторой фишки в соседнюю с ней свободную ячейку. Первым ходом игры может быть перемещение фишки из ячейки с номером 2 или 7 в ячейку с номером 0. Цель игры состоит в том, чтобы посредством серии ходов привести произвольно расставленные фишки в конфигурацию, показанную на рисунке 1.

А пока попробуйте, не читая статью дальше, вооружиться терпением и самостоятельно решить головоломку ТЕРПЕНИЕ. Для этого сначала решите более легкую задачу.

Задача 1. *Из произвольной конфигурации фишек на игровом поле посредством серии ходов получите конфигурацию, в которой буквы* Т, П, Н *и* И *оказываются на своем месте.*

В результате мы получим либо стандартную конфигурацию, либо одну из следующих трех:

$$a=\begin{matrix}\text{Т}&\text{Р}&\text{Е}\\ \text{П}&&\text{Е}\\ \text{Н}&\text{И}&\text{Е}\end{matrix}\qquad b=\begin{matrix}\text{Т}&\text{Е}&\text{Е}\\ \text{П}&&\text{Р}\\ \text{Н}&\text{И}&\text{Е}\end{matrix}\qquad c=\begin{matrix}\text{Т}&\text{Е}&\text{Е}\\ \text{П}&&\text{Е}\\ \text{Н}&\text{И}&\text{Р}\end{matrix}$$

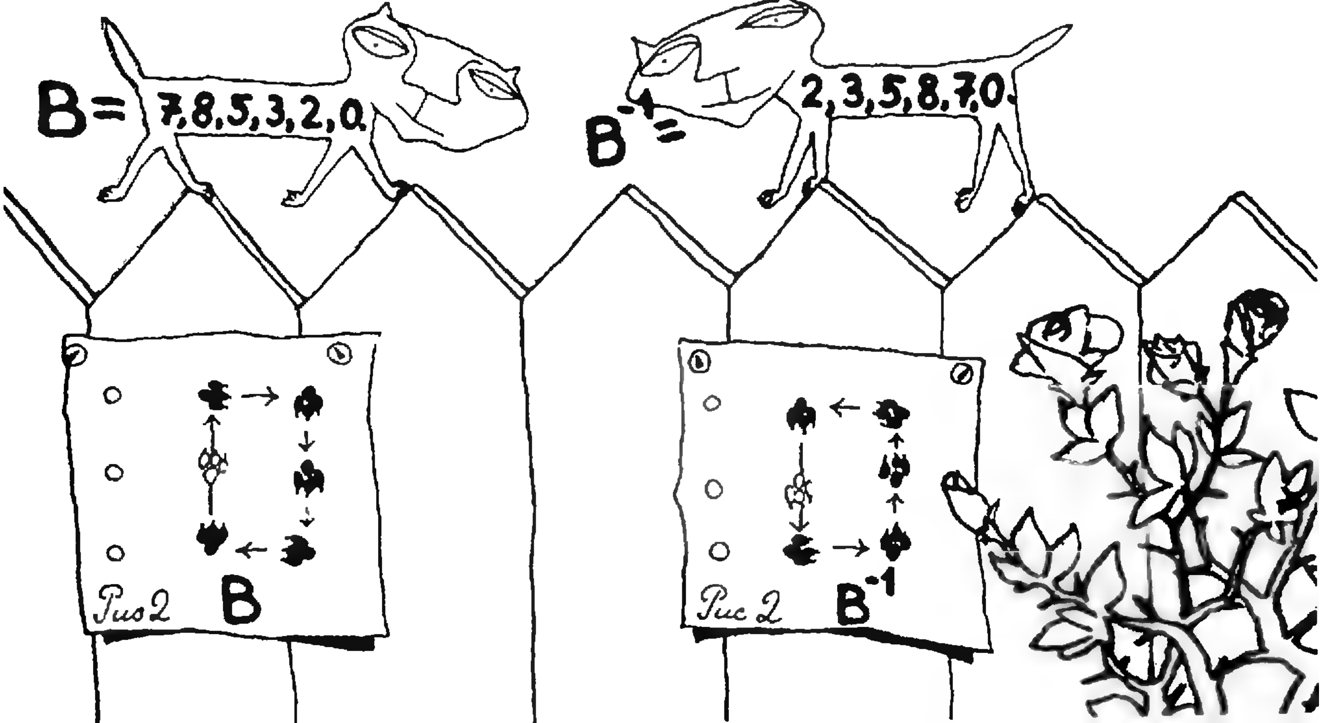
Поэтому возникает следующая задача.

Задача 2. *Найдите три последовательности ходов, X, Y и Z, которые соответственно преобразуют конфигурации a, b и c в стандартную.* Последовательность ходов будем записывать последовательностью номеров ячеек, занимаемых фишками, которыми делается очередной ход.

Вот одно из решений задачи 2, дающее вместе с решением задачи 1 алгоритм решения игры ТЕРПЕНИЕ.
X = 2,3,5,8,7,0,2,1,4,6,7,8,5,3,2,0,7,8,5,3,2,0,7,6,4,1,2,3,5,8,7,0,2,1,4,6,7,0,2,3,5,8,7,6,4,1,2,3,5,8,7,0 (52 хода);
Y = 7,8,5,3,2,0,7,8,5,3,2,0,7,6,4,1,2,3,5,8,7,0,2,1,4,6,7,0,2,3,5,8,7,6,4,1,2,0,7,8,5,3,2,0,7,8,5,3,2,1,4,6,7,0 (54 хода);
Z = 7,6,4,1,2,3,5,8,7,0,2,3,5,8,7,0,2,1,4,6,7,8,5,3,2,0,7,6,4,1,2,0,7,8,5,3,2,1,4,6,7,0,2,3,5,8,7,0,2,3,5,8,7,0 (54 хода).
Любителям рекордов предлагаем найти более короткие алгоритмы.

Алгебра и геометрия допустимых преобразований

Предложенный выше алгоритм имеет существенный недостаток: его трудно запомнить. Кроме того, неясно, каким образом получены последовательности X, Y и Z. Трудно рассчитывать, что только с помощью метода проб и ошибок можно получать столь длинные последовательности ходов, осуществляющих подходящие преобразования. Попробуем поэтому более пристально разобраться в «устройстве» последовательностей X, Y и Z. Нетрудно заметить, что определенные серии ходов в них повторяются. Это наводит на мысль выбрать несколько та-



ких серий, действие которых обозримо и легко запоминается, а затем составлять из них любую последовательность ходов. При этом оказываются полезными следующие четыре серии (*ячейка с номером* 0 *свободна перед их выполнением*):
$A=2,1,4,6,7,0$, $A^{-1}=7,6,4,1,2,0$, $B=7,8,5,3,2,0$, $B^{-1}=2,3,5,8,7,0$. Обозначения A^{-1} и B^{-1} показывают, что действия этих серий обратны действиям серий A и B.

Условимся A, A^{-1}, B и B^{-1} называть *элементарными сериями*, а преобразования, которые они производят — *элементарными* (*допустимыми*) преобразованиями. На рисунке 2 изображены наглядные *схемы-графики*, демонстрирующие действия этих серий на фишки игрового поля.

Элементарные серии имеют одно полезное свойство: после их выполнения центральная ячейка снова становится свободной, что дает возможность выполнять их в произвольном порядке одну за другой. Конечную последовательность элементарных серий, например A, AB, $A^{-1}BA$, будем называть *допустимой серией* или *формулой*, а ее действие на фишки игрового поля — *допустимым преобразованием*. При исследовании действия различных формул условимся использовать фишки, на которых вместо букв написаны цифры от 1 до 8. Тогда *стандартной конфигурацией* фишек будем считать ту, при которой каждая фишка находится в ячейке с соответствующим ей номером.

Опишем «алгебру допустимых серий», которая нам поможет производить алгебраические преобразования допустимых серий с целью их упрощения.

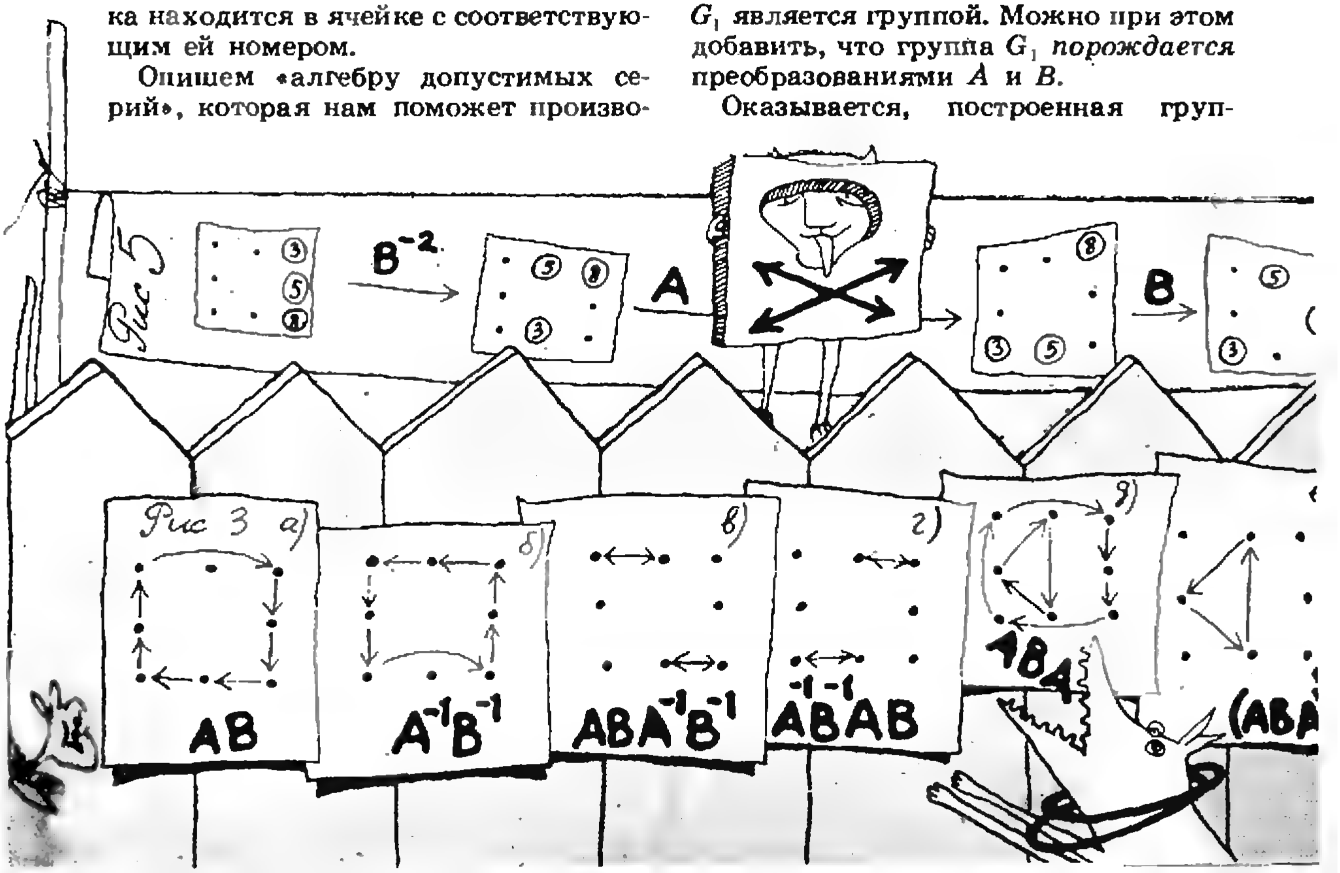
Если две формулы X и Y производят одинаковые преобразования, то будем писать $X=Y$. Пустую серию ходов, которая не изменяет конфигурацию будем обозначать символом 1. Если X и Y — две допустимые серии, то произведение XY тоже является допустимой серией, действие которой состоит в последовательном выполнении X и Y. Нетрудно видеть, что $A^{-1}A=AA^{-1}=1$, $B^{-1}B=BB^{-1}=1$. Аналогично, для любого допустимого преобразования X имеется *обратное*, то есть такое, что $X^{-1}X=XX^{-1}=1$.

Пусть G_1 — множество всех допустимых преобразований. В этом множестве определена операция *умножения*, то есть для любых X и Y из G_1 определено *произведение* XY, состоящее в последовательном выполнении преобразования X, а затем — преобразования Y.

Это умножение обладает следующими свойствами: 1) $(XY)Z=X(YZ)$; 2) существует преобразование 1 такое, что $X\cdot 1=1\cdot X=X$; 3) для любого X существует X^{-1} такое, что $X^{-1}X=XX^{-1}=1$.

В математике произвольное множество G, в котором введена операция умножения, обладающая свойствами 1—3, называется *группой*. Мы показали, что построенная нами совокупность допустимых преобразований G_1 является группой. Можно при этом добавить, что группа G_1 *порождается* преобразованиями A и B.

Оказывается, построенная груп-



па G_1 обладает достаточным набором преобразований для решения головоломки ТЕРПЕНИЕ.

Задача 3. *Пусть дана произвольная конфигурация фишек игры ТЕРПЕНИЕ со свободной центральной ячейкой. Докажите, что существует формула X из G, которая дает решение игры ТЕРПЕНИЕ.*

Решение этой задачи будет получено после того, как мы найдем алгоритм решения игры ТЕРПЕНИЕ.

Мы выясним также, какие конфигурации фишек, на которых написаны номера от 1 до 8, могут быть приведены к стандартной конфигурации.

Упражнения

1. Пусть некоторое преобразование $X \in G_1$ допускает запись $X = X_1 X_2 \ldots X_n$, где $X_i \in G_1$. Докажите, что $X^{-1} = X_n^{-1} \cdot X_{n-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot X_1^{-1}$.

2. Нарисуйте графики действия преобразований A^2, A^3, B^2, B^3, $ABAB^{-1}A^{-1}$.

3. Пусть некоторая фишка неподвижна при выполнении преобразования X. Докажите, что она останется неподвижной и при преобразовании $P^{-1}XP$, где P — допустимое преобразование.

4. Докажите тождества $A^5 = B^6 = 1$, $A^4 = A^{-1}$, $A^3 = A^{-2}$, $(ABA^{-1})^4 = AB^{-1}A^{-1}$.

Тождества, подобные приведенным в упражнении 4, помогают упрощать формулы, делая их запись более компактной, а в некоторых случаях — устанавливать тождественность формул.

«Программирование формул»

При поисках алгоритма решения головоломки наиболее трудным делом является описание формул с заранее заданными графиками. Это немного напоминает программирование, при котором команды — это элементарные преобразования, а программы — формулы, то есть последовательности команд.

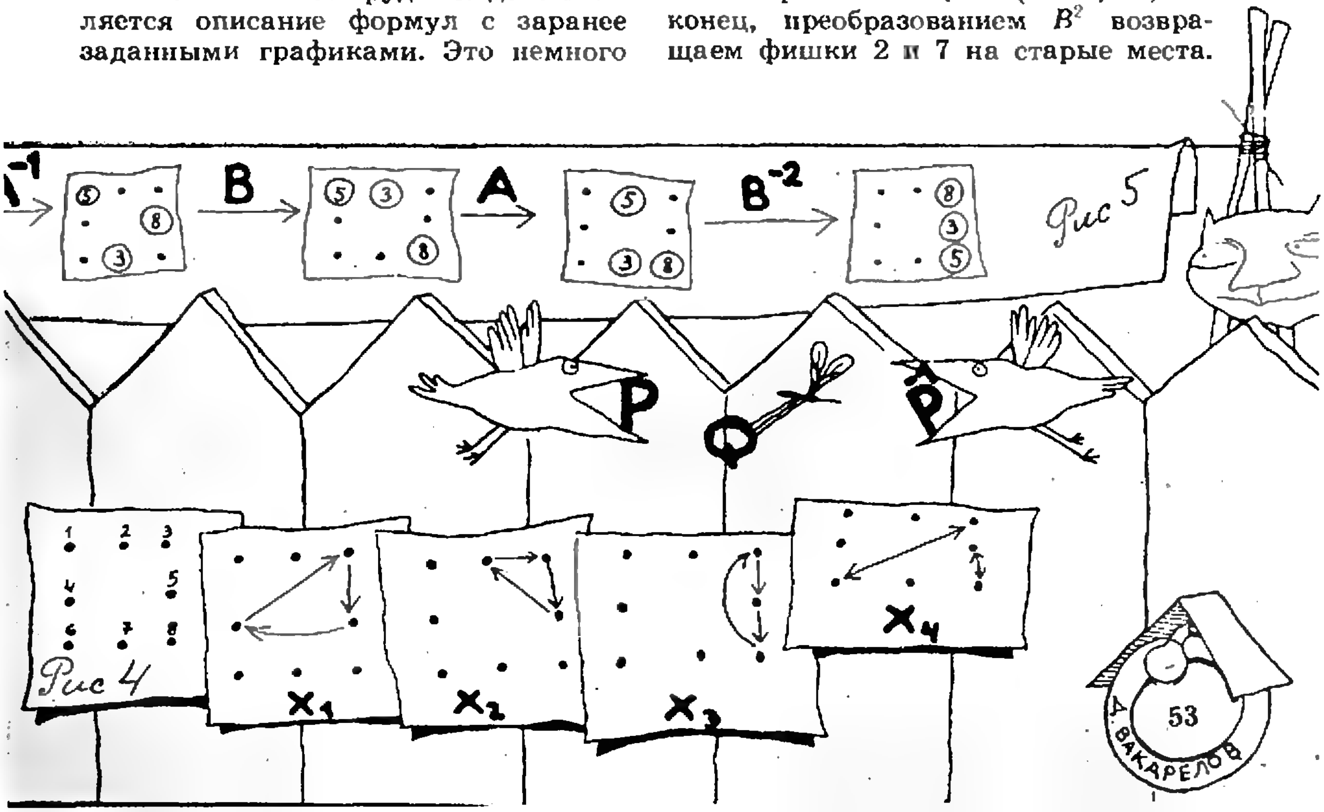
Рассмотрим некоторые практические приемы этого своеобразного программирования.

А. Преобразования $ABA^{-1}B^{-1}$ и $A^{-1}B^{-1}AB$, действие которых показано на рисунках 3, *в*, *г*, называются *коммутаторами*. Они интересны тем, что переставляют некоторые пары точек, оставляя остальные точки неподвижными.

Б. Очень интересно преобразование ABA (рис. 3, *д*), распадающееся на два цикла. Для него $(ABA)^5$ — это цикл, показанный на рисунке 3, *е*.

В задаче 2 для преобразования конфигурации *а* к стандартному виду нужно было найти последовательность ходов, при которой буквы P и E оказываются на своих местах. Легко видеть, что этого можно добиться с помощью преобразования X_2, график которого показан на рисунке 4, *б*.

В. Рассмотрим операцию, которая в теории групп называется *сопряжением*. С ее помощью можно действие некоторого преобразования перенести на другую зону игрового поля. Например, найдем формулу для преобразования X_1 (см. рис. 4, *б*). Для этого с помощью преобразования B^{-2} перемещаем фишку 3 на место фишки 7, а фишку 5 — на место фишки 2. Затем применяем цикл $(ABA)^5$ и, наконец, преобразованием B^2 возвращаем фишки 2 и 7 на старые места.



Получился цикл 4→3→5→4 с формулой $B^{-2}(ABA)^5B^2$.

В общем случае операция сопряжения имеет вид $Q_1=PQP^{-1}$. При этом говорят, что преобразование Q *сопряжено* с преобразованием Q_1. В нашем случае $Q=(ABA)^5$, $P=B^{-2}$.

Аналогично $X_2=A^{-2}X_1A^2$ и $X_3=B^{-1}X_2B$. Отметим, что X_2 и X_3 осуществляют такое же действие, как преобразования X и Z из задачи 2, но имеют значительно большую длину. Преобразование Y, как легко понять, допускает запись $Y=Z^2$.

Сопряжением коммутатора $A^{-1}B^{-1}AB$ с B^{-2} получаем формулу для $X_1=B^{-2}(A^{-1}B^{-1}AB)B^2=B^{-2}A^{-1}B^{-1}AB^{-2}$ (мы воспользовались тем, что $B^3=B^{-2}$).

Г. При построении формул с нужными свойствами можно действовать и иначе. Осуществим для примера цикл 3→5→8→3. Будем выполнять перемещения фишек 3, 5, 8, не интересуясь судьбой остальных фишек, так, как показано на рисунке 5. В результате мы получим нужную перестановку с формулой $B^{-2}ABA^{-1}BAB^{-2}$. Теперь нужно проследить, что же происходит с остальными фишками. Для этого строим график полученного преобразования (рисунок 6, *а*). Получился еще один цикл длины 5, который можно уничтожить, даже не возведя в 5-ю степень, а с помощью предварительного выполнения операции A^{-1}. Итак, $X_3=A^{-1}B^{-2}ABA^{-1}BAB^{-2}$.

Алгоритм решения игры ТЕРПЕНИЕ

Мы будем *пользоваться* формулой для X_4 и операцией сопряжения. Решение осуществляется в два этапа.

Первый этап. *Установка на свои места трех букв* Е. Для этого специальные формулы не нужны, хотя при желании можно их выписать для каждой конкретной позиции.

Второй этап. *Установка на свои места остальных букв.* Она осуществляется в зависимости от содержимого ячейки 3 преобразованиями, показанными в следующей таблице:

Буква в ячейке 8	Преобразование, ставящее ее на место
Т	$A^{-2}X_4A^2=A^{-2}B^{-2}A^{-1}B^{-1}AB^{-2}A^2$
П	$A^{-1}X_4A=A^{-1}B^{-2}A^{-1}B^{-1}AB^{-2}A$
Н	$X_4=B^{-2}A^{-1}B^{-1}AB^{-2}$
И	$AX_4A^{-1}=AB^{-2}A^{-1}B^{-1}AB^{-2}A^{-1}$
Р	X_4 — если стандартная конфигурация еще не достигнута

В приведенном алгоритме существенно используется то, что в слове ТЕРПЕНИЕ две буквы Е.

Найденный алгоритм решения игры ТЕРПЕНИЕ полностью решает задачу 3. Но мы еще не знаем, какие конфигурации приводятся к стандартной. В следующих упражнениях игровое поле совпадает с полем игры ТЕРПЕНИЕ.

Упражнение 5. Запишите формулы для преобразований, заданных графиками на рисунках 6 *в*, *г*.

Упражнения

6. Получите алгоритмы решения игр для английского слова PATIENCE и болгарского слова ТЪРПЕНИЕ.

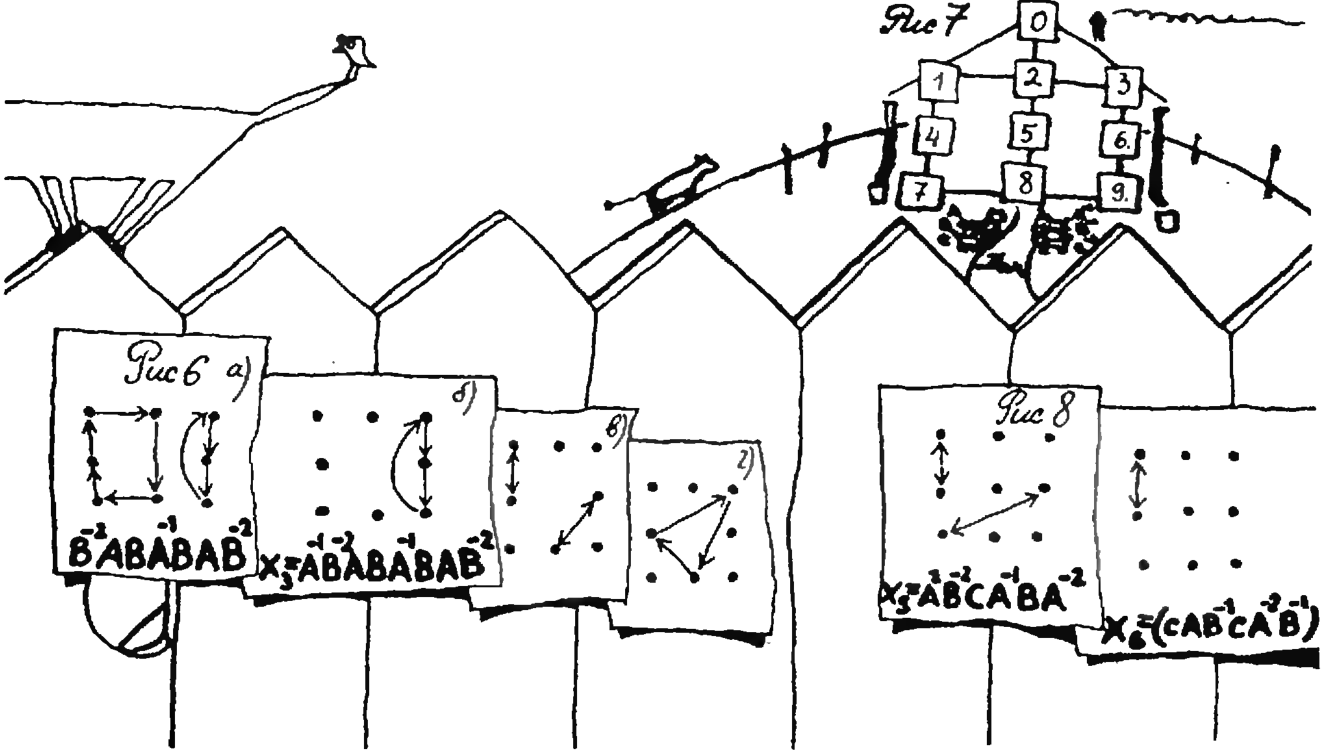


Рис 7
0
1
2
3
4
5
6.
7
8
9.
Рис 6 а)
$B^{-2}ABA^{-1}BAB^{-2}$
б)
$X_3=A^{-1}B^{-2}ABA^{-1}BAB^{-2}$
в)
г)
Рис 8
$X_5=A^{3}B^{-2}CA^{-1}BA^{-2}$
$X_6=(CAB^{-1}CA^{-3}B^{-1})$

7. Постройте теорию игр УПОРСТВО, ВЕРЕНИЦА, СМЕКАЛКА — в этих словах есть по две повторяющиеся буквы, но стоят они не на тех местах, как в игре ТЕРПЕНИЕ.

Группа игры ТЕРПЕНИЕ

Каждый элемент α группы G_1 переставляет фишки. Пусть $\alpha(i)$ — номер фишки, на место которой переходит фишка из ячейки i. Набор чисел $\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(8)$ называется *перестановкой* из чисел 1,2,...,8. Итак, каждому элементу группы G_1 соответствует некоторая перестановка.

Множество S_n всех перестановок множества из n элементов образует группу (произведение $\alpha\beta$ перестановок α и β заключается в их последовательном выполнении, то есть $(\alpha\beta)(i) = \beta(\alpha(i))$). Эта группа называется *симметрической* группой. Мы убедились, что группу G_1 можно считать частью группы S_8.

Пусть теперь $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_8)$ — некоторый многочлен от восьми переменных и $\alpha \in S_8$ — некоторая перестановка. Заменим теперь в многочлене f переменную x_1 на $x_{\alpha(1)}$, переменную x_2 — на $x_{\alpha(2)}$,..., переменную x_8 — на $x_{\alpha(8)}$. Мы получим новый многочлен

$$\alpha f = f(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, \ldots, x_{\alpha(8)}).$$

Понятно, что для двух перестановок α и β будет $(\alpha\beta)f = \beta(\alpha f)$.

Рассмотрим многочлен

$$P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)\ldots \ldots(x_2 - x_3)\cdot\ldots\cdot(x_2 - x_n)\cdot\ldots\cdot(x_{n-1} - x_n).$$

Перестановка $\alpha \in S_n$ называется *четной*, если $\alpha P_n = P_n$, и *нечетной*, если $\alpha P_n = -P_n$.

Упражнения

8. Докажите, что при перестановке любых двух переменных x_i и x_j многочлен P_n переходит в $-P_n$.

9. Любая перестановка либо четна, либо нечетна.

10. Если α и β — перестановки одинаковой четности, то $\alpha\beta$ — четная перестановка.

11. Если α и β — перестановки разной четности, то $\alpha\beta$ — нечетная перестановка.

12. Перестановки α и α^{-1} имеют одинаковую четность.

13. Перестановки, соответствующие элементарным сериям A, A^{-1}, B, B^{-1}, — четные.

Из упражнений 8—12 следует, что множество A_n всех четных перестановок образует группу. Эта группа называется *знакопеременной группой порядка n*.

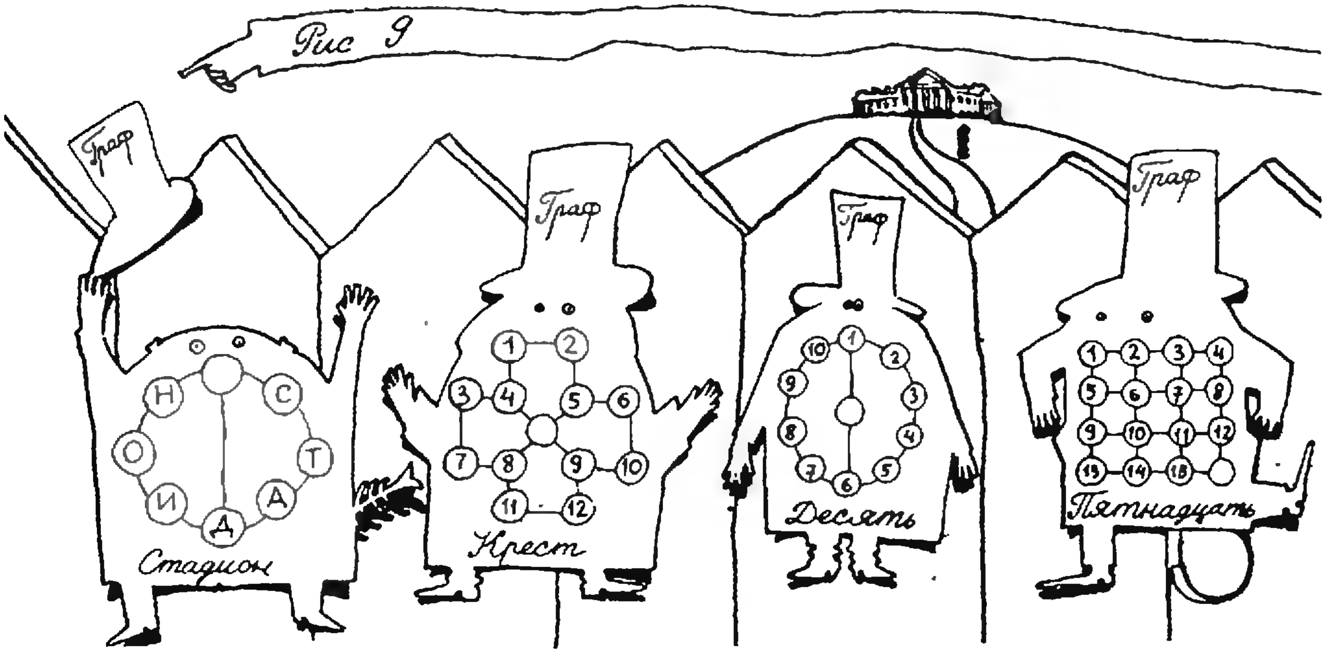
Из упражнения 13 следует, что $A_8 \supset G_1$. Пользуясь существованием алгоритма решения игры ТЕРПЕНИЕ и результатами упражнений 10—12, можно доказать, что $A_8 = G_1$. Следовательно, с помощью G_1 можно осуществить любую четную перестановку фишек 1,2,...,8 и нельзя осуществить никакую нечетную перестановку.

Упражнение 14. Докажите, что любую позицию можно перевести либо в стандартное положение, либо в такое, которое отличается от стандартного перестановкой фишек 5 и 8.

Головоломка ДОМ

Игровое поле этой игры изображено на рисунке 7. Фишки для игры занумерованы цифрами от 1 до 9. В качестве элементарных серий игры используются следующие:

$A = 1,4,7,8,5,2,0$; $A^{-1} = 2,5,8,7,4,1,0$;
$B = 2,5,8,9,6,3,0$; $B^{-1} = 3,6,9,8,5,2,0$;
$C = AB = 1,4,7,8,9,6,3,0$; $C^{-1} = 3,6,9,8,7,4,1,0$.



Алгоритм решения использует следующие две формулы:

$$X_5=A^2B^{-2}(ABA^{-1}B^{-1})B^2A^{-2}=$$
$$=A^2B^{-2}CA^{-1}BA^{-2};$$
$$X_6=(ABAB^{-1}ABA^{-2}B^{-1})^3=$$
$$=(CAB^{-1}CA^{-2}B^{-1})^3.$$

Эти формулы можно получить с помощью описанных выше приемов.

Этап 1. *Установка на места фишек 1,4,7 и 8.* Для этого специальных формул не требуется.

Этап 2. *Установка на места фишек 2,3,5,6 и 9.* Для этой цели используется формула X_5 (аналогично тому, как использовалась формула X_4 на этапе 2 алгоритма игры ТЕРПЕНИЕ). Отметим, что при каждом использовании формулы X_5 меняют свои места фишки 1 и 4. Поэтому в конце этапа они могут оказаться переставленными. Тогда с помощью формулы X_6 ставим их на свои места. Пусть G_2 — группа игры ДОМ.

Упражнение 15. Докажите, что группа G_2 совпадает с симметрической группой S_9. Указание. Доказательство следует из существования описанного выше алгоритма решения.

Путешествия по графам

Читателю уже должно быть ясно, как можно самостоятельно придумать новые игры типа ТЕРПЕНИЕ и ДОМ. На рисунке 9 приведены еще несколько примеров таких игр.

Упражнения

16. Найдите алгоритмы решения игр ПЯТНАДЦАТЬ, ДУМАЙ БЫСТРЕЕ, КОМБИНАТОР и КУБОЛОГИЯ. Докажите, что соответствующие им группы — знакопеременные (типа A_n).

Обратите внимание, что все игры из упражнения 16 содержат по две одинаковые фишки (в первой из них — это фишки 6 и 9).

17. Найдите алгоритмы решения игр СТАДИОН, КРЕСТ, ДЕСЯТЬ. Покажите, что соответствующие им группы симметрические (типа S_n).

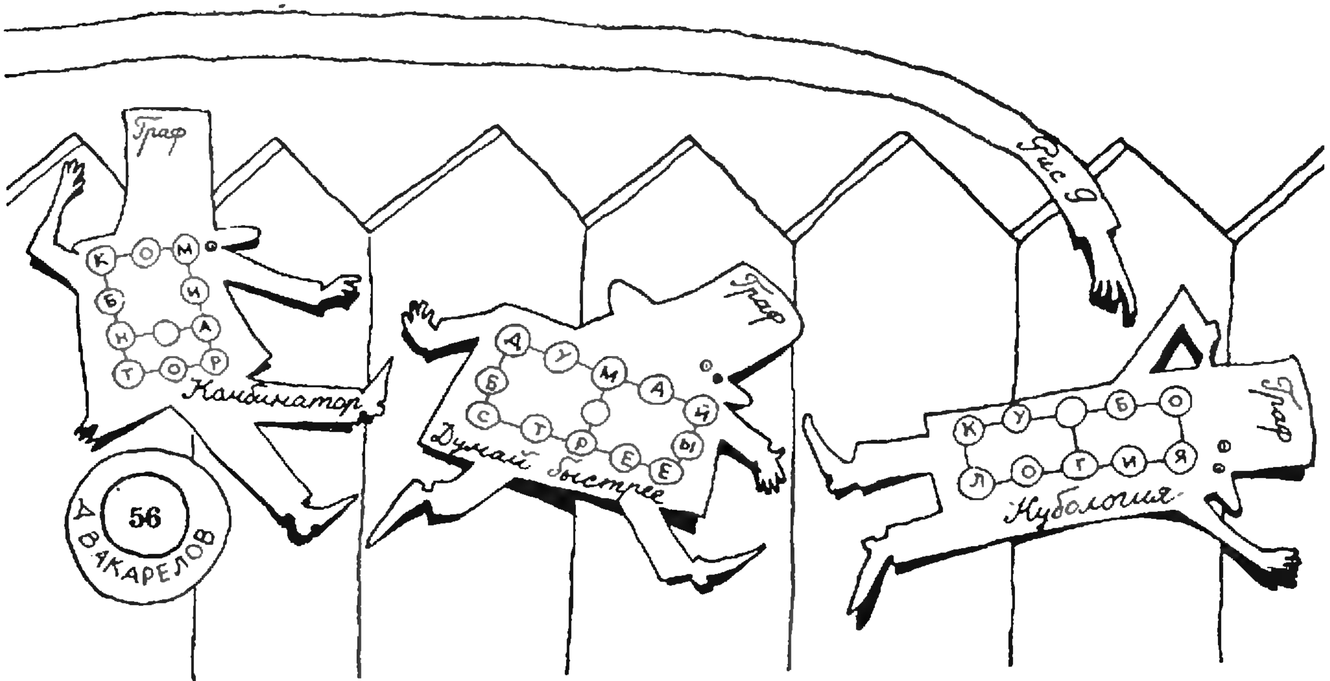
18. Докажите, что группы S_n и A_n содержат соответственно $n!=1{,}2\ldots n$ и $\frac{1}{2}\,n!$ элементов.

Фигуры, подобные игровым полям рассмотренных головоломок, называются *графами*. Отсюда их общее название — «путешествия по графам». Более точно, *граф* — это конечное множество точек, называемых *вершинами*, некоторые из которых соединены дугами, называемыми *ребрами графа*. Очевидно, что любой граф можно связать с одной или несколькими играми и группами перестановок, которые им соответствуют. Читатель, может быть, уже заметил, что группы рассмотренных игр являются либо знакопеременными (типа A_n), либо симметрическими (типа S_n). Оказывается, что это не случайно: при некоторых весьма общих ограничениях на структуру графов им всегда будут соответствовать группы либо типа A_n, либо типа S_n. Чтобы сформулировать более точно эту удивительную закономерность, нам понадобятся следующие определения.

Под *простым циклом длины k* ($k\geqslant 3$) будем понимать последовательность вершин графа $P_1,\ldots,P_k$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $P_1=P_k$ (то есть начальная и последняя вершина цикла совпадают);

2) P_i и P_{i+1} связаны ребром ($i=1,\ldots,k-1$),



3) $P_i \neq P_j$ при $i \neq j$ $(i, j=1,...,k-1)$.

Граф будем называть *циклическим*, если любые две вершины этого графа принадлежат некоторому простому циклу.

Теорема. *Пусть Г произвольный циклический граф с вершинами P_0, $P_1,...,P_n$, а G (Г) — группа игры «путешествие по Г» с фишками 1,..., n. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если все простые циклы Г имеют четную длину, то G (Г) совпадает с группой A_n;*

2) *если граф Г отличен от графа $Г_6$, изображенного на рисунке 10, и содержит хотя бы один простой цикл нечетной длины, то G (Г) совпадает с группой S_n.*

Доказательство этого утверждения мы опускаем. Заметим, что частные случаи этой теоремы уже доказаны ранее. Интерес представляет исключение, связанное с графом $Г_6$ (рис. 10). На ЭВМ были вычислены все перестановки группы $G(Г_6)$ и было установлено, что она является собственным подмножеством группы S_6, состоящим из 120 элементов. Если мы хотим, чтобы игра «путешествие по графу $Г_6$» всегда имела решение, то необходимо использовать по крайней мере три одинаковые фишки. Это — единственный граф с таким свойством.

Модификации игр

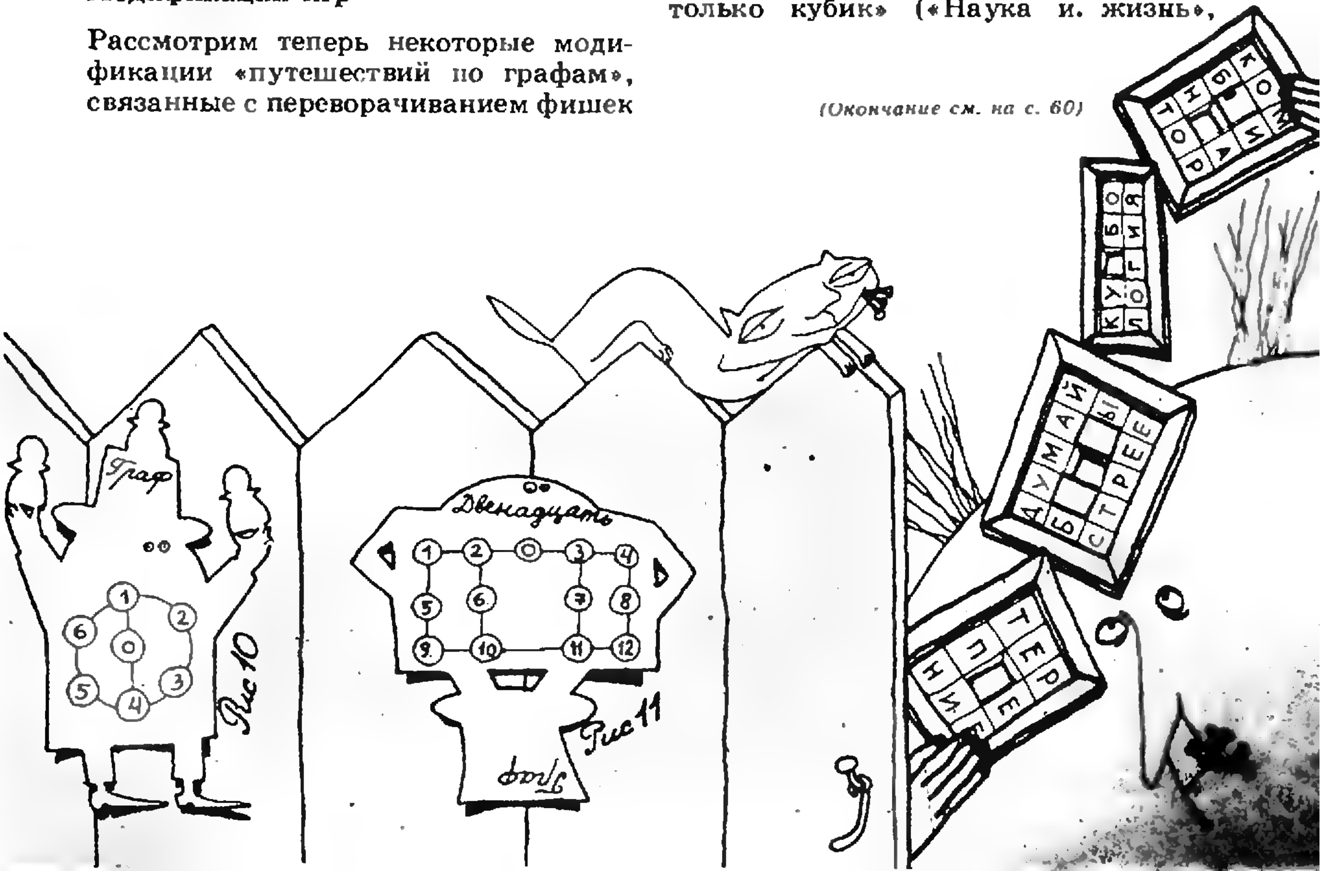
Рассмотрим теперь некоторые модификации «путешествий по графам», связанные с переворачиванием фишек и ограничениями на «правила движения».

Пусть фишки для игры ДОМ имеют квадратную форму и окрашены с двух сторон: одна сторона — в белый, а другая — в черный цвет. Поместим фишки на игровое поле, изображенное на рисунке 7, причем некоторые из них поместим белой стороной вверх, а некоторые — черной. Кроме старых правил передвижения фишек по игровому полю, введем одну новую операцию *R*: если ячейка с номером 0 свободна, то можно перевернуть одновременно все фишки, находящиеся в ячейках 4, 5 и 6. Цель игры — с помощью допустимых преобразований и операции *R* перевернуть все фишки белой стороной вверх («зажигание света в окнах»). Задача усложняется, если на белой стороне каждой фишки написать соответственно цифры от 1 до 9 и потребовать, чтобы в конце игры каждая фишка была не только белой стороной вверх, но и занимала ячейку с соответствующим ей номером. Эту игру будем называть СВЕТЯЩИЕСЯ ОКНА.

Упражнение 19. Найдите алгоритмы решения для обоих вариантов игры СВЕТЯЩИЕСЯ ОКНА.

Конечно же, это далеко не единственный прием введения эффекта переориентации фишек в играх типа «путешествие по графу». Например, в статье А. Калинина «Сначала был только кубик» («Наука и. жизнь»,

(Окончание см. на с. 60)



Заочная школа при НГУ

При Новосибирском Ордена Трудового Красного Знамени государственном университете им. Ленинского комсомола работает заочная школа (ЗШ) для учащихся 8—10 классов общеобразовательных школ Сибири, Дальнего Востока, Средней Азии и Урала.

Основная задача ЗШ — оказывать помощь в формировании и развитии у учащихся интереса к естественным наукам.

В ЗШ 5 отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 8—10 классов, на биологическое — только учащиеся 9 классов, на экономическое — только учащиеся 10 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки и факультативы, которые работают в школе под руководством учителя. Руководитель кружка набирает и зачисляет в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью. После этого члены кружка считаются учащимися ЗШ.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ, а также дополнительные материалы. Работы учащихся-заочников проверяют в ЗШ, а работы членов кружка — его руководитель (по желанию руководителя часть работ членов кружка может быть проверена и в ЗШ).

Ежегодно часть учащихся 8—9 классов ЗШ приглашается в Летнюю школу при НГУ (которая работает с 1 по 22 августа). Здесь они вместе с победителями Всесибирской олимпиады слушают лекции крупных ученых, решают интересные задачи на семинарах, знакомятся с университетом и научно-исследовательскими институтами Академгородка, отдыхают и развлекаются. На период зимних каникул учащиеся ЗШ из близлежащих областей приглашаются в Зимнюю школу при НГУ.

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо *до 30 сентября* прислать на имя директора ЗШ заявление, написанное на почтовой карточке, с просьбой выслать первое задание. Заявление необходимо оформить по следующему образцу:

1. Фамилия, имя, отчество (полностью, печатными буквами)	НИКОЛАЕВ ИГОРЬ ИВАНОВИЧ
2. Класс, в котором вы учитесь в своей школе	8 «а»
3. Отделение ЗШ, на котором вы желаете учиться (можно указать два отделения)	математическое (математическое и физическое)
4. Подробный домашний адрес с обязательным указанием индекса почтового отделения	632149, Новосибирская обл., с. Мезениха, ул. Андрианова, д. 28 «а», кв. 5.

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Заявление о приеме на математическое или на физическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ниже, *не позднее 15 октября*.

Решения задач нужно записать в простую ученическую тетрадь в клетку, оставляя поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работы отсылайте вместе с заявлением *только простой бандеролью* (тетрадь не перегибайте и не сворачивайте в трубочку). В тетрадь с решениями вложите листок размером 6×10 см с написанным на нем вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ).

Наш адрес: 630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 11,
Заочная школа при НГУ.

Первое задание по математике

8 класс

1. Вес сосновой шпалы 27,8 кг, а дубовой — 45,5 кг. Вес десяти шпал равен 384,2 кг. Сколько среди них сосновых?

2. Гаечный ключ имеет отверстие в форме квадрата со стороной 1 см. В каких пределах могут быть заключены размеры квадратной гайки, чтобы ее можно было отвинчивать этим ключом?

3. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты $(x;\ y)$ которых удовлетворяют условию

$$x<y-|2x-2|.$$

4. Сколько действительных решений имеет уравнение

$$3\sqrt{x}+x+2=0?$$

5. Докажите, что произведение четырех последовательных натуральных чисел делится на 24.

6. Найдите сумму чисел
$100^2-99^2+98^2-97^2+...+4^2-3^2+2^2-1^2$.

9 класс

1. В двух неодинаковых банках с водой растворили по килограммовой пачке сахара. Известно, что в одной из них содержание сахара составляет 40 %, а в другой — 30 %. Сколько процентов сахара будет в растворе, если содержимое банок слить вместе и перемешать?

2. В треугольнике ABC точка M — середина медианы, проведенной к стороне BC. Выразите вектор $\vec{MC}$ через векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

3. Три числа являются последовательными членами геометрической прогрессии. Если ко второму из них прибавить 2, то они будут образовывать арифметическую прогрессию, а если после этого к третьему числу прибавить 16, то они снова будут образовывать геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

4. Как с помощью циркуля и линейки построить треугольник по высоте и двум сторонам? Разберите все возможные случаи.

5. В четырехзначном числе $\overline{aabb}$ первые две цифры одинаковые и последние две цифры одинаковые. Известно, что это число — квадрат целого числа. Найдите его (нужно найти все решения и обосновать это).

6. Докажите, что среди любых шести человек найдутся трое, которые либо попарно знакомы друг с другом, либо попарно незнакомы между собой.

10 класс

1. Исследовать функцию $f(x)=x^3+3x^2+2x$.

2. Больше или меньше нуля значение числовой функции $f(x)=\sin x$ в точке $x=30$?

3. Гаечный ключ имеет отверстие в форме квадрата со стороной 1 см. В каких пределах могут быть заключены размеры шестиугольной гайки, чтобы ее можно было отвинчивать этим ключом?

4. В трапеции $ABCD$ точка M — середина боковой стороны AB, а точка N — середина боковой стороны CD. Средняя линия MN пересекается с диагональю AC в точке O. Известно, что площадь треугольника AMO равна 1 см^2, а площадь треугольника CNO — 5 см^2. Какова площадь трапеции $ABCD$?

5. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ большая диагональ AC' и плоскость, проходящая через ребра $A'D'$ и BC, пересекаются в точке K. Найдите длину отрезка AK, если длина ребра — 1 см.

6. Как с помощью одного только циркуля с фиксированным раствором в 1 см отметить две точки, расстояние между которыми равно $\sqrt{7}$ см?

Первое задание по физике

Экспериментальная задача 1 предназначена для учащихся всех классов. Кроме того, задачи 2—6 предназначены для восьмиклассников, 7—11 — для девятиклассников, 12—16 — для десятиклассников.

Для поступления на физическое отделение ЗШ может оказаться достаточным полностью решить одну — две задачи. Однако после разбора задач своего класса полезно (и мы вам рекомендуем) ознакомиться и с другими задачами, а понравившиеся вам задачи — попробовать решить (чем больше, тем лучше).

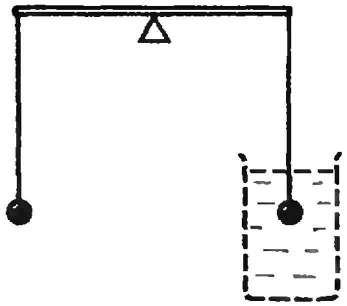


Рис. 1.

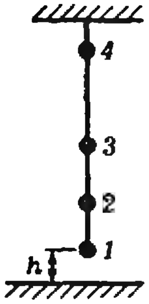


Рис. 2.

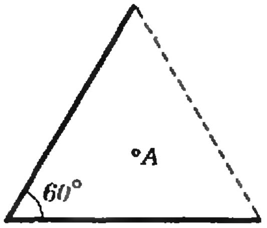


Рис. 3.

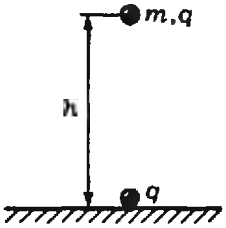


Рис. 4.

1. Проведите следующий опыт. Из пипетки осторожно капните каплю воды на сковородку, находящуюся при комнатной температуре. Засеките время полного испарения капли. Затем поставьте сковородку на плиту, включите ее. Через две минуты капните вторую каплю и засеките время ее испарения. Не выключая плитку, продолжайте с двухминутным интервалом измерение времени испарения капель в течение 20—40 минут. Постройте график зависимости времени испарения капли от ее номера и объясните его. Рекомендуется проводить опыт на не слишком большом жару, но так, чтобы в конце концов температура стала заметно выше, чем 100 °С.

2. Найдите сопротивление включенной в сеть электрической лампочки по указанным на ней параметрам.

3. Два одинаковых шарика плотностью ρ подвешены на стержне длиной L, который покоится в равновесии на опоре (рис. 1). Один из шариков поместили в стакан с водой. На сколько нужно сдвинуть точку опоры, чтобы система осталась в равновесии? Массой стержня пренебречь.

4. В сосуде с водой плавает пустой стакан. Как изменится уровень воды в сосуде, если часть воды из сосуда влить в стакан так, чтобы он продолжал плавать?

5. В комнате на предварительно разогретую электроплитку постоянной мощности поставили кастрюлю с водой. На нагрев воды от 10 до 20 °С было затрачено время τ_{10}, а от 80 до 90 °С — время τ_{80}. Что больше: τ_{10} или τ_{80}?

6. Как известно, 2/3 поверхности Земли занято океаном. Приняв среднюю глубину океана $h=4$ км, найдите, во сколько раз увеличилось бы среднее атмосферное давление, если бы вода в океанах Земли полностью испарилась. Высота столба воды, уравновешивающего атмосферное давление, $h_0=10$ м.

7. На нить нанизаны 4 маленьких шара; нижний находится на расстоянии h от пола (рис. 2). Нить вверху пережигают. Какими должны быть расстояния между шариками, чтобы интервалы времени между их ударами о пол были одинаковы?

8. Из круглого крана радиусом R течет вниз струя воды. Как уменьшается радиус струи с увеличением расстояния h от крана до тех пор, пока струя не начнет рваться? Скорость струи считать одинаковой по всему ее сечению.

9. Груз свободно подвесили к динамометру внутри ящика. После этого ящик поставили на горку с углом наклона α и плавно отпустили. При каком угле α показание динамометра в скользящем ящике уменьшится вдвое? Трением пренебречь. Считать, что колебания груза затухли и он не касается стен ящика.

10. Тонкий обруч радиусом R положили на горизонтальный пол, придав ему вращение вокруг его оси с начальной линейной скоростью v. Коэффициент трения обруча о пол μ, ускорение свободного падения g. Сколько оборотов сделает обруч до полной остановки?

11. При падении на каменный пол елочного стеклянного шарика он разбивается, если высота падения не меньше, чем h. Два таких шарика подвесили рядом. Один из них отклонили и толкнули так, что он подлетает к другому со скоростью v. При какой наименьшей скорости v шарики разобьются?

12. Какая масса воздуха выйдет из комнаты объемом $V=100$ м^3, если температура в ней, равная вначале $T=290$ К, увеличится на $\Delta T=10$ К? Давление воздуха нормальное: $p=10^5$ Па; молярная масса воздуха $M=29\cdot 10^{-3}$ кг/моль; газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль · К).

13. Кубический бак объемом $V=1$ м^3 заполняют водой из крана сечением $S=10$ см^2 за время $\tau=1$ мин. На сколько изменится температура воды? Кран находится на уровне верхнего края бака. Отводом тепла в окружающую среду пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c=4{,}18\cdot 10^3$ Дж/(кг · К).

14. В центре A равностороннего треугольника, две стороны которого образованы одинаково и равномерно заряженными тонкими палочками (рис. 3), потенциал электрического поля φ, а напряженность поля $\vec{E}$. Какими станут потенциал и напряженность в этой точке, если одну палочку убрать?

15. Маленький шарик массой m с зарядом q удерживают на высоте h над закрепленным зарядом q (рис. 4). Какой максимальной скорости достигнет верхний шарик после того, как его отпустят? Силу тяжести учитывать.

16. Как известно, масса Солнца много больше массы Земли. Во сколько раз изменилась бы продолжительность года на Земле, если бы ее масса была равна массе Солнца, а расстояние между ними осталось бы прежним?

Путешествия по графам

(Начало см. на с. 50)

1984, № 9) описаны игры-«перевертыши», которые можно рассматривать как варианты игр «путешествие по графу» с переориентацией фишек.

Особенно трудные обобщения игр типа «путешествие по графу» можно получить, задавая дополнительные ограничения на правило движения фишек по графу. В качестве примера рассмотрим игру ДВЕНАДЦАТЬ, игровое поле которой изображено на рисунке 11. В этой игре допускаются только такие последовательности ходов, которые получаются с помощью следующих элементарных серий:

$A=3, 7, 11, 10, 9, 5, 1, 2, 0;$
$A^{-1}=2, 1, 5, 9, 10, 11, 7, 3, 0;$
$B=2, 6, 10, 11, 12, 8, 4, 3, 0;$
$B^{-1}=3, 4, 8, 12, 11, 10, 6, 2, 0.$

Если игру ДВЕНАДЦАТЬ рассматривать как обыкновенное «путешествие по графу», то к этому набору элементарных серий необходимо было бы добавить серии $C=2, 1, 5, 9, 10, 11, 12, 8, 4, 3, 0$, $D=2, 6, 10, 11, 7, 3, 0$ и им обратные.

Упражнение 20. Найдите алгоритм решения игры ДВЕНАДЦАТЬ и покажите, что ее группа совпадает с группой S_{12}.

Основной трудностью при решении этой задачи является нахождение формулы, которая переставляет только фишки 7 и 8. Существует ли формула для этой цели с длиной меньше чем 39 букв?

Советы по изготовлению игр

Удобнее всего прикрепить игровое поле к прямоугольному железному листу, а в качестве фишек использовать кусочки магнита (например, фишки от магнитных шашек).

Некоторые варианты игр типа «путешествие по графу» можно осуществить, устанавливая дополнительные перегородки. На странице 57 изображены игры ТЕРПЕНИЕ, ДУМАЙ БЫСТРЕЕ, КУБОЛОГИЯ и КОМБИНАТОР в таком исполнении.

В общеизвестной игре ПЯТНАДЦАТЬ, изготовленной таким же образом, не всякую позицию можно привести к стандартной, а только такую, которая соответствует четной перестановке фишек (фишки 6 и 9 в этой игре — разные).

Как расположены корни трехчленов?

1. $x<-\frac{11+\sqrt{103}}{2}$, $-\frac{31+\sqrt{805}}{6}<x<<\frac{-31+\sqrt{805}}{6}$, $x>\frac{-11+\sqrt{109}}{2}$.

2. Записав неравенство в виде

$$x^2-3x+1<x-a<3x-x^2-1,$$

получим систему неравенств $f(x)<0$, $g(x)<0$, где $f(x)=x^2-4x+1+a$, $g(x)=x^2-2x+1-a$. Эта система может иметь решение только при положительных дискриминантах трехчленов $f(x)$ и $g(x)$, то есть при $0<a<3$.

При $0<a<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<a<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3+\sqrt{5}}{2}<a<3$ корни трехчленов $f(x)$ и $g(x)$ расположены соответственно в следующем порядке: $x_2<x_4\leq x_3<x_1$; $x_4<x_2<x_3<x_1$; $x_4<x_2<x_1<x_3$.

В случае $f(a)=0$ (a — общий корень трехчленов) найдите вторые корни трехчленов $f(x)$ и $g(x)$ по теореме Виета и покажите, что при $a=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ и $a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ соответственно $x_2=x_4<x_3<x_1$ и $x_4<x_2<x_1=x_3$.

3. Умножив неравенство на [illegible] и сделав замену $y=2ax$, получим неравенство, которое может быть представлено в виде

$$(y^2+2y-a)(y^2-2a+4)\geqslant 0.$$

Обозначим через $y_{1,2}$ и $y_{3,4}$ корни трехчленов y^2+2y-a и $y^2-2y-a+4$. При $0<a\leqslant 3$ получаем $x\leqslant\frac{y_2}{2a}$, $x\geqslant\frac{y_1}{2a}$. При $a>3$ получаем $x\leqslant\frac{y_2}{2a}$, $\frac{y_4}{2a}\leqslant x\leqslant\frac{y_1}{2a}$, $x\geqslant\frac{y_3}{2a}$.

4. Положив $f_k(x)=3x^2+2kx-k-1$, получим

$$f_k(x)=f_n(x)\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2},$$

причем $f_k(x_0)=-\frac{1}{4}$ при всех $k=1, 2, \ldots, 10$, то есть все $f_k(x_0)<0$. Обозначив корни трехчлена $f_k(x)$ через q_k, p_k, ($g_k<p_k$), получим следующее расположение корней:

$$q_{10}<\ldots<q_2<q_1<p_{10}<p_9<\ldots<p_1,$$

так что решением данной системы является промежуток $q_1\leqslant x\leqslant p_{10}$, заключенный между меньшим корнем первого трехчлена и большим корнем десятого трехчлена.

Ответ: $-\frac{\sqrt{7}+1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{133}-10}{3}$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 6)

1. В 9 часов угол между стрелками равен 90°. За час часовая стрелка проходит 1/12 часть окружности, то есть 30°, так что за 20 минут часовая стрелка проходит $\frac{1}{3}$ от этой части, то есть 10°. Аналогично минутная стрелка, проходящая за час 360°, за 20 минут пройдет 120°. Поэтому к 9 часам 20 минутам угол между стрелками в 90° уменьшится на 10° и увеличится на 120°, став равным 200°. Дополнительный к нему угол равен 160°.

2. 495+459=954.

3. Во-первых, из чайника без дырочки плохо разливать заварку, так как образующееся в нем разрежение препятствует вытеканию жидкости из чайника. Во-вторых, при подогревании заварного чайника, наоборот, возникает повышенное давление пара в чайнике, которое приводит к самопроизвольному выливанию жидкости из носика чайника.

4. Если число не оканчивается на 9, то сумма цифр следующего за ним числа больше его суммы цифр на 1, поэтому такое число не может быть искомым. Если число оканчивается на 9 (но не на 99), то сумма цифр следующего за ним числа меньше его суммы цифр на 8, что опять не соответствует условию задачи. Если же число оканчивается на 99 (но не на 999), то сумма цифр у следующего за ним числа будет меньше суммы цифр рассматриваемого числа на 17. Поэтому, если сумма цифр такого числа делится на 17, то и сумма цифр следующего за ним числа тоже делится на 17.

Найдем наименьшее число, оканчивающееся на два нуля, у которого сумма цифр делится на 17. Очевидно, это 8900. Предыдущее же число 8899 является искомым, так как числа, оканчивающиеся на 999 и на 9999, не удовлетворяют условию задачи — сумма цифр при переходе к следующему числу в первом случае уменьшается на 26, а во втором случае — на 35.

5. Обозначим число грибов, найденных каждым мальчиком, первой буквой его имени. Тогда по условию задачи

$$А+Б=В+Г,\ А+Г<Б+В,\ Г>В.$$

Складывая первые два соотношения, получаем, что В>А, а вычитая из второго соотношения первое, находим, что Б>Г. Итак, Б>Г>В>А, то есть имена нужно расположить в следующем порядке: Боря, Гена, Витя, Алик.

Избранные школьные задачи

(см. «Квант» № 6)

1. (3; 2; —2). Указание. Выразите x из первого уравнения и подставьте это выражение во второе уравнение. После этого приведите второе уравнение к виду

$$(y-2)^2+(y+z)^2=0.$$

2. а) 30° и 60°; б) 22,5° и 67,5°. Указание. Опишите около треугольника ABC окружность (рис. 1, с. 62) и продолжите медиану AM, биссектрису AL и высоту AH до пересечения с окружностью в точках N, E и D соответственно. Докажите, что треугольник MAE равнобедренный. Значит, $MA=ME$. Кроме того, $MB=MC$, откуда легко вывести, что M — центр нашей окружности. Следовательно, треугольник ABC прямоугольный.

3. Второе. Указание. Воспользуйтесь равенством

$$\frac{a+1}{1985a+1}-\frac{b+1}{1985b+1}=\frac{1984(b-a)}{(1985a+1)(1985b+1)}.$$

4. Искомая точка O — это точка пересечения двух прямых, каждая из которых про-

ходит через середину одной из диагоналей четырехугольника и параллельна другой его диагонали. **Указание** (рис. 2). Поскольку $QP=MN=\frac{1}{2}AC$, получаем, что $S_{DQOP}=$ $=S_{MBNO}=\frac{1}{2}h\cdot QP$, где h — сумма высот треугольников MBN и OMN. Таким образом, точки D и B одинаково удалены (на расстояние h) от прямой, параллельной AC и проходящей через середину BD.

5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ — данные числа. Рассмотрим числа a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$, …, …, $a_1+a_2+\ldots+a_{100}$. Если ни одно из этих чисел не делится на 100, то среди них найдутся два дающие при делении на 100 одинаковые остатки. Остается из большего из этих чисел вычесть меньшее.

6. (0; 1; 2); (−2; −3; −4). **Указание.** Прибавляя по 1 к левым и правым частям всех трех уравнений, получаем систему

$$\begin{cases}(x+1)(y+1)=2,\\(y+1)(z+1)=6,\\(x+1)(z+1)=3,\end{cases}$$

откуда $((x+1)(y+1)(z+1))^2=36$, то есть

$$(x+1)(y+1)(z+1)=\pm6.$$

7. Три отрезка, соединяющие середины сторон с серединами соответствующих высот. **Указание.** На рисунке 3 BM — медиана треугольника ABC, BH — его высота, K — точка пересечения отрезков BM и PQ. Центр O прямоугольника совпадает с серединой перпендикуляра KL к стороне AC. Поэтому прямая MO проходит через середину N высоты BH.

8.*) $x=y=2$. **Решение.** Так как

$$(\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1})^2=2+2\sqrt{-x^2+4x-3},$$

левая часть уравнения достигает наибольшего значения там, где его достигает квадратный трехчлен $-x^2+4x-3$, то есть в точке $x=2$. Это значение равно 2. Но этому же числу равно наименьшее возможное значение правой части уравнения, которое достигается при $x=y$.

9.7. Решение. Поскольку $A-B=2^{1986}-$ $-2^{1983}=7\cdot2^{1983}$ и числа A и B нечетны, их наибольший общий делитель равен 7 или 1. Но $A=2^{1986}-1=(2^3-1)$ $(2^{1983}+2^{1980}+$ $+\ldots+2^3+1)$ (мы воспользовались формулой сокращенного умножения) делится на 7, а значит, и $B=A-(A-B)$ делится на 7.

10. Указание. Пусть a, b, c, d — длины отрезков, на которые стороны четырехугольника разбиваются точками касания вписанной окружности, и r — радиус вписанной окружности (рис. 4,*а*). Приложим друг к другу два заштрихованных треугольника, как показано на рисунке 4,*б*. Из того, что вокруг данного четырехугольника можно описать окружность, следует, что сумма острых углов получившегося треугольника равна 90°, то есть этот треугольник прямоугольный. Следовательно, $r=\sqrt{ac}$. Аналогично, $r=\sqrt{bd}$ и, значит, $ac=bd$. Площадь четырехугольника равна $(a+b+$ $+c+d)r$, и остается, воспользовавшись равенством $ac=bd$, доказать, что

$$(a+b+c+d)^2ac=(a+b)(b+c)(c+d)(d+a).$$

11. $0\leqslant x\leqslant1$. **Указание.** Косинусы левой и правой частей уравнения равны.

12. ac/b. **Указание.** Пусть M, N, P, Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки E на прямые AB, BC, CD и AD соответственно (рис. 5). Докажите, что треугольники EMQ и ENP подобны.

13.
$$\begin{cases}x_1=\pm\frac{\pi}{6}+\pi m,\\y_1=\pm\frac{\pi}{6}+\pi(m+4n);\end{cases}$$

---

*) В условии задачи была допущена опечатка: вместо $2\sqrt{2}$ должно быть 2.

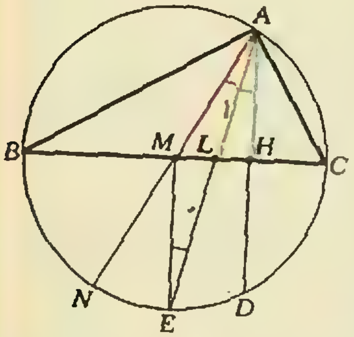


Рис. 1.

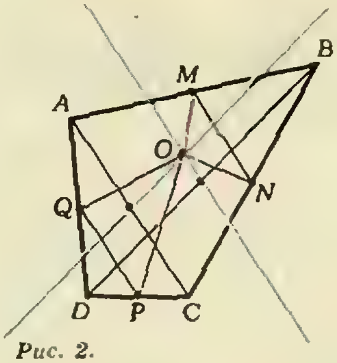


Рис. 2.

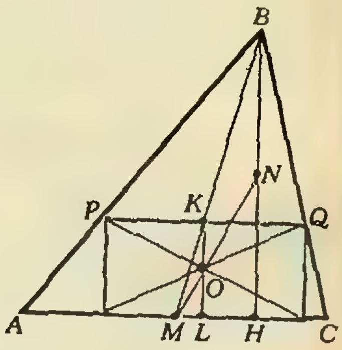


Рис. 3.

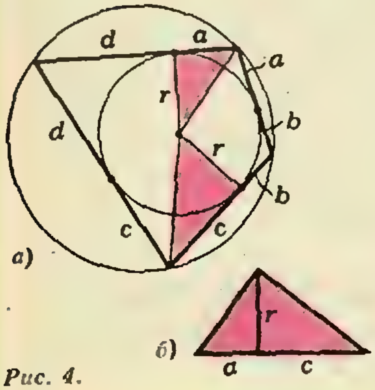


Рис. 4.

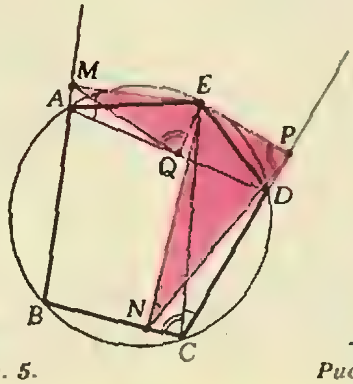


Рис. 5.

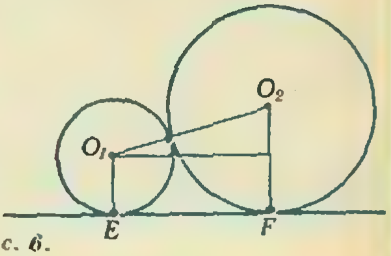


Рис. 6.

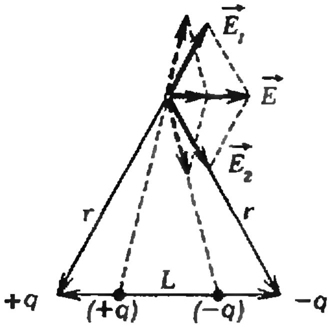


Рис. 7.

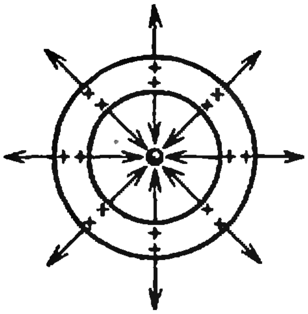


Рис. 8.

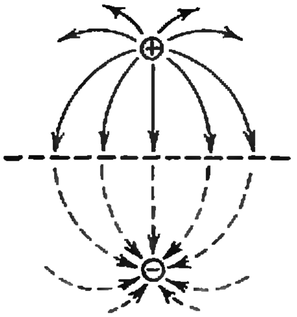


Рис. 9.

$$\begin{cases} x_2=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi m, \\ y_2=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi(m+4n+2) \end{cases}$$

(m, $n\in\mathbb{Z}$). Указание. Уравнение приводится к виду

$$\left(2\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}\right)^2=\cos^2\frac{x-y}{2}-1,$$

откуда либо $\cos\frac{x-y}{2}=1$, $\cos\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}$, либо $\cos\frac{x-y}{2}=-1$, $\cos\frac{x+y}{2}=-\frac{1}{2}$.

14. $\frac{bc}{2a}$, $\frac{ac}{2b}$, $\frac{ab}{2c}$. Указание. Пусть сферы с центром O_1 и O_2 и радиусами r, R касаются плоскости в точках E и F и касаются между собой. Проведя плоскость через точки O_1, O_2, E и F, мы получим картину, показанную на рисунке 6. Из этого рисунка видно, что $|EF|^2+(R-r)^2=(R+r)^2$, откуда $|EF|=2\sqrt{Rr}$. Для радиусов наших сфер мы получаем систему уравнений $2\sqrt{r_1r_2}=c$, $2\sqrt{r_1r_3}=b$, $2\sqrt{r_2r_3}=a$.

15. На 1-м и 2-м (с начала). Решение. Пусть число Y получается из числа X выбрасыванием m-й цифры. Примеры показывают, что m может равняться 1 или 2 (можно взять $X=66$, $Y=6$). Предположим, что $m\geqslant 3$. Запишем:

$$X=A\cdot 10^{n+1}+b\cdot 10^n+C,$$
$$Y=A\cdot 10^n+C.$$

Здесь $C<10^n$, $b\leqslant 9$, и если $m\geqslant 3$, то $A\geqslant 10$. Имеем

$$X-10Y=b\cdot 10^n-9C,$$
$$-9\cdot 10^n<-9C\leqslant b\cdot 10^n-9C\leqslant$$
$$\leqslant b\cdot 10^n\leqslant 9\cdot 10^n,$$

откуда $|X-10Y|<Y$, $9Y<X<11Y$. Поэтому, если X делится на Y, то $X:Y=10$, а это противоречит тому, что X не оканчивается нулем.

Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 5)

Вопросы и задачи

1. Кольцо и маленький шарик, движущийся по оси кольца.

2. См. рис. 7;

$$E_1=k\frac{q}{r^2},\quad \frac{E}{E_1}=\frac{L}{r},\quad E=k\frac{Lq}{r^3}.$$

3. См. рис. 7.

4. Положительно заряженный шар во всех полях будет двигаться вправо. Незаряженный шар в поле I будет двигаться вправо, в поле II — влево, в поле III — останется в покое.

5. Электрические заряды скапливаются на внешней поверхности проводника. Внутри цилиндра напряженность электрического поля стала равной нулю, у внешней поверхности — увеличилась по сравнению с плоскостью.

6. См. рис. 8.

7. См. рис. 9; $F=k\frac{q^2}{4r^2}$.

8. Нет. При передвижении заряда по замкнутому контуру работа поля не будет равна нулю.

Микроопыт

Близлежащие и отдаленные от палочки капли электризуются под ее влиянием разноименно и, притягиваясь, сливаются.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 4)

Задание 7. 1. Крс15! Единственный ход. Предположим теперь, что черный король движется по вертикали «а». 1... Кра9 2. Крс14 Кра10 3. Крс13 Кра11 4. Крс12. Приходится менять направление (4... Кра12 5. Ла16×). 4... Крb10 5. Крb12 (оппозиция!) Кра10 6. Крс11! Короли сдвинулись на вертикаль ниже, дальнейшее ясно.

Если 1... Крb9, то решает 2. Крb15!, сохраняя дальнюю оппозицию (нечетное расстояние между королями) 2... Крb10 3. Крb14! Крb11 4. Крb13! Кра11 5. Крс12! и т. д.

На 2... Кра9 следует 3. Крс14 — пока черный король находится на крайней вертикали, белый может позволить себе встать на одну вертикаль с ладьей. 3... Крb10 4. Крb14! Легко найти и другие варианты. Важно, что после 1. Крс14? выигрыш уже упущен — 1... Кра9 2. Крс13 (2. Крb13 Крb9 и оппозиция у черных) 2. Кра10 3. Крс12 Кра11 4. Крс11 Кра12, и черный король неуязвим.

Задание 8 (И. Моравец, 1908 г.). 1. Крb1 Лg2 2. Лс4 Лh2 3. h4 Лg2 4. Лс5! Лh2 5. h5 Лg2 6. Лс6! Лh2 7. h6 Ле2 8. h7 Лh2 9. Ла6 Кр:с7 10. Ла8 Л:h7 11. Ла7+, забирая ладью.

Ньютон — ученик, Ньютон — ученый

Имя Ньютона, нацарапанное им самим на стене Королевской школы в Грантеме.

When Newton saw an apple fall, he found
In that slight startle from his contemplation —
'Tis said (for I'll not answer above ground
For any sage's creed or calculation) —

A mode of proving that the earth turn'd round
In a most natural whirl, called "gravitation";
And this is the sole mortal who could grapple,
Since Adam, with a fall, or with and apple.

Lord Byron.

Поэтическая иллюстрация к известной истории о том, что к открытию закона всемирного тяготения Ньютона привело зрелище падающего яблока.

Ньютон, заметив яблока падение,
Познал один сей тайны объяснение —
Молва гласит. (Но есть сомнение:
То был расчет иль озарение?)

И доказал Ньютон Земли вращение,
Введя тогда понятье тяготения.
Он первый от Адама, без сомнения,
И плод вкусил, и объяснил паденне.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, А. А. Варламов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева, И. Е. Смирнова, П. И. Чернуский, В. Б. Юдин
Фото представили:
Е. А. Артемов

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Б. Румянцева

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

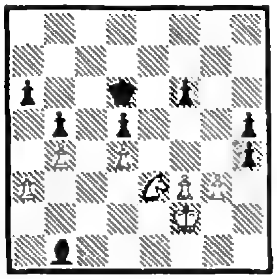
Сдано в набор 21.05.86. Подписано к печати 18.06.86
Т-11574 Бумага 70×108/16
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,37
Тираж 194 287 экз.
Цена 40 коп. Заказ 1317

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ЗАГАДОЧНЫЕ МАНЕВРЫ

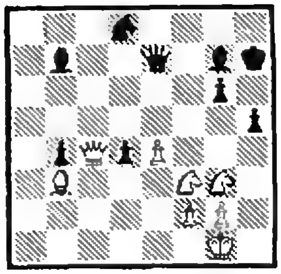
75 партий сыграли между собой Анатолий Карпов и Гарри Каспаров перед началом своего третьего матча за шахматную корону, в котором должны быть проведены 24 встречи. Еще одна — и юбилей: 100 партий. Общий счет между двумя лидерами современных шахмат пока ничейный — каждый одержал по 8 побед.



А. Карпов — Г. Каспаров. Перед вами позиция из девятой партии первого матча. Черные только что побили пешку — g5:h4 (лучше было Cg6), полагая, что размен упростит им достижение ничьей. Действительно, после g3:h4 у белых лишь один пункт проникновения в неприятельский лагерь — f4, и одновременно две фигуры, король и конь, пробраться через него не могут. Но Карпов находит поистине загадочный маневр конем.

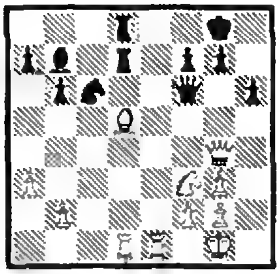
1. Kg2!! Психологически такой ход даже не приходит в голову.

1...hg+ 2.Kp:g3 Kpe6 3.Kf4+ Kpf5 4.K:h5 Kpe6 5.Kf4+ Kpd6 6.Kpg4 Cc2 7.Kph5 Cd1 8.Kpg6 Kpe7 9.K:d5+ Kpe6 10.Kc7+ Kpd7 11.K:a6 C:f3 12.Kp:f6 Kpd6 13.Kpf5 Kpd5 14.Kpf4! Стало ясно, что черным не устоять в этом эндшпиле. **14...Ch1 15.Kpe3 Kpc4 16.Kc5 Cc6 17.Kd3 Cg2 18.Ke5+ Kpc3 19.Kg6 Kpc4 20.Ke7 Cb7 21.Kf5 Cg2 22.Kd6+ Kpb3 23.K:b5 Kpa4 24.Kd6.** Черные сдались.



Г. Каспаров — А. Карпов. В этой позиции, возникшей при доигрывании девятой партии второго матча, все ожидали 1.K:d4 C:e4 2.K:e4 Ф:e4 3.Ke6 Фe1+ 4.Фf1 с трудной позицией у белых.

1.e5! Вскрывая диагональ b1 — h7, белые создали угрозу 2.K:h5! gh **3.Фg8+ Kph6** 4. Cc2. Продумав полчаса, Карпов нашел форсированный путь к ничьей. **1...C:f3 2.gf C:e5 3.f4!** Ходы e4 — e5 и f3 — f4 носят геометрический характер. Благодаря им белые вынуждают черного слона покинуть большую диагональ. Действительно, отступать по диагонали a1 — h8 весьма опасно ввиду 4.f5!, подбираясь к черному королю. **3...C:f4 4.Фg8+ Kph6 5.Cc2 Фg7!** Как и полагается в этюде, тонкую игру демонстрируют обе стороны. После 5...Фf6 6.Ke4! белые выигрывали, не годится и 5...d3 6.C:d3 Фf6 7.Ke4 Фa1+ 8.Kpg2 Kc6 9.Фf8+ с победой. **6.Ф:d8 C:g3 7.fg Фe5 8.Фf8+ Kpg5 9.Kpg2.** Буря, пронесшаяся на доске, утихла, и соперники согласились на ничью.

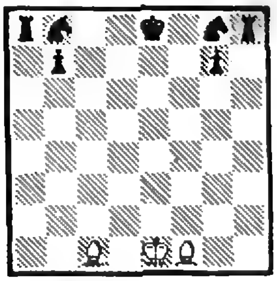


Г. Каспаров — А. Карпов. Черные легкомысленно переставили ладью с c8 на d8.

1.Ф:d7!! Л:d7 2.Лe8+ Kph7 3.Cc4+. Черные сдались, после 3...g6 4.Л:d7 их положение безнадежно.

Изящно выиграв эту партию, 11-ю в матче, Каспаров сравнял счет и перехватил инициативу. Вторая половина протекала при его превосходстве, и в результате шахматная корона обрела нового владельца.

Читатель журнала Л. Соколов посвятил интересную серийную задачу гроссмейстерам А. Карпову и Г. Каспарову.

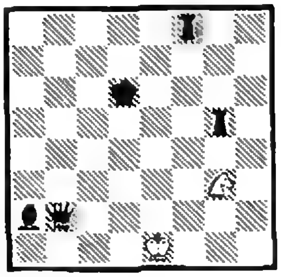


Серийный кооперативный мат в 7 ходов при черном короле на a7 и h7.

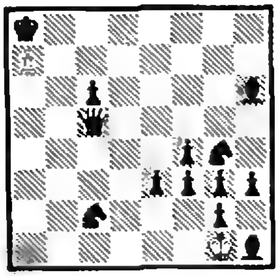
Здесь сразу две задачи: одна получается при перестановке черного короля на a7 (А. Карпов — 12-й шахматный король!), другая — при перестановке черного короля на h7 (Г. Каспаров — 13-й шахматный король!).

Вот решение задачи при короле на a7: **1—7.b7—b5—b4—b3—b2—b1C! — Ce4 — Cb7.** На поле b7 вместо пешки появился слон, и теперь следует **Cc1—e3×.** При короле на h7: **1 — 7.g7—g5—g4—g3—g2—g1C!—Cd4—Cg7** и **Cd3×.**

Конкурсные задания

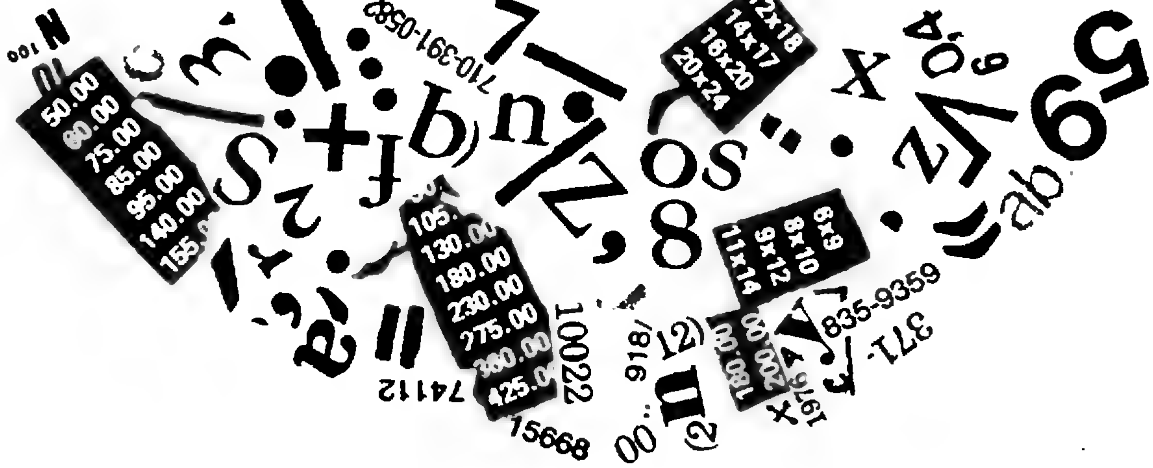


13. Кооперативный мат в 6 ходов (черные начинают и помогают белым поставить мат).



14. Кооперативный мат в 8 ходов.

Срок отправки решений — 10 сентября 1986 г. с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 13, 14».


50.00
60.00
75.00
85.00
95.00
140.00
105.
130.00
180.00
230.00
275.00
425.00
12x18
14x17
16x20
20x24
6x9
8x10
9x12
11x14
710-391-0582
835-9359
74112
10022
15668
918/
1976
371-

Сегодня у нас в гостях болгарский научно - популярный математический журнал для школьников «Математика». Об этом замечательном издании, о его истории расскажет на первых страницах «Кванта» главный редактор журнала «Математика» Р. Русев. Задачи и статьи по математике на следующих страницах номера написаны нашими болгарскими коллегами.

Большие достижения болгарской школьной математики — призовые места на двух последних Международных математических олимпиадах, победа города Ямбола на только что закончившемся Турнире городов, заметные успехи НРБ по компьютеризации школьного образования — специалисты связывают с несомненным влиянием журнала «Математика». Насколько интересны и полезны материалы наших друзей из Болгарии, читатели «Кванта» смогут представить, прочитав этот номер.

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Как устроена пустота?

Кто такие кватернионы?

Сколько площадей у многоугольника?

Как создавалась физика низких температур?

Почему поет водопровод?

Какая молекула самая главная?

Часто ли степени двойки начинаются с единицы?

Существует ли бесконечная шахматная партия?

Как родился компьютер?

Чем живет современная математика?

Над чем думают физики?

Если вы хотите узнать ответы на эти вопросы —

ПОДПИСЫВАЙТЕСЬ НА «КВАНТ»!

НОМЕР
8

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант

8 1986

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	Советские ученые в борьбе за мир	Soviet scientists in the struggle for peace
3	*А. Н. Колмогоров.* Паркеты из правильных многоугольников	*A. N. Kolmogorov.* Pavings using regular polygons
5	*А. Д. Бендукидзе.* Как Декарт проводил касательные	*A. D. Bendukidze.* How Descartes constructed tangents
8	*И. Ш. Слободецкий.* Сухое трение	*I. Sh. Slobodetski.* Dry friction
13	*А. А. Панов.* Малярный парадокс	*A. A. Panov.* Painter's paradox
14	*М. Б. Балк.* Секрет Старого Бондаря	*M. B. Balk.* The Ancient Barrelmaker's secret
20	*Л. Г. Асламазов.* Как волны передают информацию?	*L. G. Aslamazov.* How do waves transmit information?
25	О математическом творчестве школьников	Mathematical research by secondary school pupils
	Новости науки	**Science news**
19	Шестидесятиатомный углерод	Sixty atom carbon
	Математический кружок	**Mathematics circle**
29	*В. Г. Болтянский.* Пифагоровы тетраэдры	*V. G. Boltianski.* Pythagorean tetrahedra
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
32	*Г. И. Косоуров.* Оранжевое небо	*G. I. Kosourov.* Orange sky
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
35	Задачи	Problems
36	Кто украл Крендели? (по мотивам *Л. Кэрролла*)	Who stole the tarts? (after *L. Carroll*)
40	*А. Н. Кючуков.* Неудачи одной цивилизации	*A. N. Kyuchukov.* The misadventures of a civilisation
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
41	Задачи М996 — М1000; Ф1008 — Ф1012	Problems M996 — M1000; P1008 — P1012
44	Решения задач М976 — М980; Ф988 — Ф992	Solutions M976 — M980; P988 — P992
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
52	Информация о предыдущих публикациях	Information on previous publications
54	*Э. П. Казанджан.* Школьник — абитуриент — студент — инженер	*E. P. Kazandjan.* Pupil — applicant — student — engineer
	Информация	**Information**
59	Праздник юных математиков	Young mathematician's gathering
59	Вечерняя физическая школа при МГУ	Moscow university physics evening school
60	VIII Турнир юных физиков	8th Young physicist's tournament
62	IX Турнир юных физиков	9th Young physicist's tournament
63	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Смесь *(7, 51, 58)*	**Miscellaneous** *(7, 51, 58)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Геометрия шахматной доски *(3-я с. обложки)*	Chessboard geometry *(3rd cover page)*

© Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1986

Советские ученые в борьбе за мир

Более пяти лет тому назад, 4 мая 1981 года, выдающиеся советские ученые во главе с президентом Академии наук СССР академиком А. П. Александровым и вице-президентами академиками Е. П. Велиховым и А. А. Логуновым обратились к ученым всего мира с призывом «сделать все, чтобы отвести от народов угрозу ядерной войны, ... и обратить свою волю и знания на дело созидания, на сохранение на земле условий, которые обеспечили бы достойную жизнь нынешнему и грядущим поколениям».

В этом обращении сказано также: «Мы являемся очевидцами тревожных событий: гонка вооружений, и в особенности ядерных вооружений, приобретает все больший размах. Переговоры по разоружению топчутся на месте или вообще прерваны. Подписанные договоры не вступают в силу. Действующие соглашения и договоренности, сдерживающие военную активность, подвергаются нападкам, их осуществление преднамеренно затрудняется ... Нельзя допустить, чтобы человечество оказалось в плену предрассудков, доказывающих, будто мир может покоиться только на горах оружия, будто не разум, а сила во веки веков будет править ходом истории».

Авторы обращения резко критиковали происходившую в то время в странах капитала погоню за нейтронными бомбами. Сейчас на первый план вышла борьба против размещения различных видов оружия массового уничтожения в космосе, против стратегии «звездных войн», упорно навязываемой человечеству американским империализмом.

Опасность, нависшая над человечеством, не может не тревожить ученых. Ведь они лучше людей других профессий понимают ее масштабы и последствия. И перед каждым из них встает вопрос о том, какую позицию он займет по отношению к этой опасности. Позиция советских ученых четко сформулирована в обращении. Она была активно поддержана учеными всех стран. Ее широко обсуждала и пропагандировала Всемирная федерация научных работников, добровольные объединения и союзы ученых. Их многочисленные выступления и протесты помогают мобилизации широких народных масс на активное противодействие агрессивным планам империалистов.

С каждым годом крепнет международное содружество ученых в борьбе за мирное сосуществование народов. 1986 год объявлен Организацией Объединенных Наций годом мира. Откликаясь на эту инициативу, Советский Союз выдвинул реалистическую долгосрочную комплексную программу всеобщего сокращения вооружений и разоружения, рассчитанную до 2000 года. Она изложена в Заявлении генерального секретаря ЦК КПСС М. С. Горбачева, опубликованном 15 января 1986 года, которое получило широкую международную поддержку.

Советские ученые внесли большой вклад в разоблачение авантюристических военных планов, широко рекламируемых империалистическими кругами — теории первого удара, ограниченной ядерной войны, космического противоракетного щита и т. п. Они убедительно показали, какие огромные опасности таит в себе любой международный конфликт с применением атомного оружия, опровергли рассуждения противников разоружения о невозможности строгого контроля за запрещением ядерных испытаний.

Социализм не нуждается в войнах и весь советский народ — активный противник войны.

Паркеты из правильных многоугольников

Академик А. Н. КОЛМОГОРОВ

Что такое паркет

Самый простой, *но и* самый скучный паркет получается, если плоскость разбить на равные квадраты так, как показано на рисунке 1, *а*. Здесь два квадрата имеют либо общую сторону, либо общую вершину или совсем не имеют общих точек.

Паркетом будем называть такое покрытие плоскости правильными многоугольниками, при котором два многоугольника имеют либо общую сторону, либо общую вершину или совсем не имеют общих точек.

Вероятно, вам случалось видеть паркет, составленный из правильных восьмиугольников и квадратов (рис. 2, *а*). Красивый паркет можно составить из правильных шестиугольников, квадратов и равносторонних треугольников (рис. 2, *б*).

Паркет производит приятное впечатление, если он достаточно симметричен. *Фигура называется симметричной, если ее можно наложить на саму себя «не тривиальным» способом (то есть не таким, когда все точки останутся на своем месте).*

Например, на рисунке 2, *б*, повернув всю сетку вершин и сторон, образующих паркет из шестиугольников, квадратов и треугольников, на 60° вокруг центра одного из шестиугольников, мы получим ту же самую сетку вершин и сторон. Центр каждого шестиугольника этого паркета является «центром симметрии шестого порядка»*).

Задача 1. Найдите все центры симметрии 4-го, 3-го и 2-го порядка паркета, изображенного на рисунке 2, *а*.

Что такое *правильный* паркет

С точки зрения симметрии наше определение паркета не слишком удачно. Оно допускает паркеты, не обладающие никакой симметрией. Взяв обычный паркет из шестиугольников (рис. 1, *в*), можно «испортить» его, подразделив некоторые из шестиугольников на шесть треугольников. Легко понять, что получится вновь «паркет» в смысле нашего определения. Но можно доказать (попробуйте!), что, подразделив, например, три шестиугольника, как показано на рисунке 3, и оставив все остальные не подразделенными, мы получим паркет, совсем лишенный симметрии. Чтобы устранить некрасивые, недостаточно симметричные паркеты, мы введем такое определение:

Паркет называется правильным, если его можно наложить на самого себя так, что любая заданная его вершина наложится на любую другую заданную его вершину.

Задача 2. Докажите, что паркеты, представленные на рисунках 1 и 2, правильны, и

Статья перепечатывается из «Кванта» № 3 за 1970 год.

*) Точка O называется центром симметрии n-го порядка некоторой фигуры, если при повороте этой фигуры вокруг O на $360^\circ/n$ она наложится на саму себя.

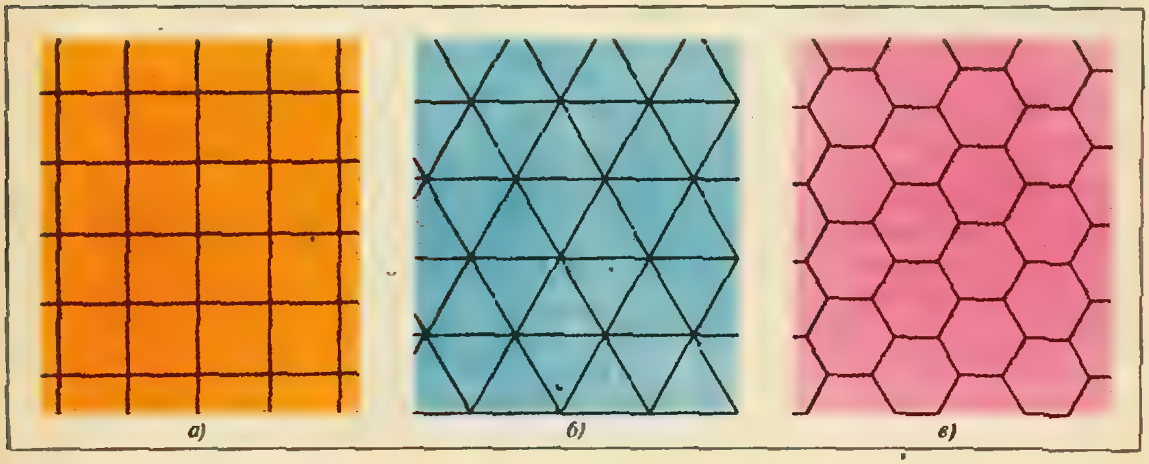


Рис. 1.

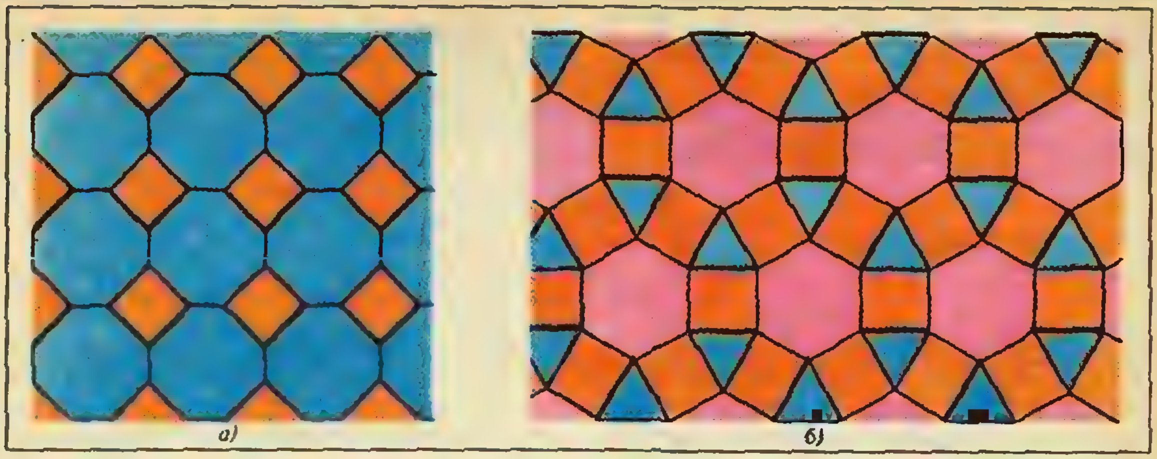


Рис. 2.

постройте самостоятельно возможно больше правильных паркетов.

Основная задача

Оказывается, что все разнообразие правильных паркетов можно описать. Если длина h стороны многоугольников паркета задана, *то существует только конечное число различных (не накладывающихся друг на друга) правильных паркетов.* Сколько именно, я не хочу вам говорить.

Перечислить их все и тем самым ответить на вопрос об их числе — это и есть основная задача, которую вам предстоит решить.

Некоторые указания

Решения задачи естественно начать с исследования устройства вершин паркета. Правильный n-угольник имеет n внешних углов (рис. 4), сумма которых равна четырем прямым углам (убедитесь в этом сами). Поэтому каждый угол правильного n-угольника равен

$$\alpha_n = 2d - \frac{4d}{n} = 2\left(1 - \frac{2}{n}\right) d.$$

В вершине паркета должны сходиться многоугольники с суммой углов, равной $4d$. Так,

$$\alpha_3 = \frac{2}{3} d,\ \alpha_4 = d,\ \alpha_6 = \frac{4}{3} d,\ \alpha_8 = \frac{3}{2} d,$$

и для паркетов, изображенных на рисунках 1 и 2, имеем:

$$\begin{aligned} 4\alpha_4 &= 4d,\\ 6\alpha_3 &= 4d,\\ 3\alpha_6 &= 4d,\\ \alpha_4 + 2\alpha_8 &= 4d,\\ \alpha_8 + 2\alpha_4 + \alpha_6 &= 4d. \end{aligned}$$

В общем же случае, обозначая через m_n число прилегающих к вершине n-угольников, мы должны получить

$$\Sigma m_i \alpha_i = 4d, \qquad (1)$$

где в сумму мы включаем слагаемые с теми номерами i, для которых $m_i > 0$, а $\alpha_i = 2(1 - 2/i)d$.

(Окончание см. на с. 7)

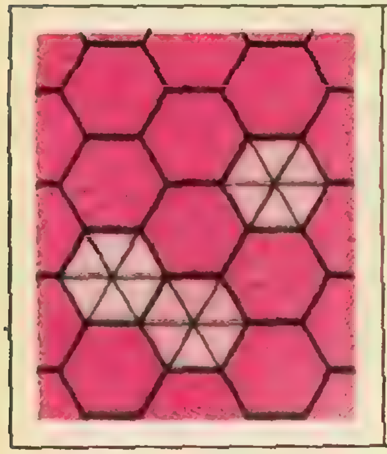


Рис. 3.

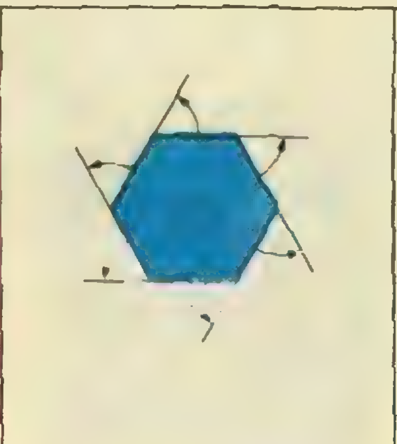


Рис. 4.

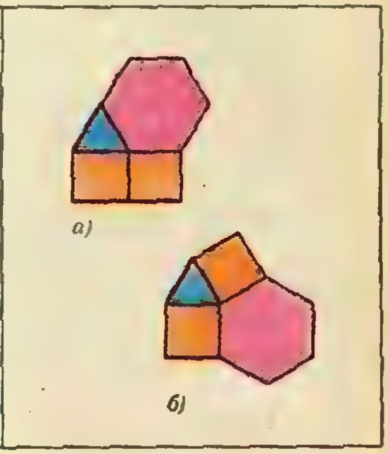


Рис. 5.

Как Декарт проводил касательные

Кандидат физико-математических наук
А. Д. БЕНДУКИДЗЕ

Задача о проведении касательных — одна из важнейших задач геометрии. Этой задачей занимались еще древние греки, которым удалось в некоторых случаях успешно решить ее. В частности, они умели строить касательные к окружности, эллипсу, гиперболе, параболе... Но у них не было общего метода, и в каждом отдельном случае приходилось действовать соответствующим образом — применять то или иное свойство проводимой касательной (например, в случае окружности опирались на тот известный факт, что касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания).

В 1637 году вышла одна из известнейших книг в истории науки — «Геометрия» Декарта. В ней автор, наряду с другими важными результатами своего исследования, приводит и общий метод проведения касательных — так называемый *метод нормалей*. (Историки установили, что Декарт владел им еще в 1629 году.) Цель настоящей статьи — познакомить читателя с этим методом.

Начнем с понятия нормали. *Нормалью линии в данной ее точке называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно к касательной.* В частности (и это важно для метода Декарта), если заданная линия — окружность, то нормаль есть прямая, идущая вдоль радиуса, имеющего концом точку касания. Понятно, что если нам удастся построить нормаль, мы без труда построим и касательную. Именно так поступает Декарт: он строит сначала нормаль, а уж потом — касательную (отсюда и название его метода). Для построения нормали Декарт применяет им же разработанный метод координат, что дает ему возможность решить геометрическую задачу алгебраическим путем. (Этим, кстати, как бы еще раз подчеркивается единство математики.)

Чтобы построить нормаль в точке $P(x_0; y_0)$ к алгебраической кривой L, заданной уравнением $F(x, y)=0$ (Декарта интересовало именно построение нормали, а не вывод ее уравнения), ищется точка пересечения C (c; 0) нормали с осью абсцисс. Если CP есть нормаль, то окружность с центром в точке C и радиусом CP касается данной кривой L в точке P (рис. 1); если же центр окружности будет хоть несколько смещен из C в другую точку оси абсцисс C', то окружность радиуса $C'P$ встретится с данной кривой L в соседстве с точкой P по крайней мере еще в одной точке. Таким образом, искомая окружность должна иметь с данной кривой L две или более общие точки, слившиеся в одну. Координаты точек пересечения кривой $F(x, y)=0$ и окружности $(x-c)^2+y^2=(x_0-c)^2+y_0^2$ находятся совместным решением их уравнений, для чего исключается одна из координат. При совпадении точек пересечения в P корень $x=x_0$ (или $y=y_0$) результирующего уравнения должен быть по крайней мере двойным, а это накладывает на искомую величину c определяющее ее условие.

Конечно, современному читателю метод Декарта может показаться искусственным и неэффективным. Прежде всего, уравнение касательной к аналитически заданной кривой $F(x, y)=0$ абсолютно автоматически пишется при помощи производных (правда, при этом желательно уметь дифференцировать функцию, заданную *неявно*). Но даже если и не знать производных (а Декарт их не знал), удобнее строить касательную, минуя промежуточные построения: вместо того чтобы описанным выше способом строить *окружность*, касающуюся данной кривой, можно (и даже проще) сразу построить *прямую*, касающуюся данной кривой. Для нас метод Декарта представляет, в первую очередь, исторический интерес; во вторую очередь он интересен нам (как и Декарту) тем, что позволяет поупражняться в методе координат.

Свой метод Декарт поясняет на примерах, в том числе на примере эллипса. Рассмотрим и мы этот пример.

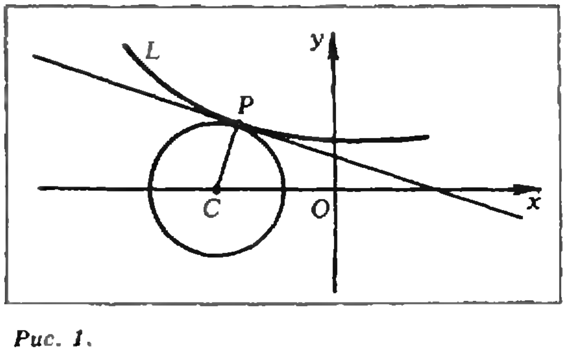


Рис. 1.

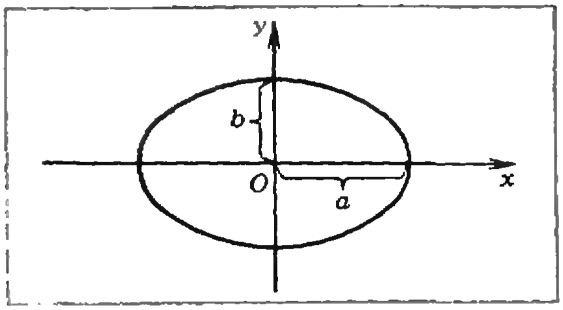


Рис. 2.

Напомним, что *эллипсом называется линия, полученная сжатием окружности к ее диаметру.* В частности, если окружность $x^2+y^2=a^2$ сжать к оси абсцисс, получится эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$

Здесь $b=ta$, где t — коэффициент сжатия (рис. 2).

Итак, дан эллипс (1), точка $P=(x_0; y_0)$ на нем, и нужно провести касательную к эллипсу в этой точке.

Возьмем окружность с центром в точке $C=(c; 0)$, проходящую через точку P. Ее уравнение имеет вид

$$(x-c)^2+y^2=(x_0-c)^2+y_0^2$$

(здесь c — пока неизвестный параметр), или

$$x^2+y^2-2cx-x_0^2-y_0^2+2cx_0=0. \qquad (2)$$

Параметр c следует подобрать так, чтобы окружность (2) имела с эллипсом (1) в P две сливщиеся точки пересечения (рис. 3). Для этого необходимо и достаточно, чтобы система уравнений

$$\begin{cases} b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0, \\ x^2+y^2-2cx-x_0^2-y_0^2+2cx_0=0 \end{cases}$$

имела решения $(x_0; y_0)$ и $(x_0; -y_0)$. (Здесь мы учитываем симметрию относительно оси абсцисс — см. рисунок 3.)

Исключив y^2, получим относительно x квадратное уравнение

$$(a^2-b^2)x^2-2a^2cx-a^2(x_0^2+\\ +y_0^2-2cx_0-b^2)=0.$$

Так как оно должно иметь единственный корень, его дискриминант должен равняться нулю, то есть

$$a^4c^2+a^2(a^2-b^2)(x_0^2+y_0^2-2cx_0-b^2)=0.$$

Поскольку $P=(x_0; y_0)$ — точка эллипса, то есть

$$b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2,$$

мы после несложных преобразований приходим к уравнению

$$(a^2c-(a^2-b^2)x_0)^2=0,$$

откуда $c=\frac{(a^2-b^2)x_0}{a^2}$; центр искомой окружности найден.

Радиус CP найденной окружности лежит на нормали данного эллипса, и остается через P провести перпендикуляр к CP. Это и будет искомая касательная. Найдем ее уравнение.

Предположим, что $0<x_0<a$ и PT — отрезок касательной. Тогда из прямоугольного треугольника CPT (рис. 4)

$$PQ^2=CQ\cdot QT,$$

и так как

$$PQ=y_0,$$
$$CQ=OQ-OC=x_0-\frac{(a^2-b^2)x_0}{a^2}=\frac{b^2x_0}{a^2},$$

получаем $QT=\frac{a^2y_0^2}{b^2x_0^2}$, так что

$$OT=OQ+QT=x_0+\frac{a^2y_0^2}{b^2x_0^2}=\frac{a^2}{x_0}$$

(мы снова учли тождество $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$).

Таким образом, мы нашли точку T пересечения искомой касательной с осью абсцисс: $T=(a^2/x_0; 0)$. (Полученный результат верен и в том случае, когда $-a<x_0<0$, проверьте это!)

Зная две точки касательной P и T, уже легко написать ее уравнение

$$y-y_0=k(x-x_0),$$

где угловой коэффициент k находится из условия

$$k=\frac{y_0-0}{x_0-\frac{a^2}{x_0}}=\frac{x_0y_0}{x_0^2-a^2}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

(мы опять воспользовались тем, что $(x_0; y_0)$ — точка эллипса, так что $x_0^2-a^2=-\frac{a^2y_0^2}{b^2}$).

Таким образом, уравнение искомой касательной имеет вид

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0).$$

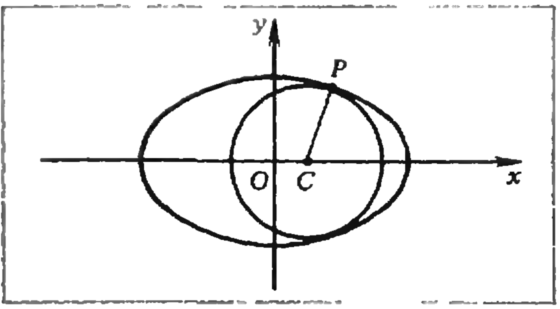


Рис. 3.

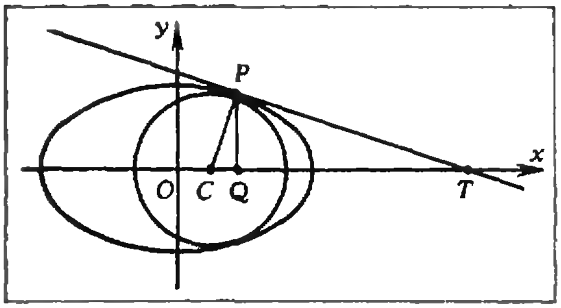


Рис. 4.

После элементарных преобразований окончательно получаем

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1 \qquad (3)$$

— мы видим, что уравнение касательной как бы родственно уравнению эллипса.

Читатель, знающий производные, мог все это предвидеть: ведь мы рассматривали эллипс — кривую второго порядка, а производные уравнения такой кривой — линейные функции.

Хотя уравнение (3) и было выведено при условии $0<|x_0|<a$, но и в случаях $x_0=0$ и $|x_0|=a$ прямая, заданная уравнением (3), будет касательной к эллипсу,— убедитесь в этом.

В заключение заметим, что уравнение касательной к эллипсу можно найти совсем просто, пользуясь тем, что эллипс получен сжатием из окружности. Точка $(x_0;\ y_0)$ эллипса (1) получена при сжатии с коэффициентом $t=\frac{b}{a}$ к оси абсцисс из точки $(x_0;\ t^{-1}y_0)$ окружности $x^2+y^2=a^2$. Касательная к окружности в точке $(x_0;\ t^{-1}y_0)$ перпендикулярна радиусу, идущему в эту точку. Угловой коэффициент радиуса равен $\frac{t^{-1}y_0}{x_0}$; значит, угловой коэффициент касательной к окружности равен $-\left(\frac{t^{-1}y_0}{x_0}\right)^{-1}=-\frac{tx_0}{y_0}$. При сжатии к оси абсцисс с коэффициентом t касательная к окружности превращается в касательную к эллипсу, а ее угловой коэффициент уменьшается в t раз, то есть делается равным

$$-\frac{t^2x_0}{y_0}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

Однако это рассуждение использует очень частное геометрическое свойство эллипса — его родство с окружностью. Убедиться в общности метода Декарта читатель может, сделав упражнение: пользуясь этим методом, найти уравнение касательной к параболе $y^2=2px$ (в точке $(x_0;\ y_0)$).

Паркеты из правильных многоугольников

(Начало см. на с. 3)

Первая наша задача состоит в том, чтобы найти все решения уравнения (1) с целыми $m_i>0$. Уравнение (1), сокращая на $2d$, удобно записать в виде

$$\Sigma m_i\left(1-\frac{2}{i}\right)=2. \qquad (2)$$

Для каждого решения уравнения (2) надо исследовать соответствующие расположения многоугольников, примыкающих к вершине. Например, решению $m_3=1,\ m_4=2;\ m_6=1,$

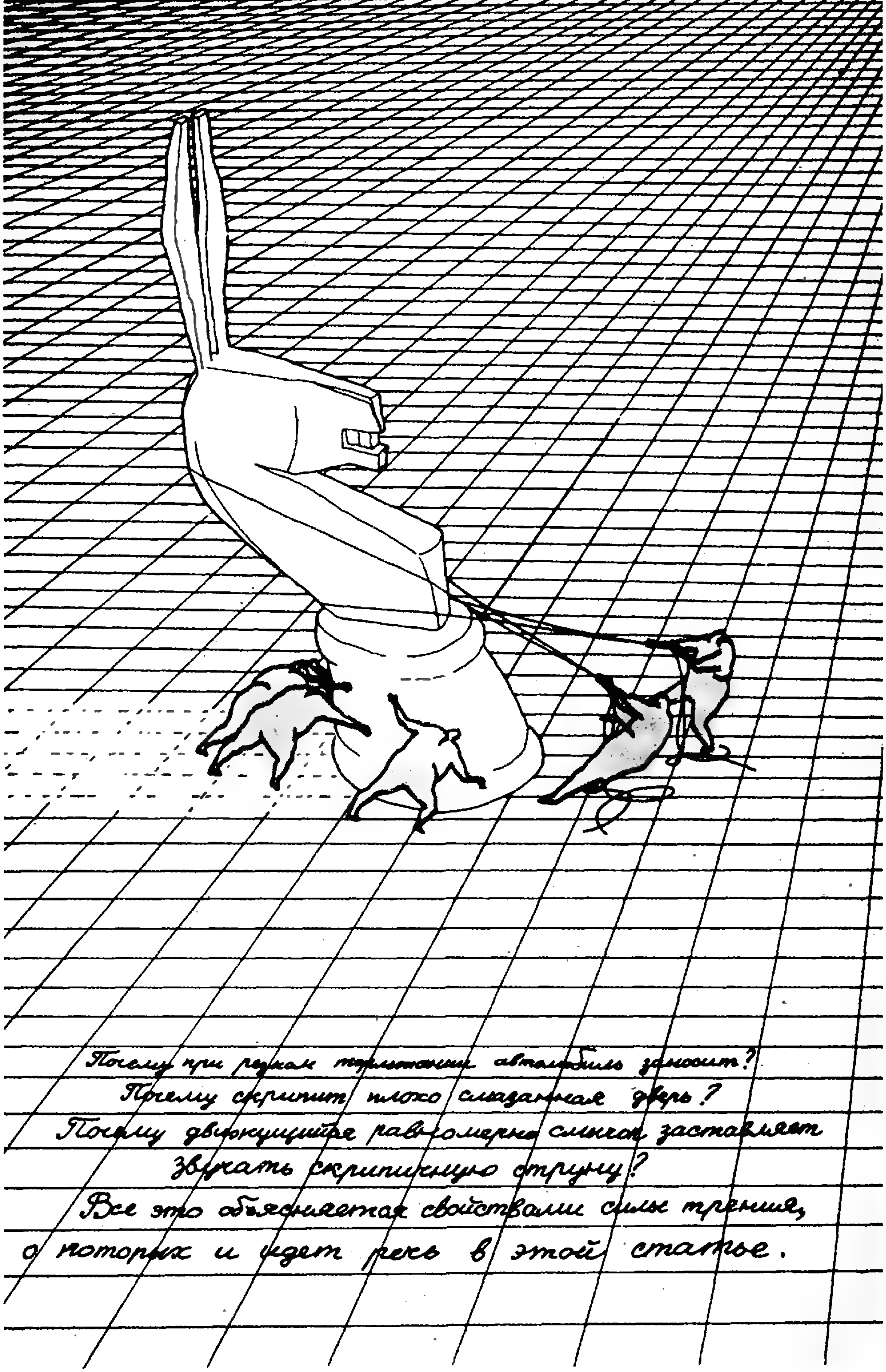
$$\left(1-\frac{2}{3}\right)+2\left(1-\frac{2}{4}\right)+\left(1-\frac{2}{6}\right)=2,$$

соответствуют вершины, в которых сходится один треугольник, два квадрата и один шестиугольник. Их легко расположить двумя существенно различными способами (рис. 5, *а* и *б*). Но легко показать (докажите), что расположению *б* не соответствует никакой правильный паркет.

Указаний дано достаточно. Беритесь за работу!

Советуем прочесть

В серии «Библиотечка «Квант» издательства «Наука» готовится к выходу в свет книга «Рассказы о физике и физиках» (выпуск 53). В этой книге собраны статьи, написанные в разные годы для читателей нашего журнала академиком И. К. Кикоиным, первым главным редактором «Кванта». Мы уверены, что знакомство с «Рассказами...» будет полезным и интересным и сегодняшним школьникам.



Почему при резком торможении автомобиль заносит?
Почему скрипит плохо смазанная дверь?
Почему движущийся равномерно смычок заставляет
звучать скрипичную струну?
Все это объясняется свойствами силы трения,
о которых и идет речь в этой статье.

Сухое трение

Кандидат физико-математических наук
И. Ш. СЛОБОДЕЦКИЙ

С трением мы сталкиваемся на каждом шагу. Вернее было бы сказать, что без трения мы и шагу ступить не можем. Но несмотря на ту большую роль, которую играет трение в нашей жизни, до сих пор не создана достаточно полная картина возникновения трения, которое имеет сложную природу. Одна из причин в том, что опыты с трением очень чувствительны к обработке поверхности и поэтому трудно воспроизводимы.

Вот пример. Английский физик Гарди исследовал зависимость силы трения между стеклянными пластинками от температуры. Он тщательно обрабатывал пластины хлорной известью и обмывал их водой, удаляя жиры и загрязнения. Трение увеличивалось с ростом температуры. Опыт был повторен много раз, и каждый раз получались примерно одни и те же результаты. Но однажды, мóя пластинки, Гарди протер их пальцами. Трение перестало зависеть от температуры. Протерев пластинки, Гарди, как он сам считал, удалил с них очень тонкий слой стекла, изменивший свои свойства из-за взаимодействия с хлоркой и водой.

Когда говорят о трении, различают три несколько отличных физических явления: трение при движении тела в жидкости или газе — его называют жидким трением; сопротивление, возникающее, когда тело скользит по какой-нибудь поверхности,— трение скольжения, или сухое трение; сопротивление, возникающее, когда тело катится,— трение качения. Эта статья посвящена сухому трению.

Первые исследования трения, о которых мы знаем, были проведены Леонардо да Винчи. Он измерял силу трения, действующую на деревянные параллелепипеды, скользящие по доске, причем, ставя бруски на разные грани, определял зависимость силы трения от площади опоры. Но работы Леонардо да Винчи не были опубликованы. Они стали известны уже после того, как классические законы трения были в 17—18 вв. вновь открыты французскими учеными Амонтоном и Кулоном.

Вот эти законы: 1) сила трения скольжения F прямо пропорциональна силе N нормального давления тела на поверхность, по которой движется тело: $F=kN$, где k — безразмерный коэффициент, называемый коэффициентом трения; 2) сила трения не зависит от площади контакта между поверхностями; 3) коэффициент трения зависит от свойств трущихся поверхностей; 4) сила трения не зависит от скорости движения тела.

Триста лет исследований трения подтвердили правильность трех первых законов. Не совсем верным оказался лишь последний — четвертый. Но это стало ясно много позже, когда появились железные дороги и машинисты заметили, что при торможении состав ведет себя не так, как предсказывали инженеры.

Амонтон и Кулон объясняли происхождение трения довольно просто. Обе поверхности неровные, они покрыты небольшими горбами и впадинами. При движении выступы цепляются друг за друга, и поэтому тело все время поднимается и опускается. Для того чтобы втащить тело на «холмы», к нему нужно приложить определенную силу. Если выступы большие, то и сила нужна побольше. Но это объяснение противоречит одному очень существенному факту: на трение тратится энергия. Кубик, скользящий по горизонтальной поверхности, останавливается. Его энергия расходуется на трение. А поднимаясь и опускаясь, тело не тратит своей энергии. Вспомните аттракцион «американские горы». Когда санки скатываются с горки, их потенциальная энергия переходит в кинетическую и скорость санок возрастает, а когда санки въезжают на новую возвышенность, кинетическая энергия, наоборот, переходит в потенциальную. Энергия санок уменьшается за счет трения, но не из-за подъемов и спусков. Аналогично обстоит дело и при движении одного тела по поверхности другого. Здесь потери энергии на трение также не могут быть связаны с тем, что выступы одного тела взбираются на бугры другого.

Есть еще возражения. Например, простые опыты по измерению силы трения между полированными стеклянными пластинками показали, что

Эта статья была опубликована в самом первом номере журнала («Квант», 1970, № 1, с. 37).

при улучшении полировки поверхностей сила трения сначала не меняется, а затем возрастает, а не убывает, как следовало бы ожидать на основании модели явления, предложенной Амонтоном и Кулоном.

Механизм трения значительно более сложен. Из-за неровностей поверхностей они соприкасаются только в отдельных точках на вершинах выступов. Здесь молекулы соприкасающихся тел сходятся на расстояния, соизмеримые с расстоянием между молекулами в самих телах, и «сцепляются»; образуется прочная связь. При движении тела связи постоянно создаются и рвутся. При этом возникают колебания молекул. На эти колебания и тратится часть энергии движущегося тела. В конечном итоге она переходит в тепло.

Площадь действительного контакта составляет обычно от одного до двух тысяч квадратных микрон. Она практически не зависит от размеров тела и определяется природой поверхностей, их обработкой, температурой и силой нормального давления. Если на тело надавить, то выступы сминаются, и площадь действительного контакта увеличивается. Увеличивается и сила трения.

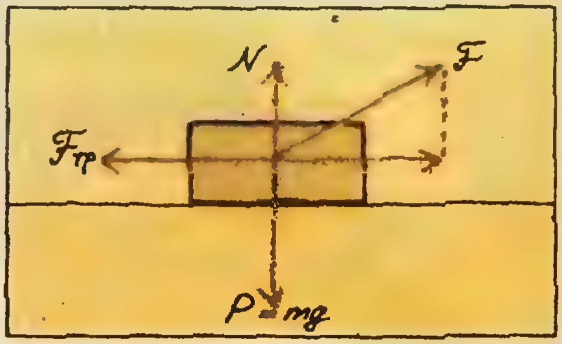
При значительной шероховатости поверхностей большую роль в увеличении силы трения начинает играть механическое зацепление между «холмами». Они при движении сминаются, и при этом тоже возникают колебания молекул.

Теперь понятен опыт с полированными стеклянными пластинками. Пока поверхности были «грубые», площадь контактов была невелика, а после хорошей полировки оно возросло. Можно привести еще пример увеличения трения с «улучшением» поверхности. Если взять два металлических бруска с чистыми полированными поверхностями, то они слипаются. Трение здесь становится большим, так как площадь действительного контакта велика. Силы молекулярного сцепления, которые ответственны за трение, превращают два бруска в монолит!

В домашних условиях можно провести следующий опыт. Поставьте бокал на стеклянную пластинку и, привязав к ножке бечевку, потащите бокал. Затем постарайтесь как можно лучше очистить стекло, смыть жиры и грязь. Опять потащите. Теперь это сделать значительно труднее. Чистый контакт стекло — стекло разорвать нелегко. Присмотревшись к поверхности, вы сможете заметить даже царапины. Вырвать кусочки стекла оказывается легче, чем разорвать контакт!

Рассмотренная нами модель трения довольно груба. Мы не останавливались здесь на диффузии молекул, то есть на проникновении молекул одного тела в другое, на роли электрических зарядов на соприкасающихся поверхностях, на роли и механизме действия смазки. Эти вопросы во многом не ясны, а объяснения спорны. Можно только удивляться тому, что при такой сложности трение описывается столь простым законом: $F = kN$. И хотя коэффициент трения k не очень постоянен и несколько меняется от одной точки поверхности к другой, для многих поверхностей, с которыми мы часто сталкиваемся в технике, можно делать достаточно хорошие оценки ожидаемой силы трения.

Сухое трение имеет одну существенную особенность: трение покоя. Если в жидкости или газе трение возникает только при движении тела и тело можно сдвинуть, приложив к нему даже очень маленькую силу, то при сухом трении тело начинает двигаться только тогда, когда проекция приложенной к нему силы F на плоскость, касательную к поверхности, на которой лежит тело, станет больше некоторой величины. Пока тело не начало скользить, действующая на него сила трения равна касательной составляющей приложенной силы и направлена в противоположную сторону. При увеличении приложенной силы сила трения тоже возрастает, пока не достигает максимальной величины, равной kN, при которой начинается скольже-



ние. Дальше сила трения практически уже не меняется.

Часто об этом забывают при решении задач. На вопрос «какая сила трения действует на стол весом 300 Н, стоящий на полу, если коэффициент трения равен 0,4», большинство уверенно отвечает: «120 Н», что неверно. Сила трения равна нулю, иначе стол поехал бы в сторону действия силы трения, так как других горизонтальных сил нет.

Итак, если тело покоится, то для того чтобы сдвинуть его с места, к телу нужно приложить силу, бóльшую максимально возможной силы трения покоя, которое обусловлено прочностью молекулярных связей. А как обстоит дело, если тело уже движется? Какую силу нужно приложить для того, чтобы тело начало двигаться еще и в другом направлении? Оказывается, сколь угодно малую. Связано это как раз с тем, что сила трения не может быть больше максимальной силы трения покоя.

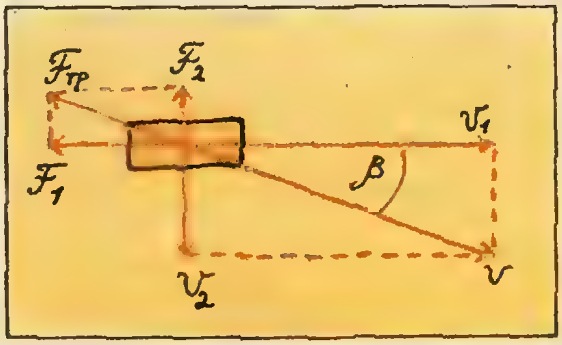
Попробуйте проделать простой опыт. Возьмите книжку и положите ее одним краем на другую книжку потолще. Получится наклонная плоскость. Теперь положите на эту плоскость спичечный коробок, к которому привязана нитка. Если коробок скользит, то уменьшите наклон плоскости, взяв книжку-подставку потоньше. Потяните за нитку коробок вбок. При этом он поедет еще и вниз! Уменьшите наклон плоскости и опять потяните за нитку. Та же картина. Коробок соскальзывает даже при очень малых углах наклона плоскости. Сила трения, раньше удерживавшая коробок на плоскости, стала почему-то очень маленькой.

Попробуем понять, в чем здесь дело. Если бы коробок двигался только горизонтально, то параллельно ребру наклонной плоскости на него действовала бы сила трения, равная kN. Для того чтобы коробок при этом не соскальзывал вниз, вверх на него должна действовать сила трения, равная по величине проекции силы тяжести на наклонную плоскость. Равнодействующая этих двух сил трения больше, чем kN, а этого быть не может. Значит, коробок должен соскальзывать с наклонной плоскости.

Возьмем брусок, привяжем к нему нить и, положив брусок на горизонтальную плоскость, будем тянуть за нить с постоянной скоростью $\vec{v}_1$. Приложив к бруску силу, перпендикулярную к $\vec{v}_1$, его можно заставить двигаться еще и в этом направлении с постоянной скоростью $\vec{v}_2$. Сила трения при этом будет равна kN и направлена противоположно скорости $\vec{v}$ движения бруска относительно плоскости ($\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$). Разложим силу трения на две составляющие по направлениям скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$:

$$F_1=F_{тр}\cos\beta,\quad F_2=F_{тр}\sin\beta,$$

где β — угол между векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}$, а $\operatorname{tg}\beta=v_2/v_1$.



Составляющая F_1 силы трения уравновешивает силу натяжения нити, а составляющая F_2 — «боковую» силу, приложенную к бруску. Так как

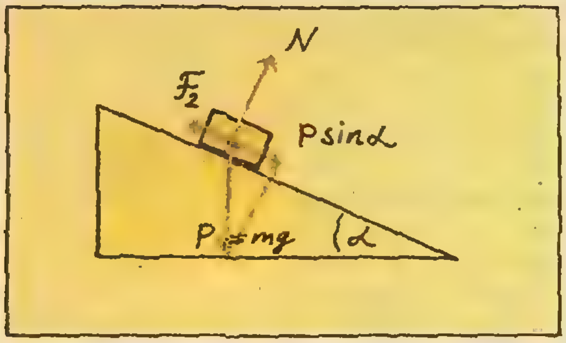
$$\sin\beta=\frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}},$$

то

$$F_2=F_{тр}\frac{\frac{v_2}{v_1}}{\sqrt{1+(v_2/v_1)^2}}=F_{тр}\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}.$$

Если $v_2\ll v_1$, то угол β мал и $\sin\beta\approx\operatorname{tg}\beta$. В этом случае $F_2=F_{тр}\operatorname{tg}\beta=kN\frac{v_2}{v_1}$, и составляющая силы трения, препятствующая движению бруска «вбок», оказывается пропорциональной скорости этого движения. Картина получается такая, как при малых скоростях при жидком трении. А это означает, что брусок, движущийся в некотором направлении, можно заставить двигаться еще и в перпендикулярном направлении сколь угодно малой силой.

Любопытный вывод можно теперь сделать для коробка, движущегося по наклонной плоскости. Здесь $F_2=P\sin\alpha$, а $N=P\cos\alpha$ ($P=mg$ — сила тяжести, действующая на коробок,



α — угол наклона плоскости к горизонту). Поэтому

$$P\sin\alpha = kP\cos\alpha\,\frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\,,$$

откуда

$$v_2 = v_1\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{k^2-\operatorname{tg}^2\alpha}}\,.$$

(Это справедливо, конечно, лишь при $\operatorname{tg}\alpha < k$, так как при бо́льших углах наклона плоскости к горизонту коробок уже не удерживается на плоскости силой трения.)

При малых углах наклона плоскости к горизонту (таких, что $\operatorname{tg}\alpha \ll k$)

$$v_2 = v_1\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{k}\,,$$

то есть скорость соскальзывания коробка пропорциональна скорости его движения параллельно ребру наклонной плоскости и тангенсу угла наклона плоскости к горизонту.

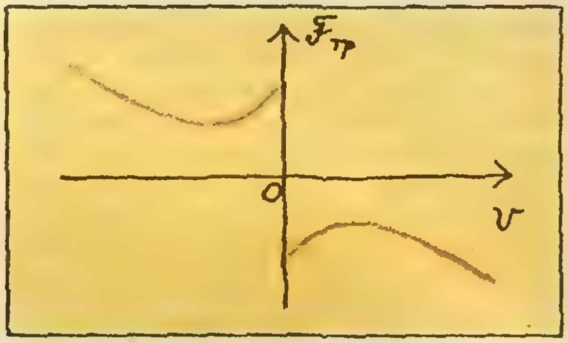
Этот вывод легко проверить экспериментально. Так как при равномерном движении путь, пройденный телом, пропорционален скорости, то отношение скорости v_2 к v_1 будет равно отношению отрезков, которые пройдет коробок в этих направлениях.

Явление, о котором шла речь, совсем не редкое. Например, известно, что при резком торможении электродвигателя ремень передачи часто соскальзывает со шкивов. Происходит это потому, что при торможении двигателя ремень начинает проскальзывать относительно шкивов, и достаточно небольшой силы, чтобы сдвинуть ремень вбок. Так как обычно имеется небольшой перекос в установке шкивов и ремня, то такой силой является составляющая силы натяжения ремня. Вот еще примеры. Когда хотят вытащить гвоздь из стенки без помощи клещей, его тащат, поворачивая одновременно вокруг оси. По той же причине при резком торможении автомобиль теряет управление; машину «заносит». Колеса скользят по дороге, а боковая сила возникает за счет неровностей дороги.

Остановимся теперь на последнем законе Амонтона — Кулона: сила трения не зависит от скорости тела. Это не совсем так.

Вопрос о зависимости силы трения от скорости имеет очень важное практическое значение. И хотя эксперименты здесь имеют много специфических трудностей, они окупаются использованием полученных сведений, например, в теории резания металлов, в расчетах движения пуль и снарядов в стволе и т. д.

Обычно считают, что для того чтобы сдвинуть тело с места, к нему нужно приложить бо́льшую силу, чем для того, чтобы тащить тело. В большинстве случаев это связано с загрязнениями поверхностей трущихся тел. Например, для чистых металлов такого скачка силы трения не наблюдается. Опыты с движением пули в стволе показали, что с увеличением скорости пули величина силы трения сначала быстро убывает, затем она уменьшается все медленнее, и при скоростях, бо́льших 100 м/с, начинает расти.



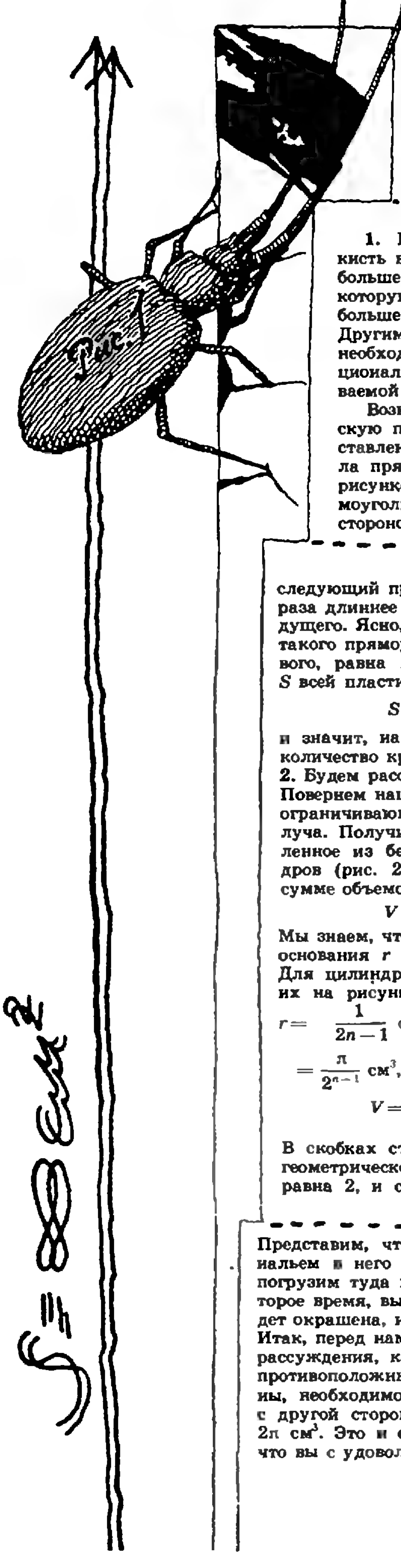
Грубо это можно объяснить тем, что в месте контакта выделяется много тепла. При скоростях порядка 100 м/с температура в месте контакта может достигать нескольких тысяч градусов, и между поверхностями образуется слой расплавленного металла. Трение становится жидким. При больших же скоростях жидкое трение пропорционально квадрату скорости.

Интересно, что примерно такую же зависимость от скорости имеет сила трения смычка о струну. Именно поэтому мы можем слушать игру на смычковых инструментах — скрипке, виолончели, альте.

(Окончание см. на с. 18)

Малярный парадокс

А. А. Панов



1. Каждый, кто держал кисть в руке, знает, что чем больше площадь поверхности, которую нужно окрасить, тем больше краски уйдет на нее. Другими словами, количество необходимой краски пропорционально площади окрашиваемой поверхности.

Возьмем, например, плоскую пластинку, которая составлена из бесконечного числа прямоугольников, как на рисунке 1. Здесь первый прямоугольник — это квадрат со стороной 1 см, а каждый последующий прямоугольник в два раза длиннее и в два раза у́же предыдущего. Ясно, что площадь любого такого прямоугольника, как и первого, равна 1 см^2. Поэтому площадь S всей пластины бесконечна:

$$S=(1+1+1...)\text{ см}^2,$$

и значит, на нее уйдет бесконечное количество краски.

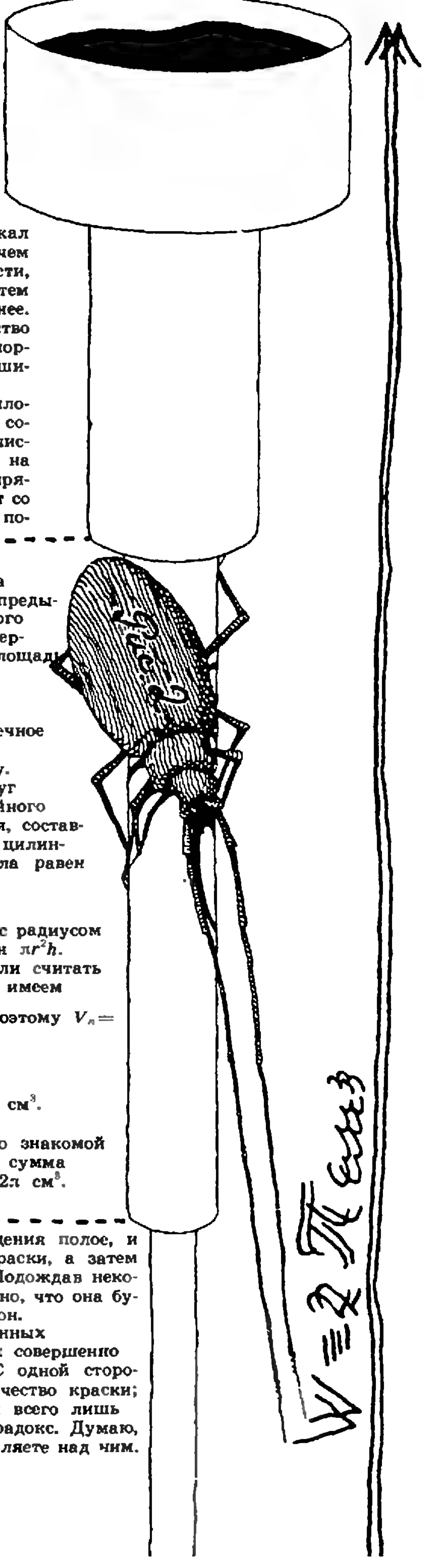
2. Будем рассуждать по-другому. Повернем нашу пластинку вокруг ограничивающего ее прямолинейного луча. Получится тело вращения, составленное из бесконечного числа цилиндров (рис. 2). Объем этого тела равен сумме объемов всех цилиндров:

$$V=V_1+V_2+V_3+...$$

Мы знаем, что объем цилиндра с радиусом основания r и высотой h равен $\pi r^2 h$. Для цилиндра с номером n, если считать их на рисунке 2 сверху вниз, имеем $r=\frac{1}{2n-1}$ см, $h=2^{n-1}$ см. Поэтому $V_n=\frac{\pi}{2^{n-1}}$ см^3, и значит,

$$V=\pi\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...\right)\text{ см}^3.$$

В скобках стоит сумма хорошо знакомой геометрической прогрессии. Эта сумма равна 2, и следовательно, $V=2\pi$ см^3.



Представим, что наше тело вращения полое, и нальем в него доверху 2π см^3 краски, а затем погрузим туда нашу пластинку. Подождав некоторое время, вынем пластинку. Ясно, что она будет окрашена, и даже с двух сторон.

Итак, перед нами два безукоризненных рассуждения, которые приводят к совершенно противоположным результатам. С одной стороны, необходимо бесконечное количество краски; с другой стороны, ее потребуется всего лишь 2π см^3. Это и есть малярный парадокс. Думаю, что вы с удовольствием поразмышляете над ним.

Секрет Старого Бондаря

Доктор физико-математических наук
М. Б. БАЛК

IOHANNES KEPPLERUS ASTR
S. CÆS
ORDD: AUSTRIAE MATHEMATICUS. IOHA

Иоганн Кеплер — придворный математик австрийского императора Матвея I и знаменитый астроном — с любопытством и восхищением наблюдал, как молодой винодел поразительно легко и быстро называл емкость одной бочки за другой. Кеплер вспомнил нудное измерение, применяемое на Рейне: не боясь скучной потери вре-

мени, там наполняют бочку, отсчитывая количество влитых в нее «амфор» (емкостей, принятых за единицу измерения), а затем выжигают на бочке вместимость — чтобы, не дай бог, не пришлось выполнять эту утомительную процедуру еще раз.

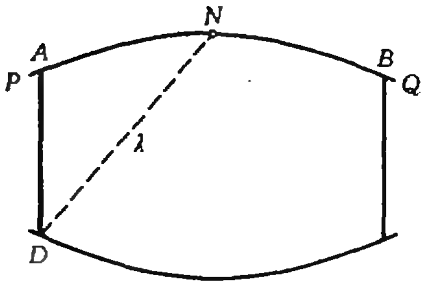


Рис. 1.

А тут... Парень просовывает медный оконечник линейки через наливное отверстие полной бочки (рис. 1), поперек до «пятки» (самой нижней точки) деревянного днища, и по той пометке на линейке, которая оказывается у наливного отверстия (у верхней точки «пуза» бочки), сразу называет вместимость бочки. Бочки были разные— большие и маленькие, более «пузатые» и совсем «худощавые»,— но это не беспокоило парня, он одинаково быстро и уверенно выдавал ответ. «Неужели жульничает?» — промелькнуло в голове у Кеплера.

— Не беспокойтесь, господин математик его величества,— сказал парень, как бы прочитав мысль Кеплера.— Этот способ измерения емкостей установлен у нас в Линце городскими властями, и цех бондарей ручается за точность измерения.

— Неужели для любых бочек?

— Насчет любых не знаю, но для бочек здесь, в Австрии,— наверняка,— сострил парень.

— Но на каком основании ты так уверен в правильности этого способа?

— Чего не знаю, того не знаю. Не стану врать. Говорят, много лет назад жил здесь Старый Бондарь, он предложил вот этот способ. А почему он так предложил — не знаю.

* * *

О том, как Кеплер разгадал секрет австрийских бондарей, он рассказал в книге «Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму, и исключительно удобное употребление для них кубической линейки, с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии». Хотя книга была опубликована 370 лет назад (1615 г.), она, как мы увидим, поучительна и сейчас.

Сначала Кеплер рассмотрел случай цилиндрической бочки (рис. 2). Пусть $ND=\lambda$, длина образующей AB равна $2x$, диаметр днища AD равен $2y$; тогда

$$x^2+4y^2=\lambda^2, \qquad (1)$$

и вместимость бочки можно найти по формуле

$$v=\frac{1}{2}\pi(\lambda^2-x^2)x. \qquad (2)$$

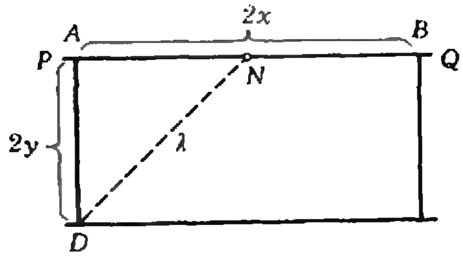


Рис. 2.

Нетрудно выразить вместимость бочки через расстояние λ и отношение (t) длины образующей к диаметру днища ($t=x/y$). Из (1) и (2) следует, что

$$v=2\pi\lambda^3 t(4+t^2)^{-\frac{3}{2}}. \qquad (3)$$

«Из этих формул видно,— рассудил Кеплер,— что емкость цилиндрической бочки не определяетя только расстоянием λ; чтобы можно было пользоваться способом австрийских бондарей, мы должны иметь дело с бочками, для которых отношение t зафиксировано ($t=t_0$). Каким же образом лучше всего выбрать это отношение? Как выгоднее всего выбрать соотношение между длиной образующей и диаметром днища? Рассуждаем с точки зрения винодела. Он заинтересован в выборе — среди всевозможных значений параметра t — такого значения (t_0), чтобы среди всех бочек, у которых расстояние ND равно λ, выбранная им бочка имела самый большой объем (v_0): тогда он может вычислять ее емкость по формуле (3), а если окажется, что при изготовлении бочки бондарь не сумел точно соблюсти идеальное отношение t_0, а немножко отступил от него ($t \approx t_0$, но $t > t_0$ или $t < t_0$), то винодел тоже не прогадает: реальная емкость бочки v будет обязательно меньше v_0. Таким образом, винодел назовет объем v_0 (и получит с покупателя соответствующую плату), а на самом деле отдаст покупателю немного меньшее количество вина, а именно v.

Но, с другой стороны, уважающий себя винодел не заинтересован в том, чтобы обмануть покупателя; он заинтересован в том, чтобы емкость реальной бочки (соответствующей реальному выбору параметра t, близкому к t_0) по возможности меньше отличалась от емкости v_0, соответствующей лучшему значению параметра (t_0). Еще больше в этом заинтересован покупатель. Оказывается, что это тоже достигается при таком выборе параметра t, при котором объем бочки v наибольший.»

Владея понятием производной, мы можем легко обосновать это соображение Кеплера (Кеплеру было намного труднее, чем нам, найти обоснование: ведь его книга вышла за 70 лет до рождения дифференциального исчисления). Воспользуемся следующим общим соображением. Пусть $f(t)$ — какая-нибудь функция от t (ради простоты — такая, которая имеет при $t > 0$ производную первого порядка); пусть t_0 — какое-нибудь выбранное нами значение аргумента t. Тогда, при малом приращении h, то есть при $t = t_0 + h$, имеем

$$f(t)-f(t_0)=f'(t_0)h+\alpha(h)\cdot h,$$

где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$ (см. «Алгебра и начала анализа 9—10», п. 22).

Отсюда видим: если $f'(t_0) \neq 0$, то отклоненение $f(t)$ от $f(t_0)$ будет — при малых h — практически пропорционально h. Но если t_0 — точка максимума (или минимума) для данной функции, то отклонение равно $\alpha(h)\cdot h$, где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$. Это значит, что вблизи точки экстремума (t_0) малое отклонение параметра t от t_0 сказывается на изменении функции $f(t)$ существенно слабее (Кеплер говорит: «нечувствительно»), чем вблизи другого значения аргумента t, где $f'(t) \neq 0$. Применительно к нашему случаю (см. формулу (3)) это означает, что выгоднее всего выбрать параметр t так ($t = t_0$), чтобы цилиндрическая бочка имела наибольшую вместимость (v_0): в этом случае при небольших — и неизбежных на практике — отклонениях параметра t от t_0 отклонение емкости v бочки от v_0 будет «нечувствительным».

Кеплер находит затем (при заданном λ) то значение отношения t, при котором вместимость бочки (v) будет наибольшей. Используя понятие производной, мы можем это сделать значительно легче и быстрее, чем Кеплер. Воспользуемся формулой (2) для v. Тогда

$$v'(x)=\frac{1}{2}\pi(\lambda^2-3x^2),$$

$$x=\lambda/\sqrt{3},\ 4y^2=\lambda^2-x^2=2\lambda^2/3,\ y=\lambda/\sqrt{6},$$
$$t_0=x/y=\sqrt{2}\approx 1{,}41. \qquad (4)$$

При таком значении параметра t вместимость цилиндрической бочки будет максимальной (при данном λ) и будет равна

$$v_0=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\lambda^3. \qquad (5)$$

* * *

«Обращусь теперь к более общему случаю, — рассуждал Кеплер, — когда «клепки» бочки (доски, составляющие ее боковую поверхность) будут изогнутыми (а не прямолинейными, как в случае цилиндрической бочки). Такую бочку можно с достаточно хорошей точностью представить себе как составленную из двух одинаковых усеченных конусов, состыкованных своими большими основаниями (рис. 3).

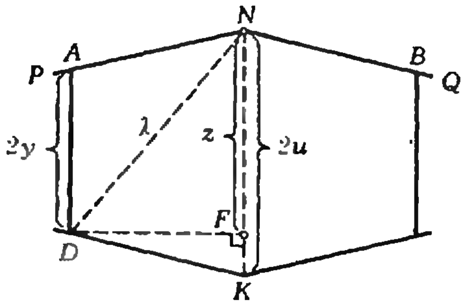


Рис. 3.

При этом я, конечно, допущу некоторую неточность, но если бочка не очень «пузатая», то погрешность будет незначительной. Затем среди всех возможных бочек, у которых расстояние ND равно заданному λ, выберу ту, которая имеет наибольшую вместимость.»

Следуя этому плану решения, предложенному Кеплером, мы можем выразить емкость (v) бочки через расстояние λ, через радиус (y) меньшего основания усеченного конуса и через расстояние $z=NF$ (F — основание перпендикуляра, опущенного из точки D меньшего основания усеченного конуса на большее основание). Проделаем эти выкладки, воспользовавшись формулой для объема усеченного конуса и учитывая, что высота усеченного конуса равна $DF=\sqrt{\lambda^2-z^2}$. Несложные преобразования приводят нас к формуле

$$v=\frac{2}{3}\pi\left(y^2+(z-y)^2+y(z-y)\right)\times \times\sqrt{\lambda^2-z^2}. \qquad (6)$$

Кеплер сумел выяснить, при каких соотношениях между размерами бочки (иначе говоря, при каких значениях y и z при заданном λ) вместимость бочки будет наибольшей. Мы могли бы получить результат Кеплера, решив следующую задачу:

Задача. *Докажите, пользуясь понятием производной, что среди бочек указанного вида с заданным значением λ расстояния ND наиболее вместимой оказывается цилиндрическая бочка, у которой образующая в $\sqrt{2}$ больше диаметра днища.* (Решение см. на с. 63.) Теперь учтем соображение Кеплера, что «вблизи своей точки максимума малое изменение аргументов функции нечувствительно сказывается на изменении ее значения». Применительно к нашему случаю это означает, что если размеры какой-нибудь бочки мало отклоняются от размеров наилучшей бочки (то есть цилиндрической, с отношением $AB:AD=\sqrt{2}$), то эти отклонения «нечувствительно» сказываются на емкости бочки. Поэтому объем бочки, мало отличающейся от «наилучшей», можно вычислить по той же формуле (5).

«Теперь понятно,— подумал Кеплер, что такое «австрийская» бочка: это бочка, у которой образующая ANB длиннее диаметра примерно в $\sqrt{2}$ раз. Так как при выборе длины «клепки» PNQ следует еще учесть толщину двух днищ и то, что клепка должна немного выходить за край днища, то на практике это означает, что клепка должна быть примерно в полтора раза длиннее диаметра днища.»

Более того, Кеплеру стало ясно, как найти объем «австрийской бочки» с помощью обычной линейки: надо измерить расстояние ND и вычислить емкость бочки v_0 по формуле (5). «Но ведь винодел называл объем бочки без вычислений! — размышлял Кеплер.— Видимо, дело в том, что линейка — *необычная*, пометки на ней расставлены не так, как на обычной линейке. Каким же образом эта линейка проградуирована?..

Сначала надо бы сообразить, что это за таинственная «амфора», о которой говорил винодел. Вероятно, это тоже какой-нибудь бочонок, но его вместимость принимается за единицу объема. Но если австрийские бочары предпочитают все бочки делать так, чтобы отношение длины клепки к диаметру основания было оптимальным (около 1,5), то при изготовлении эталонного бочонка, «амфоры», они вряд ли отказались от того же соотношения. Пусть для эталонного бочонка (рис. 4) расстояние N_1D_1 равно λ_1. Тогда

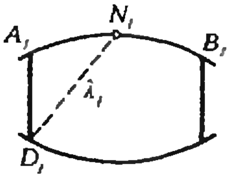


Рис. 4.

имеем (см. (5)) $1=(\pi/3\sqrt{3})\lambda_1^3$). Учитывая (5), получаем для емкости любой «австрийской» бочки такую достаточно хорошую приближенную формулу: $v_0=(\lambda/\lambda_1)^3$ (амфор). Значит, чтобы найти v_0, нам достаточно знать не λ, а отношение λ/λ_1. И даже не само это отношение, а его куб. Числа $(\lambda/\lambda_1)^3$ при различных λ и надо нанести на линейку, то есть градуировать линейку не равномерно, а по «кубическому закону». На расстоянии от медного оконечника (рис. 5), равном λ_1, $2\lambda_1$, $3\lambda_1$ и т. д., ставить пометки: 1; $8(=2^3)$; $27(=3^3)$ и т. д. И вообще — на расстоянии $k\lambda_1$ (k — любое положительное число) ставить пометку, равную k^3. Если я теперь вставлю вот такую линейку в бочку так, чтобы ее медный

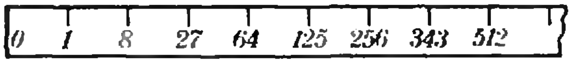


Рис. 5.

оконечник упирался в пятку днища (D), то числовая пометка у наливного отверстия (N) как раз укажет, сколько амфор вмещается в бочку.»

* * *

Осенью 1615 года по просьбе Кеплера в городской ратуше Линца состоялась его встреча со старостой цеха бондарей.

— Господин староста,— начал Кеплер,— меня интересует способ, которым австрийские бондари и виноделы пользуются для измерения вместимости бочек.

— Видите ли, господин математик его величества,— возразил староста,— это производственный секрет нашего цеха. Эта тайна переходит от одного поколения бондарей к следующему, еще со времен Старого Бондаря.

— Я так и полагал, что когда-то существовал некий превосходный геометр, научивший этому способу ваших бочаров. Но думаю, что я сумел разгадать его секрет.

— Тогда скажите, господин математик его величества, в чем, по Вашему мнению, состоит секрет Старого Бондаря, и я обещаю подтвердить то, что в ваших словах будет истинным.

— Размышления привели меня к выводу,— ответил Кеплер,— что при изготовлении бочки любых размеров вы, бочары Линца, пользуетесь только одним соображением: чтобы длина клепок была в полтора раза больше, чем поперечник днища.

— Совершенно истинно! — с удивлением подтвердил бочар.

— А кроме того, для измерения емкости бочки вы пользуетесь линейкой, на которой деления расположены по «кубическому закону».

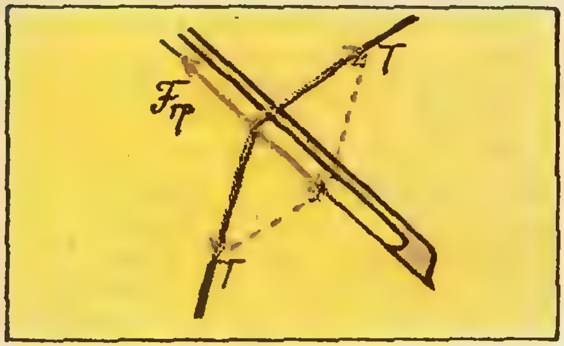
— И это правда,— с еще большим удивлением подтвердил староста цеха бондарей, с опаской взглянув на Кеплера.— Да не ясновидец ли вы, господин Кеплер? Я слышал, что вы, как королевский звездочет, умеете читать прошлое и будущее по расположению звезд. Неужели секрет Старого Бондаря вы разгадали с помощью астрологии?

— Нет, я его вычислил с помощью математики,— ответил Кеплер, и на этом разговор окончился.

Сухое трение

(Начало см. на с. 8)

При равномерном движении смычка струна увлекается им и натягивается. Вместе с натяжением струны увеличивается сила трения между смычком и струной. Когда величина силы трения становится максимально возможной, струна начинает проскальзывать относительно смычка. Если бы сила трения не зависела от относительной скорости смычка и струны, то, очевидно, отклонение струны от положения равновесия не изменялось бы.



Но при проскальзывании трение уменьшается. Поэтому струна начинает двигаться к положению равновесия. При этом относительная скорость струны увеличивается, а это еще уменьшает силу трения. Когда же струна, совершив колебание, движется в обратном направлении, ее скорость относительно смычка уменьшается, и смычок опять захватывает струну. Все повторяется. Так возбуждаются колебания струны. Эти колебания незатухающие, так как энергия, потерянная струной при ее движении, каждый раз восполняется работой силы трения, подтягивающей струну до положения, при котором струна срывается.

Этим можно и закончить статью о сухом трении — явлении, природу которого мы еще не понимаем достаточно хорошо, но умеем описывать с помощью законов, выполняющихся с удовлетворительной точностью. Это дает нам возможность объяснять многие физические явления и делать расчеты, необходимые при конструировании машин.

Шестидесяти-атомный углерод

Около года назад в научных журналах появилось сообщение о том, что химики открыли необычную по своей геометрии молекулу, «сделанную» из шестидесяти атомов углерода. Химическая формула такой молекулы — C_{60}. Все шестьдесят ее атомов расположены в вершинах усеченного икосаэдра — многогранника с 60 вершинами, 32 гранями и 90 ребрами.

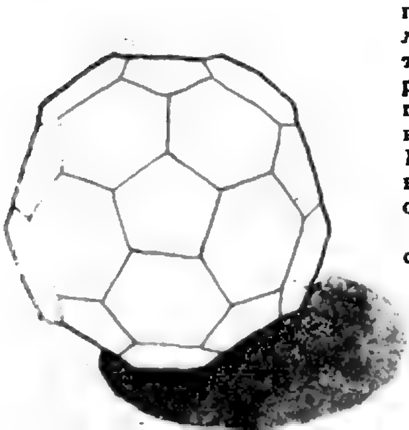
Сказанное, по-видимому, требует комментариев. Прежде всего надо пояснить, что значит «открыли... молекулу». Дело в том, что молекулу C_{60} не синтезировали, подобно тому, например, как несколько лет назад синтезировали молекулу-додекаэдр $C_{20}H_{20}$ (см. «Квант», 1983, № 9, с. 21), а именно открыли. Когда испаряли углерод (нагревая его) в поток инертного гелия, обнаружили возникновение компактных и довольно стабильных образований (кластеров) из большого числа атомов углерода. Неожиданно оказалось, что больше всего образуется кластеров из 60 атомов — во всяком случае, раз в 5—6 больше, чем кластеров из 59 или 61 атомов.

Возможно, что своим существованием 60-атомные молекулы обязаны... геометрии. Известно, что чем более симметрична молекула, тем она прочнее (тем больше у нее энергия связи). Вот почему устойчивы молекулы-додекаэдры и вновь открытые молекулы из 60 атомов углерода, а кластеры из 59 или 61 атома живут недолго и быстро разваливаются.

Как же «устроена» новая молекула? Усеченный икосаэдр знаком, наверное, почти всем. Такую форму имеет, например, «официальный» футбольный мяч, сшитый из 20 шестиугольников (обычно светлых) и 12 пятиугольников (обычно темных). Посмотрите на такой мяч внимательно. Его связь с икосаэдром видна не сразу — слишком он похож на шар! Однако связь есть и самая непосредственная.

Представьте себе икосаэдр — многогранник с 20 треугольными гранями и 12 вершинами, в которых сходятся по пять ребер. Отрежем от каждой вершины пирамидку так, чтобы на месте вершины образовался пятиугольник. У оставшихся частей граней вместо 3 сторон станет 6. Если обрезать «правильно», то шестигранники будут правильными и их будет 20 — столько же, сколько было граней у икосаэдра. В результате получился многогранник с $12+20=32$ гранями. Вершин у него 60, так как у плоских граней $5\times12+6\times20=180$ вершин, а в каждой вершине многогранника сходятся 3 грани ($180:3=60$). Число ребер можно сосчитать разными способами. Например, так. В каждой вершине сходятся 3 ребра, поэтому концов ребер будет $3\times60=180$, а ребер — $180:2=90$. Таким образом обычный икосаэдр «превращается» в усеченный.

А теперь задача. Углерод обычно 4-валентный, а от каждой вершины усеченного икосаэдра идут только 3 ребра. Значит, одна связь должна быть двойной. В структурных химических формулах двойную связь условно принято обозначать двойной линией. Как надо расположить двойные линии, чтобы от каждой вершины усеченного икосаэдра уходила одна и только одна двойная линия? Оцените, сколькими способами это можно сделать. (Заметим, что данная задача важна для определения степени устойчивости молекулы — химики знают, что чем больше способов осуществления двойных связей, тем более устойчива молекула.)



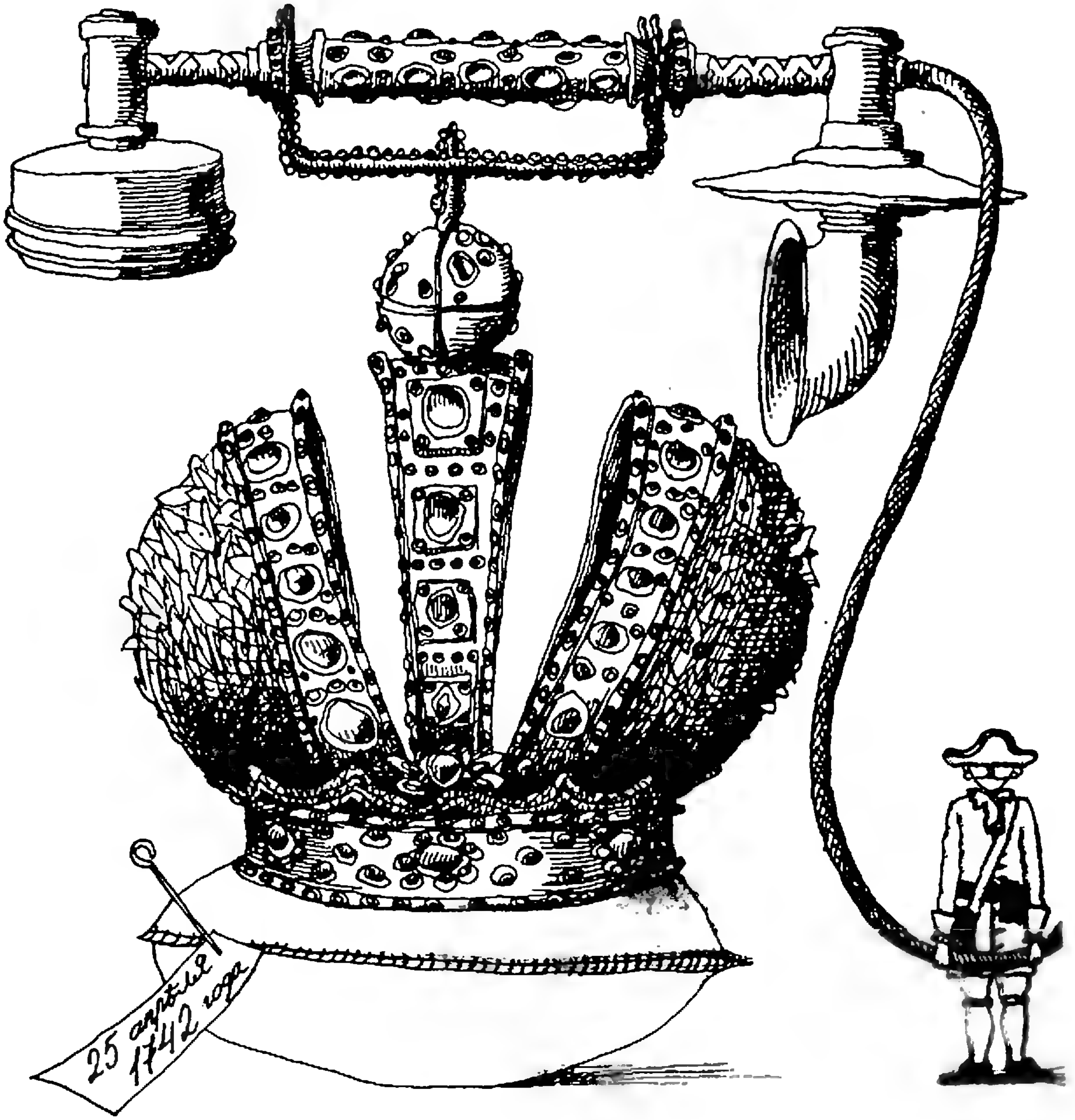
Интересно, что вновь открытую молекулу можно использовать как «клетку», внутрь которой можно «запереть» какой-нибудь атом. При этом атом будет связан с «клеткой» как узник, но «не прикованный» к ней химической связью. Так удалось «запереть» атомы лантана. «Клетка» достаточно просторна — размер молекулы C_{60} примерно $7\cdot10^{-10}$ м, что в 14 раз больше размера атома водорода.

Существует гипотеза, что молекула C_{60} может участвовать в процессе образования органических молекул в космосе.

Недавно было высказано предположение о возможности существования еще одной необычной молекулы — C_{120}, по своей «геометрии» еще более близкой к сфере. Атомы такой молекулы должны быть расположены в вершинах многогранника, имеющего 62 грани, 180 ребер и 120 вершин. Насколько реально существование такого экзотического соединения, пока не ясно.

Будем следить за новостями.

Я. С.



Как волны передают информацию?

Доктор физико-математических наук
Л. Г. АСЛАМАЗОВ

Мы настолько привыкли видеть на экране телевизора события, происходящие на другом конце света, что даже не удивляемся этому. В современном мире радио, телевидение, телефон позволяют довольно просто получать и передавать необходимую информацию. А ведь еще сравнительно недавно все было совсем иначе...

Для того чтобы передать в Петербург известие о коронации императрицы Елизаветы, происходившей в Москве, на всем пути между этими городами была выстроена цепочка солдат с флажками. В момент коронации первый солдат взмахнул флажком, затем следующий и т. д. Так известие о коронации дошло до Петербурга, где выстрелила пушка. Вот каким сложным способом пользовались для быстрой передачи информации в не столь далекие времена*).

---

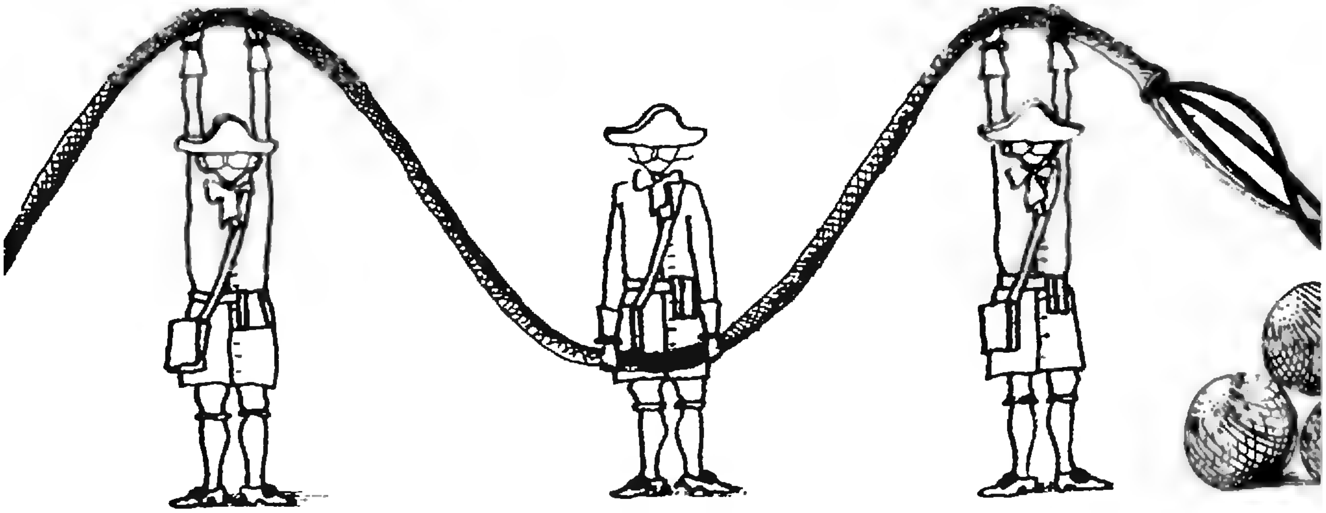
*) На этом примере в статье Л. Г. Асламазова и И. К. Кикоина «Что такое волна?» («Квант», 1982, № 6) обсуждалось понятие волны. Здесь мы продолжим начатый разговор и обсудим проблему передачи информации.

Что же распространялось по цепочке солдат? Каждый солдат оставался стоять на месте, но в некоторый момент времени он изменял свое состояние (поднимал флажок). Это изменение состояния и распространялось по цепочке. В таких случаях говорят, что распространяется волна.

Волны бывают разные. В акустических (звуковых) волнах меняется плотность вещества, в электромагнитных (свет, радиоволны и т. п.) — напряженности электрического и магнитного полей. Бывают температурные волны, волны концентрации при химических реакциях, волны эпидемий и т. п. Образно говоря, волны охватывают все многообразие явлений в природе.

Представьте себе, что каждый солдат не просто взмахнул флажком, а совершает им колебания, периодически поднимая и опуская флажок. Каждый следующий солдат повторяет эти колебания, но с некоторым опозданием (сдвигом по фазе). По цепочке солдат побежит волна. Нечто подобное можно увидеть во время спортивных праздников, когда цепочки людей совершают периодические движения со сдвигом по фазе.

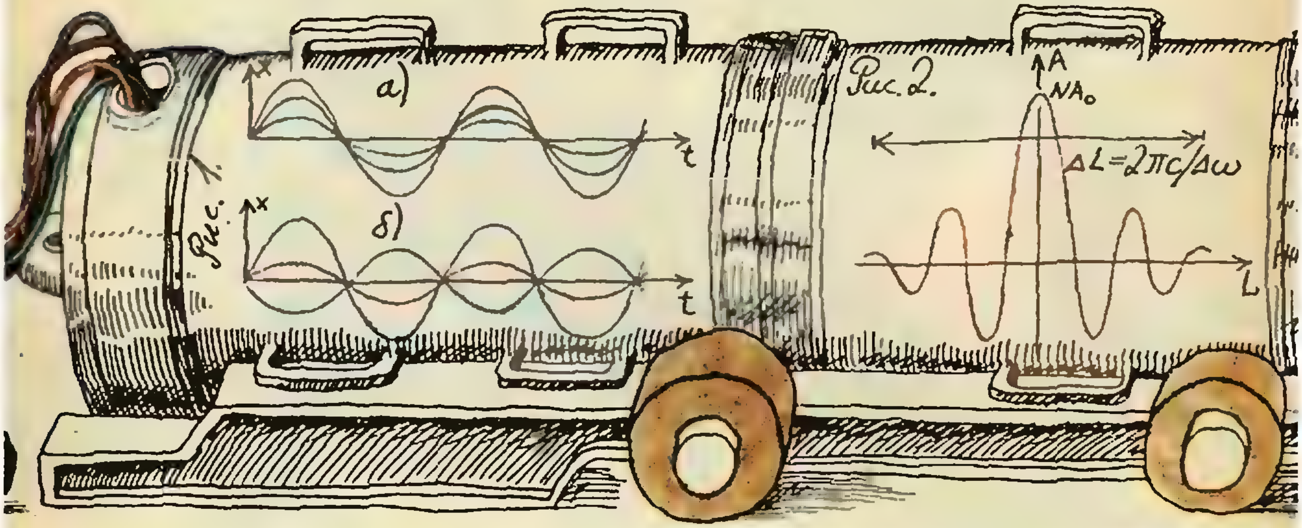
Это красивое зрелище радует глаз, но могут ли передавать информацию такие волны? Очевидно, что нет. Периодически повторяющиеся во времени колебания не несут нам ничего нового, не передают информации. А вот с помощью единичного взмаха, когда изменение состояния каждый раз происходило в ограниченной области пространства, можно было передать информацию о начале коронации. Такие ограниченные в пространстве волны называют сигналами.



Простейший тип волны — монохроматическая волна, когда в каждом месте изменение состояния происходит со временем по гармоническому закону с определенной частотой (по закону синуса или косинуса). Многие из встречающихся в природе волн можно считать монохроматическими. Звуковые волны такого типа называют музыкальными тонами. Их возбуждают, например, с помощью камертонов. Монохроматические световые волны получают с помощью лазеров. Волны, близкие к монохроматическим, можно возбудить на поверхности воды, периодически погружая в нее какой-то предмет. В нашей цепочке солдат также можно получить похожие волны.

Можно сделать так, что совершать взмахи в цепочке будут одновременно не один, а два, три или даже несколько стоящих рядом солдат. Тогда протяженность сигнала увеличится. Пользуясь сигналами разной длины, можно передать не только информацию о начале коронации, но и вообще любую информацию. Природа сигнала может быть различной — бывают сигналы звуковые, световые и т. п.

Самое интересное, что любой сигнал можно представить как сумму монохроматических волн с разными частотами (составить из таких волн). Эту возможность дает нам принцип интерференции: при распространении волн колебания в каждом месте пространства складываются. Скажем, в зависимости от сдвига фаз колебания одинаковых частот могут усилить друг друга (при нулевой разности фаз получаются колебания с суммарной амплитудой — рисунок 1, *а*), а могут и ослабить (рисунок 1, *б*). Оказывается, что амплитуды и частоты складываемых монохроматических волн можно подобрать таким образом, что волны гасят друг друга почти во всем пространстве, кроме определенной области, где, напротив, происходит их усиление.



На рисунке 2 показан результат сложения большого числа N волн одинаковой амплитуды A_0 с частотами, лежащими в небольшом интервале от $\omega_0-\Delta\omega$ до $\omega_0+\Delta\omega$. Это как бы мгновенная фотография волны, показывающая значение колеблющейся величины A в разных точках пространства в фиксированный момент времени. Имеется центральный максимум с амплитудой NA_0 и множество побочных с быстро убывающими амплитудами. Так что действительно в основном волны гасят друг друга, а их усиление происходит в области центрального максимума.

Важно отметить, что эта область не стоит на месте, а движется со скоростью волны, иными словами — распространяется сигнал. Если скорость c монохроматических волн всех частот одинакова (как, например, при распространении электромагнитных волн в вакууме), то и максимум движется со скоростью c. Его ширина постоянна и равна $\Delta L=2\pi c/\Delta\omega$. Так что длительность сигнала $\Delta t=2\pi/\Delta\omega$.

Получается удивительно простое фундаментальное соотношение:

$$\Delta\omega\cdot\Delta t=2\pi.$$

Длительность сигнала и ширина диапазона частот волн, из которых сигнал состоит, связаны обратно пропорциональной зависимостью. Качественно это соотношение понятно: сигнал большой длительности (Δt велико) формируется из монохроматических волн близких частот ($\Delta\omega$ мало). А чтобы составить короткий сигнал, нужно сложить много волн с разными частотами. Все, наверное, замечали, что молния вызывает помехи в радиоприемнике во всех диапазонах частот.

Итак, каждый сигнал можно составить из монохроматических волн или же, говоря по-другому, разложить на такие волны. Зависимость амплитуды монохроматических волн, образующих сигнал, от их частоты называется спектром сигнала. В рассмотренном нами случае спектр — прямоугольник высотой A_0 и шириной $2\Delta\omega$, показанный на рисунке 3. Это, конечно, простейший спектр. Спектры сигналов, так же как и сигналы, могут иметь самые различные формы.

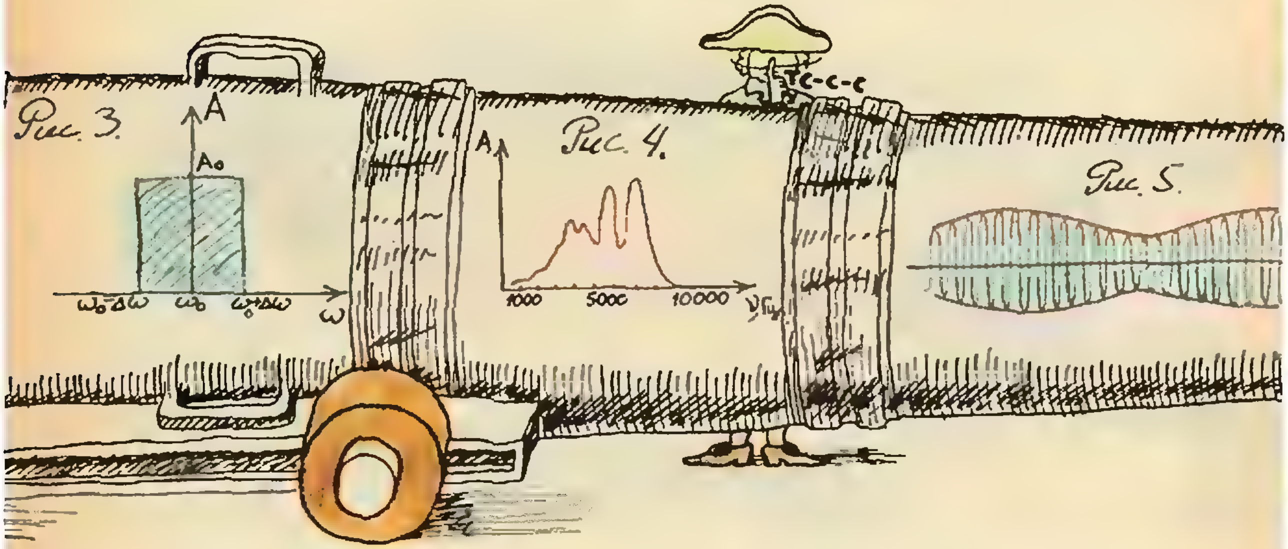
Когда мы, например, произносим звуки, то заставляем специальным образом колебаться воздух, и эти колебания распространяются в виде звуковых сигналов определенной формы. Спектры этих сигналов существенно различаются в зависимости от того, произносим мы гласную или согласную. Сигнал, соответствующий гласной, имеет спектр с двумя характерными максимумами при определенных частотах (их называют формантами). Спектр согласной более «размазан» по всей области частот (на рисунке 4 показан спектр согласной «С»). Существует специальный метод — гармонический анализ,— позволяющий находить спектры сигналов и восстанавливать сигналы по известным спектрам.

Интересно, что «кричать» умеют и твердые тела. Тепловое движение приводит в колебание атомы в кристаллической решетке, и такие колебания передаются по телу в виде упругих волн. Это тоже звуковые волны. Однако их спектр имеет максимум при очень высоких частотах, а в области слышимых частот амплитуда звука пренебрежимо мала (например, даже при очень низкой температуре порядка 5 К максимум соответствует частоте 10^{12}—10^{13} Гц). Так что услышать, о чем говорят твердые тела, можно только с помощью специальных приборов. «Подслушав» эти разговоры (изучив их спектры), ученые узнали много важных «секретов» твердых тел.

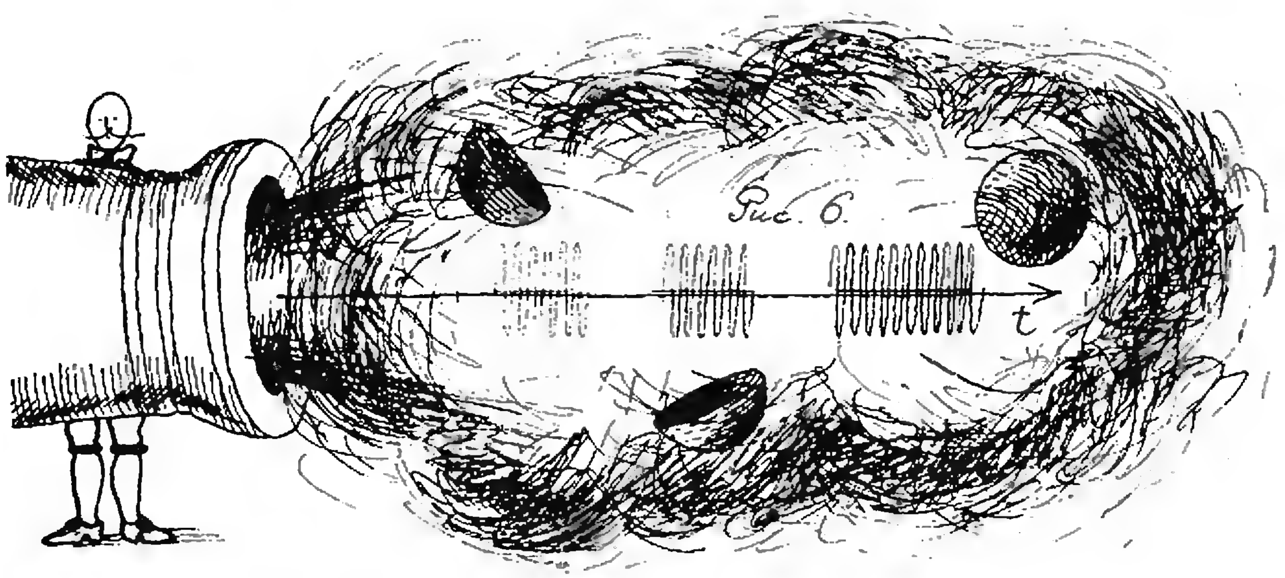
Какими же сигналами обычно пользуются для передачи информации? Для связи на коротких расстояниях годятся звуковые сигналы — люди пользуются ими испокон веков. Однако звуковые волны быстро затухают.

В наше время для передачи информации обычно пользуются электромагнитными волнами, способными распространяться на большие расстояния. Из них формируют те или иные сигналы. Можно, например, «заставить» электромагнитную волну переносить звуковые сигналы. Для этого частоту волны фиксируют (ее называют несущей частотой), а вот амплитуду меняют в такт со звуковыми колебаниями (рис. 5). Таким образом формируют последовательность сигналов, передающих нужную информацию. В приемном пункте сигналы расшифровывают (детектируют) — выделяют огибающую, соответствующую звуковым колебаниям. Этот метод называют амплитудной модуляцией. Он широко применяется при передаче радио- и телепрограмм.

Возникает вопрос: а как много информации за единицу времени можно передавать с помощью волн? Чтобы разобраться в этом, рассмотрим следующий способ передачи информа-



ции. Известно, что любое число можно записать в двоичной системе в виде последовательности нулей и единиц. Точно так же и любую информацию можно закодировать — записать в виде последовательности сигналов и их пропусков определенной длительности. Сигналы можно передавать, используя амплитудную модуляцию (рис. 6). Чем с большей скоростью мы хотим передавать информацию, тем короче должны быть эти сигналы. Но при надежной передаче информации длительность сигнала не должна быть меньше периода несущей синусоиды. Это и даёт ограничение на скорость передачи информации. Хотите ее увеличить — увеличивайте несущую частоту. Фактически тут «работает» уже обсуждавшееся соотношение для длительности сигнала: $\Delta t \sim 2\pi/\Delta\omega$, где $\Delta\omega$ становится порядка ω_0.



Например, для передачи музыкальных программ достаточно пользоваться электромагнитными волнами с частотой порядка сотен килогерц: человеческое ухо воспринимает сигналы с частотой до 20 кГц, и в этом случае интервал частот, составляющих сигнал, будет по крайней мере на порядок меньше несущей частоты. Однако для передачи телевизионных программ такие частоты уже не годятся. Изображение на экране воспроизводится 25 раз в секунду и в свою очередь состоит из десятков тысяч отдельных точек. Поэтому требуется частота модуляции порядка 10^7 Гц и соответственно несущая частота должна лежать в области десятков—сотен мегагерц. Вот почему в телевидении пришлось пользоваться высокочастотными, а следовательно, и ультракороткими волнами с длиной волны порядка метра, хотя распространяются они лишь в пределах прямой видимости.

Если же для передачи информации воспользоваться светом, у которого частота колебаний 10^{15} Гц, то можно повысить скорость передачи информации на много порядков. И хотя сама по себе идея эта стара (впервые передачу звука с помощью световых сигналов осуществил изобретатель телефона Г. Белл еще в 1880 году), она стала технической реальностью только в наше время. Для этого должны были появиться источники монохроматического света — лазеры, специальные световоды из оптических волокон, передающие свет с очень малыми потерями, электронное оборудование для эффективной кодировки и раскодировки сигналов.

Сейчас можно с определенностью сказать, что эпоха медных проводов отошла в прошлое и развитие сверхскоростных и сверхмасштабных сетей передачи информации связано с волоконной оптикой.

О математическом творчестве школьников

В нашем журнале довольно редко появляются статьи по математике, написанные школьниками. Это не потому, что старшеклассники не способны выполнить интересную и оригинальную математическую работу. Дело здесь в том, что большинство таких работ бывают узкоспециальными, часто опираются на внепрограммный материал, редко содержат общие математические идеи, полезные для большинства наших читателей. Кроме того, текст заметки в «Кванте» должен быть не только математически корректным и формально правильным, но быть написанным доходчиво и ясно, занимательно и методически продуманно. Если наши опытные авторы не всегда справляются с такими требованиями, то что же ожидать от начинающих!

И все же в этом юбилейном, двухсотом номере журнала мы решили поместить пересказ нескольких работ школьников (присланных в «Квант» или рассказанных на различных конференциях школьников), которые, как нам кажется, должны заинтересовать многих наших читателей. В этих работах есть и нерешенные задачи для желающих проверить свои творческие силы.

Равносамопересекающиеся ломаные

В работе **Андрея Шанина** (Москва, школа № 57), написанной в 1984 году, когда Андрей учился в седьмом классе, решаются геометрические задачи о ломаных с равным количеством точек самопересечения на каждом звене. Дадим точное определение рассматриваемых ломаных: *ломаными типа* (n, m), где $n\geqslant 3$, $m\geqslant 1$, называются последовательности из n различных точек A_1, A_2, ..., A_n (*вершин*) и n последовательно соединяющих эти точки отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 (*звеньев*) таких, что каждое звено пересекают ровно m других звеньев, притом в m различных внутренних точках. Например, на рисунке 1 показаны ломаные типы (6, 1), (5, 2) и (9, 2).

Задача 1. При каких n существует ломаная типа $(n, 1)$?

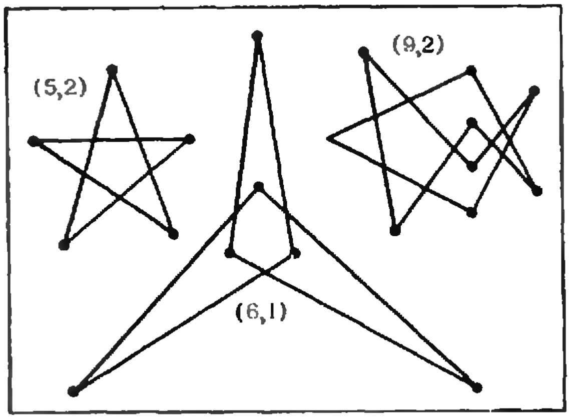


Рис. 1.

Ответ: при всех четных n $(n\geqslant 6)$; для решения А. Шанин предъявляет ломаную типа (6, 1), а затем применяет к ней операцию *вставки крестика* (рис. 2, *а*) или *вставки гармошки* (рис. 2, *б*).

При нечетных же n не существует ломаных типа $(n, 1)$. Верен более общий факт: *если оба числа n и m нечетны, то ломаной типа (n, m) не существует*. В самом деле, звенья ломаной типа (n, m) пересекаются только попарно, поэтому общее число точек пересечения равно $nm/2$, что невозможно, когда оба числа n и m нечетны.

Задача 2. Верно ли, что при всяком m существует (для некоторого n) ломаная типа (n, m)?

Ответ: да; А. Шанин решает эту задачу, начиная с того же примера ломаной типа (6,1), а затем применяет к ней операцию обведения (рис. 2 *в*, *г*).

Задача 3. Для каких пар чисел (n, m) существует ломаная типа (n, m)?

Эта задача не решена до конца, хотя А. Шанин сильно продвинулся в ее решении, используя при этом разные варианты операции суммы (рис. 3). Результаты Андрея можно свести в следующую таблицу:

ломаная типа (n, m)	существует	не существует	вопрос открыт
m — четно	$n\geqslant 2m+6$ или $n=m+3$	$n\leqslant m+2$	$m+4\leqslant n\leqslant 2m+5$
m — нечетно	n — четно и $n\geqslant 8m+12$	n — нечетно или $n\leqslant m+2$	n — четно и $m+3\leqslant n\leqslant 8m+10$ кроме $n=4m+6$

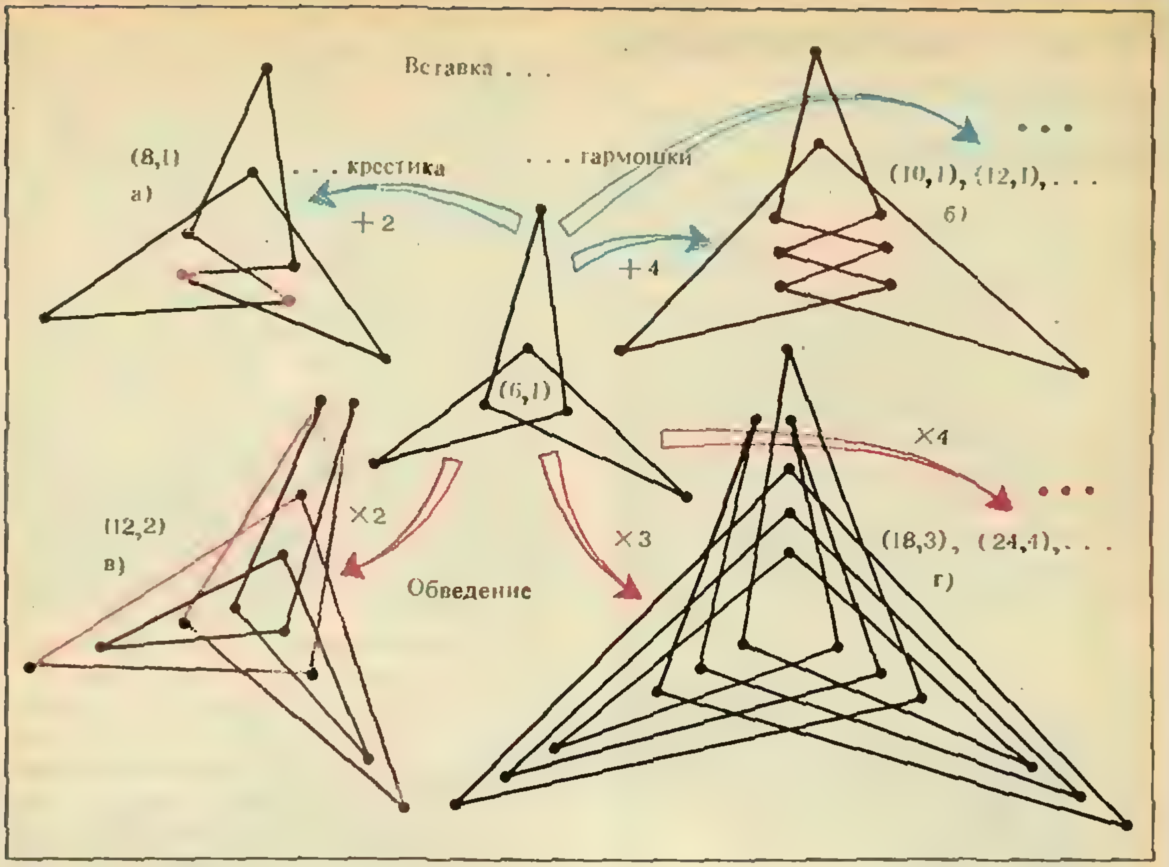


Рис. 2.

В редакции мы беседовали с А. К. Ковальджи (руководящим, вместе с Н. С. Келлиным, кружком Вечерней математической школы при МИСиСе, где занимается А. Шанин); он рассказал о некоторых других конструкциях, связанных с задачей 3, и оставил нам «таблицу белых пятен» для малых значений n и m (рис. 4). Мы надеемся, что наши читатели сумеют постепенно заполнить эти белые пятна. Отметим еще, что имеются красивые задачи о различных классификациях ломаных типа (m, n), к которым журнал «Квант» еще намерен вернуться.

Обобщенное уравнение Маркова

Многих читателей заинтересовала красивая теория, описывающая решения уравнения Маркова

$$x^2+y^2+z^2=3xyz \qquad (1)$$

в натуральных числах (x, y, z), о которой рассказывалось в статье М. Г. Крейна («Квант» 1985, № 4, с. 13). В конце этой статьи автор предлагает исследовать обобщение уравнения Маркова; на этот призыв откликнулся десятиклассник **П. Вольфбейн** из Киевской физико-математической школы-интерната № 2; он рассматривает уравнения вида

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=mx_1x_2\ldots x_n, \qquad (2)$$

где $n\geqslant3$, m — натуральное число. Подобно уравнению (1), здесь также каждое решение (если оно существует) естественным образом включается в бесконечное ветвящееся *дерево решений.* Для каждого решения $(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n)$ в натуральных числах уравнения (2) по каждой его координате $a_k (1\leqslant k\leqslant n)$ можно построить *соседнее* решение $(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n)$: под-

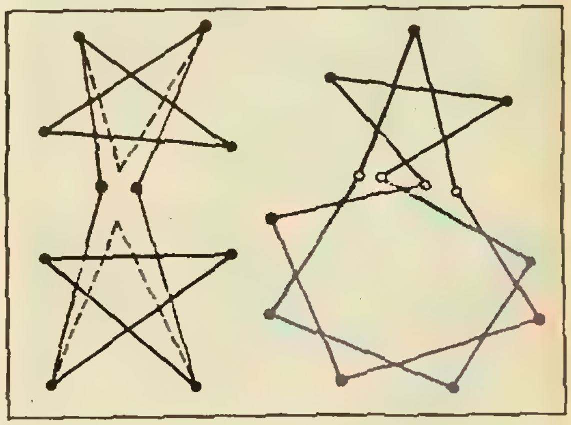


Рис. 3.

ставив в равенство (2) набор $(a_1, a_2, \ldots, x, \ldots, a_n)$, решить возникающее при этом квадратное уравнение $x^2-px+q=0$, у которого кроме корня $x=a_k$ должен быть второй корень $x=a_k'$. При этом, если $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n$ и $k\geqslant 2$, то $a_k'>a_1$. Таким образом, из каждого решения можно получить новые, с большей максимальной координатой, и лишь по одной координате — максимальной — переходить к соседнему, «меньшему» решению. Такое движение вверх по дереву решений к меньшим решениям не может продолжаться неограниченно, в конце концов будет достигнуто *коренное* решение $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n$, для которого $a_1'\geqslant a_1$, и в дальнейшем подъем невозможен (рис. 5).

П. Вольфбейн различает *три типа коренных* решений: (I) $a_1=a_2=\ldots=a_n$; это, при $n=m$, решения вида (1, 1, ..., 1), при $n=3$, $m=1$ — решение (3, 3, 3), при $n=4$, $m=1$ — (2, 2, 2, 2); других нет.

(II) $a_1'>a_1$; например, при $n=7$, $m=5$ таково решение (2, 1, ..., 1);

(III) $a_1'=a_1$; например, при $n=11$, $m=5$ таково решение (4, 22, 1, ..., 1).

Рассуждения П. Вольфбейна опираются на следующую доказанную им лемму: *для коренного решения $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_n$ типа II или III обязательно выполняется неравенство*

$$ma_3a_4\ldots a_n<n.$$

Уравнение (2) при $n=m$ (как и уравнение (1), где $n=m=3$) имеет лишь одно корневое решение (1, 1, ..., 1), и из каждого его решения вида $a_1>a_2>\ldots>a_k>a_{k+1}=\ldots=a_n=1$ вниз выходят ветки ровно к k различным (не получающимся друг из друга перестановкой координат) соседним решениям. Что касается общего случая $m\neq n$, то П. Вольфбейн получил здесь лишь некоторые частные результаты. Задача полного исследования уравнения (2) в общем случае еще ждет своего решения.

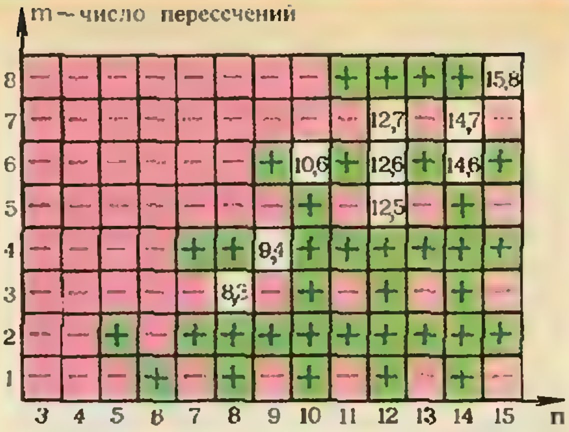
Как продифференцировать функцию дробное число раз

Ученик 9-го класса СШ № 57 г. Москвы Марат Ровинский придумал, как для любого вещественного числа s определить по функции $f(x)$ новую функцию — $f^{(s)}(x)$ — таким образом, что:

1) Если s — целое неотрицательное число, то $f^{(s)}x$ — s-я производная в точке x.

2) $f^{(-1)}(x)=\int\limits_0^x f(t)dt$.

3) Если $f(x)=0$ при $x\leqslant 0$, то $(f^{(s_1)})^{(s_2)}(x)=f^{(s_1+s_2)}$.



m \ n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+	15,8
7	−	−	−	−	−	−	−	−	−	12,7	−	14,7	−
6	−	−	−	−	−	−	+	10,6	+	12,6	+	14,6	+
5	−	−	−	−	−	−	−	+	−	12,5	−	+	−
4	−	−	−	−	+	+	9,4	+	+	+	+	+	+
3	−	−	−	−	−	8,3	−	+	−	+	−	+	−
2	−	−	+	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+
1	−	−	−	+	−	+	−	+	−	+	−	+	−

Рис. 4.

Из свойств 2 и 3 следует, что если n — натуральное число, то

$$f^{(-n)}(x)=\int\limits_0^x\ldots\left(\int\limits_0^{x_2}\left(\int\limits_0^{x_1}f(t)dt\right)dx_1\right)\ldots\Big)dx_{n-1}.$$

Например,

$$f^{(-2)}(x)=\int\limits_0^x\left(\int\limits_0^{x_1}f(t)dt\right)dx_1$$

— выражение в скобках рассматривается как функция от переменной x_1, по которой затем производится интегрирование.

Как известно,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h}.$$

Исходным толчком для размышлений Марата послужила формула

$$f^{(2)}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-2f(x-h)+f(x-2h)}{h^2}.$$

Нетрудно показать (по индукции), что

$$f^{(n)}(x)=\lim_{h\to 0}h^{-n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kf(x-kh). \qquad (1)$$

Напомним («Квант», 1986, № 1, с. 23), что C_n^k — число сочетаний из n эле-

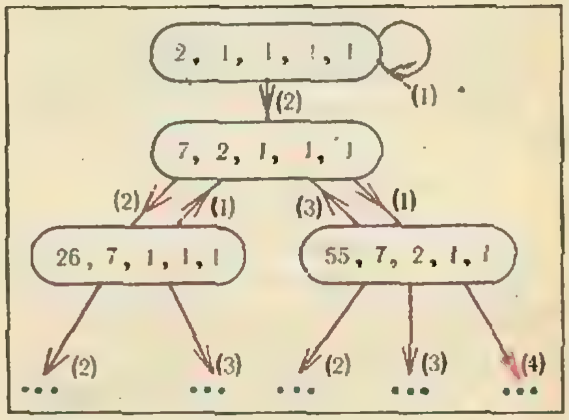


Рис. 5.

ментов по k — можно выписать по формуле

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}. \qquad (2)$$

Заметим, что правая часть этой формулы определена при любых вещественных значениях n. Поэтому можно определить C_s^k по формуле (2) для любых s. Например, $C_{-1}^k=(-1)\times\times(-2)\cdot\ldots\cdot(-k)/k!=(-1)^k$. Хотя числа C_s^k, если s — не натуральное число, уже не имеют никакой комбинаторной интерпретации, для них выполнены все основные свойства биномиальных коэффициентов.

Задача 1. Докажите, что

$$C_s^k+C_s^{k+1}=C_{s+1}^{k+1}.$$

Задача 2. Докажите, что

$$\sum_{k_1+k_2=m} C_s^{k_1}\cdot C_s^{k_2}=C_{2s}^m.$$

Указание. Любые тождества такого сорта доказываются так: левая и правая части как функции переменной s являются многочленами. Поэтому достаточно доказать, что они совпадают при натуральных значениях s.

При $s=-1$ формула (1) примет вид

$$f^{(-1)}(x)=\lim_{h\to 0} h\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_{-1}^k f(x-kh)=$$
$$=\lim_{h\to 0} h\sum_{k=0}^{\infty} f(x-kh). \qquad (3)$$

(В формуле (1) можно считать, что суммирование по k ведется тоже до бесконечности, ибо $C_n^k=0$ при $k>n$). Если $f(x)=0$ при $x\leqslant 0$, то формула (3) является просто определением интеграла $\int\limits_0^x f(t)dt$. В общем случае нужно разбить отрезок от 0 до x на m равных частей и устремить m к бесконечности, то есть

$$f^{(s)}(x)=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{x}{m}\right)^{-s}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_s^k f\times$$
$$\times\left(x-k\frac{x}{m}\right). \qquad (4)$$

Тогда $(\alpha f+\beta g)^{(s)}(x)=\alpha f^{(s)}(x)+\beta g^{(s)}(x)$.

Задача 3. Докажите свойство 3.

Указание. Используйте результат задачи 2.

Задача 4. Докажите, что для натурального n

$$f^{(-n)}(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x f(t)(x-t)^{n-1}dt.$$

Задача 5. Докажите, что при $s>1$ $(1-s)$-я производная функции, тождественно равной 1, равна $x^{s-1}/\Gamma(s)$, где $\Gamma(s)$ — функция от s.

Функция $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера — одна из важнейших математических функций. Она появляется всегда, когда необходимо определить $n!$ при не натуральных значениях n ($\Gamma(n+1)=n!$ при $n\in\mathbb{N}$). Важное свойство гамма-функции — функциональное уравнение: $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$. Его легко вывести, воспользовавшись свойством 3 дробной производной.

Задача 6. Докажите, что при $s>0$

$$f^{(-s)}(x)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_0^x f(t)(x-t)^{s-1}dt. \qquad (5)$$

Вопросом об обобщении понятия s-ой производной на произвольные значения s издавна занимались многие выдающиеся математики, в том числе Лейбниц, Иоганн Бернулли, Эйлер, Фурье, Лиувилль и Риман.

Определение (4), данное М. Ровинским, совпало с одним из способов, которым Лиувилль определял дробную производную в 30-х годах XIX века. Формула (5) известна как формула Римана — Лиувилля.

Общая неподвижная точка двух функций

В книге известного польского математика С. Улама «Коренные математические задачи» (М.: «Наука», 1964) имеется следующая гипотеза.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ непрерывные функции, определенные на отрезке [0; 1], *принимающие значения, принадлежащие этому отрезку и такие, что $f(g(x))=g(f(x))$ при всех $x\in[0;1]$; тогда у функций f и g найдется общая неподвижная точка, то есть точка x_0, для которой $f(x_0)=g(x_0)=x_0$.*

Эта задача была очень популярна среди студентов-математиков в середине 60-х — начале 70-х годов, однако все попытки ее решения оказывались безуспешными. Теперь известно, что гипотеза Улама не верна: есть контрпример.

Ученик 9-го класса ФМШ-интерната № 18 при МГУ **Андрей Слепухин** по рекомендации своего учителя, кандидата физико-математических наук А. П. Веселова (кстати, выпускника ФМШ при МГУ), занялся гипотезой Улама в классе многочленов. Точнее, он решал следующую задачу.

Пусть $p(x)$ и $q(x)$ два многочлена такие, что $p(q(x))=q(p(x))$ при всех $x\in\mathbb{R}$. Верно ли, что существует такая точка $x_0\in\mathbb{R}$, что $p(x_0)=q(x_0)=x_0$, если известно, что сами многочлены $p(x)$ и $q(x)$ имеют неподвижные точки (это, напомним, значит, что уравнения $p(x)=x$ и $q(x)=x$ имеют корни).

Оказалось, что если хотя бы один из многочленов $p(x)$ или $q(x)$ имеет четную степень, то общая неподвижная точка существует.

Для многочленов нечетной степени доказательство А. Слепухина «не проходит», так что для них вопрос остается открытым.

Пифагоровы тетраэдры

Член корреспондент АПН СССР
В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

Напомним, что треугольник называется *пифагоровым*, если у него один угол прямой, а отношение любых других сторон рационально (тогда, применяя подобие, можно из него получить прямоугольный треугольник с целыми длинами сторон). По аналогии с этим будем называть тетраэдр *пифагоровым*, если его плоские углы при одной из вершин прямые, а отношение любых двух ребер рационально (из него с помощью подобия можно получить тетраэдр с прямыми плоскими углами при одной из вершин и целыми длинами ребер).

В этой заметке мы выведем «уравнение пифагоровых тетраэдров», то есть такое уравнение с тремя неизвестными ξ, η, ς, что любой пифагоров тетраэдр дает рациональное решение этого уравнения, и наоборот, любое рациональное решение уравнения дает пифагоров тетраэдр. А затем, пользуясь этим уравнением, найдем конкретные примеры пифагоровых тетраэдров.

Пифагоровы треугольники

Сначала дадим способ описания всех пифагоровых треугольников. На рисунке 1 треугольник OAB — прямоугольный; длины его катетов обозначены через a и b, а длина гипотенузы — через p (букву c резервируем для дальнейшего). Число

$$\xi=\frac{a}{b+p} \tag{1}$$

условимся называть *параметром* прямоугольного треугольника OAB (или, точнее, параметром «относительно катета a»). Используя соотношение $p^2=a^2+b^2$, имеем

$$1+\xi^2=\frac{(b^2+2bp+p^2)+a^2}{(b+p)^2}=\frac{2p^2+2bp}{(b+p)^2}=\frac{2p}{b+p},$$

$$1-\xi^2=\frac{(b^2+2bp+p^2)-a^2}{(b+p)^2}=\frac{2b^2+2bp}{(b+p)^2}=\frac{2b}{b+p}.$$

Из этих равенств непосредственно получаем формулы, выражающие отношения сторон прямоугольного треугольника через его параметр:

$$\frac{2\xi}{1-\xi^2}=\frac{a}{b},\quad \frac{1+\xi^2}{1-\xi^2}=\frac{p}{b}. \tag{2}$$

Задача 1. Пусть α — величина угла OAB. Докажите, что параметр ξ треугольника OAB равен $\operatorname{tg}\alpha/2$, и дайте с помощью этого другое доказательство формул (2).

Задача 2. Докажите, что параметр ξ' треугольника OAB относительно катета b (то есть $\xi'=\frac{b}{a+p}$) связан с параметром ξ соотношением $\xi'=\frac{1-\xi}{1+\xi}$. Дайте интерпретацию этого соотношения с помощью тригонометрических функций (см. задачу 1).

Из формул (1) (2) непосредственно вытекает следующее утверждение: *для того чтобы прямоугольный треугольник был пифагоровым, необходимо и достаточно, чтобы число ξ было рациональным.* В самом деле, если треугольник пифагоров, то из (1) следует, что ξ рационально. Обратно, если ξ рационально, то согласно (2) отношения сторон рациональны, то есть треугольник пифагоров.

Уравнение пифагоровых тетраэдров

Пусть теперь $OABC$ — тетраэдр, у которого плоские углы при вершине O прямые. Длины ребер, исходящих из вершины O, обозначим через a, b, c, а длины трех других ребер — через p, q, r (рис. 2). Рассмотрим параметры трех прямоугольных треугольников OAB, OBC, OCA:

$$\xi=\frac{a}{b+p},\quad \eta=\frac{b}{c+q},\quad \varsigma=\frac{c}{a+r}. \tag{3}$$

Тогда по формулам (2) можно выразить отношения сторон этих прямоугольных треугольников через их параметры:

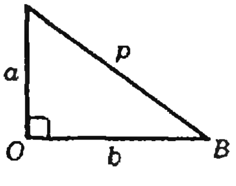


Рис. 1.

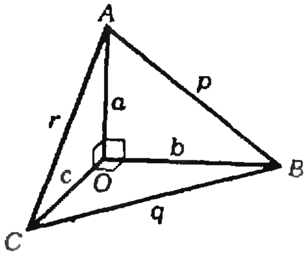


Рис. 2.

$$\frac{a}{b}=\frac{2\xi}{1-\xi^2},\ \frac{b}{c}=\frac{2\eta}{1-\eta^2},\ \frac{c}{a}=\frac{2\varsigma}{1-\varsigma^2};\qquad(4)$$

$$\frac{p}{b}=\frac{1+\xi^2}{1-\xi^2},\ \frac{q}{c}=\frac{1+\eta^2}{1-\eta^2},\ \frac{r}{a}=\frac{1+\varsigma^2}{1-\varsigma^2}.\qquad(5)$$

Из (4) непосредственно вытекает, что параметры ξ, η, ς удовлетворяют соотношению

$$\frac{2\xi}{1-\xi^2}\cdot\frac{2\eta}{1-\eta^2}\cdot\frac{2\varsigma}{1-\varsigma^2}=1.\qquad(6)$$

Это и есть обещанное «уравнение пифагоровых тетраэдров».

Задача 3. Докажите, что если три положительных числа ξ, η, ς, каждое из которых меньше единицы, удовлетворяют уравнению (6), то существует тетраэдр с прямыми плоскими углами при одной из вершин, для которого (при обозначениях рисунка 2) справедливы равенства (3) (а потому и равенства (4), (5)).

Задача 4. Докажите, что если ξ, η, ς — решение неопределенного уравнения (6), то числа

$$\xi'=\frac{1-\xi}{1+\xi},\ \eta'=\frac{1-\eta}{1+\eta},\ \varsigma'=\frac{1-\varsigma}{1+\varsigma}$$

также составляют решение этого уравнения («сопряженное решение»). Докажите, что если каждое из чисел ξ, η, ς положительно и меньше 1, то и каждое из чисел ξ', η', ς' обладает этим свойством. Каково геометрическое взаимоотношение двух сопряженных решений уравнения (6)?

Задача 5. Докажите, что если ξ, η, ς — решение неопределенного уравнения (6), причем каждое из чисел ξ, η, ς положительно и меньше 1, то тетраэдр $OABC$, о котором говорится в задаче 3, может быть получен следующим образом: из точки O проводятся три взаимно перпендикулярных отрезка OA, OB, OC, имеющих длины

$$OA=1,\ OB=\frac{1-\xi^2}{2\xi},\ OC=\frac{1-\xi^2}{2\xi}\cdot\frac{1-\eta^2}{2\eta}$$

Задача 6. Числа ξ, η, ς составляют решение неопределенного уравнения (6). Возможно ли, чтобы два из этих чисел были рациональными, а третье иррациональным? Дайте геометрическую интерпретацию ответа.

Задача 7. Числа ξ, η, ς составляют рациональное решение неопределенного уравнения (6), причем каждое из них положительно и меньше 1. Докажите, что если $\xi=m/n$, $\eta=p/q$ (где m, n, p, q — натуральные), то тетраэдр с прямыми плоскими углами при одной из вершин и длинами выходящих из этой вершины ребер

$$a=4mnpq,\ b=2pq=(n^2-m^2),$$
$$c=(n^2-m^2)(q^2-p^2)$$

является пифагоровым.

Из формул (3)—(5) непосредственно вытекает следующее утверждение: *для того чтобы тетраэдр OABC с прямыми плоскими углами при вершине O был пифагоровым, необходимо и достаточно, чтобы параметры* ξ, η, ς *(удовлетворяющие уравнению (6)) были рациональными.* В самом деле, если тетраэдр пифагоров (то есть отношение любых двух его ребер рационально), то из (3) следует, что ξ, η, ς рациональны. Обратно, если ξ, η, ς рациональны, то согласно (4), (5) отношение любых двух ребер рационально, то есть тетраэдр пифагоров.

Поиск пифагоровых тетраэдров

Мы видим, что задача нахождения пифагоровых тетраэдров алгебраически равносильна задаче нахождения рациональных решений неопределенного уравнения (6) при условиях $0<\xi<1$, $0<\eta<1$, $0<\varsigma<1$. Легко убедиться прямой проверкой, что следующие тройки являются решениями.

Таблица 1.

	ξ	η	ς
1)	5/6	2/11	3/13
2)	5/8	1/11	9/13
3)	1/7	9/11	5/16
4)	5/6	6/11	1/17
5)	8/9	1/11	5/17
6)	2/5	5/11	7/18
7)	3/4	1/10	11/21
8)	2/13	17/22	9/25
9)	3/7	3/8	11/25
10)	21/23	1/24	11/25
11)	7/18	1/22	23/25

Это дает возможность найти одиннадцать пифагоровых тетраэдров. Для вычисления длин их ребер можно воспользоваться методом задачи 7 (производя, если нужно, сокращение на общий множитель). Ребра этих тетраэдров перечислены в таблице 2.

Заметим еще, что если пифагоров тетраэдр $OABC$ дополнить до параллелепипеда с ребрами OA, OB, OC, то получится «пифагоров» паралле-

Таблица 2.

	a	b	c	p	q	n
1)	1100,	1155,	1008,	1595,	1533,	1492;
2)	252,	240,	275,	348,	365,	373;
3)	720,	132,	85,	732,	157,	725;
4)	1584,	187,	1020,	1595,	1037,	1884;
5)	240,	44,	117,	244,	125,	267;
6)	880,	429,	2340,	979,	2379,	2500;
7)	231,	792,	160,	825,	808,	281;
8)	480,	140,	693,	500,	707,	843;
9)	3536,	11220,	2925,	11764,	11595,	4589;
10)	5796,	528,	6325,	5820,	6347,	8579;
11)	1008,	1100,	12075,	1492,	12125,	12117.

лепипед, то есть прямоугольный параллелепипед с рациональными (или целыми) длинами всех ребер и всех диагоналей граней. На рисунке 3 показан параллелепипед, получающийся таким образом с помощью второго из приведенных выше пифагоровых тетраэдров. Однако диагональ этого параллелепипеда имеет иррациональную длину. Существует ли прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра, все диагонали граней и диагональ всего параллелепипеда имеют целые длины, неизвестно.

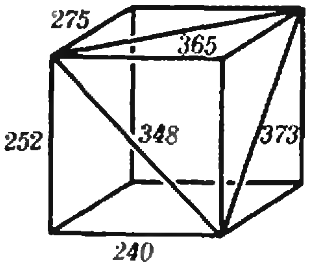


Рис. 3.

Задача 8. Докажите, что десять из приведенных одиннадцати решений уравнения (6) являются попарно сопряженными (в смысле определения, приведенного в задаче 4). Найдите решение, «сопряженное» к одиннадцатому решению; найдите соответствующий пифагоров параллелепипед.

Задача 9. Назовем прямоугольный параллелепипед «пифагоровым параллелепипедом второго рода», если все его ребра, а также диагональ параллелепипеда имеют рациональные длины. Докажите, что если x_1, x_2, x_3 — длины ребер прямоугольного параллелепипеда, а y — длина его диагонали, то он в том и только в том случае является пифагоровым параллелепипедом второго рода, если оба числа («параметры»)

$$\xi_1=\frac{x_1}{x_3+y},\quad \xi_2=\frac{x_2}{x_3+y}$$

рациональны. Докажите, что для этого параллелепипеда справедливы соотношения

$$\frac{x_1}{y}=\frac{2\xi_1}{1+\xi_1^2+\xi_2^2},\quad \frac{x_2}{y}=\frac{2\xi_2}{1+\xi_1^2+\xi_2^2},$$

$$\frac{x_3}{y}=\frac{1-\xi_1^2-\xi_2^2}{1+\xi_1^2+\xi_2^2}.$$

Задача 10. Обобщая результат задачи 9, докажите, что любое рациональное решение неопределенного уравнения

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=y^2$$

имеет вид

$x_1=k\cdot 2\xi_1$, $x_2=k\cdot 2\xi_2$, ..., $x_{n-1}=k\cdot 2\xi_{n-1}$,
$x_n=k(1-\xi_1^2-\ldots-\xi_{n-1}^2)$, $y=k(1+\xi_1^2+\ldots+\xi_{n-1}^2)$,

где ξ_1, ..., ξ_{n-1} — произвольные рациональные числа («параметры») и коэффициент k также рационален. Можете ли вы дать геометрическую интерпретацию этого результата?

Задача 11. Обобщите результат задачи 10 на неопределенное уравнение

$$x_1^2+\ldots+x_p^2=y_1^2+\ldots+y_q^2$$

(то есть дайте формулы для нахождения всех рациональных решений).

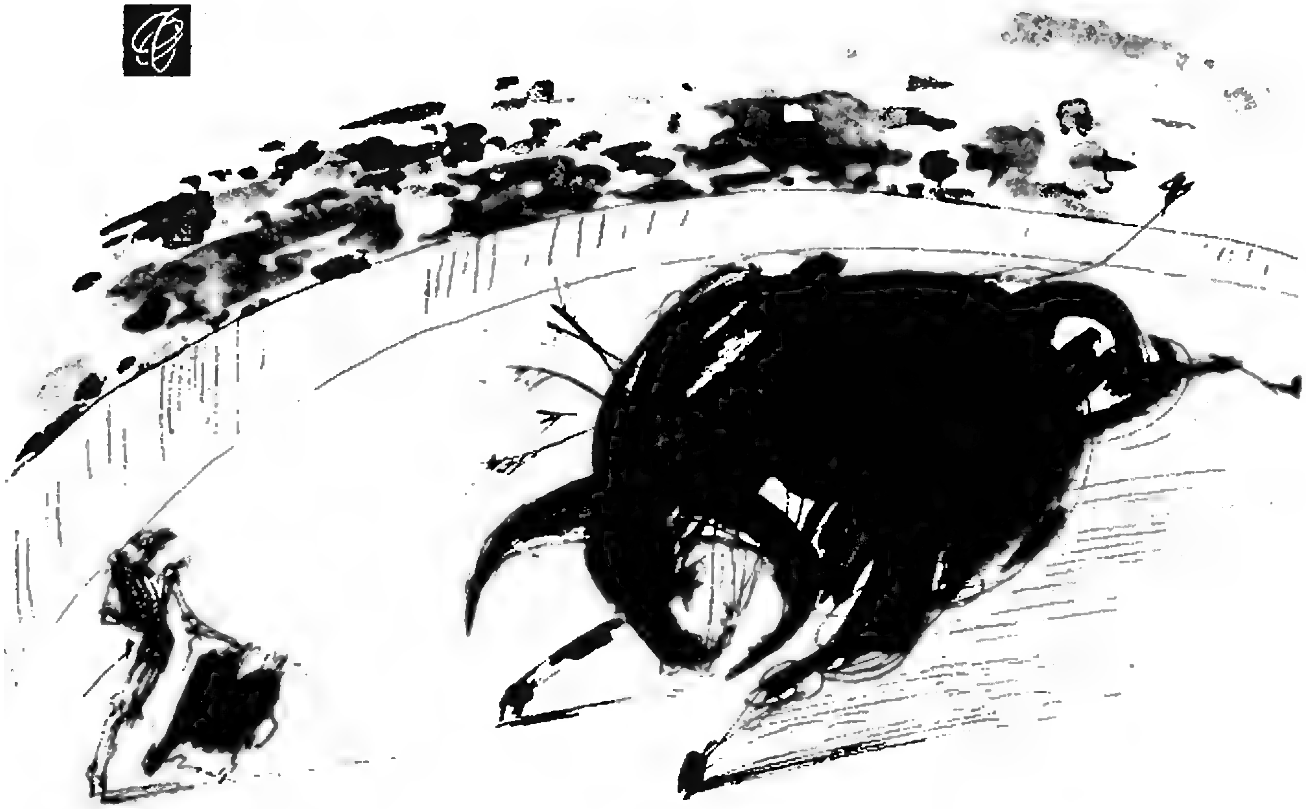
* * *

В заключении остановимся на вопросе о том, как были найдены указанные выше 11 рациональных решений уравнения (6). Для этого была использована электронная вычислительная машина. Алгоритм для вычислений на ЭВМ был составлен на основе следующих соображений. Пусть

$$\xi=\frac{a}{b},\ \eta=\frac{c}{d},\ \xi=\frac{e}{f}, \qquad (7)$$

где a, b, c, d, e, f — натуральные числа. Идея алгоритма — перебирать все такие шестерки, придавая каждому из шести чисел значения 1, 2, ..., 25, по формулам (7) найти соответствующие тройки (ξ, η, ς) и из них отобрать те, которые удовлетворяют уравнению (6). В действительности целесообразнее, освободившись от знаменателей, вести вычисления не с ξ, η, ς, а с натуральными числами a, b, c, d, e, f. Дело в том, что при работе с рациональными числами ξ, η, ς компьютер заменил бы их некоторыми десятичными приближениями, которые точно не удовлетворяли бы уравнению (6).

Задача 12. Напишите алгоритм на учебном алгоритмическом языке. Попробуйте его усовершенствовать, чтобы избежать (на самом деле ненужного) полного перебора всех шестерок a, b, c, d, e, f.



Оранжевое небо

Кандидат физико-математических наук
Г. И. КОСОУРОВ

В этой статье мы предлагаем несколько опытов по цветовому зрению. Все они связаны с различными цветовыми иллюзиями, вызванными необычными условиями работы глаза или его цветовым утомлением.

Механизм восприятия цветов глазом очень сложен и до конца еще не изучен. Известно, что сетчатка глаза содержит два рода светочувствительных клеток, которые носят название палочек и колбочек. В палочках содержится фотохимически чувствительный пигмент — зрительный пурпур, или родопсин. Под действием света родопсин обесцвечивается и действует на нервные волокна, передающие возбуждение в мозг. При ярком свете он обесцвечивается полностью и палочки слепнут. В темноте идет обратный процесс — восстановление зрительного пурпура. Палочковое сумеречное зрение обладает очень большой чувствительностью, но оно ахроматично: палочки не чувствуют цвета.

При достаточно большой яркости вступает в силу колбочковый механизм зрения. Колбочковое зрение цветочувствительно. Есть много убедительных опытов, приводящих к выводу, что колбочки содержат фотохимически чувствительные пигменты трех сортов с максимумом чувствительности в красной, зеленой и синей областях спектра. Различная степень выцветания всех трех пигментов дает в нашем сознании ощущение цвета и позволяет видеть мир во всем разнообразии красок, оттенков, полутонов и переходов.

На трехцветной природе цветового зрения основано воспроизведение цветов в кино, в телевидении, в цветной фотографии и в полиграфии. Методы количественного измерения цветов также основаны на трехцветном принципе.

Однако ощущение цвета можно вызвать не только красками, но и, например, прерывистым освещением. Перечертите тушью на чертежную бумагу черно-белые диски, показанные на рисунке 1 (*а, б, в, г*). Достаточ-

---

Эта статья впервые была опубликована в «Кванте» № 11 за 1970 год.

но, чтобы диски имели диаметр 8—12 см. Вырежьте диски и приведите их в не очень быстрое вращение, примерно 1—3 оборота в секунду. Для этого можно надеть их на ось наматывателя кинопроектора, проигрывателя, магнитофона или просто сделать из дисков волчки. Вместо черных дуг вы увидите цветные окружности. Окраска зависит от скорости вращения, освещенности и характера рисунка. Например, у диска на рисунке 1, *а* ду́ги, следующие за черным сектором (по направлению вращения), при слабом освещении кажутся красными, а при ярком — желтыми. При некоторой скорости вращения и ярком освещении черные секторы кажутся синими. Полного объяснения этому явлению пока еще нет.

Краски различаются не только цветом, но и насыщенностью. Если постепенно добавлять к красной краске белила, цвет будет становиться все более розовым. На картинах и тем более на типографских копиях с картин трудно получить насыщенные тона и большие градации яркости. Отношение яркости самой белой краски к яркости самой черной едва достигает ста, а в природе мы имеем дело с различием в яркости во много тысяч раз. Поэтому копии с картин кажутся слишком бледными либо, наоборот, слишком темными. Это нарушает один из элементов восприятия объемности — воздушную перспективу. Изображение пейзажа или жанровой сцены выглядит плоским. Значительно шире диапазон передаваемых яркостей при проекции на экран диапозитивов. Именно поэтому так выразительны и объемны фотографии на цветной обратимой пленке — слайды.

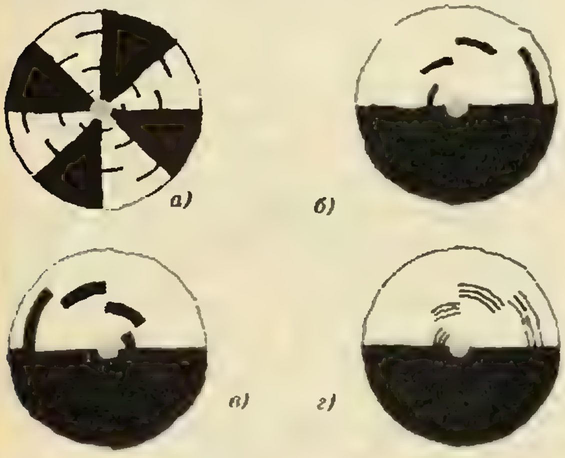


Рис. 1.

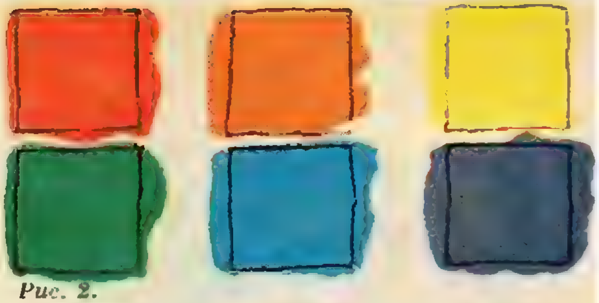


Рис. 2.

Восприятие картины можно значительно улучшить, освещая ее специальным образом. Возьмите цветную вклейку из «Огонька», сфотографируйте ее и отпечатайте контактным способом с пленки на пленку контрастный черно-белый диапозитив. Вставьте диапозитив в проектор с большим световым потоком (подойдет проектор типа «Свет») и спроектируйте диапозитив на оригинал так, чтобы контуры проекции и оригинала точно совпадали. Результат не заставит вас пожалеть о затраченном труде. Картина оживет, приобретет объемность и особую выразительность. Выключите проектор, и вы убедитесь, насколько тускла и невыразительна картина при равномерном освещении.

Следующие опыты относятся к так называемым последовательным цветовым образам. Это явление связано с тем, что полное восстановление цветочувствительного пигмента — процесс сравнительно медленный. Если продолжительное время смотреть на одноцветный рисунок, а потом перевести взгляд на белую бумагу, стену или потолок, то белый цвет будет восприниматься так, как будто в нем недостает цвета, утомившего глаз. На белой поверхности будет виден тот же рисунок, но окрашенный в цвет, который называют дополнительным.

Вырежьте из цветной бумаги красный, оранжевый, желтый, зеленый, синий и фиолетовый квадратики размером 2×2 см. Положите один из цветных квадратиков перед собой на лист белой бумаги и смотрите на него, не напрягая глаз, секунд тридцать. Смотреть надо, как говорят, в одну точку, чтобы изображение квадрата не перемещалось по сетчатке. Переведите взгляд на белое поле, и через секунду — две вы увидите на бумаге четкое изображение квадрата в дополнительном цвете. Так вы узнаете, что дополнительным к красному цвету является зеленый, к синему — оранже-

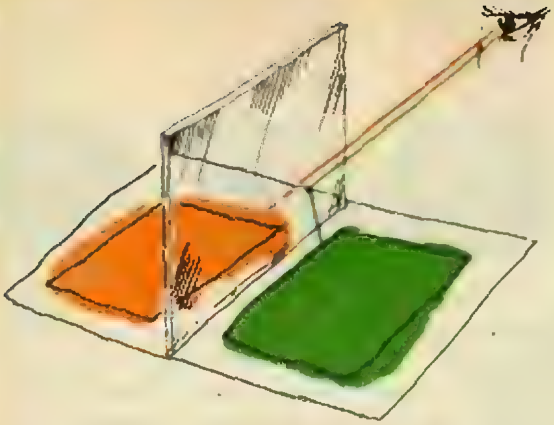


Рис. 3.

вый, а к желтому — фиолетовый (рис. 2). Каждая пара дополнительных цветов в смеси должна давать белый или серый ахроматический цвет.

Для смешения дополнительных цветов положите рядом два дополнительных квадратика и поставьте между ними стеклянную пластинку (рис. 3). Расположите глаз так, чтобы один квадратик видеть сквозь стекло, а другой — отраженным в стекле. Меняя наклон стекла и тем самым соотношение между световыми потоками, идущими от квадратиков, можно добиться того, что окраска в месте перекрытия изображений почти исчезнет. Для полной ахроматизации изображения нужен точный подбор цветов. Чаще всего получается бурая окраска. Но если взять два явно не дополнительных цвета, например зеленый и желтый или красный и фиолетовый, яркая окраска получится при любой их смеси. Еще более яркие цветовые образы возникают, если квадратики класть не на белую бумагу, а на дополнительный фон.

После того как вы приобрели опыт наблюдения на простых фигурах, попробуйте сделать из цветной бумаги аппликацию — например, изобразите пейзаж, заменив в нем все цвета на дополнительные. Рассматривая картинку так же, как рассматривали квадратики, вы очень скоро научитесь видеть на белом фоне пейзажи в натуральных цветах. Для успеха нужно только достаточно яркое освещение.

Самую поразительную и самую непонятную цветовую иллюзию дает наш последний опыт. Мы уже говорили, что в основе воспроизведения цветов лежит трехцветная система. Если три раза сфотографировать одну и ту же сцену через три светофильтра — красный, зеленый и синий — и, отпечатав позитивные копии, спроектировать их тремя проекторами на одно и то же место экрана через те же светофильтры, то на экране появится цветное изображение с правильной передачей цветов. При этом светофильтры должны быть подобраны так, чтобы в сумме они давали белый цвет. Можно ограничиться двумя фотографиями через два дополнительных светофильтра, например красный и зеленый. При этом тоже получается хорошая цветопередача, хотя и не столь совершенная, как в трехцветном способе. Но, оказывается, при проекции можно ограничиться и одним цветным светофильтром.

Снимите одну и ту же цветную сцену, не перемещая аппарат, два раза на панхроматическую пленку через красный и зеленый светофильтры. В точном подборе светофильтров нет необходимости. Вполне подойдут светофильтры из школьного набора. Контактно отпечатайте на пленку позитивные копии. Полученные диапозитивы вставьте в два проектора и спроектируйте диапозитивы на экран так, чтобы контуры изображений точно совпали. Перед объективом проектора, в который вставлен диапозитив, снятый через красный фильтр, поставьте красный светофильтр, а второе изображение оставьте черно-белым. Вы увидите цветное изображение во всем богатстве красок, несмотря на то, что проектируете вы только красное и черно-белое изображения с разным распределением света и тени. Любые объективные исследования света, отраженного разными местами экрана, дадут только красный цвет различной степени чистоты или насыщенности. Ощущение цветов в данном случае чисто субъективное. Проекторы лучше включать через автотрансформаторы, чтобы можно было независимо регулировать освещенность, даваемую на экран каждым из них. Как правило, ощущение наиболее правильной цветопередачи возникает при небольшой освещенности экрана.

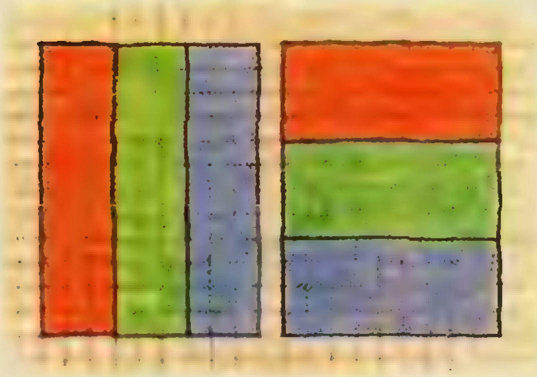
Таким образом, простое и очевидное полно тайн и загадок.

КВАНТ для младших школьников

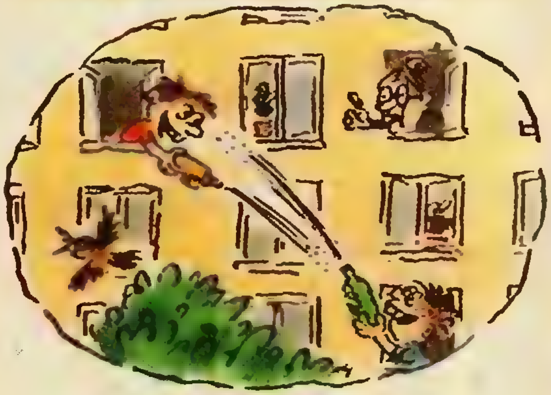
Задачи

1. Белых грибов я после дождя набрал — насилу дотащил,— рассказывал на уроке математики Николай Борисович.— Но тащил я главным образом воду: ведь в свежесобранных грибах 90 % воды! А когда грибы подсохли, их вес уменьшился на 15 кг, потому что вода составляла теперь только 60 % их веса. Сколько килограммов грибов я принес из леса?

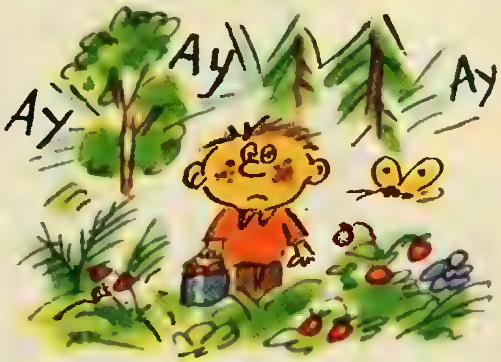
2. На рисунке изображены два прямоугольника 9×12, раскрашенные по-разному в три цвета. Разрежьте прямоугольник, нарисованный слева, на 4 части так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник, нарисованный справа.



3. Коля и Витя живут в одном доме. На каждом из этажей во всех подъездах их дома расположено по четыре квартиры. Коля живет на пятом этаже в квартире № 83, а Витя — на третьем этаже в квартире № 169. Сколько этажей в их доме?



4. Мы с Ирой пошли в лес за ягодами. Ира шла правее меня. Вдруг слева я услышал ее «Ау!», через минуту — снова «Ау!», но уже, кажется, сзади. Почему в лесу так трудно определить направление на источник звука?



5. На стол положили несколько одинаковых листов бумаги прямоугольной формы. Оказалось, что верхний лист покрывает больше половины площади каждого из остальных листов. Можно ли в таком случае воткнуть булавку так, чтобы она проколола все листы?

Эти задачи нам предложили *А. Я. Халамайзер*, *А. В. Швецов*, ученик 10 кл. школы № 462 г. Москвы *А. Хамитдулин*, *А. П. Савин*, *В. В. Произволов*.

КТО УКРАЛ

Крендели?

Червонный Король и Королева сидели на троне, а вокруг толпились остальные карты и множество всяких птиц и зверюшек. Перед троном стоял Валет в цепях. Возле Короля вертелся Белый Кролик — в одной руке он держал трубку, а в другой длинный пергаментный свиток. Посередине стоял стол, а на столе большое блюдо с кренделями. «Скорее бы кончили судить,— подумала Алиса,— и подали угощение». Особых надежд на это, однако, не было, и она начала смотреть по сторонам, чтобы как-то скоротать время. «Вон судья,— сказала Алиса про себя.— Раз в парике, значит судья». Судьей, кстати, был сам Король. «Это место для присяжных,— подумала Алиса. А эти двенадцать существ, видно, и есть присяжные». Присяжные меж тем что-то строчили на грифельных досках. «Воображаю, что они там понапишут до конца суда!»,— подумала Алиса. У одного из присяжных грифель все время скрипел. Алиса ловко выхватила у него грифель. Она проделала это так быстро, что бедный присяжный не понял, что произошло; поискав грифель, он решил писать пальцем. Толку от этого не было никакого,

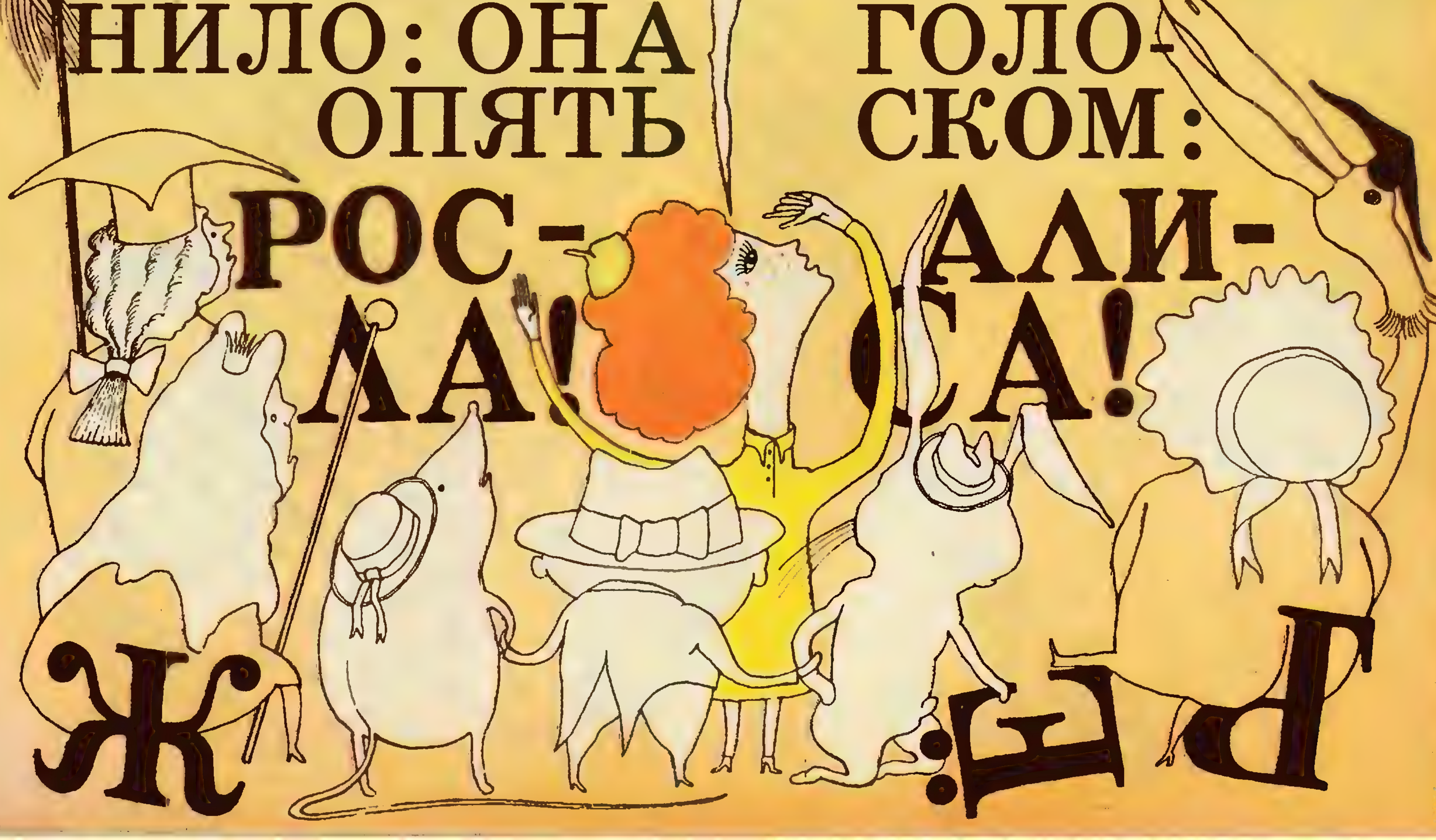
так как палец не оставлял следа на грифельной доске.— Глашатай, читай обвинение! — сказал Король. Белый Кролик трижды протрубил в трубу, развернул пергаментный свиток и прочитал: Дама Червей испекла кренделей в летний погожий денек. Валет Червей был всех умней и семь кренделей уволок.— Обдумайте свое решение! — сказал Король присяжным.— Нет, нет,— прервал его Кролик.— Надо, чтобы все было по правилам.— Вызвать первого свидетеля,— строго приказал Король. Им оказался Болванщик.

Он подошел к трону, держа в одной руке чашку с чаем, а в другой бутерброд. Королева надела очки и в упор посмотрела на Болванщика.— Давай показания,— сказал Король.— И не нервничай, а не то я велю тебя казнить. Алиса почувствовала себя странно. Она не могла понять, что

А ты не можешь не напирать?— спросила сидевшая рядом с ней Соня.— Ничего не могу поделать,— виновато сказала Алиса.— Я расту. А Королева меж тем все смотрела в упор на Болванщика, она нахмурилась и приказала:— Подать сюда список тех, кто пел на последнем концерте! Тут бедный Болванщик так задрожал, что с обеих ног у него слетели башмаки.— Давай свои показания,— повторил Король гневно,— а не то я велю тебя казнить. Несчастный Болванщик выронил из рук чашку и бутерброд.— Я человек маленький,— сказал он.— Глуп как пень,— заметил Король и гордо огляделся. Тут одна из морских свинок громко зааплодировала и была подавлена. (Это трудное слово, и я объясню, что оно значит. Служители взяли большой мешок; сунули туда свинку вниз головой, завязали мешок и сели на него).— Я очень рада, что увидела, как это делается,— подумала Алиса.— А то я часто читала в газетах: «Попытки к сопротивлению были подавлены...» Теперь-то я знаю, что это такое!— Ну, хватит,— сказал Король Болванщику. Закругляйся!— А я и так

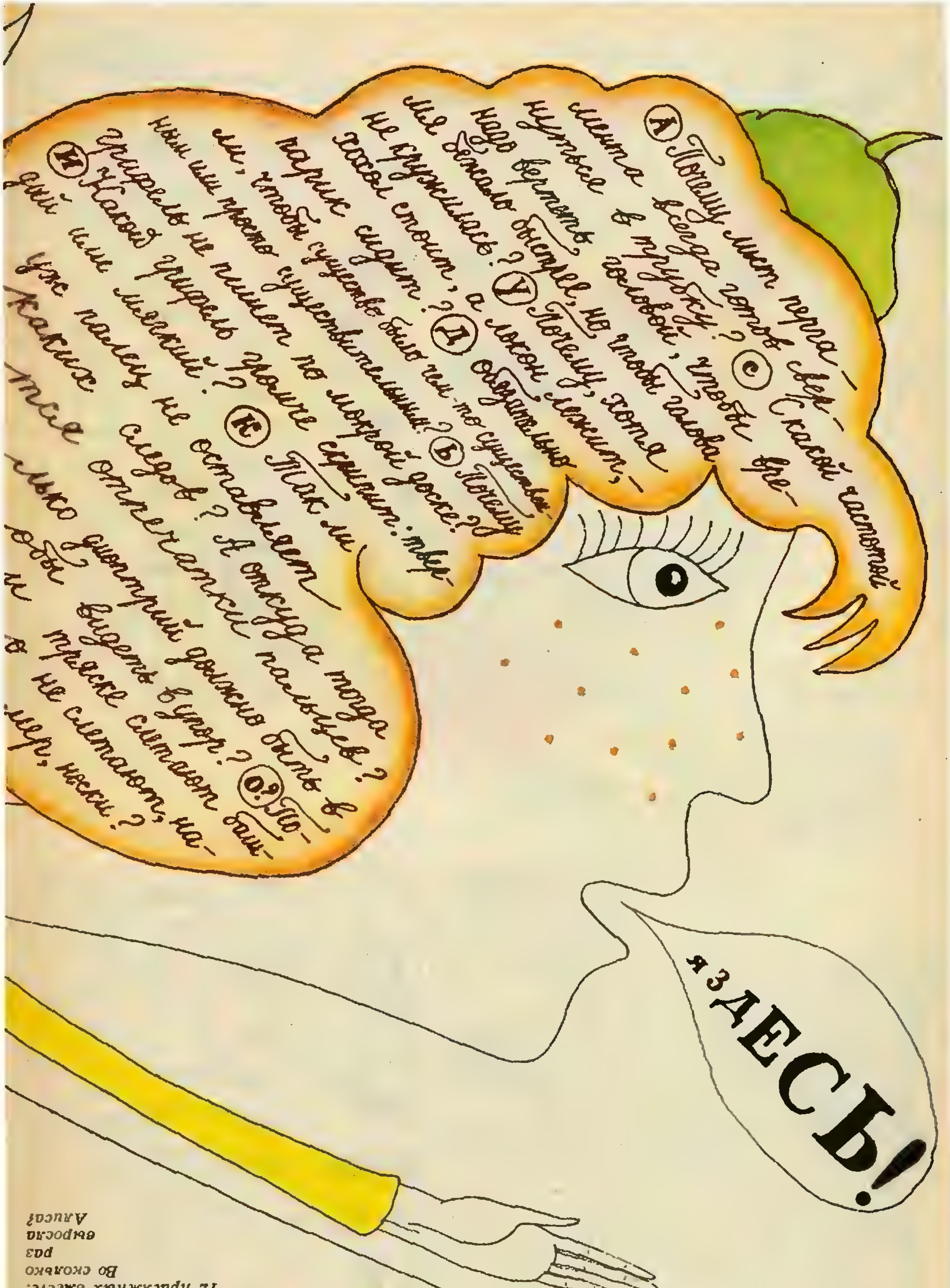
весь круглый,— радостно возразил Болванщик.— Круглый ты болван, вот ты кто! — закричал вдруг Король. Тут другая свинка зааплодировала и была подавлена. «Ну вот, со свинками покончено,— подумала Алиса.— Теперь дело пойдет веселее». И Болванщик выбежал из зала суда, даже не позаботившись надеть башмаки.— И отрубите ему голову,— прибавила Королева, повернувшись к одному из служителей. Но Болванщик был уже далеко.— Вызвать свидетельницу, и чтобы вела себя прилично,— приказал Король.— Придется Вашему Величеству подвергнуть ее перекрестному допросу,— прошептал Кролик. Белый Кролик зашуршал списком. «Интересно, кого они сейчас вызовут,— подумала Алиса. Пока что улик у них нет никаких...» Представьте себе ее удивление, когс ней происходит. Наконец ее осенило: ОНА ОПЯТЬ РОСЛА!

да Белый Кролик завопил своим голоском: АЛИСА!

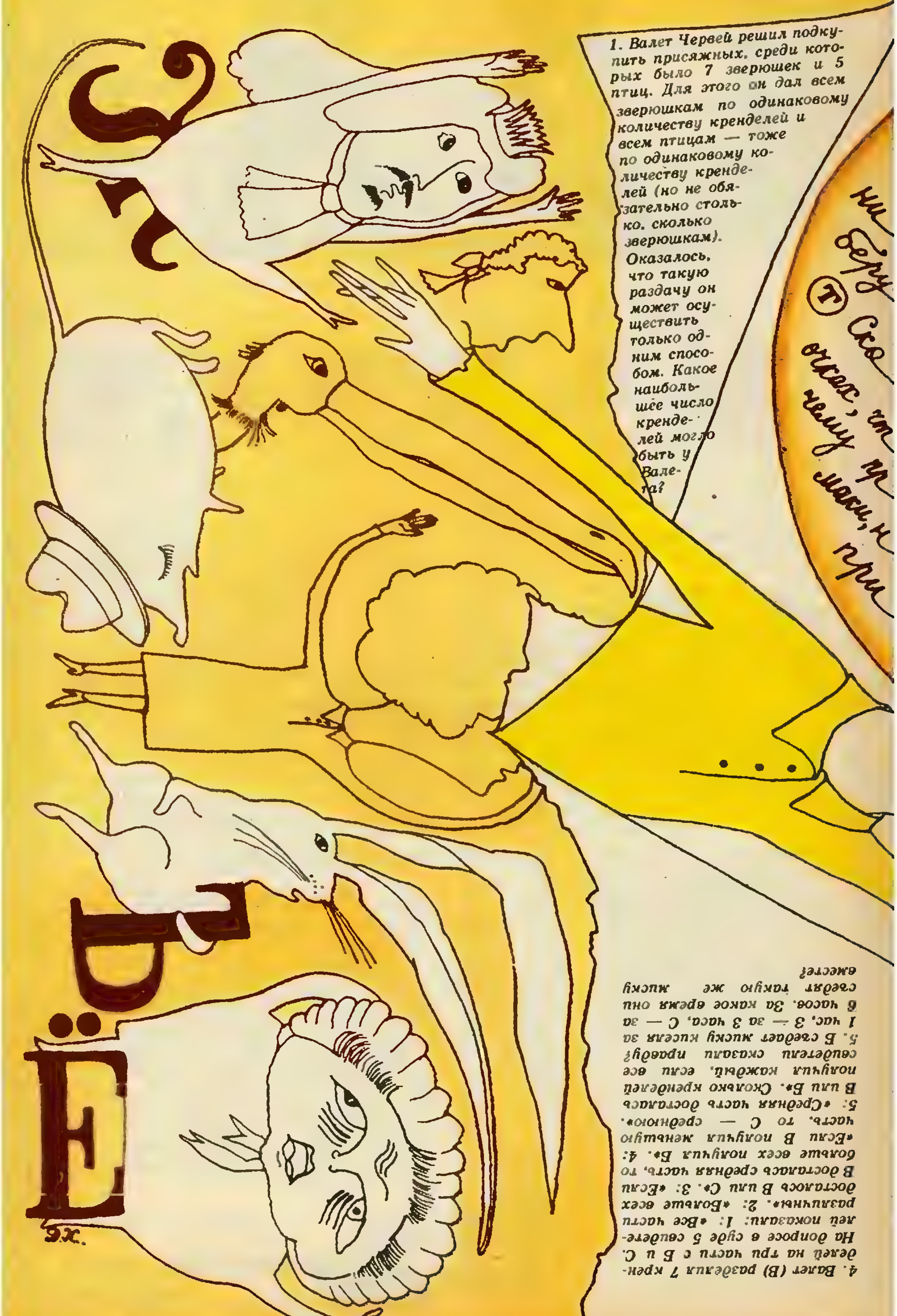


2. *Болванщик купил материал для шляпы за 5 монет, а шляпу продал за 6 монет, затем купил ее за 7 монет и снова продал за 8 монет, потом купил ее же за 9 монет и тут же продал за 10 монет. Какую прибыль он получил?*

3. *До того, как Алиса начала расти в зале суда, ее вес и рост были равны весу и росту каждого из присяжных заседателей. Когда же она выросла, то стала весить столько же, сколько все 12 присяжных вместе. Во сколько раз выросла Алиса?*



(А) Почему лист пергамента всегда готов свернуться в трубку? (С) С какой частотой надо вертеть головой, чтобы время бежало быстрее, но чтобы голова не кружилась? (У) Почему, хотя часы стоит, а локон лежит, — парик сидит? (Л) Обязательно ли, чтобы существо было чем-то существенным или просто существительным? (Б) Почему грифель не пишет по мокрой доске? В (М) Какой грифель громче скрипит: твердый или мягкий? (К) Так ли уже палец не оставляет каких следов? А откуда тогда тсе отпечатки пальцев? лько диоптрий должно быть в обы видеть в упор? (О?) Почему и треске сметают блин о не сметают, например, носки?



1. Валет Червей решил подкупить присяжных, среди которых было 7 зверюшек и 5 птиц. Для этого он дал всем зверюшкам по одинаковому количеству кренделей и всем птицам — тоже по одинаковому количеству кренделей (но не обязательно столько, сколько зверюшкам). Оказалось, что такую раздачу он может осуществить только одним способом. Какое наибольшее число кренделей могло быть у Валета?

4. Валет (В) разделил 7 кренделей на три части с Б и С. На допросе в суде 5 свидетелей показали: 1: «Все части различны». 2: «Больше всех досталось В или С». 3: «Если В досталась средняя часть, то больше всех получил Б». 4: «Если В получил меньшую часть, то С — среднюю». 5: «Средняя часть досталась В или Б». Сколько кренделей получил каждый, если все свидетели сказали правду?

5. Б съедает миску киселя за 1 час, З — за 3 часа, С — за 6 часов. За какое время они съедят такую же миску вместе?

Неудачи одной цивилизации

А. Н. КЮЧУКОВ (НРБ)

На Отрезке AB существовала цивилизация. Ее представители — Точки — были разумными существами. Отрезок был большой, существа — очень маленькие; и места хватало для всех.

С развитием науки и техники существа начали обдумывать вопрос: как покинуть родной Отрезок и выйти в открытый Космос — в Плоскость? Сначала нашли середину C Отрезка. Самые видные ученые предложили построить в Плоскости равнобедренные прямоугольные треугольники AA_0C и BB_0C с прямыми углами при вершинах A и B. Они нашли способ послать космический корабль в середину M_0 отрезка A_0B_0 (рис. 1). Этот проект приняли с восторгом, но он чуть не провалился. Равнобедренные треугольники строили разные организации и они построили их несогласованно — в разных Полуплоскостях относительно Отрезка AB. Поэтому вместо того чтобы взлететь в точку M_0, космический корабль остался в середине C отрезка AB. Ошибку исправили, и для определенности существа решили летать пока только в Верхнюю Полуплоскость. Космический корабль успешно долетел до точки M_0, и все были довольны.

Следующее поколение, однако, не захотело ограничиться точкой M_0. Молодые ученые заменили середину C Отрезка произвольной точкой C', $C' \in AB$, после чего снова построили в Плоскости равнобедренные прямоугольные треугольники $AA'C'$ и $BB'C'$ с прямыми углами при вершинах A и B. Затем они послали космический корабль в середину M' отрезка $A'B'$ (в Верхнюю Полуплоскость; рис. 2). Каково же было их удивление, когда оказалось, что корабль снова попал в точку M_0. Большинство ученых решили, что это совпадение является неизбежным свойством Плоскости. Они начали искать другие способы выхода в открытый Космос при помощи равнобедренных прямоугольных треугольников (наверное, технические средства цивилизации не позволяли других методов). В конце концов удалось использовать точку C_1 в Плоскости, не лежащую на Отрезке AB. Вне треугольника ABC_1 построили равнобедренные прямоугольные треугольники AA_1C_1 и BB_1C_1 с прямыми углами при вершинах A и B (рис. 3). Было много предложений, аргументированных по-разному, как выбирать точку C_1 в Плоскости. Однако самый закостенелый скептик заявил, что споры беспредметны, потому что середина M_1 отрезка A_1B_1, куда пойдет космический корабль, и в этом случае совпадает со старой точкой M_0.

Его слова были восприняты как неуместная шутка. Цивилизация выделила большие денежные средства, чтобы опровергнуть скептика практически. Выбрали две различные точки C_1 и C_2 в Верхней Полуплоскости, построили соответствующие прямоугольные треугольники. Потом послали два корабля в середины M_1 и M_2 полученных отрезков A_1B_1 и A_2B_2. Только виртуозное мастерство пилотов спасло корабли от столкновения! Скептик же заявил, что корабли избежали столкновения только из-за неточности построения треугольников.

А что думате вы, дорогие читатели? Почему произошло совпадение точек M_0, M', M_1 и M_2?

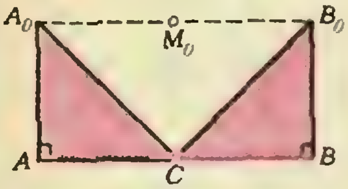


Рис. 1.

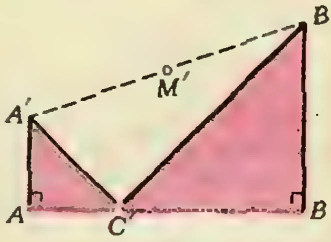


Рис. 2.

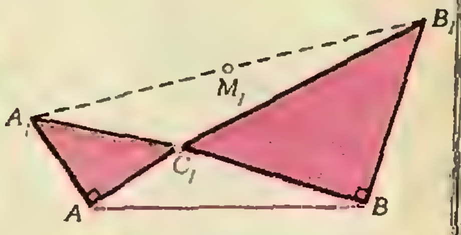
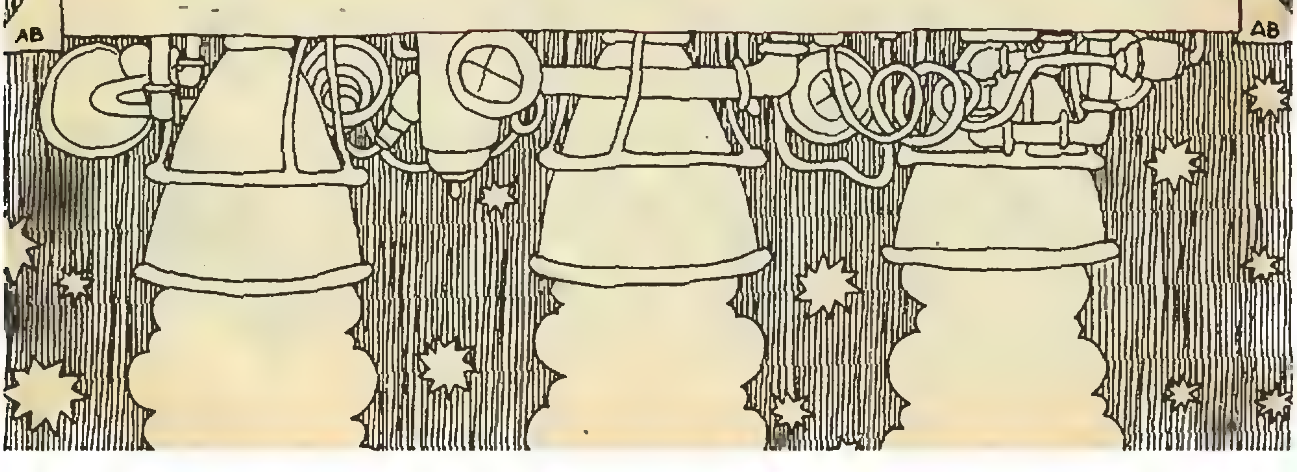


Рис. 3.



задачник Кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 октября 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8 — 86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М996, М997» или «Ф1008». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию и имя пишите печатными буквами.

Задачи М996 — М998 и М999 а) этого номера предлагались на XX Всесоюзной математической олимпиаде школьников. Полный список задач этой олимпиады с решениями будет опубликован в «Кванте» № 11 за этот год.

М996—М1000; Ф1008—Ф1012

М996. Два одинаковых квадрата в пересечении образуют восьмиугольник. Стороны одного квадрата синие, другого — красные. Докажите, что сумма длин синих сторон восьмиугольника равна сумме длин его красных сторон.

В. В. Произволов

М997. Докажите, что сумма всех чисел вида $\frac{1}{mn}$, где m и n — натуральные числа, $1\leqslant m<n<1986$, не является целым числом.

Д. А. Митькин

М998*. Рассмотрим все тетраэдры $AXBY$, описанные около данной сферы. Докажите, что при фиксированных точках A и B сумма углов четырехугольника $AXBY$, то есть сумма

$$\angle AXB+\angle XBY+\angle BYA+\angle YAX,$$

не зависит от выбора точек X и Y.

И. Ф. Шарыгин

М999*. а) Докажите, что для любых положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n выполнено неравенство

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\ldots+\frac{n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}<4\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

Докажите, что константу 4 в правой части неравенства

б) можно заменить на 2;

в) нельзя заменить числом, меньшим 2.

Л. Д. Курляндчик, А. С. Меркурьев

Редакция получила много задач по математике с пометкой «На конкурс М1000». Среди них было немало интересных — со временем они будут опубликованы в «Задачнике «Кванта». Однако авторитетное жюри не сумело выбрать какую-нибудь одну задачу, явно выделяющуюся среди остальных. Тогда жюри обратило внимание на сравнительно малоизвестную задачу, до сих пор не потерявшую своей свежести и красоты. И хотя автор не присылал ее на конкурс, именно эта задача стала юбилейной «М1000».

М1000. В дугу AB вписана ломаная AMB из двух отрезков ($AM>MB$). Докажите, что основание перпендикуляра KH, опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM, делит ломаную пополам: $AH=HM+MB$ (рис. 1, с. 42).

Архимед (Сиракузы)

Ф1008. Стержень AB помещен внутрь цилиндра. В точке A стержень закреплен шарнирно, в точке C он опирается на верхнюю кромку цилиндра, точки A и C лежат в вертикальной плоскости, проходящей через ось цилиндра (рис. 2); угол, ко-

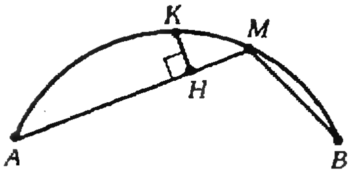


Рис. 1.

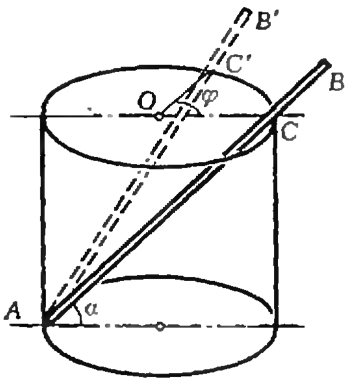


Рис. 2.

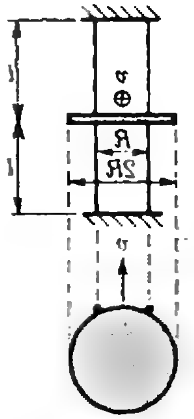


Рис. 3.

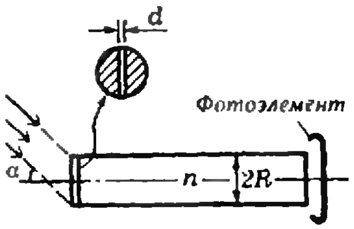


Рис. 4.

торый составляет стержень с горизонтом, равен α. Стержень смещают по верхней кромке так, что он касается ее в точке C' и угол $C'OC$ равен φ. При каком минимальном коэффициенте трения стержень будет находиться в этом положении в равновесии?

С. С. Кротов

Ф1009. Плоский диск радиуса R, расположенный в горизонтальной плоскости, начинают продвигать между двумя вертикальными нитями, расстояние между которыми R; длина каждой нити $2l$, жесткость k, концы нитей закреплены (рис. 3). Найти силу, действующую на диск со стороны одной нити через время t, если в начальный момент нити были нерастянуты и касались диска, диск двигают с постоянной скоростью v. Толщиной диска пренебречь; трение не учитывать.

А. С. Розенберг, ученик 9 кл.

Ф1010. Две диэлектрические заряженные нити бесконечной длины расположены в пространстве как две скрещивающиеся перпендикулярные прямые. Линейная плотность зарядов на нитях σ. Найти силу взаимодействия нитей. Считать, что нити очень тонкие и перераспределение зарядов не происходит.

И. В. Шутовский, ученик 10 кл.

Ф1011. Воздушный шар, подъемная сила которого создается горячим воздухом, устроен так, что объем его обогреваемой камеры практически постоянен, а давление в ней равно внешнему давлению, так как камера в нижней своей части сообщается с атмосферой. Обогрев в камере производится постоянно для компенсации теплоотдачи в окружающую среду. Такой шар при постоянной мощности нагревателя плавает в атмосфере на определенной высоте. Насколько изменится высота плавания, если при увеличении мощности нагревателя средняя температура воздуха в камере увеличится на $\Delta t = 0{,}1$ °C от начальной температуры $t = 57$ °C? Температура окружающей среды $t_0 = 17$ °C.

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Ф1012. Торец длинного стеклянного цилиндра радиуса R закрыт светонепроницаемой пластинкой, в которой имеется вертикальная щель; ширину d щели можно менять. На пластинку под углом α падает пучок параллельных световых лучей (рис. 4); освещенность пластинки E. У противоположного торца цилиндра находится фотоэлемент. Построить график зависимости светового потока, принимаемого фотоэлементом, от ширины щели d. Показатель преломления стекла n.

А. А. Лапидес

Замечание к решению М970 (*см. «Квант» № 6, с. 37*). Из писем читателей мы обнаружили, что условие М970 можно понимать двояко (слова «ближайшие к ней» отнести к «своей» остановке или к только что отмененной). Правильный ответ при $n = 32$ (в пункте а)) — 3, а не 2. Обе трактовки заслуживают внимания, и мы еще вернемся к ним.

Problems

M996 — M1000; P1008 — P1012

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than October 15th, 1986 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and adress in block letters.

Problems M996 — M998 and M999 a) in this issue were proposed at the 20th All-Union school mathematics olympiad. The complete list of problems given at this olympiad (with solutions) will appear in *Kvant* in this year's 11th issue.

M996. Two equal squares intersect in an octagon. The sides of one square are blue, of the other, red. Prove that the total length of the octagon's blue sides equals that of the red ones.

V. V. Proizvolov

M997. Prove that the sum of all numbers of the form $1/m\,n$, where m and n are natural numbers, $1 \leqslant m < n < 1986$, is not an integer.

D. A. Mitkin

M998*. Consider all the tetrahedra $AXBY$ circumscribed about a given sphere. Prove that if the points A and B are fixed, then the sum of angles of the quadrangle $AXBY$, i. e. the sum

$$\angle AXB + \angle XBY + \angle BYA + \angle YAX,$$

does not depend on the choice of the points X and Y.

I. F. Sharygin

M999*. a) Prove that for all positive numbers $a_1, a_2, \dots, a_n$ we have

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \dots + \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} < 4\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Prove that the constant 4 in the right hand side
b) may be replaced by 2;
c) cannot be replaced by any smaller number.

L. D. Kurlyandchik, A. S. Merkuriev

The editors have received numerous letters with the heading "M1000 problem contest". Several of them contained very interesting problems, which in time will be published in the Kvant problem section. However, the authoritative jury was unable to choose any one problem, clearly standing out among the others. Then the jury's attention was attracted by a relatively obscure old problem, which has not lost its novelty and beauty. And although its author did not send it to the contest, it is this problem which appears as "M1000".

M1000. The polygonal line AMB consisting of two segments ($AM > MB$) is inscribed in the arc AB. Prove that the base H of the perpendicular KH to the segment AM, lowered from the midpoint K of the arc AB, divides the polygonal line into equal parts: $AH = HM + MB$.

Archimedes (Syracuse)

P1008. The rod AB is linked by a hinge to the botton of a cylinder at the point A and leans on the point C of the upper edge of the cylinder, the points A and C being in the vertical plane passing through the cylinder's axis (see figure Рис. 2); the angle between the rod and the horizontal plane is α. The rod is moved along the upper edge of the cylinder until it leans on it at the point C' and angle $C'OC$ equals φ. For what minimal friction coefficient will the rod be in equilibrium in this position?

S. S. Krotov

P1009. A flat weightless disc of radius R, held horizontally, is pushed between two vertical strings of length $2l$, elasticity k, whose extremities are fixed, the distance between them being R (see figure Рис. 3). Find the force exerted by one string on the disk after time t, if at the initial moment the disk just touched the strings and moves with constant velocity v. The disk is thin, friction negligible.

A. S. Rozenberg, 9th form pupil

P1010. Two dielectric charged strings of infinite length form perpendicular non-intersecting lines in space. The linear charge density on the strings is σ. Find the force of interaction between the strings, assuming the strings to be very thin, no charge redistribution taking place.

I. V. Shutovski, 10th form pupil

P1011. An aerostat, whose lifting power is caused by hot air contained in a heated chamber inside which pressure equals

atmospheric pressure (because the lower part of the chamber communicates with the atmosphere), is constantly heated to compensate heat losses to the surroundings. For a fixed power of the heater, such an aerostat floats at a determined altitude. How will this altitude change, if the heating power is increased, leading to an increase of $\Delta t=0.1$ °C in the mean temperature in the chamber, which initially equalled $t=57$ °C? The surrounding temperature is $t_0=17$ °C.

E. N. Yunosov, I. V. Yaminski

P1012. The left extremity of a long glass cylinder of radius R is obstructed by an opaque thin disk with a vertical slit whose width d can be changed. A beam of parallel light rays falls on the disk, forming the angle α with it (see figure Рис. 4, p. 42); the disk's illumination is E. A photoelement is placed at the other extremity of the cylinder. Plot the dependence of light flux registred by the photoelement on the width of the slit d. The refraction coefficient of glass is n.

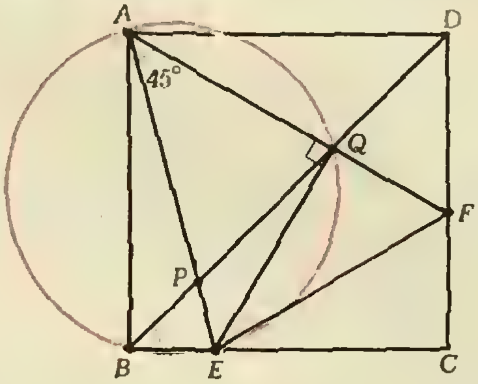
A. A. Lapides

Решения задач

М976—М980; Ф988—Ф992

М976. *Из вершины A квадрата $ABCD$ проведены два луча, образующие между собой угол 45°. Один пересекает сторону BC в точке E, диагональ BD — в точке P, другой — сторону CD в точке F, диагональ BD — в точке Q. Докажите, что площадь треугольника AEF вдвое больше площади треугольника APQ.*

Поскольку $\angle QAE=\angle QBE=45°$ и точки A и B лежат по одну сторону от отрезка QE, вокруг четырехугольника $ABEQ$ можно описать окружность (см. рисунок). Следовательно, $\angle AQE=180°-\angle ABE=90°$, то есть треугольник AQE — прямоугольный равнобедренный и $AE=\sqrt{2}\,AQ$. Аналогично $AF=\sqrt{2}\,AP$. Отсюда, учитывая, что треугольники AEF и APQ имеют общий угол при вершине A, получаем, что они подобные с коэффициентом $\sqrt{2}$, и значит, площадь первого вдвое больше площади второго.



Э. Г. Готман

◆

М977. *Можно ли с помощью операций сложения, вычитания и умножения из многочленов $f(x)$ и $g(x)$ получить x, если: а) $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^2+2$; б) $f(x)=x^2+x$, $g(x)=x^2-2$; в) $f(x)=2x^2+x$, $g(x)=2x$; г) $f(x)=2x^2+x$, $g(x)=x^2$.*

Ответ: в задаче б) можно, в остальных задачах — нельзя.

Для решения задачи б) заметим, что $f-g=x+2$, поэтому

$$(f-g)^2-2(f-g)-f=(f-g)(f-g-2)-f=$$
$$=x(x+2)-x^2-x=x.$$

В остальных задачах мы воспользуемся тем, что если многочлен x выражается через $f(x)$ и $g(x)$ с помощью операций сложения, вычитания и умножения, то любое число a выражается таким же образом через числа $f(a)$ и $g(a)$.

а) Возьмем $x=-1$, тогда $f(x)=0$, $g(x)=3$. Оба эти числа делятся на 3, поэтому и любое число, составленное из них при помощи сложения, вычитания и умножения, должно делиться на 3 и, следовательно, отлично от -1.

в) Дробное число $x=1/2$ не может выражаться рассматриваемым способом через целые числа $f(1/2)=1$ и $g(1/2)=1$.

г) Возьмем $x=\sqrt{2}$, тогда $f(x)=5\sqrt{2}$, $g(x)=2$. Любая допустимая условием задачи комбинация чисел $5\sqrt{2}$ и 2 имеет вид $m+5n\sqrt{2}$, где m и n — целые. Но равенство $\sqrt{2}=m+5n\sqrt{2}$ невозможно, поскольку из него следовало бы, что $\sqrt{2}=m/(1-5n)$ — рациональное число.

С. И. Кублановский

◆

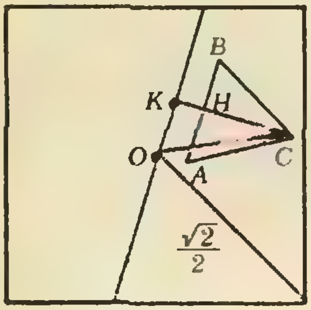
M978. *Можно ли в квадрате со стороной 1 расположить два правильных треугольника со сторонами больше $\sqrt{2/3}$, не налегающих друг на друга?*

Ответ: Нельзя. Достаточно доказать, что любой правильный треугольник со стороной $\sqrt{2/3}$, лежащий в квадрате со стороной 1, содержит центр квадрата (как внутреннюю точку).

Докажем это утверждение от противного. Если правильный треугольник ABC не содержит центр квадрата O, то у него найдется такая сторона, скажем, AB, что треугольник и точка O лежат по разные стороны от прямой AB (см. рисунок). Проведем через O прямую, параллельную AB, и опустим из точки C перпендикуляр CK на эту прямую. Пусть H — точка его пересечения со стороной AB, тогда

$$CH<CK\leqslant CO,$$

но расстояние CO, очевидно, не превосходит половины диагонали квадрата (так как точка C лежит внутри квадрата). А поскольку CH — высота треугольника, для длины его стороны мы получаем оценку



$$\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}CH<\frac{2}{\sqrt{3}}CO\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Противоречие.

Е. А. Карлов, И. К. Димитров

◆

M979. *Пусть k и n — натуральные числа, $2\leqslant k\leqslant n$. Назовем набор k положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, меньших 1, исключительным, если для любого разбиения $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$ числа n на неотрицательные целые слагаемые хотя бы одно из чисел a_in_i — целое ($i=1, 2, \ldots, k$).*
а) Для каких k и n существуют исключительные наборы?
б) Каковы эти наборы?

Ответ: а) $n-k$ должно быть нечетно; б) единственный исключительный набор (при нечетном $n-k$) $a_1=a_2=\ldots=a_k=1/2$.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — исключительный набор. Положим $n_1=n-k+1$, $n_2=n_3=\ldots=n_k=1$; тогда $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$ и одно из чисел a_in_i должно быть целым. Но при $i\geqslant 2$ числа $a_in_i=a_i$ — не целые, поэтому $a_1(n-k+1)$ — целое, то есть число $a_1(n-k)$ — не целое. Положим теперь $n_1=n-k$, $n_2=2$, $n_3=\ldots=n_k=1$. Единственное из произведений a_in_i, которое может быть целым для этих n_i,— это $a_2n_2=2a_2$, следовательно, $a_2=1/2$. Точно так же доказывается, что $a_i=1/2$ при всех i. Но мы уже видели, что число $a_1(n-k+1)=(n-k+1)/2$ — целое; значит, $n-k$ — нечетное число.

Е. А. Горин

◆

M980. *Внутри выпуклого а) многоугольника, б) многогранника с вершинами A_1,*

а) Разобьем данный многоугольник на треугольники с вершинами в точках $A_1, \ldots, A_n$ (для этого

A_2, ..., A_n взята точка O. Докажите, что среди $n(n-1)/2$ углов A_iOA_k (i, $k=1, 2, ..., n$) не менее, чем $n-1$, имеют величину от 90° до 180°.

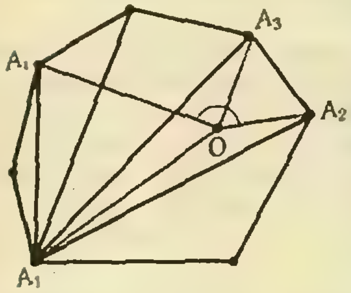


Рис. 1.

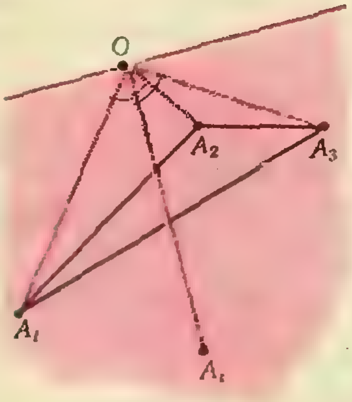


Рис. 2.

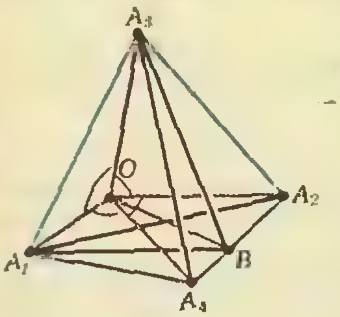


Рис. 3.

достаточно провести все диагонали из вершины A_1). Точка O попадет в один из этих треугольников (возможно, на границу); пусть это будет $A_1A_2A_3$ (рис. 1). Для любой из вершин A_i, $i=1, 2, ..., n$ один из углов A_1OA_i, A_2OA_i и A_3OA_i будет неострым. Действительно, иначе все три вершины нашего треугольника оказались бы по одну сторону от перпендикуляра к OA_i, проведенного через точку O (причем внутри ограниченной им полуплоскости; рис. 2), а это означало бы, что точка O лежит вне треугольника. Таким образом, мы получим по одному неострому углу для каждой из $n-3$ вершин A_4, A_5, ..., A_n; еще два неострых угла мы можем выбрать из трех углов A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_1 (если, скажем, угол A_1OA_2 острый, то углы A_1OA_3 и A_2OA_3 — неострые). Всего получится $n-3+2=n-1$ неострых углов.

б) Решение этой задачи аналогично решению задачи а). Сначала разобьем данный многогранник на тетраэдры с вершинами в точках A_1, ..., A_n. Для этого разобьем все грани, не содержащие вершину A_1, на треугольники, как в пункте а) (треугольные грани дополнительно разбивать, конечно, не нужно), и возьмем в качестве тетраэдров искомого разбиения тетраэдры с общей вершиной в точке A_1, основаниями которых являются все эти треугольники. Допустим, что точка O попала в тетраэдр $A_1A_2A_3A_4$. Так же, как в пункте а), доказывается, что хотя бы один из 4-х углов, образуемых лучом OA_i, $i=1, 2, ..., n$, с лучами OA_1, OA_2, OA_3 и OA_4, будет неострым. Полагая $i=5, 6, ...$, получим $n-4$ неострых угла. Для $i=1$ получим еще один такой угол, скажем, A_1OA_2. Если угол A_3OA_4 острый, то для $i=3$ и $i=4$ получим еще 2 неострых угла, а всего $n-4+3=n-1$. Пусть, наконец, угол A_3OA_4 неострый. Остается доказать, что среди углов A_1OA_3, A_3OA_2, A_2OA_4 и A_4OA_1 есть еще хотя бы один неострый.

Допустим, что это не так, тогда сумма этих четырех углов меньше 360°, и точка O, как легко видеть, лежит внутри тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$. Обозначим через B точку пересечения плоскости A_1OA_3 с ребром A_2A_4. Воспользуемся тем (рис. 3), что сумма двух плоских углов трехгранного угла больше третьего плоского угла (см., например, статью Б. М. Ивлева «Двугранные и многогранные углы» в «Кванте» № 12 за 1984 г.):

$$360^\circ > \angle A_1OA_3 + \angle A_3OA_2 + \angle A_2OA_4 + \angle A_4OA_1 =$$
$$= \angle A_1OA_3 + (\angle A_3OA_2 + \angle A_2OB) + (\angle BOA_4 +$$
$$+ \angle A_4OA_1) > \angle A_1OA_3 + \angle A_3OB + \angle BOA_1 = 360^\circ.$$

Полученное противоречие завершает доказательство.

В. Г. Болтянский, В. Н. Дубровский

◆

Ф988. *Хоккеист скользит по льду на одном коньке. Известно, что лед тает под коньком на глубину $h=0{,}03$ мм. Шири-*

При движении хоккеиста между коньком и льдом возникает трение. Работа силы трения переходит в конечном счете в тепло, которое идет на плав-

на конька $d=2$ мм. Найти силу трения между коньком и льдом. Удельная теплота плавления льда $\lambda=3,3\times10^5$ Дж/кг, плотность льда $\varrho=0,9$ г/см^3. Считать теплопроводность льда малой.

ление льда под коньком.

За малый промежуток времени Δt хоккеист, двигаясь с постоянной скоростью v (Δt столь мало́, что изменением скорости за это время можно пренебречь по сравнению со значением самой скорости), проходит путь $\Delta x=v\cdot\Delta t$. Работа, совершаемая при этом силой трения, равна

$$A=F_{\text{тр}}\cdot\Delta x=F_{\text{тр}}v\cdot\Delta t.$$

Масса льда, растявшего за это время под коньком, равна $\Delta m=\varrho hdv\cdot\Delta t$. Количество тепла, которое потребовалось для плавления этой массы льда,—

$$\Delta Q=\lambda\cdot\Delta m=\lambda\varrho hdv\cdot\Delta t.$$

Таким образом, $A=\Delta Q$, или

$$F_{\text{тр}}v\cdot\Delta t=\lambda\varrho hdv\cdot\Delta t,$$

откуда

$$F_{\text{тр}}=\lambda\varrho hd=3,3\cdot10^5\cdot0,9\cdot10^3\cdot3\cdot10^{-5}\cdot2\times\times10^{-3}(\text{Н})\approx17,8\ \text{Н}.$$

Может показаться странным, что в полученное для $F_{\text{тр}}$ выражение не входит скорость движения хоккеиста. В действительности искомая сила трения зависит от скорости, поскольку от нее зависит величина h. Следовательно, сформулированные в задаче условия отвечают вполне определенной скорости скольжения.

М. Г. Гаврилов

◆

Ф989. *Модель тележки на гусеничном ходу поставили на наклонную плоскость с углом наклона $\alpha=30°$ и отпустили. Найти ускорение модели. Длина модели $l=50$ см, высота $h=2$ см. Гусеницы сделаны из резины, их масса составляет 80 % всей массы модели. Трение в механизме модели пренебрежимо мало.*

При таком угле наклона резиновые гусеницы движутся по плоскости без проскальзывания. Значит, тепло при движении не выделяется (отсутствует трение между гусеницами и поверхностью и нет трения в механизме модели).

Воспользуемся законом сохранения энергии. Для расчета кинетической энергии учтем, что длина гусениц много больше высоты модели, и будем считать, что при движении модели со скоростью v нижняя половина гусениц неподвижна, а верхняя половина имеет скорость $2v$. Тогда кинетическая энергия модели —

$$E_{\text{к}}=0,4m\frac{(2v)^2}{2}+0,2m\frac{v^2}{2}=0,9mv^2$$

(m — масса всей модели; $0,4m$ — масса половины гусениц; $0,2m$ — масса модели без гусениц). За малый промежуток времени Δt модель опустится на $\Delta h=v\cdot\Delta t\cdot\sin\alpha$, и ее кинетическая энергия увеличится на $\Delta E_{\text{к}}=mgv\cdot\Delta t\cdot\sin\alpha$. Если за это время скорость модели увеличилась на Δv, то $\Delta E_{\text{к}}=0,9m(v+\Delta v)^2-0,9mv^2\approx1,8mv\cdot\Delta v$, то есть

$$mgv\cdot\Delta t\cdot\sin\alpha=1,8mv\cdot\Delta v,$$

откуда находим ускорение

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{g\sin\alpha}{1,8}\approx2,7\ \text{м/с}^2.$$

А. И. Буздин

◆

Ф990. *Тепловой двигатель представляет собой наполненный газом цилиндр с поршнем, движение которого ограничено упорами АА и ББ*

Нарисуем цикл на диаграмме $p-V$. Начнем с момента, когда газ станет расширяться. Нагрев производится очень медленно, поэтому можно считать, что поршень в любой момент находится *(рис. 1). Газ медленно нагревают, пока поршень не коснется упоров ББ, после чего основание пружины смещают из положения ВВ в положение ГГ. Затем сосуд медленно охлаждают до тех пор, пока поршень не коснется упоров АА. Тогда основание пружины смещают назад до ВВ, цилиндр снова нагревают и т. д. Найти КПД этого двигателя. Цилиндр заполнен гелием; площадь поршня $S=10$ см^2; жесткость пружины $k=10$ Н/м, длина ее в нерастянутом состоянии $l_0=60$ см. Внешнее давление принять равным нулю.*

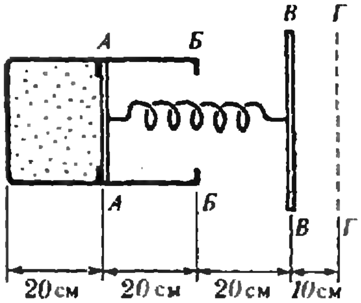


Рис. 1.

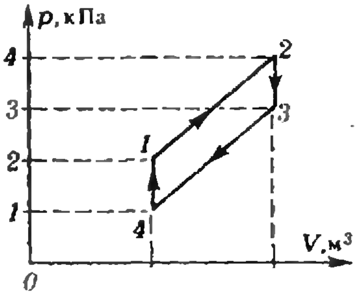


Рис. 2.

в равновесии.

Учтем, что длина пружины в нерастянутом состоянии равна расстоянию от левой стенки сосуда до линии *ВВ* (см. данные, приведенные на рисунке 1), поэтому при расширении газа (при движении поршня от упоров *АА* до упоров *ББ*) сила упругости пружины пропорциональна объему газа — $F_{\text{упр}}=kx=kV/S$, и значит, давление газа —

$$p_{1\to2}=\frac{k}{S^2}V.$$

На этом участке объем газа увеличивается от $V_1=2\cdot10^{-4}$ м^3 до $V_2=4\cdot10^{-4}$ м^3. Давление газа возрастает от $p=\frac{k}{S^2}V_1=2\cdot10^3$ Па до $p_2=\frac{k}{S^2}V_2=4\cdot10^3$ Па (см. рис. 2).

После того как основание пружины сместили из *ВВ* в *ГГ*, сила упругости пружины уменьшилась. В результате при охлаждении сосуда газ начнет сжиматься не сразу, а лишь после того, как давление газа на поршень упадет настолько, что сила давления газа станет равной силе упругости пружины. Это произойдет при $p_3=\frac{10\cdot0{,}3}{10^{-3}}$ Па $=3\cdot10^3$ Па (см. рис. 2). При дальнейшем охлаждении газ будет сжиматься, и давление будет меняться по закону

$$p_{3\to4}=\frac{k}{S^2}(V-V_0),$$

где V_0 — объем, занимаемый газом в случае, когда пружина, закрепленная в положении *ГГ*, оказывается нерастянутой: $V_0=0{,}1\cdot10^{-3}$ м^3 $=1\cdot10^{-4}$ м^3. Таким образом, $p_4=\frac{k}{S^2}(V_1-V_0)=1\cdot10^3$ Па.

После того как основание пружины переместят из положения *ГГ* в положение *ВВ*, сила упругости возрастет. Поэтому при последующем нагревании газа он начнет расширяться лишь с того момента, когда сила давления газа возрастет до значения силы упругости. Это произойдет при $p=p_1=2\cdot10^3$ Па; в дальнейшем процесс повторяется (см. рис. 2).

Работу газа за один цикл можно найти как площадь параллелограмма на рисунке 2:

$$A=0{,}2\ \text{Па}\cdot\text{м}^3=0{,}2\ \text{Дж}.$$

Тепло газ получает на участках 1→2 и 4→1; учитывая, что газ одноатомный, находим:

$$Q=Q_1+Q_2=A_{1\to2}+\Delta U_{1\to2}+\Delta U_{4\to1}=$$
$$=\frac{p_1+p_2}{2}(V_2-V_1)+\frac{3}{2}\nu R(T_2-T_1)+\frac{3}{2}\nu R(T_1-T_4)=$$
$$=\frac{p_1+p_2}{2}(V_2-V_1)+\frac{3}{2}(p_2V_2-p_4V_4)=2{,}7\ \text{Дж}.$$

Таким образом, КПД этого двигателя —

$$\eta=\frac{A}{Q}\cdot100\,\%\approx7{,}4\,\%.$$

Полезную работу в этом цикле «снимают» с двигателя при смещении основания пружины — когда газ нагрет и его давление велико, он совершает работу бо́льшую, чем работа внешних сил *при обратном смещении* основания пружины.

А. Р. Зильберман

Ф991. *В схеме, приведенной на рисунке 1, $U_0=2{,}4$ В, $R=600$ Ом, $r=200$ Ом, диоды $Д_1$ и $Д_2$ имеют одинаковые вольт-амперные характеристики (красная кривая на рисунке 2). Найти ток через диод $Д_2$.*

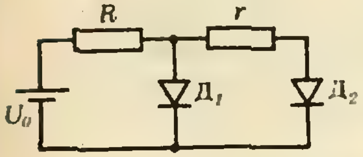


Рис. 1.

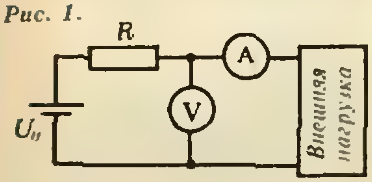


Рис. 1а.

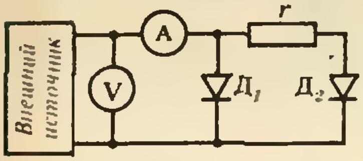


Рис. 1б.

◆

Будем решать задачу графически.

Разобьем схему на две части — батарейка и резистор (Б+Р) (рис. 1а) и цепь с нелинейными элементами ($р+Д_2+Д_1$) (рис. 1б) — и построим их вольт-амперные характеристики.

Для участка (Б+Р) зависимость $I(U)$ находится легко:

$$I=\frac{U_0-U}{R}\qquad (\text{при } U\leqslant U_0)$$

— прямая $I_{\text{Б+Р}}$ на рисунке 2.

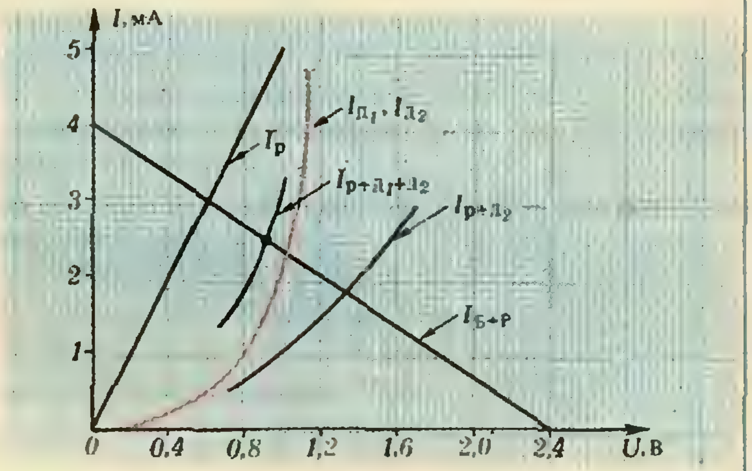


Рис. 2.

В нелинейной цепи сначала найдем зависимость $I(U)$ для последовательно соединенных резистора r и диода $Д_2$ ($р+Д_2$). Нарисуем прямую $I_r=U/r$ и для каждого значения тока просуммируем значения падений напряжения на r и на $Д_2$. Получится кривая $I_{р+Д_2}$ (см. рис. 2).

Теперь для каждого значения напряжения найдем полный ток в нелинейной цепи — просуммируем значения токов через $Д_1$ и в участке ($р+Д_2$). Полученная кривая $I_{р+Д_1+Д_2}$ — вольт-амперная характеристика нелинейной цепи, выделенной на рисунке 1б. Заметим, что нам не надо строить всю кривую $I_{р+Д_1+Д_2}$ — достаточно кусочка в районе пересечения этой кривой с вольт-амперной характеристикой участка Б+Р (с прямой $I_{\text{Б+Р}}$). Точка пересечения этих линий — $U\approx 0{,}9$ В и $I_{\text{общ}}\approx 2{,}5$ мА — дает значения напряжения и полного тока в цепи ($р+Д_1+Д_2$). Ток через диод $Д_1$ при напряжении 0,9 В равен $I_1=1{,}5$ мА; значит, ток через резистор r и диод $Д_2$ равен

$$I_2=I_{\text{общ}}-I_1=0{,}9\text{ мА}.$$

Р. З. Александров

Ф992. *При съемке кадра из фильма «Гулливер в стране лилипутов» актера, играющего роль Гулливера, поместили на расстоянии 4 м от кинокамеры с короткофокусным объективом, а актера, исполняющего роль лилипута,— на расстоянии 40 м. На какое расстояние нужно навести объектив камеры, чтобы изображения обоих героев на киноленте были одинаково четкими?*

Почему при такой съемке используется короткофокусный объектив? Оцените фокусное расстояние такого объектива, если известно, что обычная (некомбинированная) съемка людей с расстояния 5 м производится объективом с фокусным расстоянием 50 см и глубина резкости при этом 0,5 м.

Будем считать объектив тонкой линзой. На рисунке (см. с. 51) приведена схема построения изображения на пленке в кинокамере.

Изображения обоих героев фильма будут одинаково четкими, если любые две точки лилипута и Гулливера, например A_2 и A_1, будут представлены на киноленте световыми пятнышками одинакового радиуса.

Действительные изображения точек A_1 и A_2, расположенных на расстояниях d_1 и d_2 от линзы (объектива), находятся в точках B_1 и B_2 на расстояниях f_1 и f_2 соответственно. Если экран (кинопленку) поместить в плоскости BC на расстоянии f от линзы, то изображения точек A_1 и A_2 будут одинаково размыты — вместо точек B_1 и B_2 на экране будут пятна одинакового радиуса $r=|CB|$. Следовательно, объектив кинокамеры следует навести на точку A, расположенную на расстоянии d от линзы, такую, что ее изображение попадет в точку B.

Из подобия треугольников B_1CB и B_1KO, B_2CB и B_2KO следует:

$$\frac{f-f_1}{f_1}=\frac{r}{R}, \quad \frac{f_2-f}{f_2}=\frac{r}{R},$$

где $R=|OK|$ — радиус диафрагмы объектива (эта величина в основном определяется необходимой глубиной резкости и условиями освещения), и отсюда получаем:

$$\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=\frac{2}{f}. \qquad (1)$$

С другой стороны, из формулы линзы следует, что

$$\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F}-\frac{1}{d_1}, \quad \frac{1}{f_2}=\frac{1}{F}-\frac{1}{d_2}, \quad \frac{1}{f}=\frac{1}{F}-\frac{1}{d},$$

где F — фокусное расстояние линзы. Подставив эти выражения в (1), получим:

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{2}{d},$$

откуда

$$d=2\frac{d_1d_2}{d_1+d_2}.$$

Подставляя численные значения $d_1=40$ м и $d_2=4$ м, находим, что при комбинированной съемке объектив следует навести на точку, находящуюся на расстоянии $d=7{,}3$ м от объектива.

В конечный ответ не входит величина фокусного расстояния объектива. Зачем же требовать, чтобы он был короткофокусным?

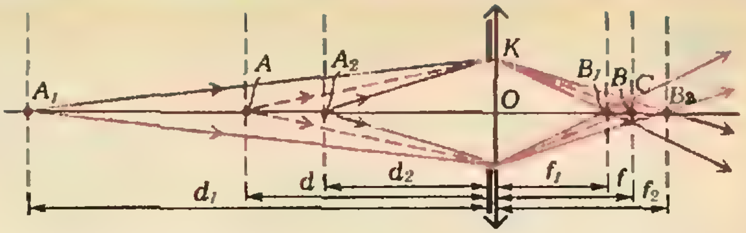
Выразим величину r/R через d_1, d_2 и F:

$$\frac{r}{R}=\frac{(d_1-d_2)F}{2d_1d_2-F(d_1+d_2)};$$

так как $F \ll d_1$, d_2, то для получения оценки можно считать, что

$$\frac{r}{R}=\frac{d_1-d_2}{2d_1d_2}F, \qquad (2)$$

и, следовательно, размытость изображений точек, находящихся на расстояниях d_1 и d_2 от линзы, прямо пропорциональна фокусному расстоянию.



Так так при обычной (некомбинированной) съемке $d_1 \approx d_2 \approx d_0$, то из (2) следует:

$$\left(\frac{r}{R}\right)_{об} = \frac{\Delta d}{2d_0^2} F_{об},$$

где d_0 — *расстояние до объекта*, Δd — глубина резкости, $F_{об}$ — фокусное расстояние применяемого при этой съемке объектива. При комбинированной съемке $d_1 \gg d_2$, и из (2) следует:

$$\left(\frac{r}{R}\right)_{комб} = \frac{1}{2d_2} F.$$

Чтобы качество изображений (их размытость) было одинаковым при этих двух видах съемки, необходимо потребовать, чтобы при съемке с одинаковой диафрагмой радиусы пятен $r_{об}$ и $r_{комб}$ были *одинаковыми*. Тогда

$$F = F_{об} \frac{\Delta d \cdot d_2}{d_0^2}.$$

Подставляя численные значения $F_{об} = 50$ см, $\Delta d = 0{,}5$ м, $d_0 = 5$ м и $d_2 = 4$ м, получим $F = 4$ см.

Значит, для получения качественных снимков с большой глубиной резкости следует применять короткофокусный объектив.

Е. Н. Юносов. И. В. Яминский

Спрашивайте — отвечаем

Дорогая редакция!

В статье «Загадочный Плутон», опубликованной на страницах вашего журнала («Квант», 1983, № 3), упоминалось об изобретении нового метода измерения диаметров небесных тел. Не могли бы вы рассказать, на чем основан этот метод?

Ваш читатель О. Андреев

На это письмо редакция попросила ответить автора указанной статьи В. А. Бронштэна.

Новый способ измерения диаметров далеких небесных тел называется спекл-интерферометрией. Слово «спекл» — английское и означает «пятнышко». Метод использует возможности современной электроники.

До сих пор главным препятствием в получении отчетливых изображений небесных *тел с поверхности Земли* было дрожание оптического инструмента и колебания воздуха. Из-за этого изображение светила на фотопластинке за время экспозиции (порой весьма длительное) размазывалось, и нельзя было ни измерить его диаметр, ни судить о форме тела.

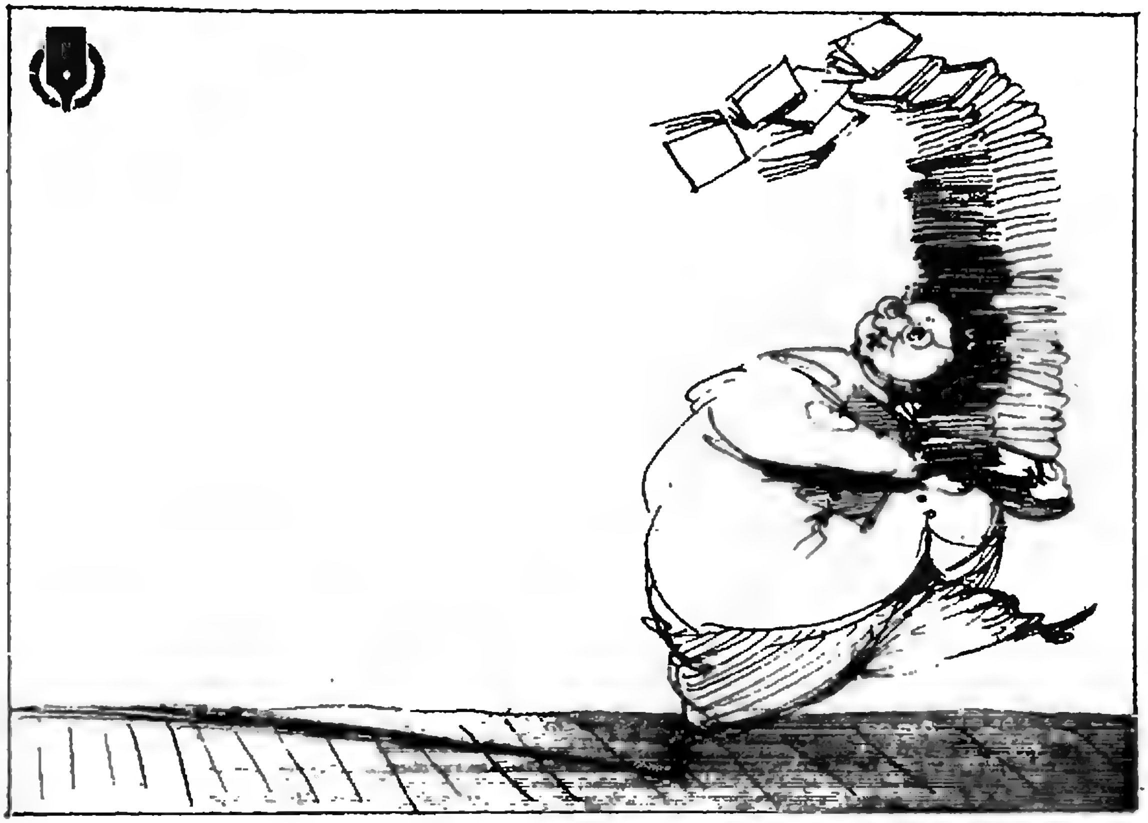
В новых приборах вместо фотопластинки устанавливается блок фотоэлементов. Так как электроника срабатывает быстрее, чем происходят колебания атмосферы и инструмента, она как бы держит изображение на месте, не давая ему расплываться. С блока фотоэлементов изображение передается *на экран типа* телевизионного, откуда может быть сфотографировано. Измерение диаметра выполняет опять-таки электроника. Вот основы нового метода.

К нашим читателям

Продолжается подписка на журнал «Квант» на 1987 год.

Журнал рассчитан на учеников 6—10 классов. Он полезен учителям, особенно тем, кто ведет кружки или факультативные занятия, и всем любителям математики и физики.

Индекс журнала в каталоге «Союзпечати» 70465. Подписная цена на год 4 рубля 80 копеек. Подписка принимается без ограничений в течение всего года в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи.



При подготовке к вступительным экзаменам в вуз полезно познакомиться с теми материалами, которые уже были опубликованы в разделе «Практикум абитуриента».
Ниже приводится тематический список таких статей, напечатанных в «Кванте» начиная с 1981 года.

Физика

Механика

«Задачи о спутниках» (1981, № 1),
«Криволинейное движение» (1981, № 10),
«Кинематика. Относительность движения» (1982, № 10),
«Законы Ньютона» (1982, № 12),
«Движение по окружности» (1984, № 6),
«Повторим гидростатику» (1985, № 2),
«Механическая работа и механическая энергия» (1985, № 5),
«Законы Кеплера и школьная физика» (1986, № 2).

Молекулярная физика. Тепловые явления

«Закон сохранения энергии для тепловых процессов» (1981, № 2),
«Закон Дальтона» (1981, № 11),
«Диаграмма состояния» (1981, № 12),
«Уравнение газового состояния» (1983, № 2),
«Теплоемкость идеального газа» (1984, № 4),
«Фазовые превращения» (1985, № 7),
«Тепловые процессы в газах» (1986, № 4).

Основы электродинамики

«Электроизмерительные приборы» (1981, № 7),
«Электрические цепи с нелинейными элементами» (1982, № 1),
«Проводящая сфера в задачах по электростатике» (1983, № 3),
«Магнитное поле и магнитные силы» (1984, № 3),
«Передача электроэнергии на расстояние» (1984, № 10),
«Парадоксы плоского конденсатора» (1985, № 8),
«Электромагнитная индукция» (1986, № 6).

Колебания и волны

«Колебания» (1981, № 3),

«Переменный электрический ток» (1982, № 2),
«Повторим колебания» (1985, № 10).

Оптика

«Построение изображений наклонных предметов» (1981, № 5),
«Интерференция света» (1981, № 6; 1985, № 12),
«Фотоны» (1982, № 3),
«Оптические системы» (1982, № 5),
«Интерференция волн» (1983, № 5).

Атомная физика

«Законы сохранения при ядерных превращениях» (1982, № 7).

Некоторые общие вопросы

«Приближенные вычисления при решении задач по физике» (1981, № 4),
«Уравнения думают за нас» (1981, № 9),
«Квадратное уравнение в задачах по физике» (1982, № 8),
«Задачи-оценки» (1983, № 7),
«Характерные ошибки на экзаменах по физике» (1983, № 9).

Математика

Радикалы, степень

«Что такое степень?» (1981, № 2),
«О сокращении показателей» (1982, № 6).

Уравнения, системы, неравенства

«Показательные уравнения» (1981, № 1),
«Логарифмические уравнения» (1981, № 2),
«Надо ли искать ОДЗ?» (1982, № 4),
«Когда $|a+b|=|a|+|b|$?» (1983, № 3),
«Простой прием в непростых задачах» (1984, № 9),
«Надо ли делать проверку?» (1984, № 10),
«Об одном способе решения некоторых уравнений» (1984, № 11),
«Геометрия помогает решать уравнения» (1984, № 12),
«Сколько корней имеет уравнение?» (1985, № 3),
«Метод интервалов» (1985, № 12),
«Задачи на сравнение чисел» (1986, № 2),
«Каков же ответ?» (1986, № 2).

Многочлены, функции, графики

«Можно и без производной» (1981, № 9),
«Используя графики» (1982, № 9),
«Формулы и графики» (1982, № 11),
«Обратные тригонометрические функции» (1983, № 4),
«Квадратный трехчлен» (1983, № 9),
«$n^x=x^n$» (1983, № 10),
«Как расположены корни трехчленов?» (1986, № 7).

Планиметрия

«Метрические соотношения в треугольнике» (1985, № 4).

Стереометрия

«Геометрические аналогии» (1981, № 10),
«Многофигурная стереометрическая задача» (1983, № 2),
«Двугранные и трехгранные углы» (1984, № 12),
«Основные углы в правильной пирамиде» (1986, № 1),
«Куб помогает» (1986, № 5).

Планиметрия и стереометрия

«Вспомогательные отрезки и углы» (1981, № 9),
«Векторы в геометрических задачах» (1985, № 10).

Координатный метод

«Плоскость в пространстве» (1982, № 6).

Производная

«Десять задач на применение производной» (1981, № 1),
«Дифференцирование сложной функции» (1984, № 4),
«Уравнение касательной» (1986, № 3).

Кроме того, некоторым общим вопросам посвящены статьи:
«Читатели советуют» (1981, № 4),
«Можно решить проще» (1981, № 5)

Школьник — абитуриент — студент — инженер

Кандидат технических наук
Э. П. КАЗАНДЖАН

В этой статье преподаватель математики одного из ведущих московских технических вузов делится своими мыслями о том, какие качества должен развивать в себе будущий инженер. И хотя не все высказывания этих полемических заметок бесспорны, мы надеемся, что они окажутся полезными нашим читателям, особенно десятиклассникам, готовящимся к поступлению во втуз.

Много лет обучая математике во втузе, привык сталкиваться с некоторыми характерными заблуждениями в психологии учеников — абитуриентов, студентов. Порой кажется, что преподаватели и ученики говорят на разных языках.

Первые встречи — в июле, августе, когда начинаются приемно-вузовские страдания. Из года в год одни и те же недоумения: зачем эта нервотрепка? ведь только что сдавали экзамены в школе? есть ли вообще какая-нибудь польза от экзаменов? Я в своей жизни сдал экзаменов больше сотни, и бесполезных среди них не помню. Наоборот, могу сказать, что всему хорошему во мне обязан экзаменам. Что еще так организует и мобилизует? Разумеется, это не единственный «допинг» в ученье, но уж очень мощный. Моя аксиома: сдав экзамен, я должен узнать что-то новое о сданном предмете и о себе самом, полезное для будущего; стало быть, каждый сданный экзамен — это шаг вперед в моем развитии. А насчет двойных экзаменов в течение одного лета... Увы, сдавать надо не два одинаковых экзамена, а два разных (принципиально разных!) по одной программе. Школьный экзамен — удел каждого и одинаков для всех, приемный во втуз — лишь того, кто решил стать инженером. Школьный экзамен устремлен в прошлое — это отчет о проделанной работе. А на приемном экзаменатор думает о будущем — сможет ли абитуриент стать полноценным студентом, потянет ли?

Иногда школьники (а еще чаще родители) тревожатся, что им дали мало знаний. Меня это тоже беспокоит, но отнюдь не в первую очередь. Через пять лет сегодняшний абитуриент должен стать инженером. Знания — услада школьника. Потребности инженера гораздо шире — кроме знаний, ему нужны навыки, понимание, рефлексы, интуиция, уменье анализировать ситуацию,принимать решения. А одно знание в ряде случаев недостаточно или почти ничего не стоит. Тысячи болельщиков не хуже самых лучших футболистов «знают», как надо забивать голы. Среди сотен пришедших на концерт иные не хуже пианиста «знают», как играть сонату Бетховена. Знание правил шахматной игры приобретается за 15 минут, уменье играть на уровне мастера — за 15 лет.

Мы часто говорим «знание — сила», не замечая, что этот тезис уже явно устарел, его нужно как-то дополнить, скажем, «знание — сила, знание без понимания — слабость». Конечно, понимание — нечто чрезвычайно тонкое, оно углубляется всю жизнь, и было бы странно требовать сразу то, что приходит постепенно, с годами, с опытом работы. Но правильная психологическая ориентация (основа будущего понимания) должна вырабатываться как можно раньше.

Начнем с перечисления того, что мне хотелось бы видеть в «багаже» старшеклассника, а тем более абитуриента и студента, независимо от объема его знаний.

1. Грамотность. Проверяя записи на приемном экзамене и исправляя грамматические ошибки, всегда сталкиваюсь с бесстыдным недоумением — что тут такого, я торопился, какая разница и т. п. Поверьте, я стараюсь не придираться к ошибкам в языке, пока они не приводят к математическим ошибкам, не делают текст непонятным.

Трудно удержаться, чтобы не процитировать воспоминания академика А. Н. Крылова — как принимали экзамены в одной французской школе в конце прошлого века:

«Характерна также оценка письменных работ по математике: она производится, во-первых, преподавателем французского языка, который обращает внимание на правильность языка и орфографии, и, во-вторых, преподавателем-специалистом, который уже оценивает работу по существу».

Это разумный подход. Ведь что ожидает школьника, студента в будущем? Придется делать доклады, писать отчеты, статьи...

2. Аккуратность. С первых дней обучения вынужден объяснять: все, что вы пишете, кто-то будет читать — значит, неряшливое, небрежное, непонятное для окружающих изложение результатов проделанной работы делает ее бессмысленной, никому не нужной; исполнителю может быть трудно, это никого не интересует и к делу не относится, но потребителю должно быть легко, так что думайте о нем, а не о себе. Иногда приходится слышать о работнике комплимент — аккуратный инженер. В таких случаях мне всегда стыдно за свою профессию. Мы ведь не говорим: смелый летчик-испытатель или трудолюбивая балерина. Да это было бы просто смешно — трусливых летчиков и ленивых балерин не бывает. А неаккуратных инженеров — увы...

3. Отношение к результату, контроль. Для школьника этой проблемы не существует, рядом с ним учитель. Для инженера контроль — важнейший этап в решении задачи (азбучная истина — как ни трудно получить результат, иногда еще трудней его осознать и разумно им распорядиться. А начинать приходится с ...аккуратности, чистописания. Все записи должны иметь систему, понятную хотя бы их автору; эта система должна быть организована так, чтобы трудно было ошибиться и легко себя проверить (а не наоборот). Стремлюсь привить вкус к контролю результатов, превратить его в органическую потребность, такую же естественную, как заботу женщины, красиво ли она выглядит, или заботу повара, вкусен ли сваренный им обед. По-моему, стыдно, вычислив, скажем, с помощью интеграла площадь и получив отрицательный результат, нести его преподавателю — а ведь несут. Многие школьники и даже студенты наивно думают, что, раз уж их этому учат, в своей работе они будут ежеминутно дифференцировать, интегрировать... Смею заверить, что гораздо чаще придется складывать А и В и вычитать С. Разница в другом. Школьник получает результат, и все, а инженер и получает результат, и отвечает за него. В отличие от школьника или машины, инженер думает, взвешивает, анализирует, сопоставляет, сомневается, мучается, страдает, радуется, снова думает, пытается проконтролировать себя прямо и косвенно, прежде чем выдать информацию. Одно из моих педагогических «чудачеств» — при решении задач категорически запрещаю ученикам смотреть в ответ, кстати, и после решения — тоже. Причин несколько. Во-первых, совпадение с ответом ни о чем не говорит. Это отнюдь не критерий истинности решения. К тому же бывают и опечатки. Во-вторых, и самое главное: жизнь не задачник и выдвигает задачи без ответов, и надо готовиться именно к такой ситуации. Получив результат, нужно устроить себе проверку — сначала чисто техническую (повторный проход по всем выкладкам), затем смысловую: забыв обо всех промежуточных мучениях и преобразованиях, с результатом в руках вновь окунуться в условие задачи — не противоречит ли он им? Для контроля надо использовать любые, даже самые грубые и косвенные возможности — размерность, симметрию, предельные случаи и частные варианты, результаты ранее решенных задач, наконец, здравый смысл.

4. **Ощущение частного и общего, умение получить информацию из соотношения.** Часто слышны стоны по поводу обилия и громоздкости формул, трудности их запоминания. Мне кажется, специально запоминать любые формулы не нужно, в чем-то даже вредно. Они должны запоминаться сами, надо только создать для этого подходящие условия. Вынужден признать — часть вины здесь наша, взрослых. Промышленность могла бы помочь школьникам и студентам — печатать различные формулы на обложках тетрадей, книг, блокнотов. (Кстати, Софья Ковалевская выучила производные именно с помощью наклеенных на стене вместо обоев страниц учебника.)

Досадно видеть, как, забыв формулу корней квадратного уравнения, учащиеся напрягают память и мучаются по 10—15 минут, хотя — достаточно помнить лишь очень простую идею ее вывода (выделение полного квадрата), и результат получится в минуту. Такие же ненужные раздумья-воспоминания вызывает почти любая громоздкая формула, особенно в тригонометрии — вроде и помнится, но что-то сомнительно, коэффициент 2 или 1/2, знак «+» или «—» и т. п. Но ведь формула-то должна работать. И нечего думать и вспоминать — возьми и подставь что-нибудь конкретное в эту формулу, посмотри — получается или нет, если есть ошибка — она сразу вылезет. В математике бездельников нет — все формулы, теоремы, определения работают, а что не работает — отмирает.

Поясню, почему мне смешны раздумья, скажем, над формулой $\sin(\alpha-\beta)=\ldots$ Вот как я действую, если справочник далеко, а память вызывает сомнение. Синус и косинус суммы и разности выражаются через синусы и косинусы слагаемых как суммы или разности попарных произведений — такова простая «мораль» четырех громоздких формул. Пишу первое, что приходит в голову, например: $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha\cdot\cos\beta$. Но это явная чепуха — при $\alpha=\beta=0$ слева 0, а справа 1. Знак «—» вместо «+» тоже не спасет. Перетасую: $\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha$. При $\alpha=\beta=0$ противоречия нет, но и гарантии в знаке «+» нет: $0+0=0-0=0$. Подставлю еще что-нибудь, скажем $\alpha=\beta=45°$: слева 0, а справа нет, значит, знак не «+», а «—». Итак: $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha$. Разумеется, эту формулу я гораздо чаще помню, чем забываю, но, видимо, потому-то и помню, что не боюсь забыть — у меня всегда есть «аварийный выход».

5. **Отношение к информации.** Известно, что всю нужную для работы информацию можно условно разделить на две категории: а) которую удобней хранить в памяти; б) которую удобней хранить вне памяти (в тетради или справочнике). Для инженера такое разделение происходит само собой, а для учащихся — это серьезная проблема. В любом потоке информации регулировать степень понимания крайне важно. Учиться этому можно и на простейших бытовых примерах. В ряде ситуаций понимание нам вообще не нужно. Или желательно, но не обязательно. Например, нужно знать, как бросать пятачок в метро, где ближайшая булочная, уметь пользоваться лифтом и т. д.— понимать здесь практически нечего. Примеры второго типа — знание правил хорошего тона и уличного движения, основ физической культуры и рационального пи-

тания и т. п.— здесь понимание весьма полезно, но можно без него и обойтись.

6. Умение думать. Это выражение столь емко и многопланово, что ограничусь минимумом. Начну с того, что не у всех учащихся есть даже желание думать. Их можно понять (но не простить!): если из года в год только и делать, что заглатывать знания, которые кладут в рот, то трудно представить себе, что этому вот-вот придет конец — через несколько лет придется работать, и надо думать о будущем, а не о прошлом.

Еще труднее бороться с желанием... думать, когда оно неуместно. В инженерной, да и в любой другой практике часто встречаются ситуации, когда: а) думать стыдно, надо знать; б) думать смешно, надо просто перебрать варианты. Во всех других ситуациях думать можно и нужно, а в этих двух раздумье — признак профессиональной слабости. К сожалению, у нас слишком распространен стереотип «думать всегда хорошо». Для примера попробую пофантазировать. Просыпаюсь утром и думаю — вставать или нет? с какой ноги? идти на работу или нет? бриться или не стоит? какой костюм надевать? брюки на ноги, пиджак на плечи или наоборот? Ну и так далее — все думать, думать...

* * *

К этим шести пунктам можно было бы добавить еще немало — и общих, и узко математических. Но не в количестве дело, важно другое — все эти качества надо воспитывать в школе, в вузе — поздно.

Но вот студент кончает втуз, с дипломом приходит на работу. Идут недели, месяцы, годы. Набивши голову производными, интегралами и еще бог знает чем, бывший студент вдруг замечает, что гораздо нужней совсем другое — аккуратность, серьезность, воспитанность, культура труда, профессиональное самолюбие, умение работать в коллективе, то есть не знания, а качества. Знания, правда, тоже нужны, но часто не те, что приобретены, а, главное, совсем не в том качественном варианте. В школе, в вузе задают стандартные вопросы, требуют стандартные ответы. На работе же такого нет.

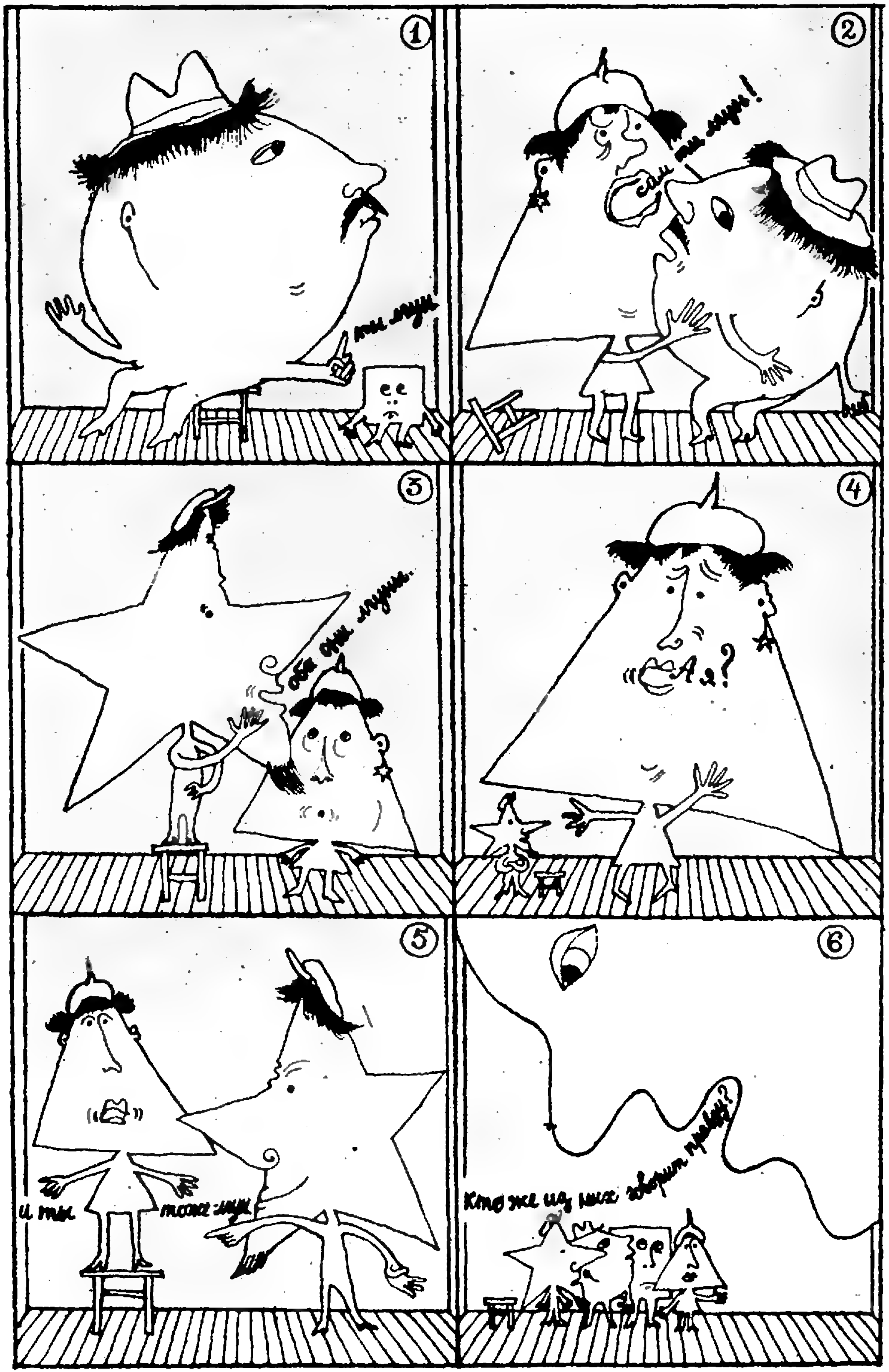
А ведь первый год работы всегда и так очень труден — при любом уровне знаний и качестве подготовки. Происходит неизбежная метаморфоза — ученик превращается в творческого работника, наряду с приобретением новых (как правило, узкоспециальных) знаний вырабатывается новый, профессиональный взгляд на все, даже давно известное (работает классический принцип — движение вперед есть возвращение к первоосновам). Что казалось главным — становится второстепенным, и наоборот. Поясню на примере. В школе проходят много формул. Вот одна из них: $s=at^2/2$. Спросите школьника, чему равен путь, пройденный за время t с ускорением a, он ответит этой формулой. Все верно. Но как смотрит на ту же формулу научный работник? Полушутя-полусерьезно можно сказать, что в каждой формуле важнее всего знак равенства. Он как бы фиксирует, что те или иные величины (путь, время, ускорение) связаны соотношением, и самое важное даже не как они связаны (s пропорционально a и квадрату t, а коэффициент пропорциональности равен 1/2), а сам факт их взаимосвязи. В процессе обучения школьникам и студентам выдаются готовые количественные соотношения. В процессе научного познания прежде всего ищутся и устанавливаются взаимосвязи величин и только после того, как качественный характер явления ясен, наводится, так сказать, количественный глянец.

Мой идеал ученика довольно прост — энергичный, думающий и, главное, умеющий учиться у всех и у всего, что его окружает. Ведь возможности для учения бесконечны. Один из моих идеалов, пожалуй, несколько неожиданный — Чапаев в исполнении Бабочкина. Этой мой дважды идеал — педагога и инженера. Важнейшие вопросы стратегии и тактики он способен объяснить на максимально наглядной модели «картошка», демонстрируя, выражаясь современным языком, силу и формального, и неформального мышления. Все стандартные ситуации у него продуманы и прочувствованы, выработаны алгоритмы поведения. В то же время он психологически готов и к нестандартной ситуации. Вспомним, как великолепен Чапаев-Бабочкин в эпизоде «буза в эскадроне» — узнав о случившемся, он, мгновенно подавляя естественные человеческие эмоции, принимает, пожалуй, единственно верное (на первый взгляд, шальное) решение.

* * *

Инженер будущего мне видится психологически готовым к любой неожиданной ситуации, умеющим в ней сориентироваться, принять разумное решение в условиях неопределенности, а если понадобится, сплотить коллектив и повести его за собой.

Гулливер в стране геометрических фигур подслушал разговор Круга, Квадрата, Звезды и Треугольника. Известно, что каждая геометрическая фигура либо всегда лжет, либо всегда говорит правду. Ответьте на вопрос Гулливера.


①
Ты лгун
②
Сам ты лгун!
③
Обе они лгуны.
④
А я?
⑤
И ты тоже лгун
⑥
Кто же из них говорит правду?

Праздник юных математиков

Уже на протяжении 17 лет на время осенних школьных каникул съезжаются в г. Батуми старшеклассники из разных городов Советского Союза. Традиционная программа праздника включает научную конференцию школьников, доклады которых комментируют гости праздника — математики из Москвы и Тбилиси, встречи с редколлегией журнала «Квант», лекции ученых, вечер занимательной математики, конкурс математических газет и самое популярное мероприятие — математический КВН. В прошлом году в XVII празднике, посвященном XXVII съезду КПСС, участвовало около 300 школьников и учащихся СПТУ, а в КВН участвовало 17 команд из Батуми, Тбилиси, Сухуми, Москвы, Ленинграда, Киева, Еревана, Свердловска, Перми и Краснодара. В КВН победила московская ФМШ № 18, опередив свердловчан и батумскую школу № 7.

Много настойчивости, остроумия проявили участники и их педагоги, готовясь к празднику: отыскивали и решали интересные задачи, сочиняли стихи, песни, разучивали танцы, готовили модели, плакаты, стенгазеты, серьезно работали над докладами — их было представлено более 70.

Одним из наиболее интересных был признан доклад Марата Ровинского из с.ш. № 57 г. Москвы «Обобщение понятия производной для нецелых порядков», автор которого самостоятельно нашел оригинальный способ введения «дробных производных», это понятие оказывается полезным в некоторых вопросах анализа; наиболее общепринятым является его введение с помощью некоторых интегральных преобразований, а для М. Ровинского отправной точкой служило определение производной с помощью «конечных разностей». Подробнее об этом рассказано на с. 27. Большой интерес вызвали доклады В. Роганова и В. Каргина (ФМШ № 18 при МГУ) «Итерации дробно-линейных функций и эллиптический биллиард», А. Слепухина и В. Рожкова (ФМШ № 18 при МГУ) «Комбинаторные многогранники со структурой кренделя», С. Пяртли (ФМШ № 18 при МГУ) «Функциональные корни», Г. Михалкина (ФМШ № 30, г. Ленинград) «Классификация кривых третьего порядка элементарными методами», В Судакова (ФМШ им. В. М. Комарова, г. Тбилиси) «Об одной олимпийской задаче», А. Данилова из Ленинградского СПТУ № 8 «Разбиение правильных многоугольников».

Многие научные сообщения были основаны на «задачах для исследования», систематически появляющихся на страницах нашего журнала. Большое количество докладов было посвящено информатике и программированию. Горячим дискуссиям, возникавшим во время этой конференции, мог бы позавидовать любой «взрослый» симпозиум.

Особенно понравилась всем темпераментная дискуссия о методах программирования между гостями праздника — А. Х. Шенем из Института проблем передачи информации и Б. М. Герасимовым из Института прикладной математики АН СССР, предшествовавшая торжественной церемонии закрытия.

Устроителями праздника являются Совпроф Аджарии, Министерство просвещения Аджарской АССР, Аджарская республиканская организация Всесоюзного общества «Знание», Аджарский областной комитет профсоюза работников просвещения, городской отдел народного образования, горком комсомола, физико-математическая школа-интернат № 2 г. Батуми. Бессменный вдохновитель праздника математики — заслуженная учительница Аджарской АССР Медея Илларионовна Жгенти вместе со своими учениками школы № 7 сделала все возможное, чтобы праздник прошел живо и интересно.

В. Л. Гутенмахер, Н. Б. Васильев

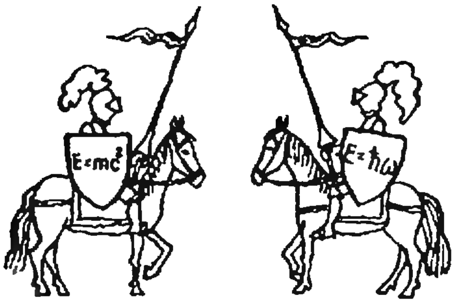
Вечерняя физическая школа при МГУ

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 8, 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия в школе проводятся в форме лекций, читаемых раз в две недели, и еженедельных семинаров. Кроме того, учащиеся смогут посетить научные лаборатории факультета и на лекциях ведущих ученых познакомиться с основными направлениями современной физики. Для десятиклассников организуются факультативные занятия по математике. Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ВФШ.

Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться начиная с 24 сентября. Работающая молодежь зачисляется вне конкурса. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ (с приложением двух фотокарточек размером 3×4 см). Заявления можно подавать с 5 по 21 сентября ежедневно, кроме воскресенья, с 16 до 18 часов.

Наш адрес: 119899 Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ. Телефон: 139-26-56.



VIII Турнир юных физиков

Быть может, эти электроны — миры...
В. Брюсов

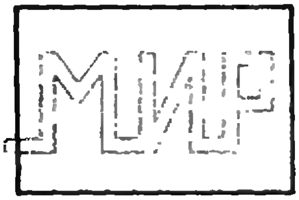
Восьмой турнир юных физиков был проведен физическим факультетом МГУ с сентября 1985 г. по февраль 1986 г. Впервые в заочном конкурсе турнира приняли участие не только москвичи, но и школьники из других городов. Победителем заочного конкурса стала команда московской школы № 710. Специальными призами жюри отметило успехи дебютантов турнира — команду школы № 146 г. Харькова и ученика школы № 67 г. Саратова Г. Марченкова.

Первое место и переходящий приз турнира присуждены ФМШ № 18 при МГУ (капитан команды И. Никитин), второе место — командам школы № 679 (М. Смольский) и школы № 47 (М. Кельмансон) г. Москвы, третье место — командам московских школ № 542 при МИФИ (М. Лютиков), № 710 (С. Колосков) и № 82 пос. Черноголовка (А. Гольдшлегер). Победителем конкурса капитанов стал И. Никитин (ФМШ № 18).

Задачи заочного конкурса ТЮФ-VIII были опубликованы в «Кванте» № 8 за 1985 г. Ниже мы публикуем задачи финала ТЮФ-VIII.

Домашние задания финалистам турнира

1. «Скрытый рисунок». Рисунок, выполненный непрерывной полоской листовой меди, вклеен между двумя плотными непрозрачными листами бумаги (почтовыми открытками). Один конец полоски выведен наружу.



Неразрушающими методами определить, что изображено медной полоской.

В последнее время в современной физике одно из рекордных мест по числу ежегодных публикаций занимает проблема исследования вещества и материалов неразрушающими методами. Участники турнира успешно справились с задачей и доказали, что уверенно владеют неразрушающими методами исследования вещества. В общей сложности ими было предложено более 10 различных методов.

В частности, оказалось, что непрозрачные (как это казалось жюри) листы бумаги могут быть вполне прозрачными, если их просветить мощным (1000 Вт) источником света. К нетрадиционным жюри отнесло метод, условно названный «Флюорография». Один из участников турнира прикрепляет исследуемый объект на груди под майкой и идет в кабинет флюорографии. Через неделю его вызывают на повторное обследование, где у обеспокоенного врача он узнает, какое слово нашли у него в легких. Удача обеспечена!

Хорошим оказался метод с использованием электрофорной машины. Электрофорную машину подсоединяем к открытому участку полоски, и вращая рукоятку машины, подаем высокое напряжение на медную полоску. Теперь посыпем пластину мелким порошком диэлектрика — он осядет в местах наибольшей неоднородности электрического поля, т. е. вдоль края медной полоски. Надпись видна!

Следующая задача таила в себе коварную ловушку.

2. «Пьезокерамика». Пьезокерамический образец имеет форму параллелепипеда размером (в мм) $10\times10\times85$. Две его противоположные грани посеребрены.

а) Оцените долю механической энергии, переходящей в электрическую при ударе о его торец стального шарика.

б) Используя свойства пьезокерамического образца, измерьте время соударения стального шарика с его торцом.

С первой половиной задачи все справились достаточно легко. Шарик на нитке (маятник) ударял по торцу образца, подключенного к конденсатору, определялись масса стального шарика, начальная высота H, емкость конденсатора C и максимальное напряжение на конденсаторе. Коэффициент преобразования механической энергии в электрическую равен $E_{эл}/E_{мех}$.

Решая вторую половину задачи, все попали впросак. Время соударения приравнивали длительности первого импульса напряжения на пластинах конденсатора, найденной по визуальным наблюдениям на экране осциллографа. Это неверно, так как при ударе стального шарика об образец из пьезокерамики в последнем возникают механические колебания на резонансной частоте $\nu=v/2l$, где l — длина образца, а v — скорость звука в пьезокерамике. Определенная таким образом длительность первого импульса (10^{-5} с) равна полупериоду механических колебаний и оказывается примерно на порядок больше времени соударения.

Для оценки времени соударения можно было бы собрать иную установку, в которой шарик подвешивался на проволочке, а заряженный конденсатор разряжался только в момент механического контакта шарика и посеребренной грани образца. Измеряя баллистическим гальванометром остаточный заряд на конденсаторе, можно вычислить время соударения. Попробуйте!

Предлагаем вам для самостоятельного исследования три другие задачи домашнего задания финалистам ТЮФ-VIII.

3. «Зеркало». На поверхность медного зеркала напылен слой алюминия. Напыление проводилось в вакууме (10^{-5} мм рт. ст.). Объясните, почему на границе напыления алюминия на зеркальную поверхность меди наблюдается темная полоса.

4. «Разведчик». В середине маленького острова установлен прожектор, луч которого вращается в горизонтальной плоскости с частотой 1 об/мин. Охрана острова обнаруживает все объекты, попавшие в луч прожектора на расстоянии от 20 м до 1 км от центра острова. Вам необходимо достичь острова необнаруженным. В вашем распоряжении катер, развивающий скорость 50 км/ч.

а) Считая скорость катера постоянной, найдите траекторию движения, при которой катер достигает острова необнаруженным.

б) При какой минимальной скорости катера это возможно?

5. **«Тяготение».** Некий объект, условно названный астероидом, состоит из вещества постоянной плотности ϱ.

а) При какой минимальной массе астероида ускорение свободного падения (напряженность гравитационного поля) вблизи него хотя бы в одной точке равно g?

б) Найдите такую форму астероида, при которой созданное им гравитационное поле будет однородным (с напряженностью g) в конечном физическом объеме V. Постарайтесь, как и в случае а), подобрать такую форму астероида, при которой его масса минимальна.

Конкурс капитанов и болельщиков

В честь закрытия турнира в большой аудитории физического факультета МГУ был произведен запуск воздушного шара системы братьев Монгольфье. Воздушный шар объемом примерно в 1,5 м^3 был склеен из кальки. Подъемная сила создавалась воздухом, нагретым с помощью газовой горелки с открытым пламенем. (Участников запуска подстерегали те же опасности, что и братьев Монгольфье, поэтому на всякий случай поблизости находились дежурные с ведрами воды. Но все прошло успешно, и шар к восторгу всех присутствующих поднялся к потолку аудитории.)

Запуск шара позволил сформулировать первую задачу конкурса капитанов и болельщиков.

1. **«Шар».** Оцените массу оболочки шара системы братьев Монгольфье.

Прикинув объем шара и температуру горячего воздуха, капитаны быстро рассчитали: масса оболочки 150—300 г. Гость турнира — учащийся из полиграфического СПТУ № 4 А. Кандауров — удивил жюри своим необычным решением. Для вычисления массы достаточно оценить площадь оболочки шара и умножить ее на массу 1 кв. м. кальки. Ну а здесь ему помогло хорошее знакомство с секретами профессии: каждый сорт кальки в соответствии со стандартом имеет строго определенную массу. В результате ответ готов — 260 г. Контрольное взвешивание на весах показало, что масса бумажной оболочки — 270 г.

Ниже мы приводим условия остальных семи задач. Попробуйте свои силы, и вы узнаете, можете ли вы быть капитаном (на выполнение каждой задачи капитанам выделялось по 5 минут).

2. **«Трехпрограммный репродуктор»** (предложена командой школы № 52). Почему при плохом контакте резко ухудшается слышимость I программы и практически не изменяется слышимость III программы?

3. **«Термометр»** (школа № 91, задача признана лучшей). Если достаточно долго дышать на обернутый шерстью медицинский термометр, то он покажет температуру выше «нормальной». Почему?

4. **«Мяч»** (школа № 43). Объясните поведение волейбольного мяча при «крученом» ударе.

5. **«Скрипка и гитара»** (школа № 179). Почему маленькая скрипка звучит громче большой гитары?

6. **«Лазерная пушка».** Луч лабораторного импульсного лазера сбивает бумажную мишень. Почему? (На финале турнира демонстрировался CO_2 — лазер, в качестве мишени — полоска черной бумаги).

7. **«Водяной молоток».** Объяснить действие водяного молотка.

Для изготовления водяного молотка можно взять химическую пробирку и хорошо подогнанной резиновой пробкой. Заполнить пробирку доверху водой, лучше дистиллированной, но не закрывать пробирку. Нагреть воду до 100 °С и кипятить далее на медленном огне до тех пор, пока жидкость не начнет «взрываться» с образованием больших пузырей — вода перегрета. В момент образования большого пузыря быстро закрыть пробирку пробкой. Остудить пробирку с водой, водяной молоток готов. При резком встряхивании водяного молотка слышен характерный металлический звук.

При опытах соблюдайте осторожность, так как при резком ударе стекло может разлететься на мелкие осколки.

8. **«Атом Бора».** Оценить размер возбужденного атома водорода при значении главного квантового числа $n=650$.

Для атома водорода в состоянии с $n=650$ радиус орбиты равен $r_n=r_1\cdot n^2$, где

$$r_1=\frac{4\pi\varepsilon_0 h^2}{me^2}=5\cdot 10^{-11}\ \text{м}$$

— радиус первой боровской орбиты. Диаметр такого атома водорода 45 мкм. Это вполне макроскопическая величина, она даже несколько больше толщины пленки в кассетном магнитофоне. Не менее непривычными являются и другие характеристики такого атома. Частота обращения электрона по орбите (или, что то же самое, частота кванта, излучаемого при переходе на уровень с меньшим на единицу квантовым числом) лежит в радиодиапазоне коротких волн (резонансная длина волны $\lambda=12{,}5$ м), характерное время жизни атома в таком состоянии (до излучения кванта) равно 2 часам. Чтобы ионизировать такой атом постоянным электрическим полем, достаточно взять поле с напряженностью 3 В/м. Таким образом, название «атом» (от греческого ατομος — неделимый) приложимо к такому атому только в ироническом смысле (для сравнения — напряженность электрического поля Земли 100 В/м).

Наконец, при рассеянии на таком атоме радиоволны с резонансной длиной волны он ведет себя аналогично непрозрачному телу с площадью поперечного сечения 75 м^2. Значение $n=650$ взято не случайно. Недавно советскими физиками при помощи чувствительного радиотелескопа было обнаружено космическое радиоизлучение, соответствующее переходу электрона в атоме водорода с уровня 650 на уровень 649. Это указывает на то, что такие атомы действительно существуют в космическом пространстве.

В последние годы интерес к атомам в сильно возбужденных состояниях (их называют ридберговскими) сильно возрос, так как появилась техническая возможность получения пучков атомов, находящихся в возбужденном состоянии с определенным и большим ($\approx$40—60) главным квантовым числом. Наибольший интерес к таким атомам проявляет квантовая радиофизика из-за их сильной связи с электромагнитным полем резонансной частоты. Использование пучков ридберговских атомов позволило проверить ряд предсказаний квантовой электродинамики, недоступных проверке при использовании обычных (маленьких) атомов. В частности, удалось построить квантовый генератор, в котором когерентное поле создавалось атомами, поодиночке пролетавшими через резонатор.

IX Турнир юных физиков

Этот турнир начинается в сентябре 1986 г. Он будет проводиться в три этапа.

I тур — заочный коллективный конкурс. Решения задач ТЮФ-IX, опубликованных ниже, можно отправлять не позднее 20 ноября 1986 года по адресу: 119899 Москва, ГСП, МГУ, физический факультет, Совет по работе со школьниками, оргкомитет ТЮФ-IX. В графе «Кому» напишите: «Заочный конкурс ТЮФ-IX» и номера задач, решения которых вы посылаете. В письмо вложите конверт с написанным на нем адресом школы (в этом конверте будут отправлены результаты проверки решений), а также список членов команды, фамилию учителя физики, номер школы, класс. Решения могут быть индивидуальными и коллективными. Каждое решение пишите отдельно и вначале обязательно укажите город, номер школы, класс, фамилии и имена авторов решения. К решениям экспериментальных задач должны быть приложены подробные описания установок, их схемы, желательно фотографии и экспериментальные данные. Наиболее удачные решения задач и самостоятельно сформулированных проблем будут отмечены грамотами турнира и представлены к печати в «Кванте».

II тур — отборочные физбои. В нем могут принять участие команды школ г. Москвы и Московской области, набравшие в заочном коллективном конкурсе более 40 баллов (из 50 возможных). Отборочные физбои 1/4 и 1/2 финала будут проводиться с 10 декабря 1986 г. по 10 января 1987 г. на физическом факультете МГУ по задачам коллективного конкурса. (Другим городам могут быть высланы материалы для организации II и III туров на местах).

III тур — финал турнира — состоится 22 февраля 1987 г. на физическом факультете МГУ. В его программу входят: физбой финалистов турнира, конкурс капитанов, конкурс болельщиков, награждение победителей и активных участников турнира.

В составлении заданий для финальных конкурсов турнира могут принять участие все желающие. Условия задач высылайте не позднее 20 января 1987 года. Получить дополнительные сведения о правилах проведения ТЮФ-IX, а также высказать свои предположения и замечания можно по вышеуказанному адресу.

Задания заочного коллективного конкурса ТЮФ-IX

Большинство заданий сформулировано на основе конкретных физических явлений и рассчитано на проведение серьезных теоретических и экспериментальных исследований, выходящих за рамки «школьного» подхода. Условия задач сформулированы максимально кратко и допускают различные трактовки и степени упрощения.

1. **«Придумай сам».** Самостоятельно сформулируйте задачу-проблему и решите ее.

2. **«Электрон».** Опишите известные современной науке свойства электрона.

Выполнение этой работы предполагает составление реферативного обзора, в котором следует изложить только свойства электрона как элементарной частицы, не рассматривая поведение большого числа электронов в сложных системах.

3. **«Тормозной путь».** Тормозной путь автомобиля примерно 40 м, а железнодорожного состава — 1500 м. Почему такая большая разница?

4. **«Лунная дорожка».**

> «Выхожу один я на дорогу,
> Сквозь туман кремнистый путь блестит.
> Ночь тиха...»
>
> М. Ю. Лермонтов

Какое физическое явление описал поэт? Объясните, каким образом возникает «лунная дорожка». Рассчитайте пространственное распределение интенсивности отраженного света, видимого наблюдателем в этих случаях.

5. **«Маневр».** Самолет летит со скоростью v над прямолинейным участком шоссе. Через какое минимальное время он может удалиться от шоссе на расстояние S? Считать, что полное ускорение самолета не превышает величины a и высота полета постоянна.

6. **«Термометр».** Измерения температуры удобно производить с помощью термопары. Определите, за какое минимальное время с ее помощью можно с наперед заданной точностью измерить температуру термостата?

7. **«Лампа накаливания».** Лампа накаливания включена в сеть:

а) постоянного тока;

б) переменного тока с частотой 50 Гц.

Исследуйте зависимость тока в цепи от падения напряжения на лампе. Оцените амплитуду колебаний температуры спирали лампы накаливания, включенной в сеть переменного тока с частотой 50 Гц.

8. **«Границы применимости».** Опишите границы применимости:

а) III закона Ньютона;

б) закона Кулона.

9. **«Электричка».** Какое напряжение и почему применяют в электротяге трамвая, троллейбуса, электропоездов железной дороги и метро?

10. **«Сквозняк».** Объясните, почему бывают сквозняки?

11. **«Ниточный телефон».** Из двух спичечных коробков и катушки ниток можно сделать... телефон. Всесторонне исследуйте принцип действия и свойства такого телефона.

12. **«КПД трансформатора».** Исследуйте зависимость коэффициента полезного действия школьного понижающего трансформатора от нагрузки.

13. **«Неоновая лампочка».** Почему загорается неоновая лампочка? Другими словами, откуда берутся свободные электроны в инертном газе (неоне), необходимые для ее загорания?

14. **«Фокусное расстояние».** Предложите подтвержденные вашими экспериментами способы измерения малого (<1 см) и большого (>10 м) фокусного расстояния линзы.

15. **«Энергопотребление».** Оцените полное энергопотребление средней городской квартиры. Обоснуйте физические принципы экономного расходования энергии.

16. «Сахарница». Вы насыпали в сахарницу кусковой сахар, заполнив ее до краев. Если теперь потрясти сахарницу, то можно будет добавить несколько кусочков сахара. То же самое произойдет и при насыпании сахарного песка или какой-нибудь крупы. Исследуйте явление «утряски».

17. «Теплый свитер». Вязаный шерстяной свитер очень хорошо греет, хотя, честно говоря, он ведь «дырявый» (имеет множество сквозных отверстий). Если уменьшить плотность вязки (повысить степень «дырявости»), то все равно свитер будет теплым. При какой максимальной степени «дырявости» свитер еще греет? (Традиционно задача № 17 имеет шуточный оттенок.)

Публикацию подготовили *Е. Н. Юносов, И. В. Яминский*

Ответы, указания, решения

Как Декарт проводил касательные

Уравнение касательной к параболе $y^2=2px$ в точке $(x_0;\ y_0)$ имеет вид $yy_0=p(x+x_0)$.

Малярный парадокс

Количество краски, необходимое для закрашивания поверхности, будет пропорционально площади этой поверхности, если толщина слоя краски всюду одинакова. При способе же окраски, описанном в пункте 2, толщина слоя краски на n-м прямоугольнике не превосходит ширины этого прямоугольника, то есть $1/2^n$ см.

Секрет Старого Бондаря

Найдем, при каких значениях переменных y и z емкость бочки v (см. формулу (6, с. 17) будет — при заданном λ — наибольшей. Для этой цели воспользуемся следующим фактом.

Лемма. Пусть функция $F(y, z)$ при каждом фиксированном (постоянном) z имеет — при любом y — производную по переменному y (обозначим ее так: F'_y), а при каждом фиксированном y — производную по переменному z при любом z (обозначим ее так: F'_z). Если при $y=y_0$ и $z=z_0$ функция $F(y, z)$ имеет свое наибольшее значение, то при $y=y_0$ и $z=z_0$ обязаны выполняться равенства

$$F'_y(y, z)=0 \text{ и } F'_z(y, z)=0. \qquad (*)$$

Доказательство. В самом деле, если $F(y_0, z_0)\geqslant F(y, z)$ для всех y и z, то, в частности, должно выполняться и неравенство $F(y_0, z_0)\geqslant F(y, z_0)$ при любых y; это означает, что функция *одного* переменного $F(y, z_0)$ имеет при $y=y_0$ максимум; значит, ее производная (по y) $F'_y(y, z)$ обязана обращаться в нуль при $z=z_0$. Аналогично убеждаемся, что $F'_z(y_0, z)$ обращается в нуль при $z=z_0$. А это как раз и означает, что в точке (y_0, z_0) выполняются равенства (*).

Пользуясь этой леммой, найдем максимум функции v (см. (6)). Чтобы не иметь дело с корнями, будем искать максимум функции v^2 (ведь v и v^2 достигают своего максимума одновременно, при одних и тех же значениях переменных y и z). Имеем (см. (6))

$$F(y, z)=\frac{4}{9}\pi^2(y^2+z^2-yz)^2(\lambda^2-z^2).$$

Для нахождения точки максимума, найдем, согласно лемме, F'_y и F'_z и приравняем их нулю.

$$F'_y=\frac{8}{9}\pi^2(y^2+z^2-yz)(2y-z)(\lambda^2-z^2)=0,$$

$$F'_z=\frac{4}{9}\pi^2(y^2+z^2-yz)[2(2z-y)(\lambda^2-z^2)+$$
$$+(y^2+z^2-yz)(-2z)]=0 \qquad (**)$$

Учитывая, что $0<z<\lambda$, получаем $z=2y$. Так как (рис. 3, с. 16) $K=2(z-y)$, заключаем, что $NK=2y=AD$, то есть «наилучшая» бочка должна иметь форму цилиндра. Полагая в (**) $z=2y$, получим

$$8\pi^2y^3(\lambda^2-6y^2)=0,$$

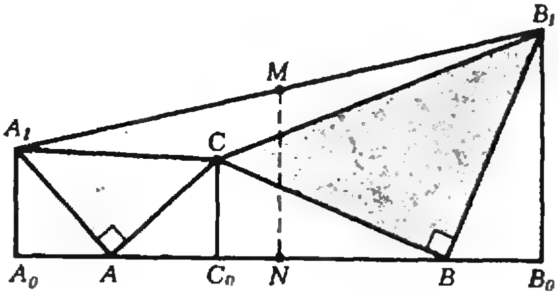
откуда $y=\lambda/\sqrt{6}$, $z=2\lambda/\sqrt{6}$ Если $DF=x$, то

$$x^2=\lambda^2-z^2,\ x=\lambda/\sqrt{3}=y\sqrt{2}.$$

Видим, что v может принимать наибольшее значение лишь в одном случае: $y=\lambda/\sqrt{6}$, $z=2\lambda/\sqrt{6}$.

Неудача одной цивилизации

Пусть C — произвольная точка в плоскости, ACA_1 и BCB_1 — равнобедренные прямоугольные треугольники, расположенные вне треугольника ABC (прямые углы — при вершинах A и B). Покажем, что точка M — середина отрезка A_1B_1 — не зависит от выбора точки C. Пусть A_0, B_0, C_0 — ортогональные проекции точек A_1, B_1 и C на прямую AB (см. рисунок). Легко видеть, что треугольники AA_0A_1 и CC_0A, а также BB_0B_1 и CC_0B равны; поэтому $AA_0=BB_0=CC_0$. Пусть N — середина отрезка A_0B_0. Ясно, что N является также серединой отрезка AB. Тогда MN — средняя линия прямоугольной трапеции $A_0B_0B_1A_1$; следовательно, $MN\perp AB$, $MN=\frac{1}{2}(A_0A_1+B_0B_1)$. Но $A_0A_1=AC_0$, $B_0B_1=BC_0$. Подставляя эти равенства, в выражение для MN, получаем $MN=\frac{1}{2}(AC_0+BC_0)=\frac{1}{2}AB$. Следовательно, при произвольном выборе точки C (в одной полуплоскости) отрезок MN перпендикулярен AB и равняется $\frac{1}{2}AB$, где N — середина AB. Это означает, что при движении точки C точка M остается неподвижной. Отметим, кроме того, что треугольник ABM — равнобедренный и прямоугольный.



«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 7)

1. Выразим x через y: $x=\frac{5y-3}{y+3}$ $(y\neq-3)$, или $x=5-\frac{18}{y+3}$. Поэтому x будет целым числом тогда и только тогда, когда 18 делится на $y+3$. Для $y+3$ получаем двенадцать возможных значений: ±1, ±2, ±3, ±6, ±9, ±18, что дает двенадцать целочисленных решений уравнения

$\{(-13;-2), (23;-4), (-4;-1), (14;-5), (-1;0), (11;-6), (2;3), (8;-9), (3;6), (7;-12), (4;15), (6;-21)\}$.

2. Возьмем правильный пятиугольник, вписанный в нашу «раскрашенную» окружность. Легко понять, что у него всегда найдутся три вершины одного цвета. Эти вершины в любом случае образуют нужный равнобедренный треугольник.

3. Пусть $A=\overline{ab}$. Тогда $(a+b)+(a+b)^2=10a+b$, то есть $(a+b)^2=9a$ откуда следует, что a — точный квадрат. Поскольку $1\leqslant a\leqslant9$, получаем три возможности: $a=1$, $a=4$ и $a=9$. Поэтому число A равно 12, 42 или 90.

4. Опишем вокруг треугольника ABC окружность. Из условия $\angle CAB+\angle MCB=90^\circ$ следует, что медиана CM принадлежит диаметру этой окружности (сделайте чертеж). Если при этом сторона AB не является диаметром, то медиана CM перпендикулярна AB как диаметр, проходящий через середину хорды, и треугольник ABC — равнобедренный (поскольку медиана CM является и высотой). Если же сторона AB является диаметром, то треугольник ABC — прямоугольный.

5. Отразим наши дуги симметрично относительно диаметра d, перпендикулярного выбранной прямой. Вместе с первоначальными дугами они образуют систему дуг длины 64, большей чем длина 20π нашей окружности. Поэтому в этой системе дуг найдутся по крайней мере две пересекающиеся дуги. Соединив любую точку из пересечения таких двух дуг с точкой, симметричной относительно диаметра d, мы получим нужную хорду, параллельную выбранной прямой.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 5)

Задание 9 (Я. Хартонг, 1957 г.). Задача на перекрытие — одну из самых популярных геометрических тем в шахматной композиции. После **1.Кb5!** с угрозой 2.Фd4× возникают сразу семь перекрытий: 1...Сf6 2.Фh7× (перекрыта пешка f7); 1...f6 2.Фe7× (теперь пешка перекрыла дорогу слону к полю e7); 1...Сf2 2.Лf4×; 1...Кe2 2.Лe3×; 1...Кb3 2.К:c3×; 1...Кc6 2.Сd5×; 1...c5 2.К:d6×.

Задание 10 (Л. Куббель, 1907 г.). **1.Кc3+ Крc2 2.Кd1!** Проигрывает 2.Кd5? из-за 2...Крd2! 2...Кр:d1 **3.Крh8! f1Ф** (3...Крe1 4.Лg2 с тем же итогом) **4.Лg1! Ф:g1. Пат.**

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, А. А. Варламов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, В. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева, И. Е. Смирнова, П. И. Чернуский

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Л. С. Сомова

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

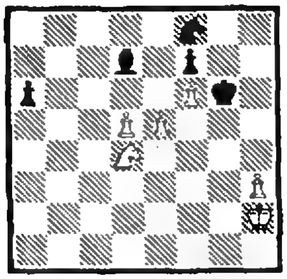
Сдано в набор 19.6.86. Подписано к печати 17.7.86
Т-16726 Бумага 70×108/16
Печать офсетная. Усл. кр.-от. 23,8
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 6,95
Тираж 194 920 экз.
Цена 40 коп. Заказ 1646

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ГЕОМЕТРИЯ ШАХМАТНОЙ ДОСКИ

Мы уже не раз отмечали необычное свойство «шахматных расстояний»: кратчайший путь между двумя полями проходит не обязательно по прямой линии. Остановимся на двух любопытных эпизодах из практики. Первый случай произошел в 1914 году в сеансе, который будущий чемпион мира А. Алехин давал членам Московского шахматного кружка.



А. Алехин — В. Нейштадт

В этой позиции в ответ на прыжок коня Kh7—f8 Алехин моментально ответил 1.e6. Его партнер собрался взять пешку пешкой, но, когда гроссмейстер вернулся к столику, растерялся и побил ее конем 1...К:e6 2.К:e6.

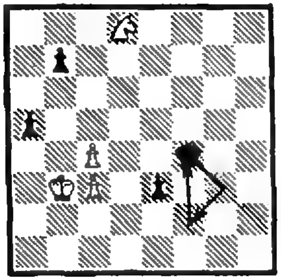
«Чем брать? — подумал Нейштадт,— наверное, пешкой». Но сеансер снова подошел к столику, и черные машинально взялись за слона. Алехин любезно предложил поменять ход, но соперник гордо отказался.

Жаль,— загадочно произнес гроссмейстер и опрокинул своего короля. Нейштадт никак не мог понять, о чем пожалел сеансер, и после сеанса робко попросил его раскрыть секрет.

— С удовольствием,— воскликнул Алехин, и на доске вновь были расставлены фигуры.— В этой безрадостной для меня позиции, сыграв 1.e6, я рассчитывал, что вы или сразу возьмете на e6 пешкой или после случившегося в партии 1...К:e6 2.К:e6 fe 3.de С:e6.

— Сейчас, глядя на позицию, я вижу, что брать пешкой было еще сильнее, ведь ваш король не успевает попасть в квадрат моей крайней пешки.

— Вы так полагаете? — усмехнулся Алехин и переставил своего короля — 4.Крg3. Тут же были сделаны еще два хода — 4...a5 5.Крf4 a4 6.Крe5! и двигаться черной пешке вперед бесполезно — 6...a3 7.Кр:e6 a2 8.f7 с ничьей. Слон отступил по диагонали a2—g8 и после 7.Крd4 a3 8. Крc3 a2 9. Крb2 на доске теоретическая ничья. Так за семь лет до Рети Алехин применил на практике его замечательный маневр. Правда, стремительно передвигаясь по кругу, он успел обнаружить не только остроумную геометрическую идею, но и ... ее опровержение: 4. Крg3 Кр:f6 5. Крf4 Сf5! 6. Крe3 Крe5 7. Крd2 Крd4 8. Крc1 Крc3, и дальнейший путь белому королю в угол прикрыт.



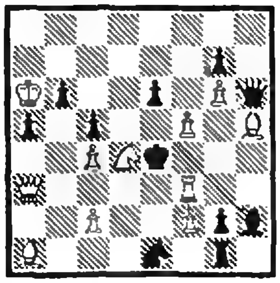
Д. Бронштейн — М. Ботвинник

В этой позиции из шестой партии матча на первенство мира 1951 года легко делало ничью 57.Кe6+ и 58.Кd4. Но Бронштейн решил подойти королем к пешке, возможно, со смутной надеждой на победу, и сыграл 57. Крc2. Конечно, гроссмейстер понимал, что черный король в состоянии появиться на поле f2, но, наверное, рассматривал лишь прямолинейный маршрут Крf4—f3—f2, полагая, что и тогда успеет подтянуть коня — Кe6 и Кd4+. Неприятельский король действительно отправился к полю f2, но не по прямому пути, а по зигзагу! После 57...Крg3!! белые сразу сдались, так как пешка «e» неудержима: 58. Кe6 e2, и белый конь попадает на d4 без шаха (59. Крd2 Крf2!).

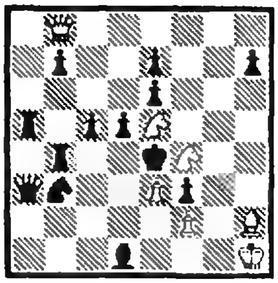
Впервые описав этот случай в рассказе о геометрии шахматной доски, ведущий «странички» был очень доволен, обнаружив такой удачный геометрический сюжет в поединке выдающихся гроссмейстеров. Позже я узнал, что достаточно было и простого Крf4—f3. Как пишет Б. Вайнштейн в книге «Импровизация в шахматном искусстве» (1976 г.), посвященной творчеству Бронштейна, 57...Крf3 выигрывало в несколько ходов: 58. Кe6 e2 59. Кd4+ Крf2 60. К:e2 Кр:e2, и пешечное окончание безнадежно для белых: 61. Крb3 (61. c5 a4!) 61...b6! 62. Крa4 Крd3 63. Крb5 a4! 64. Кр:a4 Кр:c4 и т. д.

Прошло несколько лет, и вот, раскрыв вышедшую в 1985 году книгу М. Ботвинника «Аналитические и критические работы, 1942—1956» на странице, где описывается эта партия, я обнаружил ремарку экс-чемпиона, внесенную им в новый комментарий. Оказывается все-таки, что именно хитрый маневр Крf4—g3—f2 обеспечивал черным победу — белому коню вовсе не обязательно шаховать с поля d4, выручает другая траектория: 57...Крf3 58.Кf7! e2 59.Кe5+ Крf2 60.Кd3+ Крf1 61.Крb3, и белые добиваются ничьей! В пешечном окончании — 61...e1Ф 62.К:e1 Кр:e1 черный король по сравнению со «старым анализом» находится чуть дальше — на e1, и это меняет оценку позиции.

Конкурсные задания



15. Белые начинают и дают мат в 4 хода.



16. Белые начинают и дают мат в 4 хода.

Срок отправки решений — 20 октября 1986 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 15, 16».

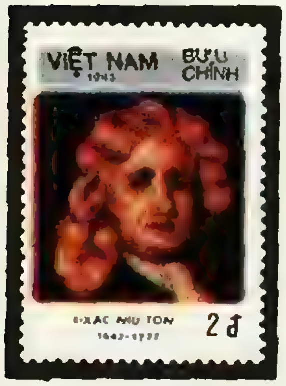
Цена 40 коп.
Индекс 70465

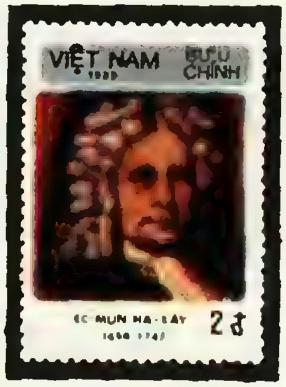
Новости космической филателии

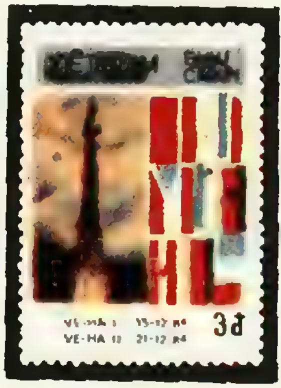
В марте 1986 года успешно завершился международный многоцелевой космический эксперимент «Венера — комета Галлея». В ходе эксперимента удалось получить более тысячи снимков кометы и богатую информацию о ее газопылевой оболочке. Эти данные существенно обогатили наши представления о природе комет и кометных хвостов. Они представляют огромную ценность для науки.

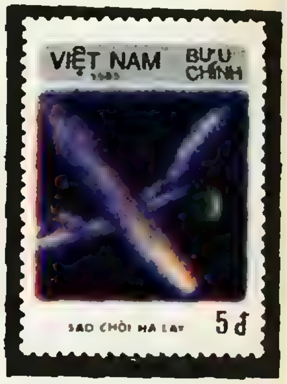
Выдающаяся международная научная программа исследований кометы Галлея нашла свое отражение в филателии. Ей посвящены две почтовые марки и почтовый блок, выпущенные в нашей стране в 1985—1986 годах. Аналогичные почтовые знаки появились и в ряде других стран. Мы воспроизводим здесь серию вьетнамских марок, на которых изображены комета и старт автоматической станции «Вега», а также портреты Ньютона и Галлея, и почтовый блок КНДР.

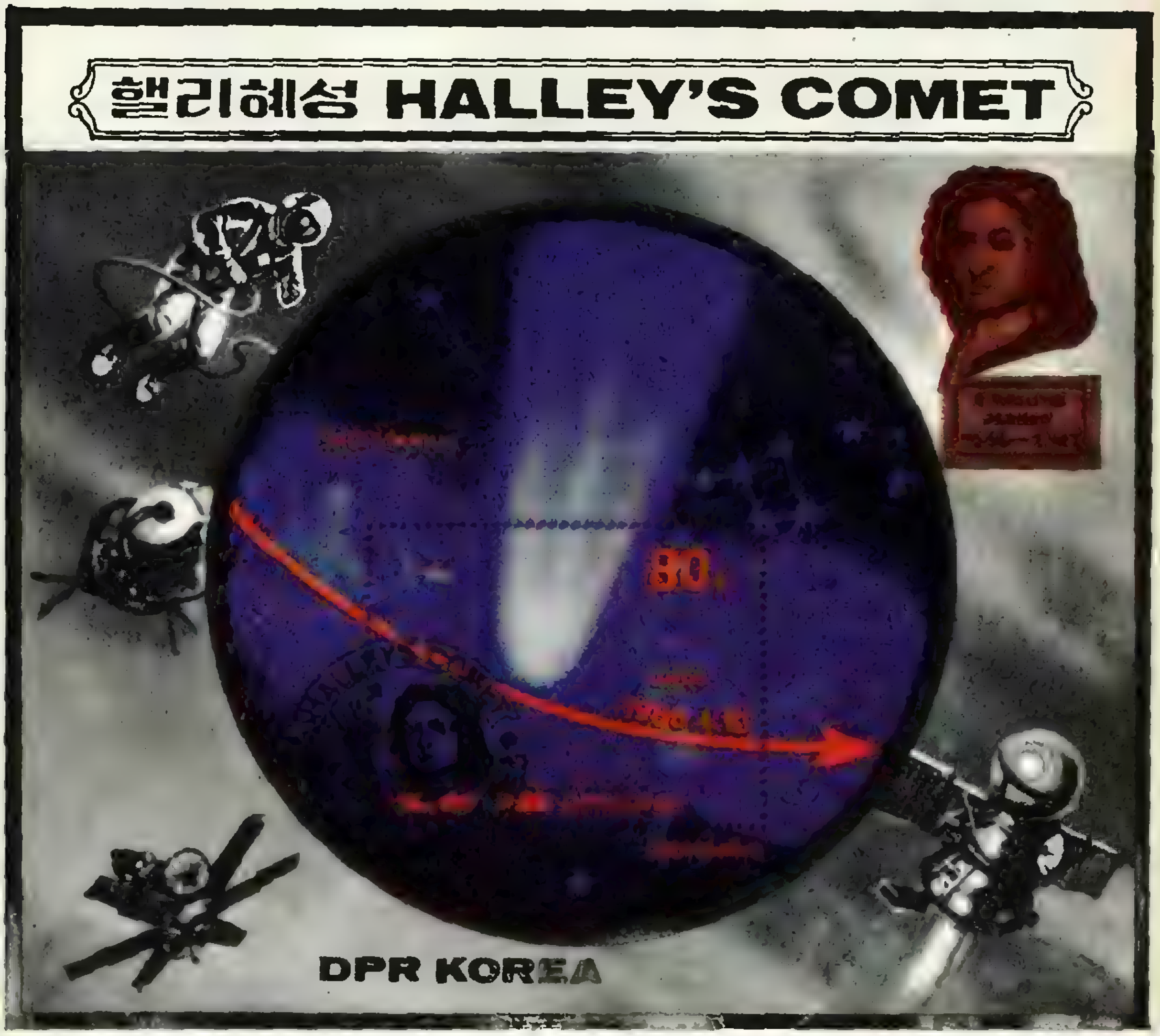
В. Рудов


VIỆT NAM
BƯU CHÍNH
I-XAC NIU TON
2 đ


VIỆT NAM
BƯU CHÍNH
EC-MUN HA-LAY
2 đ


VE-HA II 21-12-84
3 đ


VIỆT NAM
BƯU CHÍNH
SAO CHỔI HA LAY
5 đ


핼리혜성 HALLEY'S COMET
80
DPR KOREA

«... человек, решивший посвятить себя научной работе, должен начинать ее как можно раньше — еще в студенческие, а лучше даже в школьные годы». Эти слова академика И. К. Кикоина, возглавлявшего «Квант» в течение пятнадцати лет, определяют основную цель журнала — ввести юного читателя в мир точных наук,

№ 200

помочь ему сориентироваться в нем, испытать свои силы и выявить склонности. Мы надеемся, наш журнал отвечает поставленной задаче. Сегодня вы держите в руках 200-й номер «Кванта». Этот юбилей мы отмечаем перепечаткой нескольких лучших статей из первых номеров журнала и рассчитываем, что они по-прежнему будут вам интересны и побудят к самостоятельной творческой работе.

НОМЕР
9

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант **9** 1988

Основан в 1970 году

Издательство „Наука“. Главная редакция физико-математической литературы

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	День знаний — всенародный праздник	Knowledge day — our national holiday
3	*С. Г. Гиндикин.* Жозеф Луи Лагранж	*S. G. Gindikin.* Joseph Louis Lagrange
11	*А. А. Лапидес.* Покатаемся на виндсерфере	*A. A. Lapides.* Riding a windsurfer
16	*В. А. Фабрикант.* Волк, барон и Ньютон	*V. A. Fabrikant.* The wolf, the baron and Newton
21	*М. Д. Коваленко.* Микропроцессор измеряет...	*M. D. Kovalenko.* Measuring by microprocessor...
	Новости науки	**Science news**
20	На пути к рентгеновскому лазеру	In the direction of X-ray lasers
	Математический кружок	**Mathematics circle**
23	*И. А. Кушнир.* Урок одной задачи	*I. A. Kushnir.* One-problem lesson
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
25	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
35	Избранные школьные задачи	Selected school problems
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
31	Задачи	Problems
34	*С. Н. Олехник.* Сколько велосипедов?	*S. N. Olekhnik.* How many bicycles?
32	**Калейдоскоп «Кванта»**	**Kvant's kaleidoscope**
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
36	Задачи М1001—М1005; Ф1013—Ф1017	Problems M1001—M1005; P1013—P1017
39	Решения задач М981—М985; Ф993—Ф997	Solutions M981—M985; P993—P997
46	Список читателей, приславших правильные решения	List of readers who have sent correct solutions
	Искусство программирования	**The art of programming**
48	Математика и программирование (Беседа с академиком А. П. Ершовым)	Mathematics and programming (A talk with academician A. P. Ershov)
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
51	*А. Р. Зильберман.* Цепи переменного тока	*A. R. Zilberman.* Alternative current circuits
57	**Олимпиады**	**Olympiads**
61	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Наша обложка *(10)*	**Our cover page** *(10)*
	Смесь *(56)*	**Miscellaneous** *(56)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Новые успехи компьютера *(3-я с. обложки)*	New computer achivements *(3rd cover page)*

Прекрасные летние каникулы позади. И теперь уже радуга — не просто радуга, а оптическое явление в атмосфере, качели — не просто качели, а пример параметрического резонанса (разобраться с этим примером вам поможет статья на с. 29)... С новым учебным годом!

О конструкциях, изображенных на второй странице обложки, рассказывается на с. 10.

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1988

День знаний — всенародный праздник

В этом году в третий раз отмечается всенародный праздник — День знаний.

В. И. Ленин на заре Советской власти говорил, что коммунистом можно стать, лищь обогатив свою память знанием всех тех богатств, которые выработало человечество. В обращении к молодежи на III съезде комсомола он призывал: «Учиться, учиться и еще раз учиться». Эти ленинские заветы нашли воплощение в политике нашей партии и советского государства, которые создали невиданные по своим историческим аналогам возможности для расцвета образования и культуры в нашей стране.

Почему на данном этапе развития нашего общества делу получения знаний уделяется столь большое внимание? Реализация намеченного XXVII съездом партии курса на ускорение социально-экономического развития страны связана с научно-техническим прогрессом, с превращением науки в непосредственную производительную силу общества. Специальные исследования убедительно доказывают высокую экономическую эффективность образования. Есть данные о том, что от 30 до 40 процентов прироста национального дохода в развитых странах обеспечиваются за счет образования. Рост образованности молодежи положительно сказывается на улучшении ее производственной квалификации, качестве труда, рационализации и новаторстве, на быстроте овладения новейшей техникой, смежными профессиями, на усвоении приемов научной организации труда, экономии времени и материалов.

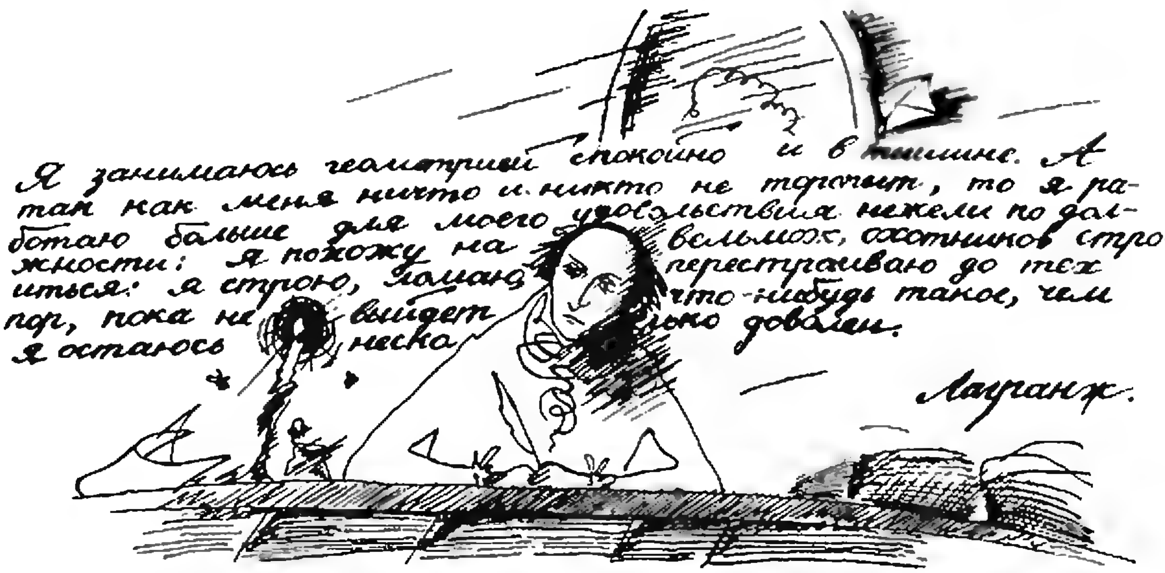
КПСС и советское правительство уделяют постоянное внимание делу совершенствования образования. Подтверждение этому — новая реформа школы. Срок обучения продлевается в ближайшие годы с 10 до 11 лет; начальная школа становится четырехлетней. Принимаются меры к улучшению трудового обучения и воспитания. В 12 пятилетке будет построено вдвое больше школ, чем в 11 пятилетке. Будет также воздвигнуто 800 новых комплексов профтехучилищ. Намечено открыть сотни новых станций юных техников, юных натуралистов, спортивных школ. Расширяется сеть научных обществ учащихся, кружков, детских клубов.

Изменится и само содержание школьных знаний. Будет лучше обеспечено знакомство с новыми технологиями, компьютерами, робототехникой. Ученики получат более глубокие политические знания, ознакомятся с новыми социальными процессами в стране и мире в целом. Начнет издаваться новый политический журнал для старшеклассников. Расширяется цикл факультативных занятий по гуманитарному, физико-математическому, техническому и биохимическому профилям с целью развития талантов и способностей учащихся.

В День знаний вся страна сердечно приветствует учителей и учеников и желает им новых больших успехов.

Вице-президент Академии
педагогических
наук СССР

Ю. К. Бабанский


Я занимаюсь геометрией спокойно и в тишине. А
так как меня ничто и никто не торопит, то я ра-
ботаю больше для моего удовольствия нежели по дол-
жности: я похожу на вельмож, охотников стро-
иться: я строю, ломаю, перестраиваю до тех
пор, пока не выйдет что-нибудь такое, чем
я остаюсь неско… …лько доволен.
Лагранж.

Жозеф Луи Лагранж

К 250-летию со дня рождения

Кандидат физико-математических наук *С. Г. ГИНДИКИН*

Письмо из Турина. В августе 1755 г. великий Эйлер (1707—1783) получил из Турина письмо от 19-летнего Лагранжа, который и прежде писал ему. У Эйлера, несомненно, уже успело сложиться мнение, что его корреспондент является талантливым сформировавшимся математиком, несмотря на его молодость. И все же содержание последнего письма поразило ученого.

С конца XVII века внимание математиков все более привлекали задачи, которые сейчас принято называть *вариационными*, а тогда обычно называли *изопериметрическими*. Все началось с задачи о *брахистохроне* — кривой наибыстрейшего спуска между двумя точками. Эту задачу поставил Иоганн Бернулли (1667—1748). Впрочем, задачи о кривых, обладающих теми или иными свойствами максимума-минимума, возникали и раньше: окружность при заданной длине ограничивает фигуру наибольшей площади (изопериметрическое свойство, отсюда и название класса задач), прямая — кратчайшее расстояние между точками и т. д. Число таких задач росло, математики с удовольствием решали их, подбирая свой «ключ с секретом» к каждой из них.

Однако стиль эпохи расцвета дифференциального и интегрального исчисления требовал попытаться найти общий метод, сформировать исчисление для решения изопериметрических задач. Такой метод нащупал в 1732 г. сам Эйлер. Его основное наблюдение состояло в том, что кривые, являющиеся решением этих задач, отвечают решениям некоторых дифференциальных уравнений. В выводе этих уравнений он видел основную задачу. Трудность здесь состояла в том, что речь шла о поиске экстремальной кривой (а не экстремальной точки) и поэтому известные приемы поиска экстремума были неприемлемы. Лишь окольным путем, заменив кривые на ломаные, Эйлеру удалось преодолеть эту трудность.

Но Лагранж, с решительностью, присущей молодости, отважился применить именно к кривым основную схему поиска экстремума из обычного анализа. Эта схема, как знает сейчас любой девятиклассник, состоит в замене функции $y=f(x)$ на ее главную часть $dy=f'(x)dx$ (ее *дифференциал*) с последующим решением уравнения $dy=0$ (то есть $f'(x)=0$). Лагранж придумал соответствующее понятие для кривой l, обозначил его δl (по аналогии с dy); позже δl стали называть *вариацией*. Уравнение $\delta l=0$ и привело его сразу к тем дифференциальным уравнениям — их теперь называют *уравнениями Эйлера-Лагранжа*,— к которым Эйлер шел кружным путем.

Короткой информации Эйлеру было достаточно, чтобы оценить все преимущества усовершенствований Лагранжа. Письмо Лагранжа возродило и у самого Эйлера интерес к экстремальным задачам. Уже в 1756 г. он делает в Берлинской академии два сообщения, связанные с методом Лагранжа. В том же году Лагранж по представлению

Эйлера был избран иностранным членом этой академии — редкая честь для молодого ученого, который еще не успел опубликовать своих трудов.

Эйлер не торопится публиковать свои новые результаты, предоставляя своему молодому коллеге, не торопясь, подготовить к печати свою работу. Он разъясняет свою позицию в письме от 10 октября 1759 г.:

> «Твое аналитическое решение изопериметрической проблемы содержит, насколько я вижу, все, чего только можно желать в этой области, и я чрезвычайно рад, что эта теория, которой после первых моих попыток я занимался едва ли не один, доведена тобой до величайшего совершенства. Важность вопроса побудила меня к тому, что я с помощью твоего освещения сам вывел аналитическое решение. Я, однако, решил скрывать это, пока ты не опубликуешь свои результаты, так как я никоим образом не хочу отнимать у тебя часть заслуженной тобой славы».

Замечательный пример научной этики!

Письмо Эйлера добавило решимости Лагранжу опубликовать сделанное, и во II томе «Туринских записок» за 1761—1762 гг. появляется его мемуар «Опыт нового метода для определения максимумов и минимумов неопределенных интегральных формул». В 1764 г. публикует свои результаты и Эйлер, предваряя публикацию словами:

> «После того как я долго и бесплодно трудился над решением этого вопроса, я с удивлением увидал, что в «Туринских записках» задача эта решена столь же легко, как и счастливо. Это прекрасное открытие вызвало у меня тем большее восхищение, что оно значительно отличается от данных мною методов и значительно их превосходит по простоте».

Заметим, что Эйлер не упоминает предшествовавшей переписки. Эйлер предлагает называть новый метод «вариационным исчислением» по аналогии с дифференциальным исчислением.

Таким был научный дебют Лагранжа. В одном отношении он уникален. Известны и другие примеры, когда великие математики получали первые крупные результаты в том же возрасте, что и Лагранж. Однако при этом речь шла обычно о решении конкретных задач. Интерес же к совершенствованию метода как такового приходит с годами. Мы же видим, что уже в первой работе Лагранжа проявилось то, что будет всегда отличать его в дальнейшем: полное прояснение ситуации, совершенствование метода, поиск первопричины ценится выше конкретных задач.

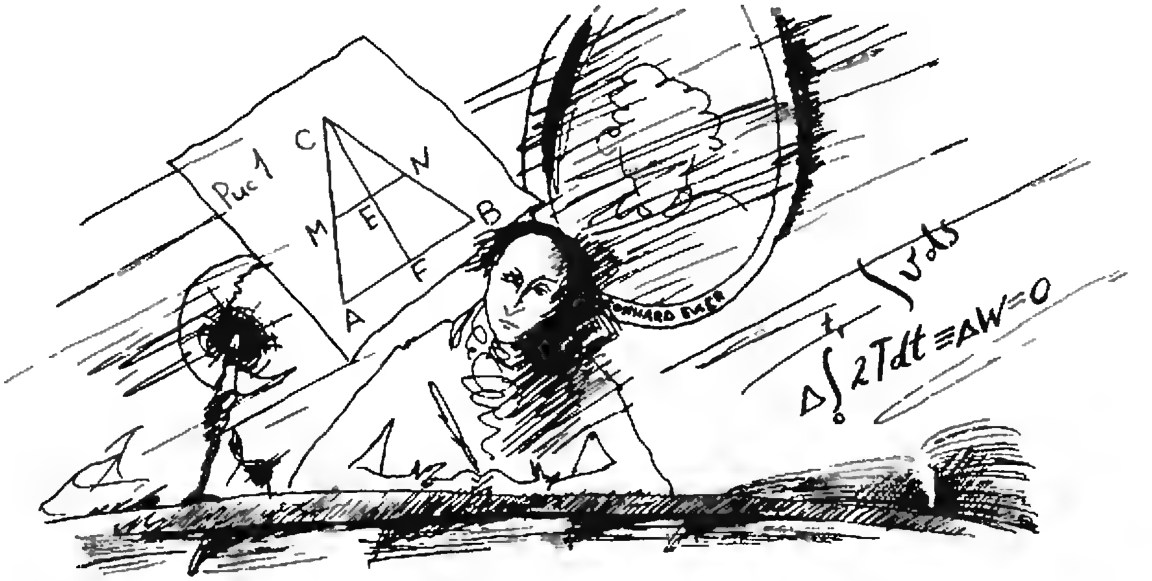
Джузеппе Луиджи. Мы рассказали о первой великой работе Лагранжа, но все же стоит сказать несколько слов о более ранних событиях его жизни. Жозеф Луи Лагранж родился 25 января 1736 г. в Турине, в Италии. Впрочем, на родине его называли Джузеппе Луиджи. Его прадед приехал из Франции и поступил на службу к герцогу Савойскому, а дед и отец продолжали служить в должности казначея фабрик и строений. К рождению будущего математика семья разорилась.

«Если бы я был богат, я, вероятно, не достиг бы моего положения в математике; а в какой другой деятельности я добился бы тех же успехов?» — говорил впоследствии ученый.

Впрочем, поначалу семейные планы предназначали Жозефу Луи карьеру адвоката, и в 14 лет он определяется в Туринский университет. Однако вскоре он перешел в Артиллерийскую школу, что было связано с усилившимся интересом к математике. В 19 лет он — профессор математики в этой школе (по некоторым сведениям, еще раньше).

Вокруг Лагранжа сложился кружок молодых математиков и физиков, который позднее преобразовался в Туринскую академию наук. С 1759 г. начинают выходить «Философско-математические сборники частного Туринского научного общества», которые привыкли называть просто «Туринскими записками». Мы уже говорили, что во II томе записок появился мемуар Лагранжа о вариационном исчислении, а I том содержал две его работы, в том числе статью «Исследование о природе распространения звука».

Основания статики. Лагранж был душой Туринского кружка. Опубликованные в «Туринских записках» статьи его товарищей несут отчетливый след сильного влияния Лагранжа. Особенно это относится к статье Фонсене, который был, по-видимому, лишь соучастником предпринятого Лагранжем систематического продумывания основ механики. Потом с сюжета этой статьи начнется его знаменитая «Аналитическая механика». Речь здесь идет о сопоставлении двух важнейших начал статики: принципа рычага и принципа сложения сил, приложенных к одной точке. Архимед положил в основу этой теории рычага аксиому о равновесии рычага с равными плечами и грузами и о двойной нагрузке на точку опоры в этой ситуации. Многие авторы пытались уточнить и дополнить рассуждения Архимеда, но они, по словам Лагранжа, «нарушив простоту ...почти ничего не выиграли с точки зрения точности». Лагранж отмечает, что первую часть аксиомы естественно считать очевидной из соображений симметрии: «нельзя усмотреть основания, в силу которого один груз перетянул бы другой». Он, однако, не видит никаких логических оснований к тому, что нагрузка на точку опоры при этом должна быть равна обязательно сумме весов грузов:



«по-видимому, все механики рассматривали это допущение как результат повседневного наблюдения, которое учит нас, что тяжесть тела зависит только от его массы, но ни в какой мере не зависит от его формы».

Лагранж предлагает вывод второй половины аксиомы Архимеда из первой. Он рассматривает однородную треугольную пластину *ABC*, где основание *AB* равнобедренного треугольника горизонтально. Вершины *A*, *B* нагружаются равными грузами p, а вершина *C* грузом $2p$. Пластина опирается на среднюю линию *MN*, параллельную *AB* (рис. 1). Она будет находиться в равновесии, что следует из рассмотрения пары рычагов *AC*, *CB* с точками опоры *M*, *N* в силу первой части аксиомы Архимеда. Но тогда в равновесии будет и рычаг *CF*, где *F* середина *AB* с точкой опоры *E* — серединой *CF* (в ней пересекаются *MN* и *CF*). Следовательно, нагрузка в точке *F* должна быть равна грузу $2p$ в точке *C* (строго говоря, здесь применяется обращение первой части аксиомы Архимеда, которое легко выводится), а это в точности нагрузка на точку опоры в рычаге *AB*. Лагранж аккуратно отмечает, что прием с рассмотрением равновесия плоской пластины относительно стержня он почерпнул у Гюйгенса.

Далее, Лагранж рассматривает принцип сложения сил, приложенных к одной точке, который легко обосновывается при помощи рассмотрения сложения движения. Существенная разница в принципах состоит в том, что в одном случае силы прикладываются к разным точкам, а в другом — к одной. Тем не менее многие утверждения статики можно выводить как из одного принципа, так и из другого. Возникает желание вообще отказаться от принятия принципа рычага за аксиому, но Лагранжа настораживает, что все известные выводы аксиомы Архимеда из закона сложения сил весьма искусственные:

«...хотя, строго говоря, оба принципа рычага и сложения движений всегда приводят к одним и тем же результатам, интересно отметить, что наиболее простой случай для одного из этих принципов становится наиболее сложным для другого».

Интуиция позволила Лагранжу безошибочно обнаружить тонкое место, хотя он и не смог до конца объяснить его. Оно связано с взаимоотношением механики и геометрии. Дело в том, что закон сложения сил, приложенных к одной точке, не зависит от аксиомы параллельных, в то время как в пространстве Лобачевского нагрузка на точку опоры рычага всегда превышает сумму весов приложенных грузов. В выводе второй половины аксиомы Архимеда используется утверждение о том, что высота равнобедренного треугольника пересекается со средней линией в ее середине; а это опирается на аксиому параллельных и не справедливо в геометрии Лобачевского. По-видимому, Лагранж еще не знал этого, хотя известно, что он размышлял над проблемой V постулата.

Принцип наименьшего действия. Во II томе «Туринских записок» вслед за мемуаром о вариационном исчислении была помещена статья Лагранжа «Приложение метода, изложенного в предыдущем мемуаре, для решения различных задач динамики». И здесь Лагранж следует по стопам Эйлера. В 1744 г. Мопертюи (1698—1759) сформулировал очень общий и туманный принцип, согласно которому все в природе, включая механическое движение, происходит так, чтобы некоторая величина — действие — достигала своего минимального значения. Эйлер для случая движения точки в центральном поле превратил это неопределенное утверждение в совершенно точное, определив действие в этом случае как интеграл скорости по пути $\int v\,ds$. Лагранж обобщил принцип Эйлера на случай произвольной системы точек, между которыми имеются связи и которые взаимодействуют произвольным образом. Определив действие в этой общей ситуации, Лагранж, пользуясь разработанной им техникой вариационного исчисления, решает разнообразные задачи динамики, включая гидродинамику. Как пишет Фурье (1768—1830):

> «Он сводит все законы равновесия и движения к одному принципу и, что не менее удивительно, он их подчиняет одному методу исчисления, изобретателем которого он сам является».

Посещение Парижа. В 1766 г. Лагранжу исполнилось 30 лет. Это был важный рубеж в его жизни. Он признан в научном мире: в 1764 и 1766 гг. он удостаивается премий Парижской академии за исследование движения Луны и спутников Юпитера. Провинциальный Турин становился тесен для научной деятельности Лагранжа. В личной жизни он был непритязателен, отличался слабым здоровьем, его скромность в общении с людьми нередко приобретала форму застенчивости и даже нелюдимости. Он вел обширную переписку, но как много дает непосредственное общение с учеными, Лагранж имел возможность убедиться во время поездки в Париж в 1755 г. Лагранж сопровождал своего друга Карачиоли, назначенного посланником в Лондон. Впрочем, до Лондона Лагранж не доехал.

> «Опасно заболев после обеда у аббата Нолле, на котором Нолле угощал его кушаньями, приготовленными на итальянский лад, Лагранж не мог поехать в Лондон, а остался для лечения в Париже и по выздоровлении поспешил вернуться в Турин»,— вспоминал его друг и биограф Деламбр.

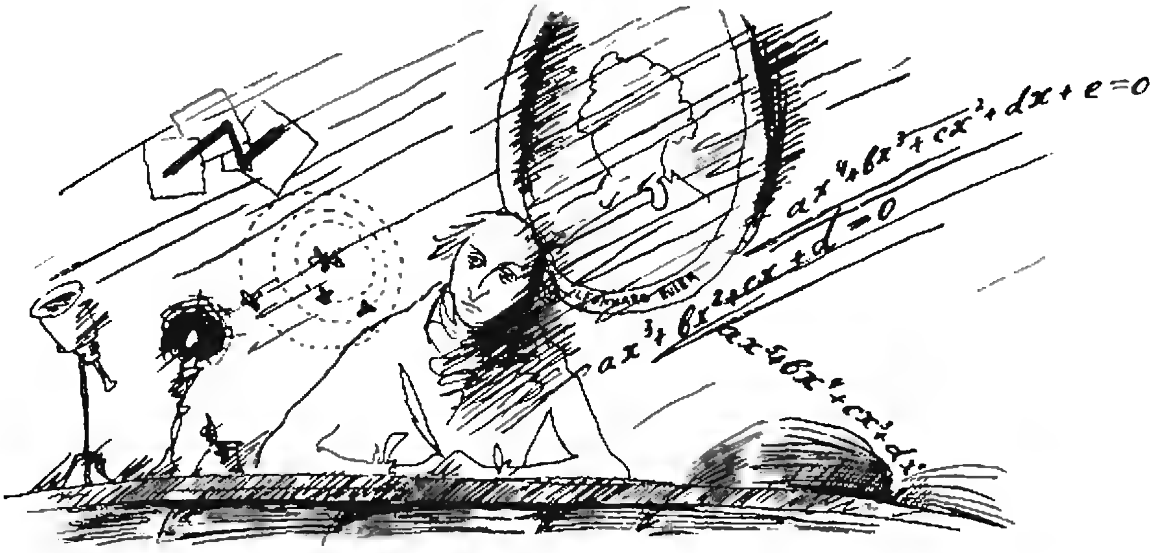
Дело было в том, что в северной Италии для приготовления пищи используют касторовое масло, предварительно сильно прожаренное. На кухне у Нолле, где решили приготовить обед «на итальянский лад», воспользовались касторовым маслом без необходимой подготовки, и оно в полной мере проявило свои известные лекарственные свойства. Однако в научном плане болезнь была плодотворной. Лагранж много общается с крупнейшими французскими математиками Даламбером (1717—1783), Клеро (1713—1765), Кондорсе (1743—1794), но и среди менее знаменитых ученых были такие, которые остались его друзьями на всю жизнь. Лагранж неоднократно повторял, что эти полгода, проведенные в Париже, были самым счастливым периодом в его жизни.

Лагранж в Берлине. В 1766 г. Эйлер уезжает из Берлина в Петербург, освободив место директора физико-математического класса Берлинской академии наук. Он предлагает Фридриху II в качестве своего преемника Лагранжа. Эта кандидатура была энергично поддержана Даламбером, с мнением которого король считался в еще большей степени. Уже в ноябре 1766 г. Лагранж в Берлине, хотя король Сардинии неохотно расстался с ученым. Лагранж оказался в академии не в лучшие ее дни. Здесь не было ни Эйлера, ни Даламбера, ни Мопертюи. Однако здесь работал очень оригинальный математик Ламберт (1728—1777), доказавший в частности, иррациональность числа π. У Лагранжа и Ламберта много точек соприкосновения в математике, чем-то они напоминают друг друга и по-человечески. Их дружба продолжалась десять лет до смерти Ламберта и была очень существенна для них обоих. Нелегко было замкнутому Лагранжу приспособиться к жизни прусского двора. Но он, в отличие от Эйлера, смог это сделать и избежать конфликтов. Лагранж ведет размеренную жизнь: внешние обязанности, встречи, переписка занимают большую часть дня, но весь вечер после обязательной прогулки отдан занятиям наукой в тишине, за закрытыми дверями.

«Аналитическая механика». Лагранж провел в Берлине чуть больше двадцати лет. Это была пора его зрелости, самый продуктивный период его жизни. Есть несколько великих ученых, в наследии которых есть одна главная книга («Начала» у Ньютона, «Маятниковые часы» у Гюйгенса). У Лагранжа такой книгой была «Аналитическая механика». Она вышла в 1788 году, когда Лагранж был уже в Париже. Но она вобрала в себя то главное, что было сделано в Берлине, а задумано еще в Турине. Замысел книги лучше всего усвоить из слов самого автора:

> «Имеется уже несколько руководств по механике, но план этого сочинения совершенно новый. Я имел в виду привести всю теорию этой науки и искусство решения относящихся к ней задач к общим формулам, простое развитие которых давало бы все необходимые для решения всякой задачи уравнения».

Итак, коротко говоря, Лагранж собирается показать, что чисто аналитических процедур достаточно для решения механических задач (чтобы подчеркнуть это, Лагранж демонстративно не пользуется чертежами), что можно предложить «однообразные» (как мы бы сказали сегодня, алгоритмические) правила рассмотрения таких задач и что имеются простые общие принципы, на которых вся механика



может быть построена. Цель дальнейшего — продемонстрировать, что из основного уравнения (одной формулы!) может быть выведена вся механика.

Разработанный Лагранжем метод оказался прямо приспособленным к решению задач техники, от которых он также полностью отвлекался при создании аналитической механики. А. Н. Крылов перечисляет непосредственно последовавшие применения лагранжевой механики: теория механизмов Понселе, инженерный расчет сооружений, в частности, больших железных мостов, потребовавшихся в связи с развитием железных дорог, баллистические задачи, возникающие с переходом от гладкоствольных к нарезным орудиям (после Крымской войны), теория гироскопов. Он заканчивает:

> «Таких примеров из техники и физики можно привести неисчислимое множество, но и сказанного достаточно, чтобы видеть то значение, которое имеет знаменитое сочинение Лагранжа в общем развитии науки и техники во всех их областях, и то, насколько Лагранж был прав, что, не останавливаясь на частностях, придал своему изложению самую общую аналитическую форму; поэтому его методы одинаково приложимы и к расчету движения небесных тел, и к качаниям корабля на волнении, и к расчету гребного винта на корабле, и к расчету полета 16-дюймового снаряда, и к расчету движения электронов в атоме. Отсюда можно судить о необыкновенной гениальности создателя этих методов — Жозефа Луи Лагранжа».

Эти строки были написаны в 1936 г.

Небесная механика. Среди нескольких типов механических задач, рассмотренных Лагранжем, несомненный приоритет имели задачи небесной механики. Такова была система ценностей в математике XVIII века, что ни один крупный математик не мог пройти мимо задач, связанных с согласованием закона всемирного тяготения и результатами непосредственных астрономических наблюдений. Лагранж видит свою роль лишь в решении математической задачи, после чего метод передается в руки вычислителей. Лагранж начинает систематически разрабатывать математическую теорию возмущений, основы которой уже были заложены его великими предшественниками. Этими проблемами он занимался параллельно с более молодым, но уже зарекомендовавшим себя Лапласом (1749—1827). Они чрезвычайно отличались по стилю занятий наукой. Для Лапласа ориентирами были совершенно конкретные задачи небесной механики, и метод для него был лишь средством достижения конкретных целей. При работе над близкими задачами выявлялись сильные и слабые стороны каждого из великих ученых, и они удачно дополняли друг друга.

Арифметические работы. Хотя механика во весь берлинский период была главным делом Лагранжа, в его поле зрения попадают и другие математические вопросы, в том числе несколько арифметических задач. Он занимался ими под несомненным влиянием Эйлера. Арифметике посвящено всего 9 небольших работ. Они носят характер самостоятельных этюдов, это маленькие шедевры, за которыми не просматривается намерения создать большое полотно (что было характерно для его занятий механикой). Быть может, это были упражнения в часы отдыха от главного дела жизни. Мы назовем здесь лишь наиболее известный арифметический результат Лагранжа: *любое натуральное число можно представить в виде суммы не более четырех квадратов.*

Алгебраические размышления. Проблемы алгебраических уравнений и их систем занимали Лагранжа в разных аспектах. В 1770—71 гг. вышел мемуар «Размышления об алгебраическом решении уравнений», несомненно задуманный еще в Турине. Собственно, это целая книга, занимающая более 200 страниц, которая, по словам Коши, знаменовала начало новой эры в алгебре. Наряду с «Аналитической механикой» это вершина творчества Лагранжа.

Лагранж стремится разрешить следующую задачу: почему не удается получить формулу для корней алгебраических уравнений степени, большей 4. Он подвергает анализу выражения, стоящие под радикалами в формулах для квадратного и кубического уравнений, приведя убедительные аргументы в пользу того, что для уравнений 5-й степени аналогичные выражения, а значит, и формулы существовать не могут. Это доказал позднее Абель, а общие глубокие идеи о перестановках корней послужили Галуа (1811—1832) отправной точкой для построения его великой теории.

Кризис. Математика была единственной страстью Лагранжа и ее было достаточно, чтобы заполнить всю его жизнь, доставить ему немало счастливых минут. Все остальное было подчинено занятиям наукой. Деламбр передает отношение Лагранжа к музыке:

> «Я ее люблю, поскольку она меня изолирует; я слышу первые три такта, на четвертом такте не различаю ничего, я предаюсь своим размышлениям, ничто меня не прерывает, и тогда я решаю наиболее трудные из проблем».

Для Лагранжа было характерно, что великие цели познания истины, мировой гармонии не переплетались у него с личными амбициями, с желанием соревноваться, обгонять современников. Если он узнавал, что кто-то успешно занимается проблемой, над которой он сам думал, он немедленно прекращал размышления с искренним ощущением «освобождения от обязанности». Благодаря всему этому Лагранжу было присуще необычайное душевное равновесие, дававшее силы стойко переносить тяготы жизни, не прекращать напряженных занятий.

Лишь одно могло поколебать Лагранжа — потеря ориентиров, неуверенность в выборе правильных целей. И это ощущение начинает появляться вскоре после переезда в Берлин. В 1772 г. он пишет Даламберу: «Не кажется ли Вам, что высшая геометрия близится отчасти к упадку, ее поддерживаете только Вы и Эйлер». Это пишет ученый, который находится в расцвете сил (ему 36 лет), у которого начинает складываться его «Аналитическая механика» и который только что опубликовал алгебраический мемуар, определивший развитие алгебры на 100 лет вперед!

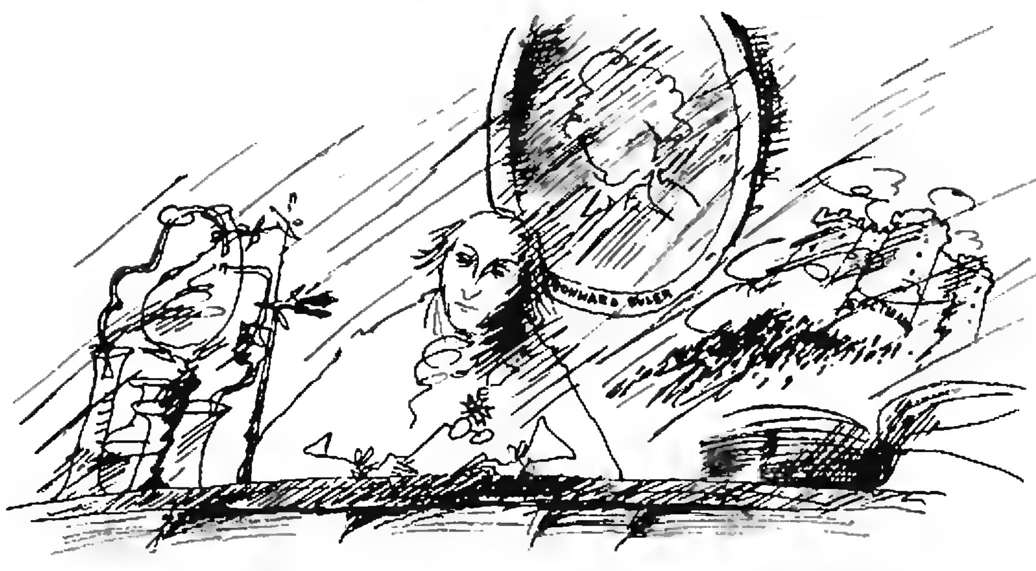
Ощущение заката математики не покидает Лагранжа. 21 сентября 1781 г. он опять пишет Даламберу:

> «Я начинаю чувствовать силу моей инерции, которая понемногу увеличивается, и я не могу сказать с уверенностью, что в течение будущего десятилетия я еще буду заниматься математикой. Я думаю также, что шахта становится слишком глубока и что ее придется рано или поздно бросить, если не будут открыты новые рудоносные жилы».

В Париже. Предчувствие не обмануло Лагранжа. В 1787 году, вскоре после смерти Фридриха II, он переехал в Париж и, по существу, прекратил активные занятия математикой. Лагранжу 51 год. В один 1783 год мир лишился и Эйлера, и Даламбера. Лагранжа восторженно встречают французские ученые, теперь он несомненно «первый геометр Европы», и лишь Лаплас может всерьез конкурировать с ним. К Лагранжу неравнодушны при дворе. Он необычно легко отвлекается от геометрии в пользу занятий философией, химией, историей, медициной, активно участвует в опытах великого химика Лавуазье (1743—1794). Но вскоре наступило время, когда большинство французских ученых прервали свои обычные занятия. Франция вступила в период революции, в которой ученые приняли самое активное участие. Никогда прежде не представлялась для них возможность непосредственно влиять на жизнь страны. Они входят в муниципалитет, Учредительное и Законодательное собрания; астроном Байи становится мэром Парижа, математик Лазар Карно возглавляет оборону Франции (его называли «организатором побед»), а Монж морским министром. Резко активизировалась и деятельность ученых, направленная на решение практических задач.

Лагранж держится в стороне от политики. Закон 1793 г. предписывает иностранцам покинуть Францию, но специальный декрет Комитета общественного спасения делает для Лагранжа исключение. В самые трудные дни он не покидает Франции, разделяя судьбу своих коллег. Участие в политической жизни стоило жизни Байи, Кондорсе. Лавуазье был казнен как откупщик. Лагранж пристально наблюдает за происходящим. Деламбр сохранил слова Лагранжа, сказанные после гильотинирования Лавуазье:

> «Нужен был один момент, чтобы снести эту голову, и, может, будет недостаточно ста лет, чтобы появилась подобная».



Как ученый, Лагранж добросовестно выполняет все поручения. Постепенно размножились многочисленные комиссии и бюро, в которые было принято включать ученых. Он занимается проблемами ремесленных промыслов, измерением долготы на море, оценивает запасы хлеба и мяса в стране, чтобы оценить вероятность возникновения голода. Пишет работу с расчетом взрывной силы пороха в орудийном стволе (она не было опубликована при жизни автора, возможно, это была одна из первых засекреченных научных работ).

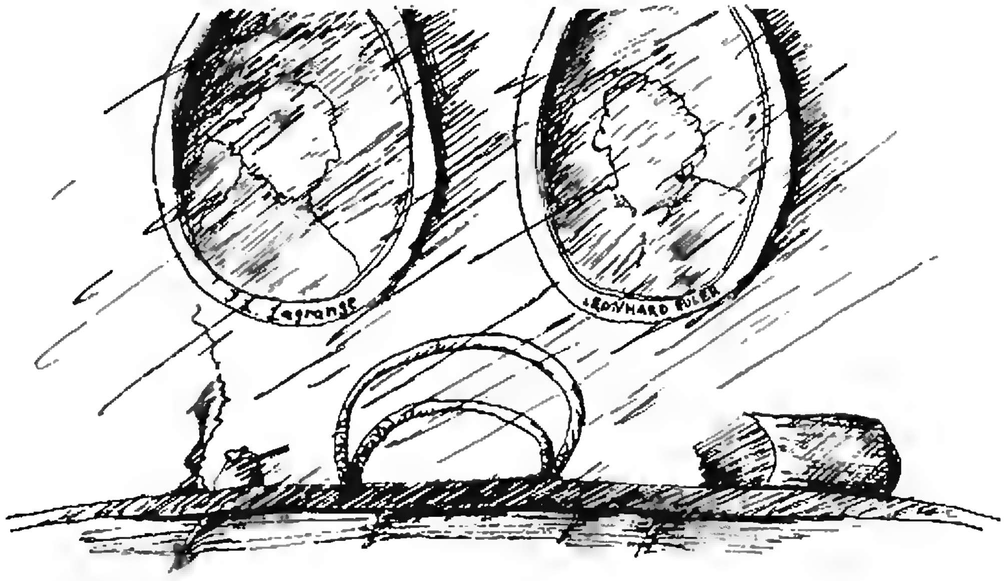
Педагогическая деятельность. Революционная Франция в бурные, богатые переменами 93—95 гг. много внимания уделяла реформе образования. «После хлеба просвещение есть важнейшная потребность народа» — провозгласил Дантон. О народном образовании думали не меньше, чем о снабжении народа хлебом. Организуются Нормальная школа для подготовки учителей и Политехническая школа (первоначально она называлась Центральная школа общественных работ) для подготовки военных инженеров. Никогда прежде не занимавшийся преподаванием Лагранж с увлечением читает лекции в обеих школах. При его интересе к продумыванию основ, лекции — повод заново осмыслить современную математику, ее фундаментальные понятия, связи между различными областями. Из лекций родились его книги: «Теория аналитических функций» в 1797 г. и «Лекции по исчислению функций» в 1801 г.

Последние годы. При директории и консулате положение Лагранжа упрочилось. В годы империи он становится графом, сенатором, кавалером ордена Почетного Легиона. Наполеон не был равнодушен к математике и хорошо понимал истинную цену Лагранжу. Будни императора оставляли ему мало времени для покровительства наукам. Он ограничивался раздачей наград да короткими характеристиками, непосредственно предназначавшимися для истории. Лагранжа он назвал «Хеопсовой пирамидой науки».

10 апреля 1813 г. Лагранж умер. Деламбр вспоминает, с каким удивительным умиротворением встретил он свой последний час:

> «Я почувствовал, что умираю; мое тело ослабело мало-помалу, мои духовные и физические способности незаметно угасают; я с любопытством наблюдаю постепенный прогресс уменьшения сил, и я достигну конца без сожаления, без печали, ибо спуск очень отлогий... Я завершил свой путь; я снискал некоторую известность в математике. Я не питал к кому-либо злобы, я никому не сделал плохого, и я хочу кончить свой путь...»

В свой бурный век Лагранж смог прожить размеренную жизнь. Современники затруднялись припомнить детали, которые могли бы оживить его биографию. Про него не рассказывали анекдоты, как про Лапласа. А. Н. Крылов замечает, что история с обедом на итальянский лад в Париже (рассказанная выше), возможно, была единственным приключением в жизни Лагранжа. Вспоминали, что Лагранж помог улучшить положение Ламберта в Берлине, что он не побоялся в грозном 1793 году заступиться за Деламбра, которого хотели выгнать из комиссии мер, что он трогательно заботился о Пуассоне, когда тот был его учеником в Политехнической школе, что он умел удивительно слушать собеседника. А иногда возникает маленький, но выразительный штрих: все существо Лагранжа «было проникнуто тихой



иронией». И неожиданно именно этот скромный человек стал восприниматься как образец великого ученого и человека, причем не только математиками. Гёте писал:

> «Математик совершенен лишь постольку, поскольку он является совершенным человеком, поскольку он ощущает в себе прекрасное, присущее истине; только тогда его творчество становится основательным, чистым, ясным, одухотворенным, действительно изящным. Все это требуется, чтобы уподобиться Лагранжу».

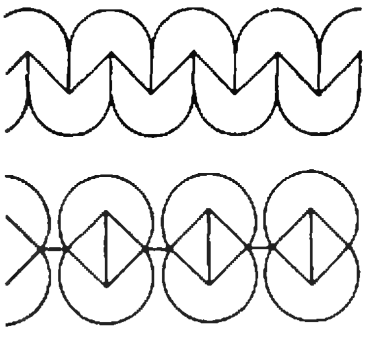
И в другом месте:

> «Лагранж был безупречным человеком и именно поэтому и великим. Если безупречный человек наделен талантами, то он всегда становится благом человечества, носителем счастья и благородства, будь то художник, исследователь природы, поэт или кто-либо другой».

Эйлер и Лагранж воспринимаются сегодня как величайшие математики XVIII века, учитель и ученик, дарования которых поразительно дополняли друг друга. Эйлер, стремившийся заглянуть как можно дальше вперед, говорить о вещах, для которых еще нет подходящего языка, оставить потомкам задачи, которые долго будут служить ориентирами, и Лагранж, во всем добиравшийся до глубинных структур, стремившийся создать картину, лишенную белых пятен, передать последующим поколениям язык и методы, которые долгое время будут достаточны для решения новых задач.

Наша обложка

На второй странице обложки показаны три фотографии складчатых моделей, изготовленных из плоских листов ватмана без разрывов и склеиваний. Такие конструкции мы назовем *структурными пространствами с направляющими поверхностями*. Их можно получить из плоского листового материала (ватмана, тонкого картона, металла или пластмассы), складывая его по линиям в надлежащую сторону в соответствии со схемами, две из которых показаны на рисунке, а затем изгибая лист со складками, чтобы придать ему общую форму цилиндра. Для трех показанных моделей «направляющей поверхностью» служит цилиндр, но можно построить подобные структурные пространства и с другими направляющими поверхностями, например, коническими, гиперболическими и эллиптическими.



В качестве основы сети линий, по которым производятся складки, используются элементы различных паркетов (см. «Квант», 1979, № 2, с. 9) и решеток на плоскости. При этом здесь применяются не только прямые или ломаные, но и кривые линии складок, что придает полученным моделям большую эстетическую выразительность.

Кроме эстетических достоинств, структурные пространства обладают различными интересными механическими свойствами (статическими и динамическими), вследствие которых они перспективны для поиска новых архитектурных и конструктивных форм.

А. И. Волков

Покатаемся на виндсерфере

Кандидат физико-математических наук
А. А. ЛАПИДЕС

Виндсерфинг — один из самых молодых видов спорта. Изобретенный в 1967 году, он через 15 лет завоевывает олимпийское гражданство, число его поклонников (и не просто болельщиков, а именно людей, активно им занимающихся) возрастает с каждым годом. Виндсерфинг завоевал мир!

Подобно громадной бабочке, виндсерфер грациозно парит над водной гладью в тихую погоду. В сильный ветер он дарит ни с чем не сравнимое ощущение полета, когда спортсмен практически лежит, касаясь спиной воды, а доска скользит по водной поверхности со скоростью несколько десятков километров в час. Те же, кто катался на виндсерфере в настоящий морской шторм, благодарны ему за великолепную возможность единоборства с разъяренной стихией.

Многие из вас наверняка наблюдали за виндсерфингом, а кое-кто пробовал и кататься. Не правда ли, удивительно, как вообще можно удержаться на такой узкой (60 сантиметров), легкой (20 килограммов) доске, управляя парусом (площадью 6 м^2), соединенным с доской с помощью шарнира?

Чтобы научиться кататься, необходимо, конечно же, располагать определенными физическими данными (хорошей координацией движений, нормальным вестибулярным аппаратом), уметь плавать, не бояться вынужденных купаний. Но в первую очередь надо хорошо понимать физику его движения. Как показывает опыт, поговорка «сила есть — ума не надо» для занятий виндсерфингом не годится.

И, разумеется, как и в любом другом деле, нужен большой запас настойчивости.

* * *

Прежде чем знакомиться с основами техники виндсерфинга, поговорим об одном из его прародителей серфинге. Этот вид спорта, как известно, представляет собой катание по океанским волнам на «серфе» — узкой доске из легких пород дерева или из пластика.

Движение серфа происходит в так называемом режиме глиссирования, реализуемом только при высоких скоростях. В этом режиме также движутся суда на воздушных крыльях, скутера и воднолыжники. Он определяется гидродинамической силой F. Она возникает при обтекании специальных подводных крыльев, днища скутера, водных лыж или серфа, наклоненных к вектору скорости под некоторым углом атаки α, и направлена перпендикулярно обтекаемой плоскости. Эту силу можно разложить на два направления — параллельно вектору скорости движущегося судна и перпендикулярно ему. Первая составляющая называется силой сопротивления, вторая — подъемной силой. При движении судов сила сопротивления уравновешивается силой тяги, в то время как серф по ровной поверхности воды движется лишь замедленно. Набрать скорость он может только на волнах, о чем мы расскажем чуть позже. Отметим, что угол атаки α создается смещением спортсмена к корме доски. Нос доски высовывается из воды, подъемная сила приложена к задней части доски, а смещение спортсмена к корме таково, что сумма возникающих моментов относительно любой поперечной оси равна нулю (рис. 1).

Появление подъемной силы в режиме глиссирования приводит к тому, что судно массы m_0 приподнимается над поверхностью воды. Из-за уменьшения погруженной в воду части судна уменьшается сила Архимеда $F_А$ до величины $m_0g - F_{под}$; при этом уменьшается угол атаки α. На больших скоростях $F_{под}$ практически достигает величины m_0g, в воду погружена малая часть судна, и резко уменьшена сила сопротивления.

В этом режиме плавный поворот серфа осуществляется креном глиссирующей поверхности, когда спортсмен смещается на ее край (говорят: «изменением поперечной загрузки доски»). На рисунке 2 изображен поворачивающийся серфист, но все рассуждения применимы для воднолыжника и скутера. Здесь m — масса доски, M — масса спортсмена. Силы приложены к разным точкам. Поэтому, чтобы скомпенсировать опрокидывающий момент, спортсмен отклоняется внутрь поворота.

Горизонтальная составляющая $F_{\text{под}}$ приводит к появлению центростремительного ускорения $a_{\text{ц}}$, а так как вертикальная составляющая $F_{\text{под}}$ уменьшилась по сравнению со случаем прямолинейного движения, то доска опускается чуть глубже в воду. Сила Архимеда $F_{\text{А}}$ возрастает, так что по вертикальной оси выполняется условие равновесия.

Теперь рассмотрим движение серфа не по ровной, а по наклонной поверхности воды — по волне. На рисунке 3 все силы приложены в одной точке. На самом деле это, конечно, не так: силы приложены в разных точках, и приходится, смещаясь к корме или к краю серфа, создавать дополнительный момент силы Mg, компенсирующий внешние моменты. Спортсмен вынужден постоянно балансировать, его центр тяжести все время смещается от некоего среднего равновесного положения.

На систему (серф+спортсмен) действуют три силы — тяжести $(M+m)g$, сила Архимеда $F_{\text{А}}$ и гидродинамическая сила F (которую и здесь можно представить как сумму $F_{\text{сопр}}$ и $F_{\text{под}}$). Спортсмен неподвижен относительно ската волны, то есть перемещается вместе с ней с постоянной скоростью (волна как бы несет спортсмена). Поэтому условие равновесия состоит в равенстве нулю векторной суммы этих трех сил.

Однако гидродинамическая сила возникает лишь при движении относительно воды с некоторой скоростью. В данном же случае мы только что приняли, что спортсмен покоится относительно ската волны. Но откуда же тогда берется эта сила?

Все дело в том, что покой относительно волны вовсе не означает покоя относительно воды. Когда распространяется волна, элементы водной поверхности движутся практически лишь по вертикали. Колебания вверх — вниз различных элементов поверхности воды, расположенных вдоль прямой, по которой распространяется волна, «скоординированы» таким образом, что наблюдатель, рассматривающий всю поверхность целиком, видит бегущую со скоростью v вдоль горизонтали волну (на рисунке 4 изображена поверхность воды в два близких момента времени, стрелки показывают скорости w отдельных элементов поверхности жидкости).

Это означает, что на неподвижного относительно ската волны спортсмена «набегает» вода со скоростью $\vec{v}'$ (рис. 3), являющейся векторной суммой скоростей $(-\vec{v})$ и $\vec{w}$ (знак минус перед горизонтальной составляющей скорости возникает из-за перехода в движущуюся систему отсчета). Эта скорость и приводит к появлению гидродинамической силы.

У спортсмена есть возможность подняться выше на скат, обычно и используемая на практике,— она состоит в ориентации серфа не вдоль направления распространения волны, а под углом γ к ней (рис. 5). Разворачивая серф боком, спортсмен резко увеличивает силу сопротивления. Собственно, только этой возможностью и пользуются, чтобы подняться достаточно высоко на волну, так как при ориентации серфа параллельно скорости v точка равновесия находится при достаточно малых $\varkappa$.

Одна из фигур, выполняемых мастерами серфинга, такова.

Развернув серф боком, спортсмен поднимается по скату, затем резко разворачивает серф параллельно v и начинает глиссировать вниз. Затем, продолжая глиссировать по ровной воде, плавно разворачивается на 180° (физика поворота описана ранее). Теперь он движется на волну, скорость серфа падает, спортсмен въезжает на волну (можно в принципе и прекратить глиссирование, остановившись или уменьшив угол атаки α, и просто подождать, когда волна, с которой он съехал, его догонит и поднимет наверх, как поплавок). Затем, не достигнув гребня (в точке ската с достаточно большим $\varkappa$), спортсмен вновь разворачивает доску на 180°, и все повторяется.

Обычно серфингисты едут не вниз по скату, а под некоторым углом γ к линии ската. Это позволяет им двигаться со скоростью в $1/\cos\gamma$ раз большей, чем скорость волны. Действительно, из рисунка 5 видно, что если спортсмен за время t проходит путь AB со скоростью u, даже оставаясь все время в точках ската волны с одинаковым значением $\varkappa$, то волна проходит за это время путь $AC=vt$. Отсю-

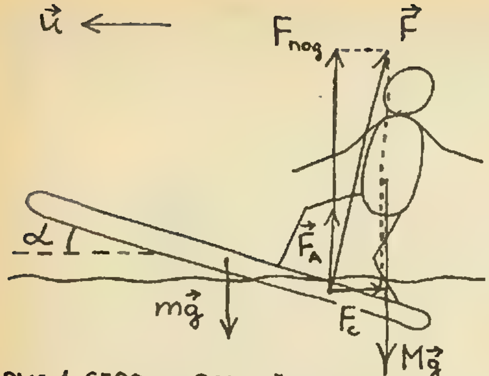

$\vec{u}$
$F_{под}$
$\vec{F}$
$\vec{F}_A$
α
$m\vec{g}$
F_c
$M\vec{g}$

РИС. 1. СЕРФ НА РОВНОЙ ВОДЕ

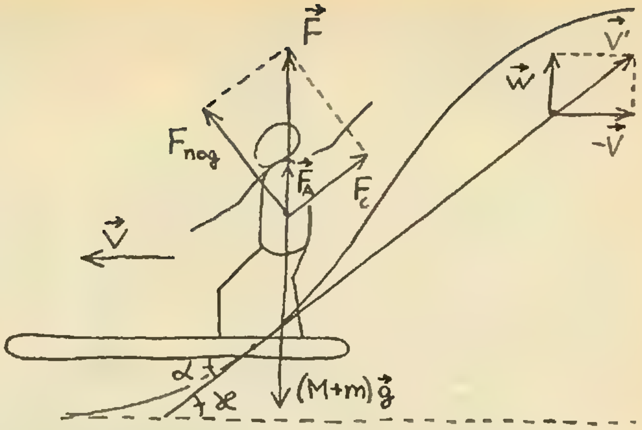

$\vec{F}$
$\vec{V}'$
$\vec{w}$
$-\vec{V}$
$F_{под}$
$\vec{F}_A$
F_c
$\vec{V}$
α
$\varkappa$
$(M+m)\vec{g}$

РИС. 3. СЕРФ НА ВОЛНЕ

Для простоты рассмотрения точки приложения сил $\vec{F}$ и $\vec{F}_A$ совмещены

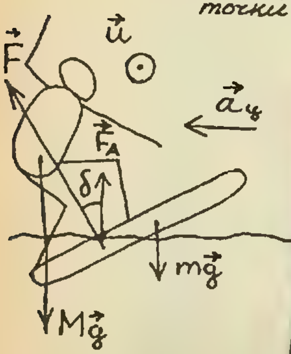

$\vec{F}$
$\vec{u}$
$\vec{a}_ц$
$\vec{F}_A$
δ
$m\vec{g}$
$M\vec{g}$

РИС. 2. ПОВОРОТ СЕРФА НА РОВНОЙ ВОДЕ (СКОРОСТЬ НАПРАВЛЕНА НА НАС)

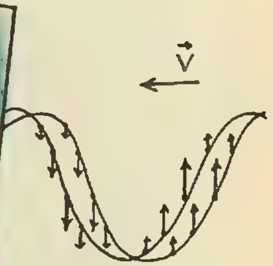


РИС. 4.

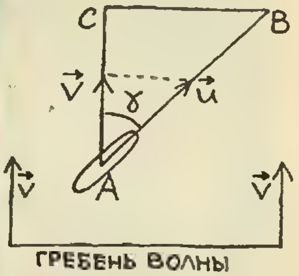

C
B
$\vec{V}$
γ
$\vec{u}$
A
$\vec{V}$
$\vec{V}$
ГРЕБЕНЬ ВОЛНЫ

РИС. 5.

да следует, что $u = v/\cos\gamma$.

Высшим классом в серфинге считается проехать в «трубе» — завихряющемся гребне волны.

* * *

Второй прародитель виндсерфинга — парусный спорт. Ведь виндсерфер — это миниатюрная парусная яхта. В его конструкции сохранены основные элементы яхты, позволяющие двигаться ей против ветра.

За счет чего может яхта двигаться не по направлению ветра?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим рисунок 6, на котором схематично изображена яхта с парусом. Направление ветра (жирная стрелка) образует угол δ с осью яхты и угол β с плоскостью паруса. Ветер действует на парус силой давления T перпендикулярно плоскости паруса (касательная составляющая скорости ветра не приводит к появлению силы, то есть трением воздуха о парус пренебрегаем). Казалось бы, яхта должна идти по направлению силы T. Однако ...

Рассмотрим движение яхты по двум направлениям — вдоль ее оси и перпендикулярно ей. На яхту со стороны воды действует сила сопротивления. Корпус яхты конструируется таким образом, чтобы лобовое сопротивление (зависящее от поперечного сечения при движении лодки вдоль ее оси) было много меньше ее бокового сопротивления сносу (зависящего от поперечного сечения при движении лодки в боковом направлении). Поэтому скорость движения яхты вдоль оси x может быть много больше скорости бокового сноса (дрейфа) вдоль оси y.

Большое боковое сопротивление легкой яхты — швербота — достигается с помощью шверта — тонкой пластины, расположенной под днищем яхты вдоль ее оси. Выбор оптимального режима движения — взаимной ориентации паруса, яхты, ветра и т. д. и т. п.— и составляет искусство яхтсмена.

Эти рассуждения показывают, что за счет взаимодействия корпуса яхты с водой можно идти против ветра. Отметим, что строго против ветра не может плыть ни одно парусное судно. Поэтому, если яхте необходимо продвигаться строго против ветра, она производит маневр, называемый лавировкой (рис. 7). Изменение курса (направления движения) достигается поворотом руля яхты в нужную сторону.

* * *

Теперь, наконец, обратимся к виндсерфингу — симбиозу серфинга и парусного спорта, детищу XX века.

Подобно любой парусной лодке, виндсерфер может двигаться против ветра и идти в лавировку. Однако, хотя он имеет шверт, у него нет руля, поэтому техника изменения курса здесь иная, нежели в парусном спорте.

Особенность виндсерфера состоит в том, что его мачта скреплена с доской не жестко, а с помощью шарнира, поэтому она может быть наклонена спортсменом в любую сторону. При наклоне паруса вперед или «на ветер» возникает момент сил, который приводит к повороту яхты по ветру, а при наклоне паруса назад или «по ветру» — момент, приводящий к повороту против ветра. На этом и основан принцип управления виндсерфером.

В слабый ветер виндсерфер проявляет все свойства яхты. Однако в сильный ветер он способен развить очень большую скорость и при катании по волнам (даже небольшим, высотой до 0,5 метра) демонстрирует свойства серфа.

При катании в сильный ветер необходимо как можно сильнее откренивать — наклонять — парус на ветер. В этом случае сила давления на парус направлена под углом вверх. Ее вертикальная составляющая, складываясь с подъемной силой, как бы вытягивает виндсерфер из воды. Доска начинает глиссировать. Спортсмен при этом висит, держась руками за парус. У него возникает ощущение, что он держится за ветер.

* * *

Мы рассмотрели лишь принципы управления виндсерфером. Как вы убедились, в их основе лежит ясное понимание действующих на него сил. Для лучшего закрепления теоретического материала советуем вам сделать лабораторную работу — записаться в секцию виндсерфинга и почувствовать все силы своими руками.

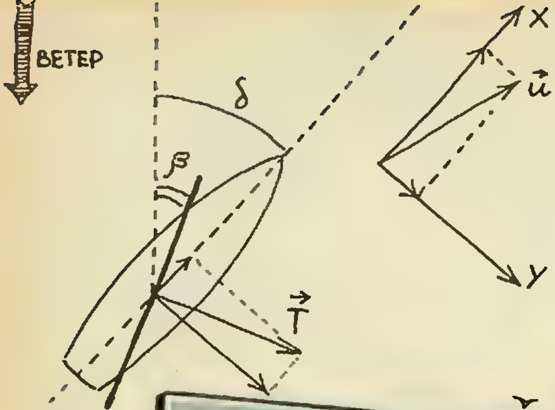

ВЕТЕР
δ
β
X
$\vec{u}$
Y
$\vec{T}$

РИС. 6. ДВИЖЕНИЕ ЯХТЫ ПРОТИВ ВЕТРА

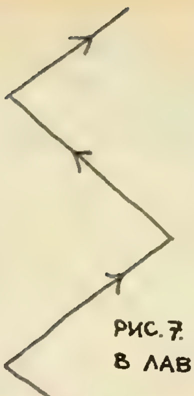
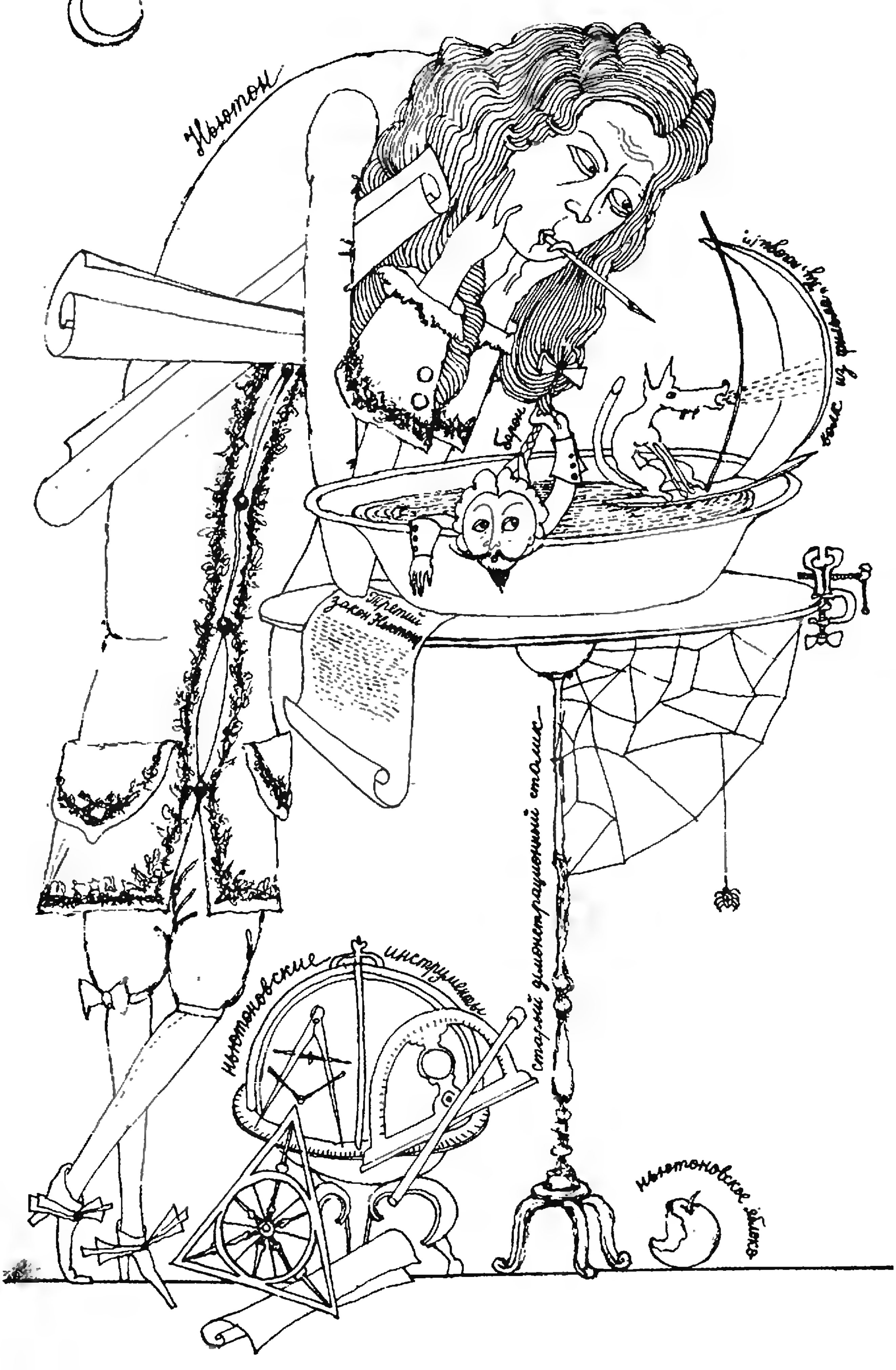


РИС. 7. ЯХТА ИДЕТ В ЛАВИРОВКУ


Ньютон
Барон
Третий закон Ньютона
волк из фильма „Ну, погоди!"
ньютоновские инструменты
старый демонстрационный столик
ньютоновское яблоко

Волк, барон и Ньютон

(О фильме «Ну, погоди!», романе Сирано де Бержерака и лазерном термоядерном синтезе)

Академик АПН СССР
В. А. ФАБРИКАНТ

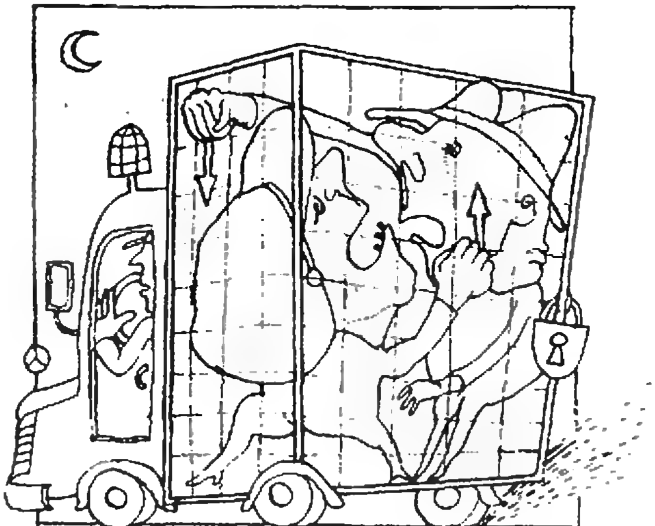
В этой статье пойдет речь о физическом явлении, которое можно было наблюдать в седьмой серии мультфильма «Ну, погоди!». Помните, как волк на парусной яхте старается догнать зайца, плывущего на пароходе? Для ускорения хода яхты волк дует в парус. На первый взгляд может показаться, что ситуация, в известном смысле, сходна с той, что была описана бароном Мюнхгаузеном: попав в болото, барон сам себя вытащил за волосы. Однако имеется существенное различие в этих двух случаях. Волк не нарушил один из основных законов механики — третий закон Ньютона, тогда как барон его «нарушил», что, конечно, невозможно.

В «Началах»*) Ньютона третий закон сформулирован так: «Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — действия двух тел друг на друга между собой равны и направлены в противоположные стороны». Ньютон пояснил: «Если что-либо давит на что-нибудь другое или тянет его, то оно само этим последним давится или тянется. Если кто нажимает пальцем на камень, и палец его также нажимается камнем». Из третьего закона Ньютона следует, что никакое взаимодействие тел внутри замкнутой системы (из которой ничего не вылетает наружу) не может изменить движения системы в целом. В частности, взаимодействие отдельных частей организма барона Мюнхгаузена (рук и волос) не могло вызвать изменение скорости его погружения в болото, а тем более вытащить его оттуда.

Чтобы хотя бы замедлить погружение, барон должен был начать раздеваться и бросать с силой предметы своего туалета вниз в болото, то есть нарушить замкнутость системы. Здесь особенно полезны были бы тяжелые ботфорты. Наконец, барон мог стать на седло и прыгнуть за пределы болота. Но при этом он толкнул бы вниз коня и тем самым ускорил бы погружение бедного животного в болото.

Однако вернемся к «Ну, погоди!». Предположим, что парус яхты сделан из материи, которая поглощает струю воздуха, испускаемую Волком. Тогда яхта с Волком на ней представляла бы замкнутую систему, и при отсутствии ветра она не смогла бы сдвинуться с места, как бы Волк ни старался. Так же бесплодны были бы попытки Волка ускорить дутьем ход яхты: давление на парус воздушной струи, испускаемой Волком, уравновешивалось бы действием когтей Волка на палубу яхты. Дело в том, что дующий вперед Волк испытывает отдачу, направленную назад (действие и противодействие).

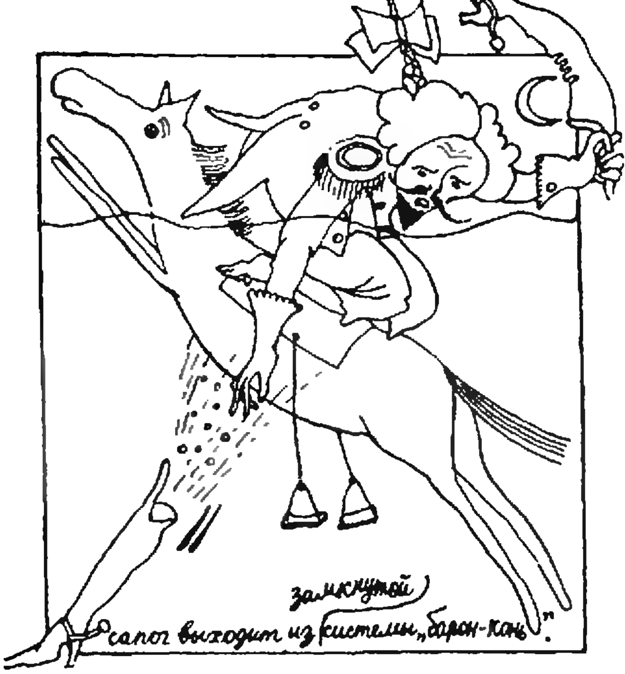
Здесь имеется аналогия с выстрелом из ружья или орудия, когда пуля или снаряд вылетают в одном направлении, а ружье или орудие начинают двигаться в противоположном направлении. Каждый охотник и артиллерист знает это. Еще ближе — аналогия с ракетой, из хвоста которой



Взаимодействие тел внутри замкнутой системы не может изменить движение системы в целом.

---

*) «Математические начала натуральной философии» — так назвал Ньютон свой главный труд, в котором изложил результаты исследований по механике (этот труд вышел в свет в 1687 году). В «Началах» (так коротко называют эту работу Ньютона) содержатся основные понятия классической механики, три закона движения (законы Ньютона) и закон всемирного тяготения.


Сапог выходит из замкнутой системы „барон-конь".

вырываются продукты сгорания, а она сама летит в противоположном направлении.

В фильме «Ну, погоди!» на яхте стоит обыкновенный парус, который, конечно, отражает струю воздуха, испускаемую Волком. Струя после отражения уходит назад, выходит из системы «яхта с Волком». Иными словами, система перестает быть замкнутой. Возникает явление отдачи, ускоряющее движение яхты.

Вся реактивная авиация использует явление отдачи, возникающее при испускании двигателями назад газовых струй. Созданные советскими конструкторами во время Великой Отечественной войны «катюши», нагонявшие панический ужас на фашистов, использовали тот же эффект.

Возвращаясь к Волку, надо признать, что он оказался более сведущ в механике, чем барон. Вместе с тем можно внести рационализаторское предложение. Волку было бы выгоднее стать спиной к пароходу и дуть в обратную сторону — ведь парус не является идеальным отражателем для воздушной струи, струя от паруса уходит ослабленной.

Сирано де Бержерак

Эффект отдачи, как известно, лежит в основе применения ракет для космических путешествий. Вот тут мы подошли к французскому писателю Сирано де Бержераку (1619—1655). Это очень своеобразная фигура в истории мировой литературы. Сирано происходил из захудалого дворянского рода и всю жизнь очень нуждался. В ту эпоху процветали только поэты, поступавшие на службу в свиту кого-либо из богатых аристократов. Для Сирано такой путь был закрыт из-за его крайне независимого и вспыльчивого характера. Сирано писал стихотворные листовки, направленные против всесильного первого министра Франции кардинала Мазарини («мазаринады»). Он пытался разбогатеть за счет картежной игры, но безуспешно. Природа наградила Сирано огромным карикатурным носом, вызывавшим постоянные насмешки, что служило поводом для бесконечного числа дуэлей. И вот этот картежник и дуэлянт был глубоким мыслителем, последователем философа-материалиста Гассенди*) и создателем замечательного научно-фантастического романа «Иной Свет, или Государства и империи луны», изданного в 1657 году, уже после смерти автора. Роман носит явно атеистический характер, и в нем Сирано остроумно высмеивает библейские легенды.

Для нас интересно то, что в романе Сирано описывает свой полет на Луну... с помощью ракет! Есть старинная гравюра, изображающая Сирано, летящего к Луне в корзине, к которой прикреплены ракеты, испускающие огненные струи по направлению к Земле и тем самым поднимающие корзину. Таким образом, Сирано за триста лет предвидел применение ракет для космических путешествий. Любопытно также, что в романе, написанном более чем за тридцать лет до выхода в свет «Начал» Ньютона, Сирано утверждает, что притяжение Луной пересилит притяжение Землей на расстоянии, меньшем от Луны, чем от Земли, так как масса Луны меньше массы Земли, и даже вычисляет отношение этих расстояний (получает, конечно, неверный численный результат — 3 вместо примерно 9).

Сирано иронически описывает Луну как место, где находится земной рай. Он там якобы встречает пророка Илью и выясняет у него, как тот добрался до Луны. И пророк описывает свой способ путешествия, противоречащий третьему закону Ньютона. Пророк Илья построил железную колесницу (есть поверье, что гром во время грозы — это громыхание колесницы пророка Ильи при его поездках по небесам) и, сев в нее, стал подбрасывать вверх намагниченный железный шар. Шар подтягивал за собой каждый раз колесницу, и таким образом пророк достиг Луны. Пророк не учел отдачи, которую будет испытывать колесница при каждом броске шара, и оказался предшественником «правдолюбивого» барона Мюнхгаузена.

---

*) Пьер Гассенди (1592—1655) — французский философ и ученый. Занимался исследованиями по механике, акустике, оптике, теплоте.

Во второй половине девятнадцатого века французский драматург Эдмон Ростан написал пьесу «Сирано де Бержерак», пользующуюся до сих пор большим успехом. Пьеса названа автором героической комедией, что точно отражает ее характер — веселый и одновременно романтически возвышенный. Максим Горький написал специальную статью, в которой очень высоко оценил благородный образ Сирано, обрисованный Ростаном.

Ростан приписал Сирано способ полета на Луну, «изобретенный» пророком Ильей, и не упомянул о ракетах. Вот соответствующее место из пьесы:

«Лечь на железный лист
и сильными рывками
Магнит подбрасывать,
он лист железный с вами
Подтянет кверху. Вы опять.
Так до Луны и упражняйтесь».

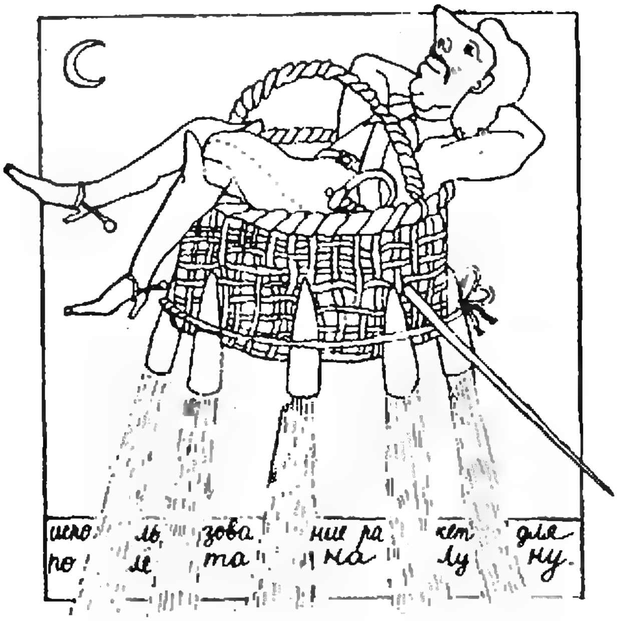
Почему Ростан колесницу превратил в железный лист, неясно.

Сравнительно недавно имя Сирано присвоено одному из лунных кратеров, что, безусловно, вполне справедливо.

Несколько слов о Жюле Верне

«С Земли на Луну прямым путем за 97 часов 20 минут» — так называется научно-фантастический роман Жюля Верна (1828—1905), который был написан в 1865 году. Жюль Верн описывает полет на Луну в снаряде, выпущенном гигантской пушкой. Надо признать, что это гораздо менее рациональный способ, чем полет с помощью ракет, придуманный Сирано.

А ведь прошло более двухсот лет! Правда, в другом романе Жюля Верна — «Вокруг Луны» — запасливый француз Мишель Ардан захватил с собой ракеты, но только для смягчения удара о Луну за счет явления отдачи. Зато в обоих романах Жюля Верна дана более точная координата точки пути, где притяжение Земли уравновешивается притяжением Луны — 47/52 расстояния между Землей и Луной. Это естественно, так как уже было известно отношение масс Луны и Земли, а также закон тяготения Ньютона. Спутники Мишеля Ардана — президент пушечного клуба Барбикен и капитан Николь — использовали алгебру для соответствующих вычислений, за что Мишель Ардан их дразнил «иксоедами». Между прочим, согласно Жюлю Верну невесомость должна наблюдаться только в одной точке траектории — в той самой, где результирующая сила тяготения равна нулю. Жюль Верн неправ. Для появления невесомости вовсе не требуется обращение в нуль силы тяготения. Не говоря уже об опыте космонавтов, каждый спортсмен-прыгун находится в состоянии невесомости во время прыжка (если не учитывать сопротивление воздуха).


испо ль зова ние ра кет для
по ле та на Лу ну.

Управляемый термоядерный синтез и явление отдачи

Теперь мы перенесемся в наше столетие и даже в первую половину будущего, двадцать первого века. Речь пойдет о новейшей технике, создание которой еще далеко не завершено. Мы имеем в виду управляемый термоядерный синтез (УТС) с инерционным удержанием плазмы. УТС такого типа ведет свое начало с работы советских физиков Н. Г. Басова и О. Н. Крохина, предложивших в 1962 году применить лазеры для поджига термоядерной реакции. При этом лучи многих мощных лазеров фокусируются со всех сторон на небольшую мишень. Интенсивность лазерных лучей меняется по определенному закону со временем. Сначала лучи вызывают быстрое испарение поверхностного слоя мишени. Это приводит к сильному сжатию (в сотни, тысячи раз) внутренних частей мишени за счет эффекта отдачи, возникающего при испарении поверхностного слоя. Сжатие необходимо для сближения ядер атомов, вступающих в термоядерную реакцию. Подчеркнем, что преждевременное нагревание внутренних частей мишени помешало бы сжатию. Поэтому их нагрев производится уже после сжатия. Для эффективности сжатия надо достаточно равномерно «осветить» со всех сторон мишень, что представляет далеко не простую задачу. Только тогда «ветры», возникающие за счет испарения наружного слоя мишени, приобретут должную структуру, необходимую для сильного сжатия. Иначе произойдет выпячивание слабоосвещенных частей мишени. Советская лазерная установка «Дельфин» создает 216 пучков для освещения мишени размером меньше горошины.*) Приведем еще одну интересную цифру. Недавно опубликованная советская работа по лазерному УТС имеет в заголовке 28 авторов.

Для автоматизированного управления сложной установкой лазерного УТС приходится широко применять быстродействующие ЭВМ и последние достижения нелинейной оптики.

Появились конкуренты лазерному УТС — установки, использующие мощные электронные или ионные пучки. Но все они предполагают сжатие за счет испарения ее поверхностного слоя и возникающего при этом явления отдачи.

---

*) На обложке февральского номера «Кванта» была помещена фотография, на которой видна центральная часть установки «Дельфин».

Новости науки

На пути к рентгеновскому лазеру

Несмотря на то, что первые в мире лазеры были созданы всего лишь четверть века назад, сегодня без этих замечательных приборов не могут обойтись не только научные лаборатории, но и производственные цеха, больницы, службы охраны окружающей среды. (Подробно о мирных профессиях лазерного луча можно прочитать в статье Л. В. Тарасова, опубликованной в первом номере «Кванта» за 1985 год, а также в книге того же автора, вышедшей в Библиотечке «Квант».— *Примеч. ред.*)

Созданы лазеры, работающие как в непрерывном, так и в импульсном режимах, их мощность варьируется от долей милливатт до десятков тераватт. При этом длины волн лазерного излучения охватывают не только область видимого света ($0{,}8$ мкм $> \lambda > 0{,}4$ мкм), но и выходят в инфракрасный (до $\lambda \lesssim 10$ мкм) и ближний ультрафиолетовый (от $\lambda \gtrsim 0{,}1$ мкм) диапазоны.

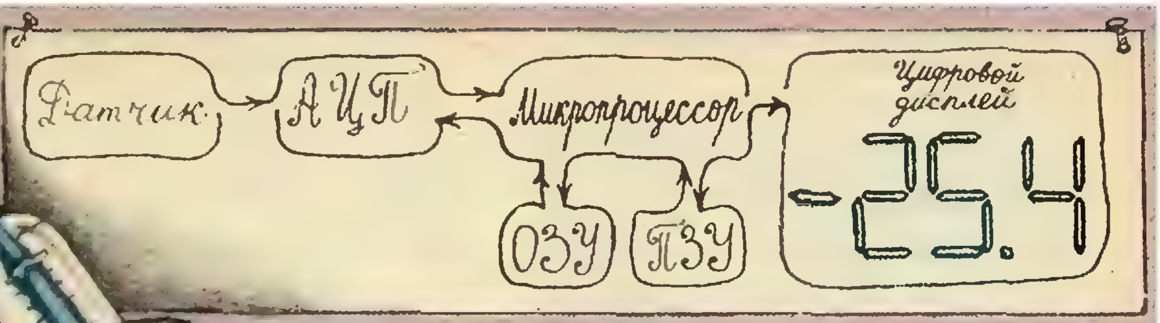
Влияние лазерного луча на свойства вещества в большой степени зависит от энергии излучаемых квантов $E = h\nu = hc/\lambda$. С уменьшением длины волны λ (с ростом частоты ν) энергия квантов и их воздействие на вещество увеличиваются. В качестве одного из примеров возможного применения коротковолновых лазеров укажем на их использование в микроэлектронике для изготовления печатных плат, интегральных схем и т. п. Чем меньше длина волны лазерного излучения, тем дальше можно продвинуться по пути миниатюризации электронных схем.

Несмотря на усилия физиков многих лабораторий мира, пока еще не удалось создать лабораторный лазер, работающий в еще более коротковолновом диапазоне — рентгеновском (50 нм $> \lambda > 0{,}005$ нм). Однако сравнительно недавно американские физики сумели получить лазерное излучение с длиной волны $\lambda = 15{,}5$ нм, что уже относится к области мягких рентгеновских лучей.

Это излучение возникало в результате воздействия на иттриевую мишень зеленого излучения «вспомогательного» сверхмощного лазера. Для того чтобы представить сложность этих экспериментов, достаточно сказать, что использованный в них «вспомогательный» лазер был длиной... в футбольное поле! Импульс его был столь мощным, что приводил к полному испарению иттриевой мишени, однако именно в процессе этого испарения (как зарегистрировала измерительная аппаратура) и возникало рентгеновское лазерное излучение.

Конечно, пока еще рано говорить о создании рентгеновского лазера. Установка американских ученых весьма громоздка и несовершенна, а КПД ничтожно мал. Однако ее создатели надеются, что путем использования других мишеней и совершенствования технологии им удастся достичь желаемого результата.

Б. В.



Микропроцессор измеряет...

М. Д. КОВАЛЕНКО

Каким прибором можно измерить температуру мороженой курицы? Конечно, термометром! Сделать в тушке надрез, ввести термометр, подождать немного... А если это необходимо сделать быстро, да еще не испортив товарного вида? Вы спросите, какое отношение эти вопросы имеют к теме статьи? Самое непосредственное, в чем читатель сможет убедиться, ознакомившись с устройством термометра микропроцессорной эры.

Начнем с датчика температуры. Для того чтобы измерять быстро, термометр делают в виде полой иглы, которую можно вонзать в тушку, почти не испортив ее. Внутри полой иглы размещается датчик — металлическая проволока, сопротивление которой в небольшом интервале температур линейно зависит от температуры*). Если такую проволоку подключить к источнику заданного по величине постоянного тока, то падение напряжения U на ней будет также линейно зависеть от температуры t:

$$U=a+bt.$$

Измеряя падение напряжения на проволоке, можно с помощью этой формулы рассчитать температуру. Быстро? Не очень, даже если иметь под рукой микрокалькулятор. Значительно ускорить процесс измерения позволяет использование микропроцессора.

Упрощенная блок-схема микропроцессорного термометра изображена на рисунке. *Микропроцессор (МП) — это* вычислительно-управляющая электронная схема, роль которой, в сущности, аналогична роли мозга в живом организме. Конструктивно МП, содержащий десятки тысяч транзисторов, представляет собой одну микросхему. МП работает с цифрами, поэтому непрерывный, или, как говорят, аналоговый сигнал с датчика (напряжение) должен поступать на вход МП преобразованным в цифровую форму. Эту работу выполняет аналого-цифровой преобразователь (АЦП). Микропроцессорный термометр содержит запоминающие устройства (ЗУ) двух видов: оперативные (ОЗУ) и постоянные (ПЗУ). В ОЗУ числа и программы могут свободно записываться и считываться, *но после выключения питания* все содержимое ОЗУ стирается. В ПЗУ информация записывается только один раз, но она хранится «вечно».

Как работает термометр? Предварительно, при градуировке, определяют постоянные коэффициенты a и b и записывают их в ПЗУ. МП работает по программе, также записанной в ПЗУ. Программа — это последовательность команд-шагов, которые МП выполняет по очереди со скоростью в сотни тысяч или даже миллионы шагов в секунду. Условная программа измерения температуры может выглядеть примерно так (в реальной программе каждый из этих шагов выполняется несколькими командами):

---

*) Такой датчик называется термометром сопротивления и применяется редко. Обычно используют термопарные или полупроводниковые датчики, но на принцип измерений это мало влияет.

Шаг 1. Вызвать из ПЗУ числа a и b.

Шаг 2. Ввести в МП число из АЦП (это число — значение напряжения U).

Шаг 3. Вычислить температуру по формуле $t=(U-a)/b$ (результат записывается в ОЗУ).

Шаг 4. Отобразить записанное в ОЗУ число на цифровом дисплее.

Шаг 5. Перейти к выполнению шага 2. В результате работы этой программы на дисплее с частотой в тысячи измерений в секунду будет отображаться значение температуры. Вот теперь мы можем узнавать температуру быстро (даже слишком!). На практике же эту частоту уменьшают во много раз — для удобства наблюдения. (Подобную картину вы могли наблюдать на табло электронных весов.)

Рассмотрим более сложный прибор — цифровой вольтметр со встроенным МП. Блок-схема его примерно такая же, как и у термометра. Предположим, нас интересуют колебания напряжения в сети. Требуется узнать, насколько часто в течение 1 часа действующее значение напряжения выходит за пределы 210—230 В. Можно было бы решить эту задачу так: взять обычный цифровой вольтметр с цифропечатающим устройством (ЦПУ) и запустить вольтметр на измерения с интервалом в 1 секунду. Через час мы получим бумажную ленту длиной 3—4 м с 3600 числами и, вооружившись терпением, начнем подсчитывать количество чисел на ней, выпадающих из интервала 210—230 В. Вам хотелось бы заняться такой работой? Вряд ли. Так давайте заставим работать МП! Для этого составим программу (как и в первом примере, это условная программа):

Шаг 1. Очистить ячейки памяти ОЗУ с номерами (адресами) N_1 и N_2, то есть записать в них нули.

Шаг 2. Измерить действующее значение напряжения сети U.

Шаг 3. Если $U<210$ или $U>230$, то к содержимому ячейки памяти с адресом N_1 прибавить единицу.

Шаг 4. Если $210 \leqslant U \leqslant 230$, то к содержимому ячейки памяти с адресом N_2 прибавить единицу.

Шаг 5. Ждать 1 секунду.

Шаг 6. Перейти к выполнению шага 2.

В результате работы этой программы в ячейке ОЗУ с адресом N_1 будет накапливаться количество выходящих за пределы 210—230 В результатов измерений, а в ячейке N_2 — количество попавших в этот интервал результатов измерений. Эти данные могут непрерывно отображаться на цифровом дисплее, так что достаточно через 1 час после запуска остановить программу и взглянуть на дисплей, чтобы узнать, насколько часто происходят колебания напряжения в сети. Можно, изменив программу, сделать так, чтобы она сама останавливалась после выполнения заданного числа измерений.

«Меню» микропроцессорного вольтметра обычно содержит десятки различных программ: статистической обработки результатов измерений, поиска максимальных и минимальных значений среди измеренных напряжений, анализа формы периодических сигналов и т. д. Эти программы, которые могут содержать сотни шагов, записаны в ПЗУ, поэтому для работы с прибором нет необходимости самостоятельно составлять программы. Необходимо лишь ознакомиться с назначением 2—3 десятков кнопок.

На этих двух простейших примерах видно огромное преимущество приборов со встроенными микропроцессорами: они выдают не «сырые» первичные данные, а обработанные, то есть пересчитанные в конечные величины. Применение таких приборов приводит к большой экономии труда людей, к росту его производительности. Однако наиболее полно преимущества МП проявляются в управляющих системах, в которых имеется обратная связь, то есть воздействие со стороны МП на управляемый объект. К таким системам относятся, например, промышленные роботы. Но это уже тема для особого разговора. А пока, покупая в магазине мороженую курицу, не забудьте ее ощупать. Если тушка мягкая, то, конечно, и без МП все ясно.

Урок одной задачи

И. А. КУШНИР

— Сегодня, — начал занятие математического кружка Иван Петрович, — наш урок посвящен одной задаче.

— Такая трудная? — удивились мы.

— Нет. Особенность этой задачи в том, что она поможет нам решить другие задачи. Вот ее условие:

Задача 1. *В трапеции, основания которой a и b, проведена через точку пересечения диагоналей прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, отсекаемого от нее боковыми сторонами.*

Иван Петрович вызвал одного из нас к доске, и на доске появился чертеж (рис. 1). Мы сразу заметили подобие треугольников AMO и ABC, MBO и ABD и на доске написали формулы

$$\frac{x}{b}=\frac{h_2}{h},\quad \frac{x}{a}=\frac{h_1}{h},$$

в которых h, h_1, h_2 — высоты треугольников ABD, MBO, AMO, а $x=MO$. Сложив эти равенства, мы получили

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{h_1+h_2}{h}=1,$$

то есть $x=ab/(a+b)$. Аналогично $ON=ab/(a+b)$, откуда и ответ:

$$MN=\frac{2ab}{a+b}.$$

— Иван Петрович, — послышалось из класса, — я уже вижу, как из этой задачи можно составить новую задачу. На доске появилась такая запись:

Задача 2. *Докажите, что в трапеции отрезок прямой, параллельный основаниям, которому принадлежит точка пересечения диагоналей и концы которого находятся на боковых сторонах трапеции, делится в этой точке пополам.*

— Хорошая задача, — похвалил Иван Петрович, — а теперь я изменю рисунок, — и он, продлив боковые стороны трапеции до пересечения в точке E (рис. 2), провел через точки O и E прямую. Точки пересечения прямой с основаниями учитель обозначил F и H.

— Обращаю ваше внимание, — продолжал он, — на такую задачу:

Задача 3. *Докажите, что в произвольной трапеции середины оснований, пересечение боковых сторон и пересечение диагоналей принадлежит одной прямой.*

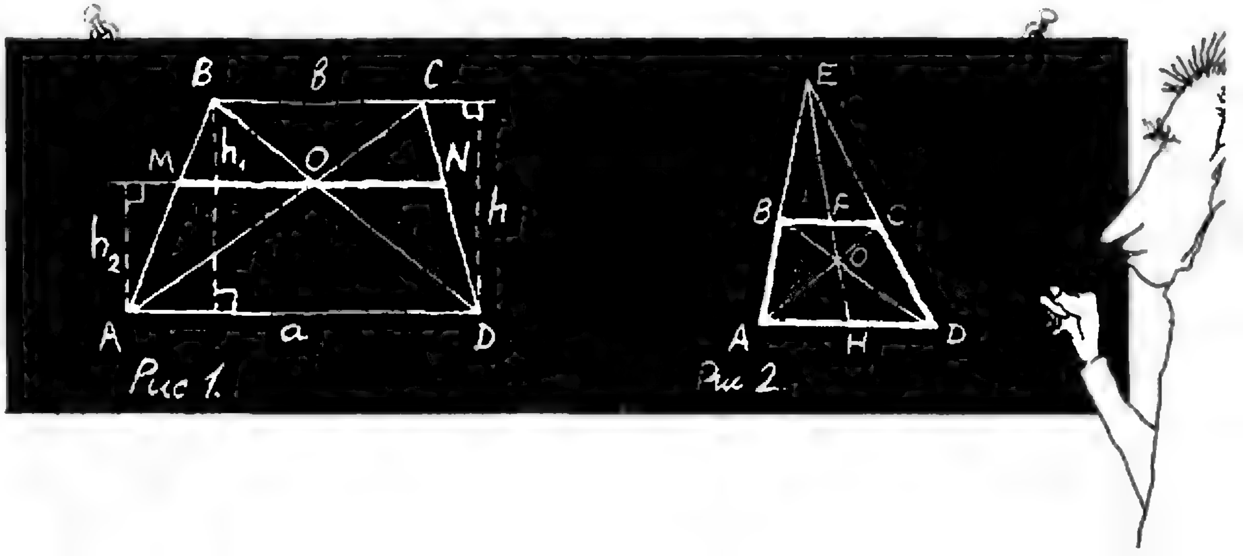
Решение получилось сразу: ведь оно следует из предыдущей задачи, так как EH — медиана в треугольниках EBC, EMN, EAD.

— Правильно, — заметил Иван Петрович. — А как решить эту задачу другим способом?

Мы задумались...

— Тогда пусть это будет ваше домашнее задание. Подсказываю: примените гомотетию.

— Иван Петрович, а я знаю, почему вы обращаете внимание на эту задачу, — ведь с ее помощью можно решать задачи на построение с одной линейкой. Вот, например, на районной олимпиаде была такая задача:



Задача 4. *На прямой даны три точки A, B, C, из которых B находится посредине между A и C. Через произвольную точку K, не принадлежащую отрезку AC, с помощью одной линейки проведите n прямых, параллельных AC.*

— Тоже хорошая задача, — согласился Иван Петрович, — но о ней мы поговорим в следующий раз, а сегодня рассмотрим более сложную задачу:

Задача 5. *На каждой из двух параллельных прямых расположены по одному отрезки длиной a и b. С помощью одной линейки построить отрезок:*

$$x=\frac{ab}{a+b}.$$

Сами мы бы быстро не справились, если бы не помощь Ивана Петровича:

— Продлим стороны трапеции $ABCD$, у которой основания — заданные отрезки a и b (рис. 3). Точки пересечения диагоналей AC и BD и отрезков AB и DC обозначим O и E. Проведем прямую EO, которая пересечет основания трапеции в точках F и H. Соединим точки D и F, A и F, B и H, C и H, получим точки K и L. Отрезок KL — искомый.

Действительно, треугольники BKF и AKH, CFL и LHD подобны, поэтому

$$\frac{BK}{KH}=\frac{BF}{AH};\quad \frac{FL}{LD}=\frac{FC}{HD}.$$

Но $BF=FC$ и $AH=HD$ (задача 2), значит,

$$\frac{BK}{KH}=\frac{FL}{LD},$$

следовательно, отрезок KL параллелен основаниям BC и AD. А поскольку точка O принадлежит отрезку KL и $MK=KO$, а $OL=LN$ (задача 2), получаем

$$OL=\frac{1}{2}\frac{ab}{a+b},\quad KL=\frac{ab}{a+b}.$$

— А чтобы вы глубже разобрались в таких задачах, дома сделайте еще и такие задачи:

6. Отрезки длиной a и b принадлежат одной из параллельных прямых, а отрезок длиной c — другой из них. При помощи одной линейки построить отрезок длиной x, чтобы

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

7. Даны параллельные отрезки. Разделите с помощью одной линейки один из них пополам.

8. С помощью одной линейки разделите трапецию на две равновеликие фигуры.

9. Даны две параллельные прямые. Проведите через данную точку третью прямую, параллельную данным, с помощью одной линейки.

10. Увеличьте данный отрезок, лежащий на одной из двух параллельных прямых, с помощью одной линейки в 2, 3, ..., n раз.

11. Найдите половину, треть, ..., n-ю часть такого отрезка.

— И все эти задачи, — напомнил учитель, — решаются с помощью той первой задачи, с которой мы познакомились сегодня.

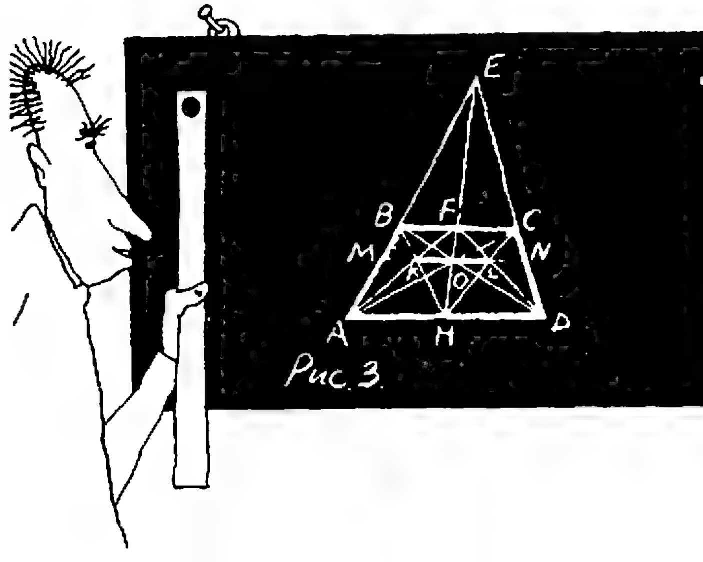
— Кто же придумал эту задачу?

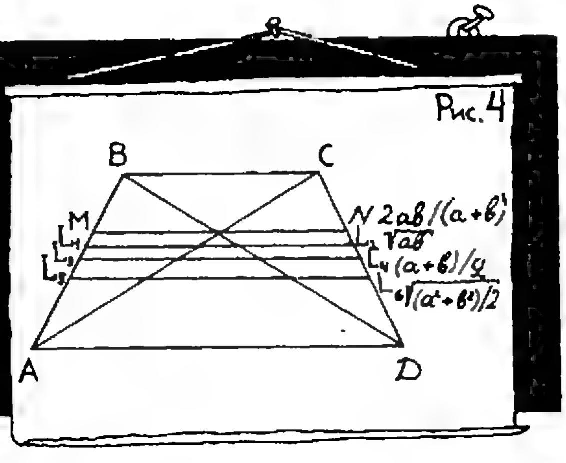
— Первого автора задачи я вам назвать не могу, — сказал Иван Петрович, — но известно, что она встречается в трактате XII века индийского математика Бхаскары «Венец астрономического учения» в таком виде:

Задача 12. *Зная длины a и b двух палок бамбука, вертикально воткнутых в землю на известном расстоянии, вычислить длину перпендикуляра к земле, опущенного из точки пересечения прямых, соединяющих верхний конец одной палки с основанием другой, и длины между основанием этого перпендикуляра и основаниями палок.*

— И, наконец, — заканчивая занятие, развернул таблицу с чертежом Иван Петрович (рис. 4), — наша задача связана с неравенствами: отрезок MN является геометрической интер-

(Окончание см. на с. 35)





Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Поговорим о средней скорости» предназначена восьмиклассникам, «О явлениях переноса» — девятиклассникам», «Что такое параметрический резонанс?» — десятиклассникам.

Поговорим о средней скорости

Когда мы говорим о скорости движения различных тел в окружающем нас мире, то чаще всего подразумеваем *среднюю скорость*. Именно она позволяет оценить пройденное расстояние, зная время движения, или, наоборот, помогает найти время движения по пройденному пути. Так, например, отправляясь на вокзал с другого конца города, вы рассчитываете свое время, исходя из известной по опыту средней скорости передвижения городского транспорта. При этом для вас совсем неважно, как меняется мгновенная скорость автобуса или троллейбуса от одной остановки до другой.

Для определения средней скорости мы истинное сложное неравномерное движение мысленно заменяем некоторым простым равномерным движением, при котором тело проходит тот же путь (или совершает то же перемещение) за то же время, что и в процессе истинного движения.

Обратим внимание на то, что в «Физике 8» (§ 11) введены два различных понятия средней скорости: *векторная средняя скорость*, вычисляемая по вектору перемещения $\vec{s}$ тела за определенное время t, и *скалярная средняя скорость*, определяемая по пути l, пройденному телом вдоль траектории:

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\vec{s}}{t}, \quad v_{\text{ср}} = \frac{l}{t}.$$

Средняя скалярная скорость, вообще говоря, не совпадает с модулем векторной средней скорости. Так, $v_{\text{ср}}$ для Земли при ее орбитальном движении вокруг Солнца составляет примерно 30 км/с, в то время как средняя векторная скорость, взятая за промежуток времени, равный одному году, очевидно, равна нулю. Равенство средних скоростей выполняется только в случае прямолинейного движения тела в одном направлении. Ниже мы будем говорить только о скалярной средней скорости. Начнем с такого примера.

Представьте себе, что вы едете в автомобиле по пустынному загородному шоссе, устроившись рядом с водителем. В руках у вас секундомер, за окном отчетливо видны встречающиеся километровые столбики, и вы проводите небольшой эксперимент. В первом опыте водитель по вашей команде «скачком» меняет скорость каждую минуту: $v_1 = 40$ км/ч, $v_2 = 60$ км/ч, $v_3 = 80$ км/ч, $v_4 = 20$ км/ч. Затем опыт ставится иначе: водитель последовательно проходит тот же набор скоростей, но команды вы даете ему не по секундомеру, а в те моменты, когда автомобиль проезжает мимо очередного километрового столбика. Одинаковы ли средние скорости в этих двух опытах?

В первом случае движение построено так, что на каждом участке, где скорость была постоянна, автомобиль двигался в течение одного и того же промежутка времени Δt (рис. 1). Поэтому

$$v_{\text{ср}1} = \frac{l}{t} = \frac{v_1\Delta t + v_2\Delta t + v_3\Delta t + v_4\Delta t}{4\Delta t} = \frac{1}{4}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) = 50 \text{ км/ч}.$$

Во втором случае одинаковы не времена движения на каждом участке, а пройденные пути Δl (рис. 2). Таким образом,

$$v_{\text{ср}2} = \frac{l}{t} = \frac{4\Delta l}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \Delta t_4} =$$

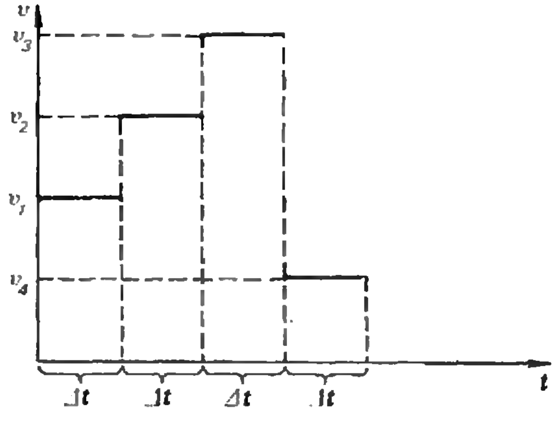


Рис. 1.

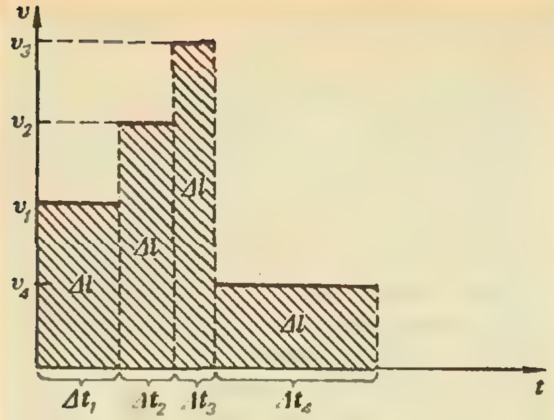


Рис. 2.

$$= \frac{4\Delta l}{\frac{\Delta l}{v_1}+\frac{\Delta l}{v_2}+\frac{\Delta l}{v_3}+\frac{\Delta l}{v_4}} =$$

$$= \frac{4}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}+\frac{1}{v_4}} = 38 \text{ км/ч}.$$

Как видно, в первом случае средняя скорость определяется средним арифметическим от скоростей на каждом участке движения. К сожалению, многие учащиеся ошибочно полагают, что среднюю скорость так можно вычислять всегда, для любого типа движения. Это неверно. Уже во втором из рассмотренных примеров мы убедились, что при движении, в котором на каждом участке тело проходит одинаковый путь (но с различными скоростями), средняя скорость выражается гораздо более сложно:

$$\frac{1}{v_{\text{ср}}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\ldots+\frac{1}{v_n}\right).$$

Поэтому при вычислении средней скорости лучше всего пользоваться общим определением, которое справедливо всегда.

Часто среднюю скорость находят по графику зависимости модуля мгновенной скорости от времени (рис. 3). Площадь под кривой $v(t)$ определяет пройденный телом путь, поэтому в соответствии с определением средней скорости по графику можно подобрать такое значение неизменной скорости, которое позволит пройти то же расстояние и за то же время, что и при истинном движении с меняющейся скоростью.

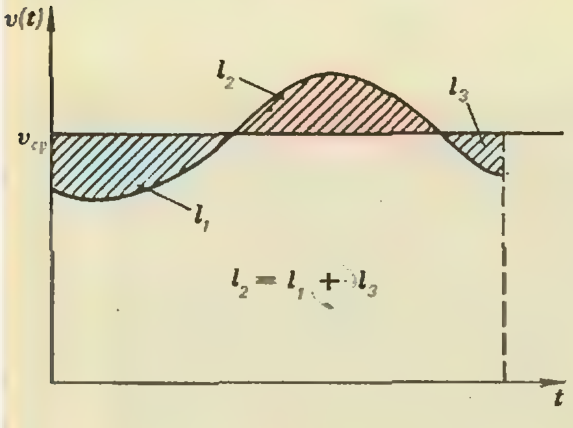


Рис. 3.

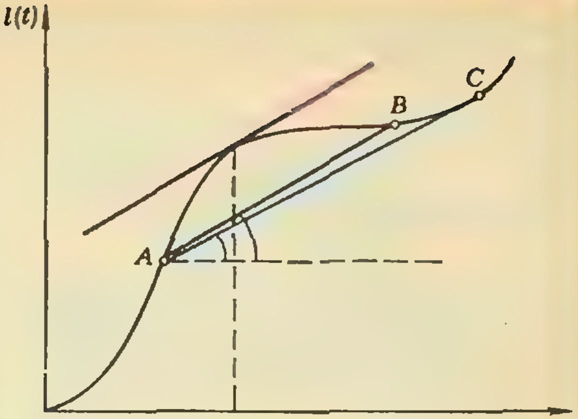


Рис. 4.

Среднюю скорость можно определять и по графику зависимости пути от времени ($l(t)$). Поскольку $v_{\text{ср}}=l/t$, то на этом графике средняя скорость определяется тангенсом угла наклона прямой, соединяющей начальную и конечную точки рассматриваемого участка движения, к оси времени (рис. 4). По этому графику легко судить и об изменении средней скорости в зависимости от выбора промежутка времени, на котором проводится усреднение. Достаточно изобразить соответствующие отрезки прямых и сравнить углы их наклона к оси времени. Такой графический анализ наглядно убеждает, что понятие средней скорости имеет смысл только на определенном отрезке пути (или времени).

Зависимость пути от времени при прямолинейном неравномерном движении позволяет, например, легко отыскать тот момент времени, в который модуль мгновенной скорости совпадает с величиной средней скорости на рассматриваемом участке движения. Для этого нужно соединить отрезком прямой начальную и конечную точки графика $l(t)$ на рассматриваемом участке и параллельным переносом полученного отрезка до касания с графиком найти искомую точку (или точки).

Величина средней скорости иногда позволяет оценить предельно возможные значения скоростей тела на отдельных участках его движения. Так, зная, что средняя скорость движения на двух одинаковых участках пути равна 12 м/с, мы сразу же можем сказать, что значение скорости равномерного движения ни на одном из них не может быть меньше 6 м/с (убедитесь в этом самостоятельно).

А. И. Шапиро

О явлениях переноса

Все окружающие нас тела, даже самые маленькие по размерам, состоят из огромного числа молекул. Движение каждой молекулы описывается законами механики, однако поведение большого числа молекул подчиняется качественно иным закономерностям. Можно ли установить эти закономерности, зная характер движения отдельных молекул? В принципе — да, но на практике это очень сложная задача.

К счастью, оказывается, что для изучения некоторых свойств макроскопических тел совсем не обязательно интересоваться каждой молекулой в отдельности. Вполне достаточно общего представления о внутренней структуре тел как о системе движущихся и сталкивающихся друг с другом частиц. При этом поведение макроскопических тел можно характеризовать специальными физическими величинами, которые относятся ко всей совокупности молекул, слагающих тела, то есть являются средними характеристиками. Так, например, плотность вещества определяется средним числом молекул в единице объема, температура тела — их средней кинетической энергией, и т. п.

В состоянии равновесия любые средние характеристики тела одинаковы во всех его точках. Но легко представить ситуацию, когда равновесия нет. Рассмотрим пример.

Если поставить сосуд с водой на горячую плиту, то сначала температура воды у дна будет выше, чем на поверхности. Лишь по истечении довольно большого промежутка времени вода прогреется равномерно по всему объему. Как же происходит этот прогрев?

Мы уже говорили, что вещество — это система движущихся и взаимодействующих друг с другом молекул, средняя кинетическая энергия которых тем больше, чем выше температура. Но в нашем примере это означает, что энергия молекул, «стартующих» после очередного столкновения из области жидкости с повышенной температурой и попадающих в область, температура которой ниже, оказывается больше, чем энергия окружающих молекул. Сталкиваясь с молекулами этого более холодного слоя, «горячие» молекулы передают им часть своей избыточной энергии. Те, в свою очередь, передают часть полученной энергии в еще более холодные области и т. д. Другими словами, в системе возникает поток энергии от горячих областей к холодным. Этот процесс называют *теплопроводностью*. Существенно, что из-за столкновений молекул характерные расстояния, на которые они смещаются, порядка расстояния между молекулами (в жидкости, например, это 10^{-10} м), то есть перенос вещества при таком процессе отсутствует.

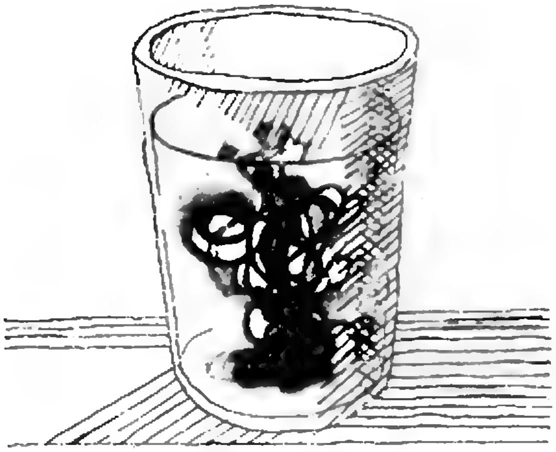
Итак, при чистой теплопроводности поток энергии есть, а потока вещества нет. Конечно, можно спросить: «А в каком смысле «чистой»? Значит, бывает и «грязная» теплопроводность?». В определенном смысле — да. В некоторых случаях разность температур может привести к направленному течению жидкости (конвекции), и тогда тепло будет переноситься не только за счет столкновения молекул, но и в результате перемешивания жидкости. Это случай специальный, и рассматривать его здесь мы не будем.

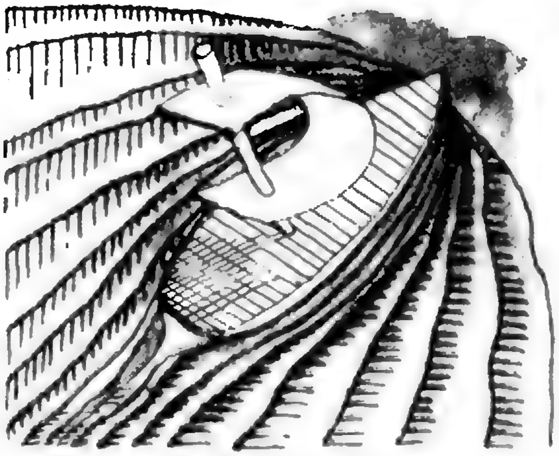
В случае чистой теплопроводности оказывается, что поток энергии в системе пропорционален перепаду тем-

ператур в ней, то есть зависит прежде всего от внешних условий. А вот коэффициент пропорциональности определяется исключительно внутренним устройством вещества (тем, как движутся молекулы внутри него и как они взаимодействуют (сталкиваются) друг с другом). Этот коэффициент называется *коэффициентом теплопроводности* (λ). Он различен у разных веществ. Так, теплопроводность любого металла на несколько порядков больше теплопроводности дерева. Именно поэтому трудно прикоснуться к металлической ложке, опущенной в стакан с горячим чаем, но ничего не стоит держать в руке горящую спичку.

Другой пример. Рассмотрим смесь двух веществ, например воду и каплю чернил в ней. Очевидно, что капля будет расплываться, стремясь равномерно растечься по всему объему воды, то есть будет происходить процесс *диффузии*. В отличие от первого примера здесь возникает поток вещества — чернил, направленный из области, где чернил много, в область, где их мало. Этот поток пропорционален разности концентраций чернильных молекул в различных областях пространства. Коэффициент пропорциональности между потоком вещества и разностью концентраций называется *коэффициентом диффузии* (D). Коэффициент диффузии так же, как и коэффициент теплопроводности, различен у разных веществ и определяется их внутренним устройством (способностью молекул одного сорта «протискиваться» сквозь толщу других молекул).

Наконец, последний пример. Представьте себе твердое тело, движущееся в жидкости. Как показывает опыт, слои жидкости, непосредственно примыкающие к движущемуся телу, как бы прилипают к нему и вовлекаются в направленное движение. За счет обмена молекулами между слоями это движение передается соседним слоям, от них — следующим и т. д. Таким образом возникает поток импульса от слоев, обладающих большей скоростью, к слоям с меньшей скоростью. Именно в этом и состоит механизм *жидкого трения*, или *вязкости*. Действительно, увеличение импульса жидкости означает, что на нее со стороны тела действует какая-то сила (изменение импульса системы равно импульсу внешних сил, действующих на нее). Следовательно, согласно третьему закону Ньютона со стороны жидкости на тело действует сила, направленная в противоположную сторону. Это и есть сила жидкого трения.





Поток импульса от слоев, движущихся быстро, к слоям, движущимся с меньшей скоростью, пропорционален разности скоростей этих слоев. Коэффициент пропорциональности между потоком импульса и разностью скоростей называется *коэффициентом вязкости* жидкости (η).

Все рассмотренные примеры характеризуются общим свойством — переносом некоторого признака (энергии в первом примере, вещества во втором и импульса в третьем) из одних областей системы в другие. Неслучайно поэтому, что явления такого рода называются *явлениями переноса*. Каждое из них характеризуется своим коэффициентом переноса, и задача теории — уметь их вычислять. В общем случае это очень трудная задача, до сих пор полностью не решенная. Однако для газа рассчитать коэффициенты переноса рассмотренных трех конкретных процессов большого труда не представляет.

Оказывается, все три коэффициента (теплопроводности, диффузии и вязкости) пропорциональны длине свободного пробега молекул (l) и средней скорости их теплового движения (v): $\lambda \sim D \sim \eta \sim lv$. Такая зависимость коэффициентов переноса от характеристик молекулярного движения очень естественна. Ведь средняя скорость молекул v определяет скорость переноса того или иного признака в процессе установления равновесия. Длина же свободного пробега l появляется в формуле потому, что после каждого столкновения параметры движения молекулы определяются параметрами системы в тех местах, где эти столкновения происходят, то есть в точках, отстоящих друг от друга на расстояние l. Так, в нашем примере с теплопроводностью величина энергии, передаваемой молекулой при очередном столкновении, определяется разностью температур в тех точках среды, где произошло это и предыдущее столкновение.

Е. Е. ГОРОДЕЦКИЙ

Что такое параметрический резонанс?

Из школьного курса физики (см. «Физику 10», § 9 и 20) вы знаете о резонансе в колебательной системе, который возникает в результате воздействия периодической внешней силы, изменяющейся с частотой, равной частоте свободных колебаний системы (в действительности из-за трения резонанс наступает при несколько меньшей частоте). Оказывается, наличие такой силы — не единственная возможность возникновения резонансных явлений. Вот наглядный пример. Раскачиваясь на качелях, вы можете значительно увеличить амплитуду их колебаний только благодаря тому, что будете периодически приседать и распрямляться, то есть изменять положение своего центра тяжести.

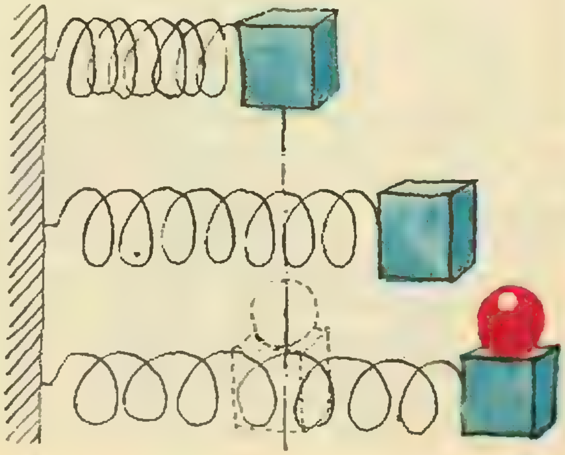
Из этого примера видно, что причиной резкого возрастания амплитуды колебаний может служить не только периодическая внешняя сила, но и периодическое изменение одного из параметров колебательной системы при условии, что частота этих изменений определенным образом связана с частотой собственных колебаний системы. Такой резонанс называют *параметрическим.*

Для выяснения механизма этого способа усиления колебаний обратимся к хорошо знакомой вам системе — грузику на пружине («Физика 10», § 2). Однако вместо того чтобы возбудить обычные свободные колебания грузика, сделаем следующее.

В момент, когда грузик массой m проходит положение равновесия с максимальной скоростью v_m, положим на него некоторый дополнительный грузик массой Δm, скажем, пластилиновый шарик. Для того чтобы скорость грузика в этот момент не изменилась, предварительно разгоним шарик до той же скорости v_m. Отметим, что в процессе разгона шарика мы совершаем работу, которая в конечном счете идет на увеличение полной энергии системы до величины $(m+\Delta m)v_m^2/2$. Это увеличение энергии приводит к большему, по сравнению с прежним, максимальному растяжению пружины x'_m, величину которого можно найти из закона сохранения энергии

$$\frac{(m+\Delta m)v_m^2}{2} = \frac{k(x'_m)^2}{2}.$$

В момент, когда пружина максимально растянута, а скорость грузика равна нулю, мы мгновенно снимем шарик. Так как в этот момент вся энергия системы заключена только в растянутой пружине, уменьшение массы грузика никак не изменит полной энергии системы. Таким образом, нам удалось ввести в систему дополнительную энергию $\Delta m v_m^2/2$. При этом



энергия системы увеличилась в

$$n=\frac{(m+\Delta m)v_m^2/2}{mv_m^2/2}=1+\frac{\Delta m}{m}\text{ раз.}$$

Дадим нашей системе «отдохнуть» и, когда грузик будет снова проходить (в обратном направлении) положение равновесия, повторим ту же процедуру с пластилиновым шариком. Однако теперь благодаря предыдущему вмешательству максимальная скорость у грузика оказывается равной $v'_m=\sqrt{(m+\Delta m)/m}\,v_m$, и, разгоняя шарик, прежде чем положить его на грузик, нам придется совершить работу бо́льшую, чем в первый раз $(\Delta m(v'_m)^2/2>\Delta mv_m^2/2)$.

Итак, каждые полпериода мы будем увеличивать энергию системы, и, понятно, что это увеличение энергии приводит к возрастанию амплитуды колебаний (будем считать массу шарика столь малой по сравнению с массой грузика, что изменением частоты колебаний системы можно пренебречь).

Подчеркнем тот факт, что в отличие от обычного резонанса, при котором частота внешней силы должна быть равна собственной частоте колебаний системы, в случае параметрического резонанса усиления колебаний происходят наиболее эффективно, когда частота изменения того или иного параметра системы вдвое превышает ее собственную частоту колебаний.

Рассмотрим еще один пример, иллюстрирующий общий принцип возникновения параметрического резонанса. Представим колебательный контур, состоящий из конденсатора и катушки, в котором могут происходить свободные электрические колебания («Физика 10», § 13). Будем периодически изменять емкость конденсатора. Для этого в момент, когда заряд на конденсаторе максимален, быстро раздвинем его пластины, когда же заряд на пластинах равен нулю, так же быстро вернем их в прежнее положение. Продолжая этот процесс, можно убедиться в том, что амплитуда колебаний в такой системе будет неограниченно возрастать, хотя в контуре и отсутствует внешняя ЭДС. Дело в том, что при раздвигании заряженных пластин мы каждый раз совершаем положительную работу, а сдвигая незаряженные пластины, никакой работы не совершаем вовсе. Легко видеть, что и в этом процессе частота внешнего воздействия вдвое превышает собственную частоту колебаний системы.

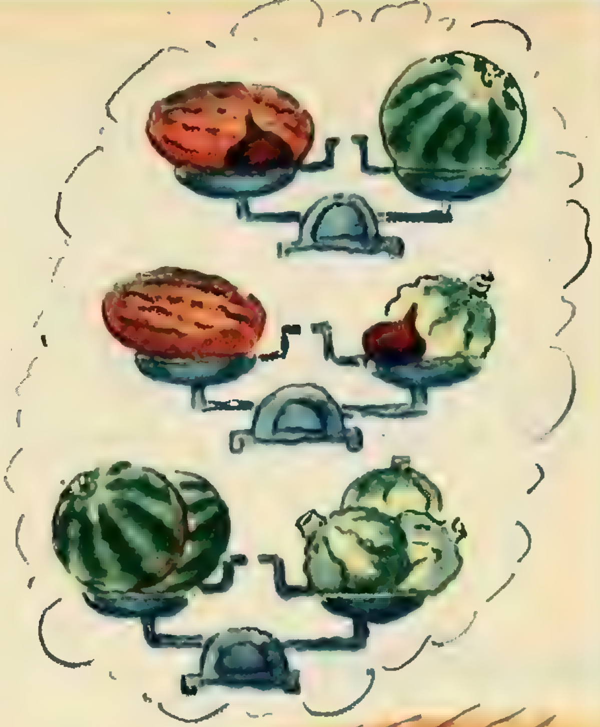
А что произойдет, если мы возьмем колебательный контур, в котором изначально отсутствуют явно выраженные колебания, и начнем чисто механически (меняя расстояние между пластинами или их площадь) с частотой, вдвое превышающей собственную, изменять емкость конденсатора? Оказывается, и в этом случае будет происходить процесс нарастания колебаний! Дело в том, что на пластинах конденсатора всегда есть некоторый малый, случайно образовавшийся, заряд. Этот заряд даст «начальный толчок» быстрому росту колебаний по схеме, описанной выше. На этом принципе устроены генераторы и усилители электромагнитных колебаний, получившие название параметрических машин. Первая параметрическая машина была сконструирована в 1933 году на основе исследований советских физиков — академиков Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси.

Ну, а если система не идеальна, то есть в ней есть потери энергии?

При обычном резонансе потери энергии определяют максимальную амплитуду колебаний. В случае же параметрического резонанса роль этих потерь принципиально иная. Как мы уже обсуждали, при параметрическом резонансе за каждые полпериода энергия системы возрастает в определенное число раз, но при этом часть энергии безвозвратно теряется (выделяется в виде тепла). Если возрастание энергии превышает потери, то колебания, хотя и медленнее, чем в отсутствие потерь, но будут неуклонно нарастать. Понятно, что для возбуждения колебаний в системе с трением следует в бо́льшей степени изменять соответствующий параметр системы — на грузик класть шарик большей массы, пластины конденсатора раздвигать на большее расстояние. Качающемуся же на качелях придется приседать глубже, однако если удастся начать раскачку, то, не изменяя глубины приседания, можно будет раскачаться очень сильно.

А. А. Варламов, А. И. Черноуцан

квант для младших школьников



Задачи

1. Был уже вечер, покупатели разошлись по домам, а до конца работы у Наташи — молодой продавщицы овощного магазина — оставалось еще полчаса. На прилавке лежали три кочана капусты, два арбуза, дыня и свекла. Чтобы скоротать время, Наташа стала взвешивать эти овощи и с удивлением обнаружила, что все три кочана капусты весят одинаково, и у обоих арбузов равный вес. Более удивительным было равновесие еще в трех случаях, изображенных на рисунках. А теперь ответьте: во сколько раз дыня тяжелее свеклы?

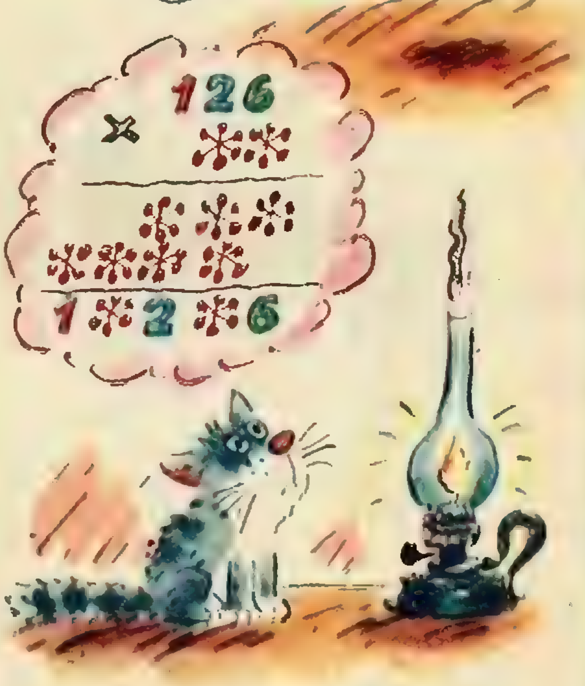
2. Восстановите цифры, замененные звездочками (см. рисунок).

3. Предшественница электрической лампочки — керосиновая лампа — временами коптила, поэтому над ней на потолке образовывалось черное пятно. Но и над светильниками с электрическими лампочками иногда возникает темное пятно на потолке. Неужели и электрические лампы коптят?

4. При каком наименьшем количестве монет можно уплатить без сдачи любую сумму от 1 копейки до 1 рубля?

5. В момент, когда мы выключаем газ под кипящим чайником, из-под его крышки вырываются клубы пара. Почему?

Эти задачи предложили В. Д. Вьюн, А. А. Никаноренков, Н. П. Долбилин, А. П. Савин, Э. С. Парилис



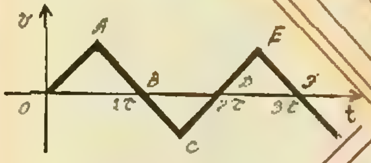
калейдоскоп

Вопросы и задачи

1. Два поезда идут навстречу друг другу: один — ускоренно на север, другой — замедленно на юг. Как направлены ускорения поездов?

2. С помощью графика скорости равноускоренного движения с начальной скоростью, равной нулю, покажите, что пути, пройденные телом за последовательные равные промежутки времени, пропорциональны ряду нечетных чисел.

3. На рисунке приведен график скорости тела, движущегося прямолинейно.



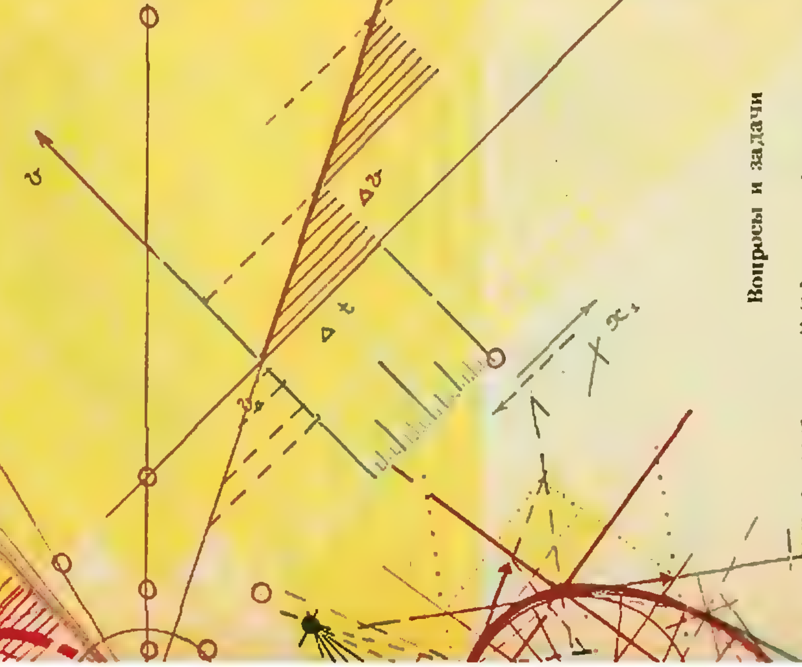
Постройте график его ускорения.

4. Два тела, массы которых M и m ($M > m$), подняты на одинаковую высоту над землей и одновременно отпущены. Одновременно ли они приземлятся, если сила сопротивления воздуха для обоих тел одинакова и постоянна?

$$\vec{a}=\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad \bar{a} \qquad \vec{a}=\frac{\vec{F}}{m}$$

«...теперь же перейдем к движению ускоренному.
Прежде всего необходимо будет подыскать этому естественному явлению
соответствующее точное определение и дать последнему объяснение.
...равномерно —
или единообразно — ускоренным движением
называется такое, при котором после выхода из состояния покоя
в равные промежутки времени прибавляются и равные
моменты [приращения] скорости.»

Г. Галилей



калейдоскоп

Любопытно, что...

...даже Тартарен из Тараскона, знаменитый своей меткой стрельбой по фуражкам, почувствовал бы, по-видимому, смущение, если бы ему предложили выпустить пулю, которая, пролетев несколько десятков тысяч километров, должна была бы попасть в копейку. А ведь подобная задача решена физиками в гигантских ускорителях элементарных частиц.

Микроопыт

Трогаясь со станции, поезд некоторое время движется практически равноускоренно. Определите величину ускорения в этот период с помощью нити, гирьки и линейки.

Вопросы и задачи

6. Ускорение ракеты возрастает даже в том случае, когда равнодействующая приложенных к ней сил остается неизменной. Почему?

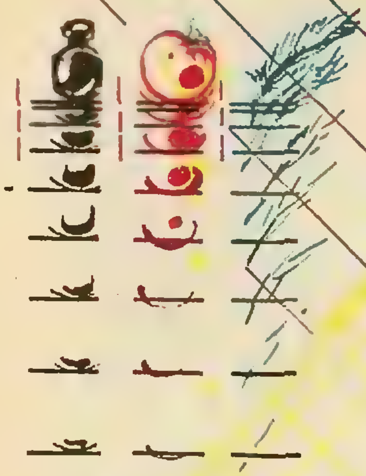
7. Отчего мы не замечаем движения Земли вокруг Солнца, хотя скорость этого движения — 30 км/с?

8. Легче ли побить спортивные рекорды на экваторе, нежели в более высоких широтах?

9. С каким минимальным ускорением можно пройти верхнюю точку «мертвой петли»?

Ускорение

5. Кабина лифта движется с ускорением a. Пассажир, находящийся в ней, роняет книгу. Чему равно ускорение книги относительно лифта, если он движется вверх? вниз?



????????????????

...примером сообщения телу центростремительного ускорения может служить эпизод похищения двухпудовых гирь, описанный в «Золотом теленке» И. Ильфа и Е. Петрова: «Паниковский нес свою долю обеими руками, выпятив живот и радостно пыхтя... Иногда он никак не мог повернуть за угол, потому что гиря по инерции продолжала тащить его вперед. Тогда Балаганов свободной рукой придерживал Паниковского за шиворот и придавал его телу нужное направление».

Любопытно, что...

квант 9/86

А так ли хорошо знакомо вам понятие

УСКОРЕНИЕ ?

Это понятие ввел Галилей, проводя опыты по установлению связи между скоростью падения тел и силой тяжести.
Оно оказалось чрезвычайно важным и плодотворным для дальнейшего развития механики, так как именно ускорение характеризует результат воздействия одного тела на другое.
Понятие «ускорение» позволило в принципе описать любые механические движения тел, в том числе неравномерные и криволинейные.
Поэтому практически всякий раз, рассчитывая, как движутся тела, мы не можем обойтись без законов и соотношений, в которых основным «действующим лицом» предстает ускорение.

траектория
x_2
x

10. Какой продолжительности T должны быть сутки на Земле, чтобы тела на экваторе не имели веса?

11. Как меняется период маятниковых часов, установленных на космическом корабле, при выводе его на орбиту?

квант 9/86

Что читать об ускорении в «Кванте»

(публикаций последних лет)
1. *«Как решается основная задача механики» — 1984, № 2;*
2. *«Движение по окружности» — 1984, № 6;*
3. *«Как вводятся физические величины» — 1984, № 10*
4. *«Закон нечетных чисел для свободного падения тел» — 1984, № 12;*
5. *«Стробоскопический эффект и измерение ускорения» — 1985, № 9.*

Ускорение

Сколько велосипедов?

С. Н. ОЛЕХНИК

Подняв облако пыли, по проселочной дороге промчалась ватага ребят на двухколесных велосипедах, а вслед за ними — ребята на трехколесных велосипедах. Самые маленькие вовсю крутили педалями, стараясь не отставать от больших.

Семиклассники Саша и Наташа, пропустив велосипедистов, снова зашагали по дороге.

«Я насчитал всего 30 колес»,— сказал Саша. «А я насчитала 12 ребят»,— сказала Наташа.

Через некоторое время Саша, обращаясь к Наташе, сказал: «Я знаю, сколько было двухколесных и трехколесных велосипедов!».

«Наверное, это нетрудно посчитать»,— ответила Наташа.— Если ты дашь мне листок бумаги и карандаш, я тоже скажу, сколько было двухколесных и трехколесных велосипедов».

Наташа обозначила число двухколесных велосипедов через x, число трехколесных велосипедов — через y, записала систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=12, \\ 2x+3y=30 \end{cases}$$

и, решив ее, получила, что $x=y=6$.

«Это верный ответ — сказал Саша.— Но задача решается в уме. Слушай! Если бы мы посадили всех ребят на двухколесные велосипеды, то двухколесных велосипедов было бы 12, а колес всего было бы 24».

«А мы насчитали 30 колес: значит, разница в 6 колес получилась за счет трехколесных велосипедов»,— перебила Сашу Наташа.

«Верно: значит, трехколесных велосипедов 6; а тогда и двухколесных также 6».

«Смотри, как просто! Такую задачу может решить и первоклассник. Давай-ка предложим ее на математическом кружке для младших классов да подберем еще несколько подобных задач. Я, например, вспомнила такую:

В клетке находятся кролики и фазаны. Известно, что всего в клетке 35 голов и 94 ноги. Требуется узнать, сколько фазанов и сколько кроликов в клетке.»

«А я знаю несколько старинных задач:

Купил 112 баранов старых и молодых, дал 49 рублей и 20 алтын. За старого платил по 15 алтын и по 2 деньги, а за молодого по 10 алтын; и ведательно есть, колико старых и молодых баранов купил он. (1 алтын=3 копейки=6 денег; 1 рубль=100 копеек.)

Некто купил 64 рулона сукон. Из них 20 рулонов белых, 13 рулонов черных, 5 красных, 19 зеленых, 7 лазоревых, и дал за них 486 рублей. Цена же их была не одинакова: за черный рулон он платил четырьмя рублями дороже белого, за красный — тремя рублями дешевле черного, за зеленый — двумя рублями дешевле красного, и за лазоревый — одним рублем дороже зеленого. Ведательно есть, колико денег он платил за каждый рулон.

Двенадцать человек несут 12 хлебов: каждый мужчина несет по 2 хлеба, женщина — по половине хлеба, а ребенок — по четверти хлеба. Сколько было мужчин, женщин и детей?».

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. а) Пусть $a>0$, $b>0$, $c>0$. Докажите неравенство

$$abc\geqslant(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$$

б) Пусть r и R — соответственно радиусы окружности, вписанной в треугольник, и окружности, описанной около него. Докажите, что $R\geqslant 2r$. Выясните, в каком случае это неравенство превращается в равенство.

2. Найдите наименьшее значение многочлена

$$x^6+2x^4+2x^3+x^2+2x-1.$$

3. Докажите, что число n^4+64 является составным.

4. Докажите, что уравнение

$$x^2+y^3+z^5=t^7$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

5. На сторонах AB и BC треугольника ABC даны точки M и N такие, что $AM:MB=BN:NC$. Пусть Q — точка пересечения прямых AN и CM. Докажите, что площадь четырехугольника $MBNQ$ равняется площади треугольника ACQ.

Девятый класс

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-yz=y-x, \\ y^2-xz=z-y, \\ z^2-xy=x-z. \end{cases}$$

7. Углы A, B, C треугольника ABC равны соответственно α, β, γ; стороны, лежащие против соответствующих углов, равны a, b, c.

а) Докажите неравенство

$$a\cos\alpha+b\cos\beta<c.$$

б) Найдите наибольшее значение произведения

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Для какого треугольника это наибольшее значение достигается?

8. Найдите все целые k, при которых k^5+3 делится на k^2+1.

9. В треугольник ABC вписан треугольник MNP ($M\in AB$, $N\in BC$, $P\in AC$) так, что сторона MN перпендикулярна стороне BC, а сторона MP перпендикулярна стороне AC. Найдите положение точки M (на стороне AB), при котором сторона PN будет наименьшей.

10. Докажите, что уравнение

$$x^{10}-x^7+x^2-x+1=0$$

не имеет решений.

Десятый класс

11. Решите уравнение

$$x^2+2x\sin xy+1=0.$$

12. Вычислите сумму

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

13. Докажите равенство ($n\geqslant 2$)

$$\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}3x+\ldots$$
$$\ldots+\operatorname{tg}(n-1)x\operatorname{tg}nx=\frac{\operatorname{tg}nx}{\operatorname{tg}x}-n.$$

14. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1=0.$$

15. На сторонах остроугольного треугольника, как на диаметрах, во внешнюю сторону построили полуокружности. Высоты треугольника продолжили до пересечения с построенными полуокружностями, после чего эти точки пересечения соединили с ближайшими вершинами треугольника. Докажите, что из получившегося шестиугольника можно склеить тетраэдр.

В подготовке публикации использовались задачи, предложенные *С. Р. Сефибековым*, а также *А. А. Егоровым*, *В. Н. Дубровским* и *Э. А. Ясиновым*.

Урок одной задачи

(Начало см. на с. 23)

претацией среднего гармонического чисел a и b (здесь они основания трапеции). Отрезок MN меньше отрезка L_1L_2 — среднего геометрического чисел a и b, который изображается отрезком, параллельным основаниям и расположенным так, что трапеции BL_1L_2C и L_1L_2AD подобны. Отрезок MN меньше отрезка L_3L_4 — средней линии трапеции, — он является интерпретацией среднего арифметического двух чисел, и, наконец, отрезок MN меньше отрезка L_5L_6 — среднего квадратичного двух чисел a и b — отрезка, разбивающего трапецию на две равновеликие части и параллельного основаниям, то есть

$$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

задачник кванта

Задачи

M1001 — M1005; Ф1013 — Ф1017

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 ноября 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9 — 86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1001, M1002» или «Ф1013». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию и имя пишите печатными буквами. Задачи M1004 и M1005 предлагались на Всесоюзной олимпиаде школьников в 1986 году (об этой олимпиаде будет рассказано в «Кванте» № 11). задачи M1001 и M1003 предлагались на ленинградской, M1002 б) — на московской городских олимпиадах. Среди других задач этих олимпиад (см. стр. 57—58 этого номера) также немало интересных, и мы предла-

M1001. В куче 1001 камень. Она произвольно делится на две кучи, подсчитывается число камней в них и записывается произведение этих двух чисел. Затем с одной из этих куч (в которой больше одного камня) проделывается та же операция: она делится на две и записывается произведение чисел камней в двух вновь образовавшихся кучах. Затем та же операция повторяется с одной из трех получившихся куч и так далее, пока во всех кучах не станет по одному камню. Чему равняется сумма 1000 записанных произведений?

А. С. Меркурьев

M1002. а)*Рассеянный математик, забыв трехзначный код своего подъезда, нажимает кнопки (с цифрами 0,1,...,9) по одной в секунду. Дверь откроется, если три цифры кода в нужном порядке будут набраны подряд. Математик уверен, что даже в случае «крайнего невезения» (если нужная комбинация встретится последней) он сможет войти в подъезд не позже чем через 16 мин. 42 сек (1002 сек). Прав ли он? Как он должен действовать, чтобы попасть домой за наименьшее время?

Ответьте на последний вопрос, если

б) исправны только кнопки с цифрами 1, 2, 3 (другие цифры в код не входят);

в)*исправны все кнопки, но математик помнит, что все три цифры кода различны.

M1003. В треугольнике ABC проведены три высоты AH, BK, CL. Докажите равенства

$$AK \cdot BL \cdot CH = AL \cdot BH \cdot CK = HK \cdot KL \cdot LH$$

С. А. Генкин

M1004. Через вершину A треугольника ABC, в котором $AB \neq AC$ проводятся всевозможные прямые. Докажите, что

а) на каждой их них найдется на более одной точки M, отличной от вершин треугольника, для которой $\angle ABM = \angle ACM$;

б) имеется не более пяти из этих прямых, на которых нет ни одной такой точки M.

О. Р. Мусин

M1005. Клетки квадратной таблицы размером $n \times n$ ($n \geqslant 3$) заполняются числами ± 1 по следующим правилам:

1) во все граничные клетки таблицы помещаются числа -1;

2) число, помещаемое в очередную незаполненную

гаем нашим читателям (кроме москвичей и ленинградцев) присылать их решения до 1 декабря — они также будут учитываться в конкурсе «Задачника Кванта». Напоминаем, что при определении победителей конкурса, приглашаемых на республиканские олимпиады, мы сможем учесть письма, полученные не позже 10 декабря.

клетку таблицы, равно произведению ближайших к этой клетке чисел, расположенных по разные стороны от нее и лежащих или в одной строке с ней, или в одном столбце с ней. Так делается до тех пор, пока все пустые клетки таблицы не будут заполнены.

а) Какое наибольшее количество $+1$ может получиться в таблице?

б) Какое наименьшее количество $+1$ может получиться в таблице?

Н. Х. Агаханов

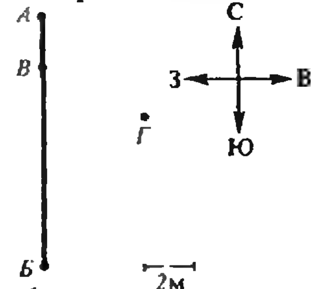


Рис. 1.

Ф1013. Два спортсмена стоят в точках *А* и *Б* и держат резиновый шнур. По сигналу спортсмен *А* начинает двигаться на восток со скоростью $v_0=1$ м/с, а спортсмен *Б* — на юг с постоянным ускорением. Найдите это ускорение, если известно, что узел *В*, завязанный на шнуре, при движении прошел через точку *Г* (рис. 1; масштаб указан на рисунке).

С. С. Кротов

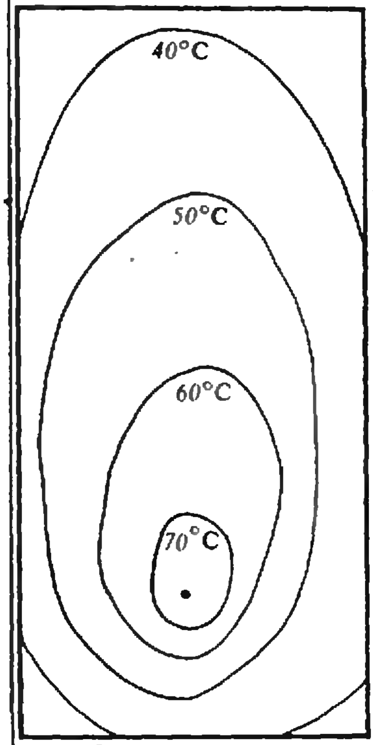


Рис. 2

Ф1014. Мощный транзистор, выделяющий тепло, закреплен на теплоотводящей пластине, обдуваемой воздухом, температура которого равна 30 °С. На рисунке 2 показано распределение температур на пластине. Определите рассеиваемую мощность. Известно, что равномерно нагретая до 70 °С пластина рассеивает мощность $P=10$ Вт при температуре воздуха 20 °С. Теплоотдача пропорциональна разности температур пластины и воздуха.

А. Р. Зильберман

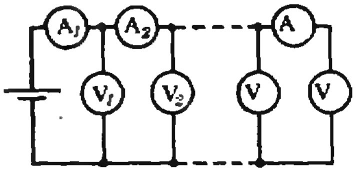


Рис. 3.

Ф1015. Схема, приведенная на рисунке 3, содержит 50 разных амперметров и 50 одинаковых вольтметров. Показания первого вольтметра $U_1=9{,}6$ В, первого амперметра — $I_1=9{,}5$ мА, второго амперметра — $I_2=9{,}2$ мА. Определите по этим данным сумму показаний всех вольтметров.

А. Р. Зильберман

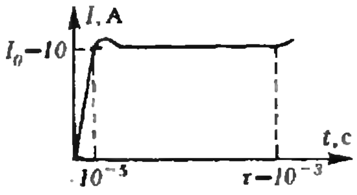


Рис. 4.

Ф1016. В катушку может свободно втягиваться ферромагнитный сердечник массой $M=0{,}01$ кг. Катушку подключили к источнику с напряжением $U=100$ В, и через нее протек ток, показанный на графике на рисунке 4. Оцените начальную индуктивность катушки. Пренебрегая потерями, найдите скорость сердечника в момент $\tau=10^{-3}$ с.

В. Е. Скороваров

Ф1017. Крупнейший в мире советский телескоп имеет в качестве объектива зеркало диаметром $D=6$ м. Какое время потребуется, чтобы, сравнивая полученные на этом телескопе фотоснимки, можно было заметить взаимное вращение нашей Галактики и туманности Андромеды вокруг общего центра масс?

Расстояние до Андромеды $R=1{,}42\cdot10^{11}\,R_0$, где R_0 — радиус орбиты Земли. Массы Галактики и Андромеды равны, соответственно, $M_Г=2{,}5\times10^{11}\,M_\odot$, $M_А=3{,}6\cdot10^{11}\,M_\odot$, где $M_\odot$ — масса Солнца. Фотографирование ведется в видимом свете на длине волны $\lambda=5\cdot10^{-7}$ м.

В. Е. Белонучкин

Problems

M1001—M1005; P1013—P1017

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than November 15th, 1986 to the following address: USSR, Moscow, 103006.

Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

M1001. There are 1001 pebbles in a heap. The heap is divided into two, the number of pebbles in each counted and the product of these two numbers written down. Then the same procedure is carried out with one of the two heaps (containing more than one pebble): it is divided in two, their pebbles counted, the two numbers multiplied and written down. Then this operation is continued with one of the three heaps obtained and so on until all the heaps contain only one pebble. Find the sum of the 1000 products written down.

A. S. Merkuriev

M1002a)* An absent-minded mathematician, having forgotten the three-digit code number of the lock to his apartement house's front door, pushes the buttons (with the digits 1,2,...,9), one each second. The door will open if the three digits of the code (in the correct order) are pressed successively. The mathematician is sure that even if he has the "worst luck" (the required combination appears last) he will open the front door no later than in 16 min 42 sec (1002 sec). Is he right? What must he do to get home as soon as possible?

Answer the last question if

b) only the buttons with the digits 1, 2, 3 work (the other digits do not appear in the code number);

c)* all the buttons work, but the mathematician remembers that the three digits in the code number are all different.

M1003. The altitudes of triangle ABC are AH, BK, CL. Prove that

$$AK \cdot BL \cdot CN = AL \cdot BH \cdot CK = HK \cdot KL \cdot LH.$$

S. A. Genkin

M1004. All the straight lines passing through vertex A of triangle ABC, where $AB \neq AC$, are considered. Prove that

a) each of these lines contains no more that one point M which is not a vertex of ABC and satisfies $\angle ABM = \angle ACM$;

b) no more than five of these lines contain no such point M.

O. R. Musin

M1005. The little squares of an n by n table ($n=3$) are filled with the numbers ± 1 according to the following rules:

1) the number -1 is put in all the little squares along the boundary;

2) any new number put in an empty little square must equal either the product of the two nearest numbers to it on opposite sides in the same column or to that for the same row; this is continued until all the empty little squares have been filled.

a) What greatest amount of «plus ones» may be obtained in the table?

b) What least amount of «plus ones» may be obtained in the table?

N. H. Agakhanov

P1013. Two athletes standing at the points A and $Б$ hold an elastic string. Then they simultaneously begin running, the athlete at A to the east with velocity $v_0 = 1$ m/s, the one at $Б$ to the south with constant acceleration. Find this acceleration if it is known that the little knot B tied on the string passes through the point $Г$ (see figure Рис. 1, p. 37; the scale is indicated on the figure).

S. S. Krotov

P1014. A powerful transistor giving out heat is fixed on a heatconducting plate which is ventilated by air at temperature 30 °C. The figure Рис. 2 shows the temperature distribution on the plate. Determine the dispersed power. It is known that the plate heated uniformly to 70 °C disperses a power of $P = 10$ W when the air temperature is 20 °S. The heat loss is proportional to the temperature difference between the plate and air.

A. R. Zilberman

P1015. The circuit shown on figure Рис. 3 contains 50 different ammeters and 50 identical voltmeters. The first voltmeter shows $U_1 = 9.6$ V, the first ammeter $I_1 = 9.5$ mA, the second ammeter $I_2 = 9.2$ mA. Use this data to determine the sum of showings of all the voltmeters.

A. R. Zilberman

P1016. A ferromagnetic core of mass $M = 0.01$ kg can freely move into a coil. The coil is connected to a source of voltage

$U=100$ V and current flows through it as plotted on figure Рис. 4, p. 37. Determine the original inductivity of the coli. Assuming losses negligible, find the velocity of the core at time $\tau=10^{-3}$ s.

V. E. Skorovarov

P1017. The world's largest (Soviet-made) telescope has a mirror of diameter $D=6$ m for a lens. How much time is required to register the relative rotation of our Galaxy and Andromeda about their common centre of mass by comparing photographs obtained by this telescope? The distance to Andromeda is $R=1.42\cdot10^{11}$ R_0, where R_0 is the radius of Earth's orbit. The masses of our Galaxy and Andromeda equal, respectively, $M_G=2{,}5\cdot10^{11}$ M_0 and $M_A=3.6\cdot10^{11}$ M_0, where M_0 is the Sun's mass. The photographs are taken in visible light of wavelength $\lambda=5\cdot10^{-7}$ m.

V. E. Belonuchkin

Решения задач

M981 — M985; Ф993 — Ф997

M981. *Докажите, что число 11...1 (1986 единиц) имеет по крайней мере а) 8, б) 28 различных делителей.*

а) Ясно, что если число a записывается n единицами, число b записывается k единицами и n делится на k, то и a делится на b. А поскольку $1986=2\cdot3\cdot331$, число $A=11...1$ из 1986 единиц имеет кроме числа 1 и самого A еще по крайней мере 6 делителей из одних единиц:

$$11,\ 111,\ 111\,111,\ \underbrace{11...1}_{331},\ \underbrace{11...1}_{662},\ \underbrace{11...1}_{993}.$$

б) Мы укажем не 28, а сразу 128 делителей числа A. Заметим, что 111111 раскладывается на 5 простых множителей:

$$111111=1001\cdot111=3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37.$$

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1)$$

$$x^{2k+1}+1=(x+1)(x^{2k}-x^{2k-1}+...+1)$$

Учитывая, что $10^{993}+1$ делится на $10^3+1=1001$, а $10^{993}-1$ — на $10^3-1=999$ (см. тождества на полях, где $n=2k+1=331$, $x=10^3$) и полагая $a=10^{331}$, получим

$$A=\frac{a^6-1}{9}=(a^3+1)\frac{a^3-1}{9}=$$

$$=3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37\cdot\frac{a^3+1}{1001}\cdot\frac{a^3-1}{999}.$$

Малая теорема Ферма: *Для любого целого числа n и простого p число n^p-n делится на p.*

(См., например, статью Н. Виленкина «Сравнения и классы вычетов», Квант, 1978, № 10, с. 7.)

Произведение любого набора из этих 7 множителей будет делителем A («пустому набору» отвечает делитель 1). Таким образом, мы нашли $2^7=128$ делителей, причем все они различны. Чтобы убедиться в этом, докажем, что все 7 множителей в выписанном разложении A попарно взаимно просты. В самом деле, *остаток от деления числа a на $m=10^6-1$ равен* 10, поскольку $10^{331}-10=10(10^{6\cdot55}-1)$ делится на m; поэтому $a^3\pm1$ при делении на m дает остаток $10^3\pm1$, то есть числа $(a^3+1)/1001$ и $(a^3-1)/999$ взаимно просты с m и, очевидно, взаимно просты друг с другом.

Нетрудно продолжить разложение A на взаимно простые множители:

$$A=3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37\,\frac{a+1}{11}\cdot\frac{a^2-a+1}{91}\cdot\frac{a-1}{9}\cdot\frac{a^2+a+1}{111}$$

(из выделенного выше курсивом утверждения следует, что сомножители здесь целые); отсюда видно, что A имеет не менее $2^9=512$ делителей. Продолжить это разложение «вручную» уже трудно. Однако из малой теоремы Ферма (приведенной на полях) следует, что $9A=10^{1986}-1$ делится на простое число 1987. Таким образом, один из 4 последних сомножителей должен делиться на 1987, а значит, A имеет не менее $2^{10}=1024$ делителей. Может быть, кому-то из читателей удастся поднять эту оценку еще выше?

Н. Б. Васильев, Л. Д. Курляндчик

◆

М982. *На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты ABB_1A_2, BCC_1B_2, CAA_1C_2. Докажите, что перпендикуляры к отрезкам A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, восставленные в их серединах, пересекаются в одной точке.*

Мы докажем, что рассматриваемые в задаче перпендикуляры содержат медианы некоторого треугольника, гомотетичного данному треугольнику ABC. Утверждение задачи следует тогда из того, что медианы любого треугольника пересекаются в одной точке.

Проведем через центры квадратов прямые, параллельные сторонам треугольника ABC (см. рис. 1); они ограничивают гомотетичный ему треугольник $A_0B_0C_0$. Поскольку прямые A_0B_0 и A_0C_0 — серединные перпендикуляры к отрезкам AA_2 и AA_1, точка A_0 их пересечения — это центр описанной окружности треугольника AA_1A_2 и, следовательно, лежит на серединном перпендикуляре p_a к отрезку A_1A_2. Аналогично серединные перпендикуляры p_b и p_c к отрезкам B_1B_2 и C_1C_2 проходят через точки B_0 и C_0 соответственно.

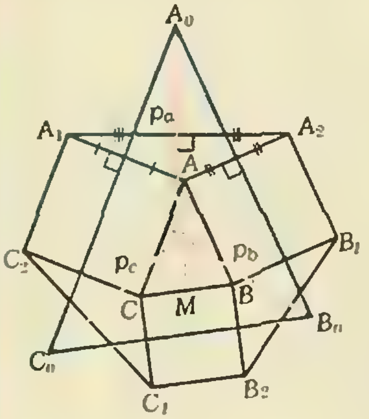


Рис. 1.

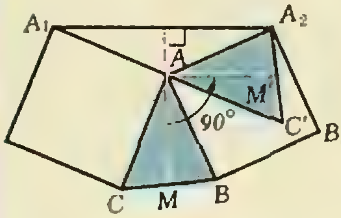


Рис. 2.

Остается доказать, что прямые p_a, p_b, p_c содержат медианы треугольника $A_0B_0C_0$. Для этого достаточно проверить, что они параллельны медианам треугольника ABC; например, что прямая p_a параллельна медиане AM, или что $AM\perp A_1A_2$. Повернем треугольник ABC на 90° вокруг точки A так, чтобы вершина B перешла в A_2 (рис. 2). Пусть точки M и C перейдут при этом в M' и C'; тогда M' — середина A_2C', а A — середина A_1C' ($A_1A=AC=AC'$, $\angle A_1AC=\angle CAC'=90^\circ$). Поэтому AM' — средняя линия треугольника $A_1C'A_2$, то есть $AM'\parallel A_1A_2$; в то же время $AM\perp AM'$.

Другое решение можно получить из следующего соображения: пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC; если параллельно перенести отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 на векторы $\vec{AO}$, $\vec{BO}$ и $\vec{CO}$ соответственно, то эти три отрезка сомкнутся в треугольник, причем прямые p_a, p_b и p_c будут его серединными перпендикулярами.

В. Н. Дубровский

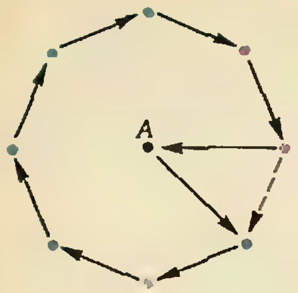
◆

М983. *В турнире с участием 16 теннисистов каждые двое играют одну партию.*
а) Приведите пример распределения результатов партий, при котором любых 10 участников можно расставить по кругу так, чтобы каждый выиграл у своего левого соседа.
б) Докажите, что если условие из пункта а) выполнено, то и любых 11 участников можно расставить по кругу таким образом.

а) Пусть 16 теннисистов стоят по кругу и каждый выиграл у 7 следующих за ним по часовой стрелке (как сыграли между собой теннисисты, отстоящие на 8 мест, несущественно). Такое распределение результатов удовлетворяет условию задачи: если произвольно отметить в круге 10 теннисистов — $A_1, A_2, \ldots, A_{10}$ (по часовой стрелке), — то между A_1 и A_2, A_2 и A_3, ..., A_{10} и A_1 будет не более чем по 6 теннисистов, поэтому в каждой из этих пар первый выиграл у второго.

Число 16 в условии задачи можно заменить на любое $n\geqslant 3$, а 10 — на любое k такое, что $(n+3)/2\leqslant k\leqslant n$, — пример строится точно так же. Если $k<(n+3)/2$, такого примера построить нельзя.

б) Докажем, что если любых k $(2<k<n)$ из n теннисистов, сыгравших друг с другом по одной



партии, можно расставить в соответствии с условием, то любых $k+1$ — тоже.

Рассмотрим некоторую группу из $k+1$ теннисистов и удалим из нее одного — A, а остальных k расставим по циклу (так, чтобы каждый выиграл у следующего). Отметим тех из k, которым A проиграл, красным, а тех, у кого он выиграл — синим (см. рисунок); хотя бы один красный и хотя бы один синий заведомо найдутся, потому что A вместе с любыми $k-1$ теннисистами можно расставить по циклу (то есть даже среди любых $k-1$ из наших k найдется и красный, и синий теннисист). Теперь выберем в нашем цикле любое место, где за красным по часовой стрелке стоит синий, и вставим между ними A.

Заметим, что при $n=16$, $k=10$ утверждение задачи останется верным, даже если не требовать, чтобы все теннисисты сыграли друг с другом. Чтобы убедиться в этом, достаточно из условия, что любых 10 теннисистов можно расположить по циклу, вывести такие следствия:

1) каждый выиграл не более 7 и проиграл не менее 7 партий;

2) среди любых 11 найдется такой, который сыграл со всеми 10 остальными.

К. П. Кохась, Н. Б. Васильев

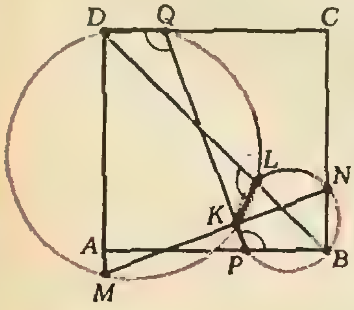
◆

M984. *Через произвольную точку K квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая его противоположные стороны AB и CD в точках P и Q. Доказать, что отличная от K точка пересечения окружностей, проходящих через точки K, B, P и K, D, Q, лежит на диагонали BD.*

Пусть L — точка пересечения диагонали BD с окружностью DQK. Докажем, что эта точка лежит и на второй окружности — BPK. Для определенности предположим, что точки K и Q лежат по разные стороны от BD, а P и K — по одну сторону (см. рисунок). Тогда, поскольку углы DQK и DLK вписаны в одну окружность и опираются на одну и ту же дугу DK,

$$\angle BPK=\angle PQD=\angle KLD=180^\circ-\angle KLB,$$

то есть четырехугольник $PKLB$ вписан в окружность.



Приведем еще одно решение, использующее поворот. Пусть M и N — точки пересечения окружностей KQD и KPB с прямыми AD и BC соответственно (см. рисунок). Ясно, что $\angle MKQ=\angle PKN=90^\circ$, то есть отрезок MN перпендикулярен PQ и проходит через точку K. Рассмотрим поворот на 90°, который переводит точку Q в M (а луч QC — в луч MD). Легко видеть, что при этом повороте прямая QP перейдет в MN, а прямая AB — в BC. Следовательно, точка P перейдет в N. Поскольку отрезки QM и PN видны из центра поворота под прямыми углами, этот центр лежит на пересечении данных окружностей. С другой стороны, он равноудален от прямых AB и BC (так как первая из них переходит во вторую) и, следовательно, лежит на диагонали BD.

В. Н. Дубровский

◆

M985. *Углом между двумя прямыми, пересекающимися в точке O, называется угол между их лучами с вершиной O, не превосходящий 90°. Сколькими способами через точку O в пространстве можно провести три прямые l_1, l_2, l_3 так, чтобы углы между l_2 и l_3, l_3 и l_1, l_1 и l_2 соответственно равнялись данным числам α_1, α_2, α_3? (Две тройки прямых*

Ответ: двумя способами, если все числа α_1, α_2, α_3 меньше 90° и удовлетворяют обеим системам неравенств (1) и (2), приводимым на полях; ни одним способом, если ни одна из этих систем не выполняется; одним способом в остальных случаях (в частности, для $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=30^\circ$ имеется 1 способ, а для $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=70^\circ$ — 2 способа).

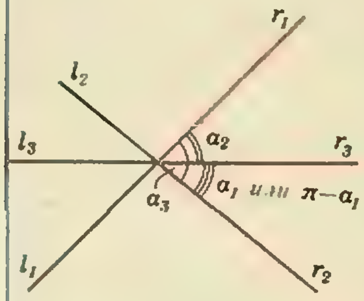
Напомним сначала необходимые и достаточные условия существования трехгранного угла с заданными плоскими углами. Они состоят в том, что

l_1, l_2, l_3 и l'_1, l'_2, l'_3 считаются одинаковыми, если они «конгруэнтны», то есть если существует поворот или симметрия относительно плоскости, переводящие l_i в l'_i для всех $i=1, 2, 3$.)

Предостережение: ответ зависит от величин α_1, α_2, α_3: например, для $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=30°$ он не такой, как для $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=70°$

каждый из плоских углов должен быть меньше суммы двух других, а сумма всех трех углов должна быть меньше 360° (см., например, учебное пособие: Геометрия 9—10 / Под ред. З. А. Скопеца — М.: Просвещение, 1981, с. 224). При этом трехгранный угол определяется своими плоскими углами однозначно (с точностью до конгруэнтности).

Пусть l_1, l_2, l_3 — прямые, удовлетворяющие условию задачи. Выберем на прямой l_1 один из лучей с началом O — обозначим его r_1, — а на прямых l_2 и l_3 — лучи r_2 и r_3, составляющие с r_1 углы величиной α_2 и α_3 (см. рисунок). Поскольку угол между прямыми l_2 и l_3 равен α_1, угол между лучами r_2 и r_3 может быть равен α_1 или $180°-\alpha_1$. Из сказанного о трехгранных углах следует, что существует не более двух различных (с точностью до конгруэнтности) троек прямых с заданными углами α_1, α_2, α_3 между ними. Они получаются при продолжении ребер двух трехгранных углов T и T' с плоскими углами α_1, α_2, α_3 и $180°-\alpha_1$, α_2, α_3 соответственно, причем для их существования необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (1) — в первом случае, (2) — во втором.



$$(1)\quad \begin{cases} \alpha_1 \leqslant \alpha_2+\alpha_3, \\ \alpha_2 \leqslant \alpha_1+\alpha_3, \\ \alpha_3 \leqslant \alpha_1+\alpha_2, \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \leqslant 360°, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} 180° \leqslant \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \\ \alpha_1+\alpha_2 \leqslant 180°+\alpha_3, \\ \alpha_1+\alpha_3 \leqslant 180°+\alpha_2, \\ \alpha_2+\alpha_3 \leqslant 180°+\alpha_1. \end{cases}$$

Заметим, что при $\alpha_1=90°$ все наши тройки прямых одинаковы ($T\cong T'$, так как $\alpha_1=180°-\alpha_1$). Разумеется, это верно и тогда, когда $\alpha_2=90°$ — в рассуждениях можно просто поменять нумерацию прямых. Итак, если хотя бы один из углов α_1, α_2, α_3 равен 90° и выполнены условия (1) (или совпадающие с ними в этом случае условия (2)), то наша задача имеет единственное решение.

Наконец, пусть все углы α_1, α_2, α_3 острые и удовлетворяют обеим системам (1) и (2). Покажем, что тогда тройки прямых, построенные по трехгранным углам T и T', различны. Для того чтобы две такие тройки оказались конгруэнтны, надо, чтобы угол T' был конгруэнтен углу T или вообще любому из 8 трехгранных углов с вершиной O, ребра которых лежат на тех же прямых l_1, l_2, l_3, что и ребра угла T. Легко видеть, что плоские углы этих трехгранных углов могут равняться (α_1, α_2, α_3) (для угла T и «вертикального» к нему угла), ($180°-\alpha_1$, $180°-\alpha_2$, α_3), (α_1, $180°-\alpha_2$, $180°-\alpha_3$) или ($180°-\alpha_1$, α_2, $180°-\alpha_3$). Но у угла T' ровно 2 острых угла (α_2 и α_3), а во всех выписанных тройках их число равно 3 или 1.

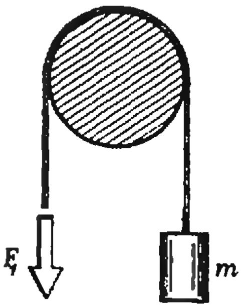
А. Б. Гончаров, В. Н. Дубровский

◆

Ф993. *Через неподвижное, горизонтально закрепленное бревно переброшена веревка. Чтобы удерживать груз массой $m=6$ кг, подвешенный на этой веревке, необходимо тянуть второй конец веревки с минимальной силой $F_1=40$ Н (см. рисунок). С какой минимальной силой F_2 надо тянуть веревку, чтобы груз начал подниматься?*

Вес груза $P=mg=60$ Н существенно больше силы F_1, с которой надо тянуть веревку. Такая ситуация нам хорошо знакома из жизни и связана с наличием трения между веревкой и бревном.

В первом случае (веревка неподвижна) силы трения направлены против действия веса груза и помогают удерживать веревку с грузом. Полный расчет распределения сил трения довольно сложен, так как абсолютное значение силы натяжения веревки (которая определяет силу реакции опоры в



точках соприкосновения веревки с бревном) меняется от F_1 (условие равновесия левого конца веревки) до $P=mg$ (условие равновесия правого конца). Однако для решения задачи нам достаточно заметить, что сила трения $F_{тр}$, пропорциональная в каждой точке силе реакции опоры, будет пропорциональна силе натяжения веревки; для определенности будем считать, что $F_{тр}$ пропорциональна бо́льшей силе натяжения, то есть $F_{тр}=kP$. Это означает, что $F_1=P-kP$, и отношение бо́льшей силы натяжения P к меньшей F_1 есть величина постоянная: $P/F_1=1/(1-k)=\mathrm{const}$.

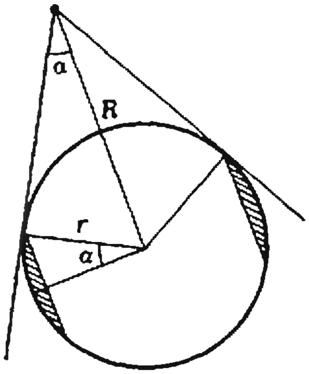
Во втором случае, когда мы хотим поднять груз, концы веревки как бы меняются местами. Сила трения оказывается направленной против действия силы F_2 и уже не помогает, а мешает. Отношение бо́льшей силы натяжения F_2 к меньшей P должно быть таким же, как и в первом случае $F_2/P=P/F_1$. Отсюда находим:

$$F_2=\frac{P^2}{F_1}=90\ \text{Н}.$$

А. И. Буздин

◆

Ф994. *Спутник исследует планету, плотность которой ρ, двигаясь по круговой орбите с периодом обращения T и фотографируя ее поверхность. Какая часть площади планеты останется неисследованной?*



Со спутника видна лишь часть поверхности планеты, попадающая внутрь конуса, вершина которого — точка, в которой в данный момент находится спутник, а образующие — касательные к поверхности планеты, проведенные из этой точки (см. рисунок). Таким образом, неисследованными остаются два сферических сегмента, площадь которых

$$s=2\cdot 2\pi rh=4\pi r^2(1-\cos\alpha)=4\pi r^2\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}\right),$$

где r — радиус планеты, R — радиус орбиты спутника. Отношение этой площади к площади поверхности планеты —

$$\frac{s}{S}=1-\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}\,. \qquad (*)$$

Выразим отношение r/R через приведенные в условии задачи данные.

Запишем уравнение движения спутника:

$$G\frac{Mm}{R^2}=ma,\ \text{или}\ a=G\frac{M}{R^2}=G\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\rho\cdot\frac{1}{R^2}.$$

С другой стороны, $a=(2\pi/T)^2R$. Следовательно,

$$\frac{4}{3}G\pi\rho\frac{r^3}{R^2}=\frac{4\pi^2}{T^2}R,$$

откуда

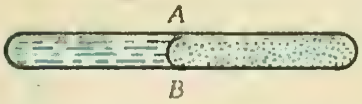
$$\frac{r}{R}=\sqrt[3]{\frac{3\pi}{G\rho T^2}}.$$

Подставляя это значение в (*), находим, какая часть площади поверхности планеты остается неисследованной:

$$\frac{s}{S}=1-\sqrt{1-\left(\frac{3\pi}{G\rho T^2}\right)^{2/3}}.$$

В. В. Дорин

Ф995. *В запаянном капилляре находится жидкость плотности ρ. При нагревании капилляра на малое ΔT оказалось, что граница AB между жидкостью и ее паром (см. рисунок) не сдвигается. При этом давление пара возросло на Δp. Как изменилась плотность жидкости?*



Из условия задачи следует, что состояния системы до и после нагревания отвечают равновесному сосуществованию жидкости и ее пара. Это означает, что на $p-T$-диаграмме оба состояния попадают на кривую сосуществования. Эта кривая, как известно, представляет собой зависимость давления p насыщенного пара от температуры T, причем зависимость эта монотонная. Касательные к кривой $p(T)$ составляют разные углы с осью T. Выберем ту точку на кривой, касательная в которой составляет угол $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\Delta p}{\Delta T}$ с осью T. Значения p и T, отвечающие этой точке, однозначно определяют начальные давление и температуру газа.

При нагревании жидкость должна была бы расширяться, то есть граница AB должна была бы двигаться вправо. Неподвижность границы означает, что при нагревании испаряется такая масса Δm жидкости, что оставшаяся жидкость плотностью $\rho - \Delta\rho$ занимает прежний объем. Как видно из рисунка, этот объем равен объему, занимаемому паром. Таким образом,

$$\Delta\rho = \frac{\Delta m}{V}. \qquad (*)$$

Изменение давления насыщенного пара связано с увеличением его температуры на ΔT. Из уравнений состояния пара при температурах T и $T+\Delta T$ —

$$pV = \frac{m}{\mu}RT,$$

$$(p+\Delta p)V = \frac{m+\Delta m}{\mu}R(T+\Delta T)$$

— получаем:

$$\Delta p\cdot V = \frac{\Delta m}{\mu}RT + \frac{m}{\mu}R\cdot\Delta T + \frac{\Delta m}{\mu}R\cdot\Delta T.$$

Пренебрегая членом $\frac{R}{\mu}(\Delta m\cdot\Delta T)$, отсюда с учетом $(*)$ находим:

$$\Delta\rho = \frac{\mu}{R}\,\frac{\Delta p\cdot T - p\cdot\Delta T}{T^2}.$$

Л. Г. Маркович

◆

Ф996. *В пролетном масс-спектрометре источник испускает сгусток заряженных частиц, которые сначала летят свободно (рис. 1) и пролетают через первый датчик ($Д_1$), на-*

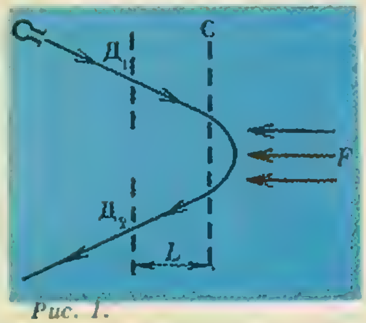


Рис. 1.

Пусть частица массы m вылетает из источника со скоростью v. Обозначим $v_\parallel$ проекцию этой скорости на направление, параллельное сетке С, а $v_\perp$ — проекцию v на направление, перпендикулярное сетке. При движении частицы за сеткой (справа от нее) $v_\parallel$ остается неизменной, а $v_\perp$ меняется от $+v_\perp$ до $-v_\perp$. Согласно закону сохранения импульса (в проекциях на направление, перпендикулярное сетке), $F\cdot\Delta t = m\cdot\Delta v_\perp = 2mv_\perp$, где Δt — время движения частицы за сеткой; отсюда $\Delta t = 2mv_\perp/F$. Полное время пролета — это

$$T = t + \Delta t = \frac{2L}{v_\perp} + \frac{2mv_\perp}{F} \qquad (*)$$

(t — суммарное время пролета от датчика $Д_1$ до входа за сетку и от выхода из сетки до датчика $Д_2$).

ходящийся на расстоянии L от сетки (С). За сеткой по нормали к ней на частицы действует электрическая сила F. Частицы поворачиваются, вылетают через сетку назад и пролетают через второй датчик (Д$_2$), находящийся на том же расстоянии L от сетки. Меняя режим работы источника, измеряют время между срабатываниями датчиков и находят наименьшее время пролета τ. Какова масса частиц? (Начальная скорость зависит от напряжения источника, но точное значение ее неизвестно.) Как можно найти массы частиц, если источник испускает одновременно несколько сортов частиц с разными массами?

На рисунке 2 приведен график зависимости $T(v_\perp)$. Видно, что одно и то же время пролета получается при двух значениях $v_\perp$ и только минимальному значению $T_{min}=\tau$ соответствует единственное значение $v_\perp$. Это означает, что если рассматривать (*) как уравнение для скорости, то при $T=\tau$ оно имеет единственное решение. Иными словами, уравнение

$$\frac{2m}{F}v_\perp^2-\tau v_\perp+2L=0$$

имеет единственное решение; значит, дискриминант уравнения равен нулю —

$$\tau^2-\frac{16Lm}{F}=0,$$

откуда и находим массу частицы:

$$m=\frac{F\tau^2}{16L}.$$

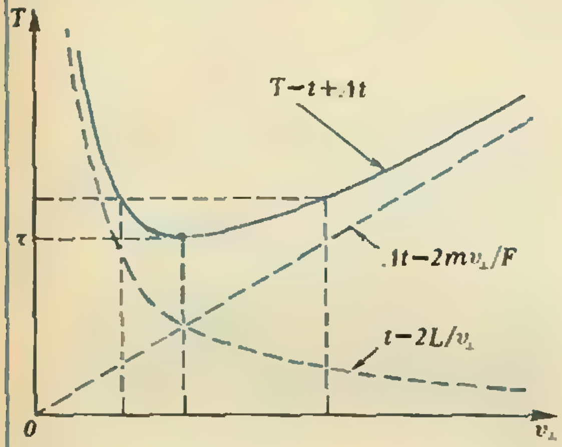


Рис. 2.

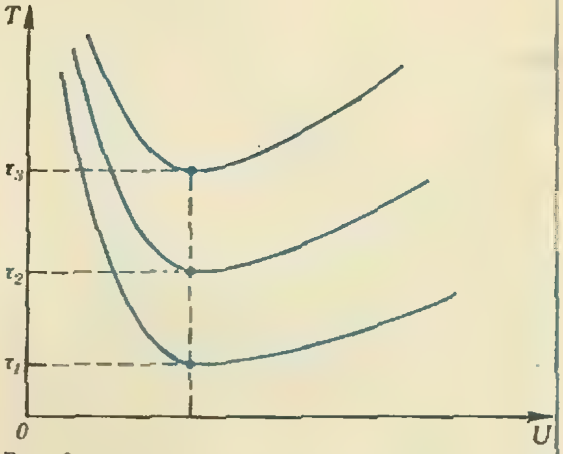


Рис. 3.

При наличии частиц различных масс и при одновременном пролете ими первого датчика (короткий сгусток при датчике Д$_1$, расположенном вблизи источника) второй датчик будет срабатывать не однократно. При фиксированном напряжении источника получится несколько времен пролета. Будем плавно менять напряжение и откладывать для каждого фиксированного напряжения источника U соответствующий набор времен пролета (рис. 3). Получившиеся на графике точки укладываются на несколько плавных кривых, каждая из которых отвечает частицам определенной массы со своим значением минимального времени пролета τ.

И. И. Воробьев

◆

Ф997. *Известно, что светящийся след падающего метеорита по мере приближения к земле становится ярче. Однако в верхних слоях атмосферы он сохраняется значительно дольше, чем у земли. Почему?*

Свечение следа метеорита — это результат его столкновений с атомами атмосферы. Благодаря большой скорости метеорита при столкновениях его с атомами происходит ионизация, так что след метеорита представляет собой плазму, состоящую из электронов и положительно заряженных ионизованных атомов. При рекомбинации, когда электрон вновь занимает свое место в атоме, энергия, затраченная на ионизацию, выделяется в виде квантов света.

Легко понять, что яркость свечения нарастает по мере приближения метеорита к земле, поскольку растет плотность атмосферы и, следовательно, большее число молекул в единицу времени сталкивается с метеоритом. Когда метеоритная частица находится за пределами земной атмосферы, она вообще не светится.

С разной плотностью атмосферы на больших и малых высотах связано и различие во времени свечения следа. На больших высотах плотность плазмы мала, столкновения между ее частицами редки, и проходит значительное время, пока все ее частицы рекомбинируют. Свечение следа может при этом продолжаться в течение нескольких секунд. На малых же высотах благодаря большой плотности атмосферы рекомбинация проходит очень быстро.

А. С. Бугов

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М956—М970, Ф968—Ф982, справились с задачами М956, М961, М966, М969, Ф971, Ф976, Ф977, Ф979, Ф981, Ф982. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

П. Абакумов (д. Коренево Московской обл.) 62; *А. Абдрахманов* (Алма-Ата) 65; *Н. Азамов* (с. Балыкчи Андижанской обл.) 65, 67, 68; *В. Акопян* (Ереван) 60, 62, 63, 65, 67; *А. Алексейчук* (Одесса) 65, 67; *М. Альт* (Одесса) 62, 63, 65, 67; *Д. Ароцкер* (Киев) 60, 65, 67, 68; *И. Арсова* (Враца, НРБ) 60, 62, 65; *С. Аршава* (Северодонецк) 62, 67; *А. Асташкевич* (Томск) 60, 63, 65; *Н. Ахметов* (п. Янаул БАССР) 65; *В. Базуткин* (Кривой Рог) 62; *Балог* (СРР) 62; *А. Барабанов* (Киев) 60, 62, 65, 67, 68; *Р. Безрукавников* (Калуга) 58, 62, 64, 65; *И. Белозеров* (Серпухов) 65, 67, 70; *В. Беринде* (Вайя Маре, СРР) 65; *В. Борманис* (Бальск Латв. ССР) 64, 65; *А. Бреусов* (Днепропетровск) 65; *С. Брызгалов* (Смоленск) 67; *И. Бугрий* (Киев) 65; *И. Вайнштейн* (Калинин) 60; *Я. Варшавский* (Харьков) 62, 64, 65, 67; *А. Васильев* (Ульяновск) 65; *Э. Вассерман* (Москва) 65; *В. Берзаков* (Рудный) 68; *А. Винцюк* (Киев) 65; *В. Волошин* (Киев) 62, 65; *П. Вольфбейн* (Киев) 62, 64; *Ю. Выменец* (Ленинград) 67; *Н. Гайбеков* (Алма-Ата) 65; *Т. Гамидов* (п. Борадыгях Аз. ССР) 62, 67; *А. Гарбарук* (Ленинград) 64, 65, 67; *О. Геворков* (Тбилиси) 57, 60, 62, 64, 65, 68; *Р. Гендлер* (Ташкент) 62—65, 67, 68, 70; *С. Герасимов* (Харьков) 67; *О. Геупель* (Дрезден, ГДР) 58, 62—65, 67, 68, 70; *О. Гилязов* (Уфа) 65; *А. Глуцюк* (Харьков) 62, 64, 65; *Ю. Гнатюк* (Каменец-Подольский) 67; *Г. Гокадзе* (с. Барисахо ГССР) 67; *М. Гольдштейн* (Челябинск) 67, 68; *А. Гороховский* (Киев) 62, 64, 65, 67, 68; *П. Григорук* (Хмельницкий) 65; *Н. Григорьева* (Андропов) 60; *Р. Гринив* (Львов) 62, 64, 67, 68, 70; *В. Гурарий* (п. Черноголовка Московской обл.) 62, 65; *Б. Гуревич* (Саратов) 62, 65; *Э. Даваадоржийн* (Мурен, МНР) 67; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 62, 67; *Т. Демьяненко* (Киев) 65; *О. Джавадов* (п. Борадыгях Аз. ССР) 62; *В. Дмитриев* (Горький) 65; *М. Добрицын* (Москва) 59, 60; *А. Донченко* (Киев) 67, 68, 70; *Д. Древаль* (Москва) 57; *И. Дынников* (Жуковский) 57, 60, 62—65, 67; *Л. Евсеев* (Димитровград) 67; *И. Ежов* (п. Черский ЯАССР) 63; *С. Железовская* (Саратов) 64, 67, 68; *Е. Жумабеков* (Алма-Ата) 65; *Д. Зайцев* (Киев) 62, 64, 65, 67; *П. Иванов* (Ленинград) 62, 65; *Р. Иванов* (Габрово, НРБ) 57, 58; *С. Исаев* (Тамбов) 65; *А. Кадач* (Усть-Каменогорск) 60, 62; *В. Кальницкий* (Калининград) 63; *В. Карибьянц* (Астрахань) 65; *Р. Керимов* (с. Азадкенд Аз. ССР) 60; *И. Киризий* (Ленинград) 65; *А. Козинский* (Гайворон) 60, 67; Г. Колесников (Магнитогорск) 57; А. Кононенко (Киев) 64, 65, 67, 68; *Ю. Королев* (Казань) 67; *А. Коршков* (Мозырь) 62, 65, 67; *Е. Костюк* (Винница) 62; *Б. Кругликов* (Харьков) 60, 62, 64, 65, 67; *О. Крылов* (п. Эльдикан ЯАССР) 58; *М. Кукс* (Львов) 67; *М. Куринной* (Харьков) 59, 60; *Н. Кушлевич* (Москва) 59, 60, 62, 64, 65; *Д. Ладиков* (Киев) 60, 62, 65, 67, 68; *С. Лаусмаа* (Кохтла-Ярве) 65; *Ю. Лесной* (Смела) 63; *О. Лимешко* (Куйбышев) 60, 62, 63, 67; *А. Литвак* (Ленинград) 57, 58, 60; *М. Литвинов* (Киев) 67, 68, 70; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 64; *Е. Лойченко* (Киев) 63; *Н. Лопата* (Гайворон) 60, 67; *В. Ляндин* (Белорецк) 57, 60; *В. Лянусин* (Белорецк) 62, 64, 65; *С. Майоров* (Химки) 65; *М. Макаров* (Севастополь) 60; *М. Макачян* (Ереван) 67; *А. Макагон* (Киев) 65; *К. Мамуров* (Душанбе) 57, 59, 60; *И. Маресин* (Москва) 60, 65; *И. Мартинес* (Киев) 62, 63, 65; *А. Махнин* (Алма-Ата) 65; *А. Мельник* (Гайворон) 60, 67; *А. Мельцер* (Ленинград) 57, 60, 62, 67; *Г. Минасянц* (Ереван) 62, 65; *Н. Миров* (Актюбинск) 65;

Т. Мисирпашаев (Москва) 60; *К. Мортиси* (Тирговисте, СРР) 62; *Я. Мустафаев* (Баку) 64; *С. Мушинский* (Новосибирск) 57, 59, 62, 63, 65, 67, 68; *Т. Нарбеков* (Алма-Ата) 65; *Б. Нефф* (Донецк) 65; *Ю. Никоноров* (с. Михайловка Каз. ССР) 62, 65; *О. Ниц* (Одесса) 60, 62, 63, 65, 67, 68; *С. Окуловский* (Ленинград) 62, 64, 65; *М. Панков* (Львов) 62, 65, 67; *Ю. Панчул* (Киев) 62, 65; *П. Пасманик* (Москва) 65, 67; *Д. Пастур* (Харьков) 60; *М. Пасуманский* (Ленинград) 64; *О. Пелевин* (Кострома) 62; *А. Петрова* (Ленинград) 57, 60; *В. Пикман* (Киев) 65; *А. Покровский* (Киев) 57, 60, 62, 65, 67, 68; *В. Полинов* (Магнитогорск) 57, 60; *В. Помаз* (Семеновка) 65; *М. Померанцев* (Черкассы) 57; *И. Портной* (Одесса) 62—65, 67, 70; *В. Процак* (Киев) 62, 64, 65, 67; *В. Пушня* (Харьков) 62, 64, 65, 67; *В. Рагулин* (Челябинск) 67, 68; *А. Райскин* (Алма-Ата) 65; *И. Раскина* (Витебск) 62, 65; *С. Резнов* (Киев) 62, 65, 67, 68; *М. Рзаев* (Баку) 62; *А. Ройтерштейн* (Ленинград) 62—64; *К. Рубцов* (Киев) 62, 65; *Т. Руденко* (Киев) 65; *Д. Румынин* (Красноярск) 57, 64; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 65; *З. Салканова* (Алма-Ата) 65; *И. Самовол* (Гайворон) 60; *Д. Семинихин* (Киев) 62, 65, 68; *С. Сильвестров* (Киев) 62, 64, 65, 67; *И. Симоненко* (Великие Луки) 60; *К. Сингалевич* (Ленинград) 65; *В. Слитинский* (Киев) 65, 70; *В. Служаев* (Димитровград) 67; *С. Смирнов* (Ленинград) 62—65, 67, 68, 70; *В. Столин* (Вильнюс) 62, 63, 67; *А. Струнин* (Ярославль) 64, 65, 67, 68; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 62, 64, 67; *Д. Субботин* (Алма-Ата) 65; *В. Судаков* (Тбилиси) 57, 60; *Д. Тамаркин* (Горький) 58, 60, 62; *А. Тарасенко* (Днепропетровск) 67; *Б. Татиевский* (Киев) 62, 64, 65, 67, 68; *А. Терехов* (Алма-Ата) 65; *Г. Топровер* (Волгоград) 67; *Д. Туляков* (Жданов) 64, 65; *В. Тумаркина* (Винница) 62; *М. Тумаш* (Львов) 60; *И. Устиловский* (Москва) 59, 60, 62—65, 67, 68, 70; *В. Филимоненков* (Свердловск) 57; *Л. Финкельштейн* (Воронеж) 65; *В. Фокин* (Хабаровск) 62, 65, 67; *Д. Хаджиев* (Стара-Загора, НРБ) 62; *Л. Христов* (Силистра, НРБ) 67; *А. Чагиров* (Алма-Ата) 60; *Е. Черная* (Днепродзержинск) 67, 70; *К. Чурашев* (Новосибирск) 62, 65, 67; *Е. Чурикова* (Целиноград) 62; 67; *Ю. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) 67; *И. Шехтман* (Киев) 67, 68; *С. Шехтман* (Киев) 65; *Б. Шмуклерман* (Одесса) 62; *Н. Шолев* (Стара-Загора, НРБ) 65; *И. Шор* (Киев) 65; *Н. Шор* (Киев) 65; *П. Шрабштейн* (Москва) 67; *Б. Шраер* (Ленинград) 62—65; *П. Штейнберг* (Пущино) 62, 65; *Г. Шугай* (Запорожье) 65; *О. Щелоков* (Навои) 62, 67; *И. Щепеткова* (Москва) 67; *В. Элькин* (Харьков) 62, 65; *Я. Эфендиев* (Баку) 62; *О. Юсухно* (Киев) 62, 63, 65; *А. Яврян* (Ереван) 67.

Физика

А. Абанов (Красноярск) 68, 69, 74; *У. Адбакиров* (Алма-Ата) 75; *О. Азикова* (Целиноград) 73—75, 78, 80; *А. Анисимов* (Киев) 78, 80; *Ф. Асмандьярова* (Целиноград) 73—75, 78, 80; *Т. Ахметов* (Новосибирск) 78, 80; *К. Бедов* (Челябинск) 68—70, 72; *А. Белецкий* (Канев) 78; *Ю. Белобородов* (Челябинск) 80; *С. Беловолов* (Новосибирск) 68, 69, 78; *Д. Белоногов* (Свердловск) 70; *В. Березский* (Киев) 69; *А. Бермус* (Грозный) 75; *О. Бесман* (Алма-Ата) 68, 69; *И. Биндер* (Одесса) 78; *Д. Бисикало* (Винница) 69, 70, 74, 75; *Л. Блинов* (Черновцы) 75; *С. Бобылев* (Березники) 68, 69, 74; *С. Болдырев* (Мытищи) 78, 80; *Ш. Бреннер* (Хуст) 68—70; *А. Брежестовский* (п. Черноголовка Московской обл.) 78, 80; *Д. Будько* (Белгород) 73, 75, 78, 80; *А. Быцко* (Ленинград) 69, 72, 78, 80; *М. Ваганов* (п. Черноголовка Московской обл.) 73—75, 78, 80; *К. Вайнберг* (Тбилиси) 69; *В. Верзаков* (Рудный) 78; *Ю. Викторович* (Минск) 78, 80; *Е. Винтелер* (Клуж-Напока, СРР) 75; *П. Вольфбейн* (Киев) 68, 73, 74, 78; *А. Вороненко* (Баку) 80; *А. Гаек* (Днепропетровск) 68—70, 73, 78; *Д. Галактионов* (Алма-Ата) 78, 80; *О. Гендельман* (Харьков) 69; *С. Герасимов* (Харьков) 75; *А. Гольдин* (с. Водяное Львовской обл.) 73, 75, 78, 80; *Д. Горелик* (Электросталь) 80; *С. Григоренко* (Москва) 70; *В. Гурарий* (п. Черноголовка Московской обл.) 68, 69, 78, 80; *Н. Даминов* (Братск) 78; *С. Данилкина* (Домодедово) 80; *Ю. Даценко* (Киев) 68—70, 78; *Д. Дементьев* (Нальчик) 69; *А. Денисюк* (с. Стрижавка Винницкой обл.) 78, 80; *А. Дода* (Корсунь-Шевченковский) 68, 73, 75; *Л. Дорофеев* (Канев) 75, 78; *Л. Евсеев* (Димитровград) 80; *В. Евтушенко* (Киев) 70; *Д. Евтушенко* (Донецк) 75, 78, 80; *И. Евтушенко* (Амурск) 74; *Д. Ежиков* (Минск) 69, 70; *В. Ефремова* (Горький) 75; *А. Жариков* (Киев) 68, 69, 72; *А. Жарков* (Канев) 78; *Ю. Жданов* (Димитровград) 69, 70; *В. Жевлаков* (п. Черноголовка Московской обл.) 68, 70; *Д. Жильцов* (Краматорск) 73; *Д. Житный* (Киев) 68; *А. Жуков* (Кривой Рог) 80; *О. Заблуда* (Киев) 73, 78; *П. Задорожный* (Киев) 73—75, 78, 80; *К. Зварич* (Киев) 74; *Е. Зельцер* (Киев) 68; *С. Иванов* (Уфа) 68, 70; *Д. Игильманова* (Целиноград) 73—75, 78, 80; *А. Ильенков* (Киев) 75, 78; *Р. Исаенко* (Сыктывкар) 68, 69; *В. Калацкий* (Солигорск) 68, 69, 74, 75; *В. Каменькович* (Харьков) 68, 69; *С. Канатов* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 78; *С. Карадаш* (Лида) 78; *А. Карлов* (Канев) 78; *Ш. Кирюхин* (Чимкент) 78, 80; *А. Кишкин* (Тольятти) 70; *П. Кларк* (Тула) 68, 70, 72, 73, 75; *С. Ковальчук* (Киев) 68, 69; *Е. Кожевников* (Москва) 78; *А. Коновалов* (Мытищи) 73; *Д. Концевой* (Могилев) 69, 73, 78, 80; *А. Корытько* (Киев) 68; *М. Косолапов* (п. Черноголовка Московской обл.) 80; *В. Кравцов* (Ставрополь) 75, 80; *А. Краковский* (Харьков) 68, 69; *Б. Крутов* (Воронеж) 73—75; *К. Купцов* (Саратов) 69; *С. Курдюков* (Москва) 74, 75, 78, 80; *К. Курлаев* (Новосибирск) 78, 80; *А. Кусайнов* (Алма-Ата) 78; *Д. Ладиков* (Киев) 68, 70, 78; *А. Лебедев* (Киев) 68; *Ю. Левин* (Харьков) 73, 78; *К. Литвиненко* (Херсон) 68, 69; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 69, 73, 74, 78, 80; *И. Лугач* (Винница) 73, 74, 78, 80; *И. Луценко* (Донецк) 68, 72; *К. Майоров* (Киев) 75; *А. Максимов* (Ташкент) 68, 69; *Н. Малетин* (Ангарск) 73; *С. Маматкулов* (Нарынский р-н УзССР) 78, 80; *М. Маргулис* (Харьков) 68, 69, 80; *Г. Марченков* (Саратов) 75; *Р. Марченков* (Рязань) 68, 69; *С. Маслов* (Москва) 73, 75; *А. Мацко* (Киев) 75; *С. Мельников* (Пермь) 78, 80; *М. Мирошниченко* (Куйбышев) 68; *Т. Мисирпашаев* (Москва) 69; *Н. Михайловский* (Красноярск) 78, 80; *Д. Могилевцев* (Шклов)

(Окончание см. на с. 56)

Математика и программирование

(Беседа с академиком А. П. Ершовым)

Эта беседа состоялась в конце июня в санатории «Узкое» под Москвой, где в это время известный советский ученый, академик Андрей Петрович Ершов находился «на отдыхе». Кавычки здесь вполне уместны: нагромождение бумаг, книг, оттисков, рукописей, журналов в светлой просторной комнате говорит о непрекращающейся работе, о характере ученого, для которого научный труд является органической потребностью. Беседа проходила не в виде формального интервью, а скорее в виде оживленного, но обстоятельного разговора. Здесь представлены фрагменты этого разговора, записанного на магнитофон, лишь с минимальными редакционными изменениями.

— Андрей Петрович, когда и как у Вас возник интерес к математике? Участвовали ли Вы в кружках, олимпиадах?

— С 1943 года я учился в Кемерово: сибирский областной город, там в то время никакой заметной кружковой или олимпиадной работы не было. В военное время, да и потом, в первые послевоенные годы, олимпиадная математика так далеко от Москвы не распространялась. Поэтому дополнительной затравки по математике в виде кружков или олимпиад я не получал. К тому же в сфере дополнительных интересов, внеклассного чтения у меня тогда на первом месте стояла физика.

Пожалуй, единственный мой вклад в дополнительное изучение математики состоял в том, что, перейдя в восьмой класс, я отважился перерешать все доступные мне задачи по математике — все, попавшие в мое поле зрения. Кроме школьных учебников и задачников в этом мне помог журнал «Математика в школе», который я впервые открыл в десятом классе (ничего похожего на журнал «Квант» тогда еще не было). Там я познакомился с олимпиадными задачами; с задачами повышенной трудности. Но серьезных, предельных задач по математике я перед собой не ставил.

Если говорить честно, то настоящий интерес к математике, к ее развитию как науки, к математической мысли, к истории ее идей у меня появился значительно позже, в аспирантские годы.

— В 1949 году Вы поступили в Московский университет на физико-технический факультет, но окончили механико-математический, притом специализировались не по математике, а по программированию. Когда, каким образом, под чьим влиянием произошла эта переориентация?

— Мое поступление на физтех было выражением моего преобладающего интереса к физике, который, впрочем, носил довольно поверхностный характер. Он проистекал не столько от углубленного изучения физики или, скажем, многочасовой работе в физическом кабинете (которого у нас по существу и не было), а возник в результате воздействия работ по атомной энергии. На меня тогда сильное впечатление произвел отчет Смита по проекту «Манхаттан»*) и популярная книга по физике М. П. Бронштейна «Атомы, электроны, ядра». Уже тогда меня интересовали, даже волновали, тайны строения вещества. И эти тайны — ощущение предельности, столь характерное для атомной теории,— меня не оставляли всю жизнь. Так или иначе, желание учиться в Москве, моем родном городе, интерес к физике привел меня на физико-технический факультет Московского университета, новое здание которого тогда строилось на Ленинских горах. Окончательным стимулом для поступления была трехступенчатая система отбора — первый тур экзаменов, второй тур экзаменов, собеседование. Спортивный азарт здесь сыграл известную роль.

В определенном смысле, первый знак моей дальнейшей судьбы я получил на первом же экзамене. Это была письменная работа по алгебре. Я ее закончил раньше всех в своей аудитории. Мне очень хотелось работу проверить, но я озирался по сторонам — не отдает ли кто другой работу раньше меня? Работу у меня взял молодой преподаватель — первый, которого я запомнил и с которым я впоследствии работал — Владимир Михайлович Курочкин, ныне знаменитый программист, ветеран информатики, заве-

---

*) Проект Манхаттан — научный, промышленный и военный проект, приведший к созданию атомной бомбы в США. (*Прим. ред.*)

дующий лабораторией в Вычислительном центре АН СССР. В этой встрече сейчас можно усмотреть перст судьбы, а тогда это был лишь эпизод моего поступления.

Я год проучился на физтехе, слушал лекции П. Л. Капицы, но в конце года, при окончательном отборе студентов, по причинам понятным моим ровесникам и совсем не интересным нынешнему поколению, мне и нескольким другим студентам было предложено выбрать другой факультет для продолжения образования. Так я оказался на мехмате.

Некоторое время я колебался между механикой и вычислительной математикой, которую изучали тогда на только что созданной кафедре вычислительной математики, возглавляемой академиком С. Л. Соболевым. Решающее влияние на выбор занятий по программированию, однако, оказали блестящие и содержательные лекции Алексея Андреевича Ляпунова, который стал моим учителем. Поворот в сторону вычислительной техники помог сделать разговор со старшим товарищем, Евгением Андреевичем Жоголевым, происшедший... после соревнований по легкой атлетике*).

Коротко на Ваш вопрос можно ответить так: изначальный интерес к физике — конкретная цепь разных событий — прямое воздействие старшего товарища — появление учителя; вот как складывался мой путь к информатике.

— А где сегодня можно учиться информатике?

— Вопрос уже поставлен парадоксально, поэтому я на него и отвечу парадоксально: везде и нигде. В том смысле, что курс информáтики в школе еще только ставится, содержание курса представляет лишь небольшой фрагмент информатики, а в вузе специальности с таким названием вообще нет, вузовский курс по этому предмету еще пока не поставлен. В вузах, правда, имеется некоторое семейство курсов, пока еще довольно разрозненное, в основном это элементы программирования и ЭВМ, но они еще не охватывают предмет. Можно рекомендовать две книги, это «Наука программирования» Д. Гриса и «Информатика» Ф. Л. Бауера и Г. Гооза. Поэтому, если и учиться информатике, это следует делать на отделениях прикладной математики, АСУ, кибернетики. Лучше всего это сделать в Московском университете, на мехмате, благодаря в первую очередь базовому курсу программирования А. Г. Кушниренко, затем на факультете вычислительной математики и кибернетики, неплохо это дело поставлено в МФТИ, МИЭМе и в некоторых других московских вузах, в университетах Ленинграда, Киева, Казани, Еревана, Минска, Латвии, Эстонии, да и в других центрах.

— В прошедшем учебном году девятиклассники начали изучение нового курса «Основы информатики и вычислительной техники». Нынешние десятиклассники будут продолжать изучение информатики по только что поступившему в школы учебнику. На какие разделы этого курса нужно обращать наибольшее внимание в десятом классе?

— Учебник информатики для десятого класса в некотором смысле политехнический, в нем есть сведения из разных областей знания, на разные вкусы: дальнейшее развитие алгоритмического языка, языки программирования, архитектура ЭВМ, физическое устройство компьютера, разнообразные применения. Поэтому мой первый совет — выбрать себе для более углубленного изучения то, что вам больше по душе. Все же можно сказать, что наиболее важная часть курса — это раздел о языках программирования (*Бейсик* и *Рапира*), но этим следует углубленно заниматься дополнительно, только если есть доступ к вычислительной технике.

Если говорить о «вечных истинах», содержащихся в курсе, я бы выделил три момента. Во-первых, понятие об архитектуре ЭВМ. Во-вторых, понимание о представлении данных на всех стадиях их обработки (задача, данные, таблица, элемент таблицы, число, строчка, слово, цифра, литера, бит). В-третьих, понятие о физических принципах хранения и обработки данных. Кстати, для тех, кто интересуется этим последним аспектом (и вообще физикой) очень рекомендую прочитать в «Кванте» посвященный этим вопросам сериал*).

— Как определить Вашу нынешнюю специальность — программирование, информатика?

— Постановка этого вопроса дает мне повод разворчаться. Противопо-

---

*) Этот эпизод описан в сборнике «Пути в неизведанное» (М.: Советский писатель), 1986, № 19, с. 90. (*Прим. ред.*)

*) «Квант» 1985, №№ 9—12; 1986, №№ 1—6; «Полупроводниковые элементы вычислительной техники». (*Прим. ред.*)

ставление программирования и информатики — одно из текущих недоразумений. Есть немало «умников», я позволю себе сказать так, иронически, от которых можно услышать «это де никакая не информатика, это чистое программирование». Такое высказывание, с моей точки зрения, свидетельствует либо о некомпетентности, либо о методологически неверной позиции. Ведь программирование — неотъемлемая часть информатики.

Попробую разъяснить это, натянув вопрос на себя. Мне конечно проще всего сказать, что моя научная специальность — программирование. Потому что я занимался программированием в широком смысле бо́льшую часть своей сознательной жизни. При этом я настаиваю на таком расширенном понимании слова «программирование», оно охватывает не только написание конкретных программ. Но теперь, когда наша компьютерная наука имеет название — информатика — я должен сказать, что информатика тоже является моей научной специальностью. Есть у меня работы и размышления, которые касаются предмета информатики, ее связей с другими науками, с математикой и с философией, ее содержания в школьном курсе. Поэтому коротко отвечаю на вопрос так: моя нынешняя научная специальность — информатика, более узкая — программирование.

Как Вы представляете себе взаимоотношения между математикой и информатикой?

— Прежде всего хочу подчеркнуть, что информатика расширяет сферу деятельности математики. Например, такие аспекты информатики, как теория алгоритмов и теоретическое программирование, структура данных, информационные модели, вычислительный эксперимент создают почву для математических исследований. В дополнение к этому, именно ЭВМ позволяют наиболее эффективно применять математические методы практически во всех сферах человеческой деятельности. Можно сказать, что информатика — это способ, с помощью которого математики завоевывают мир.

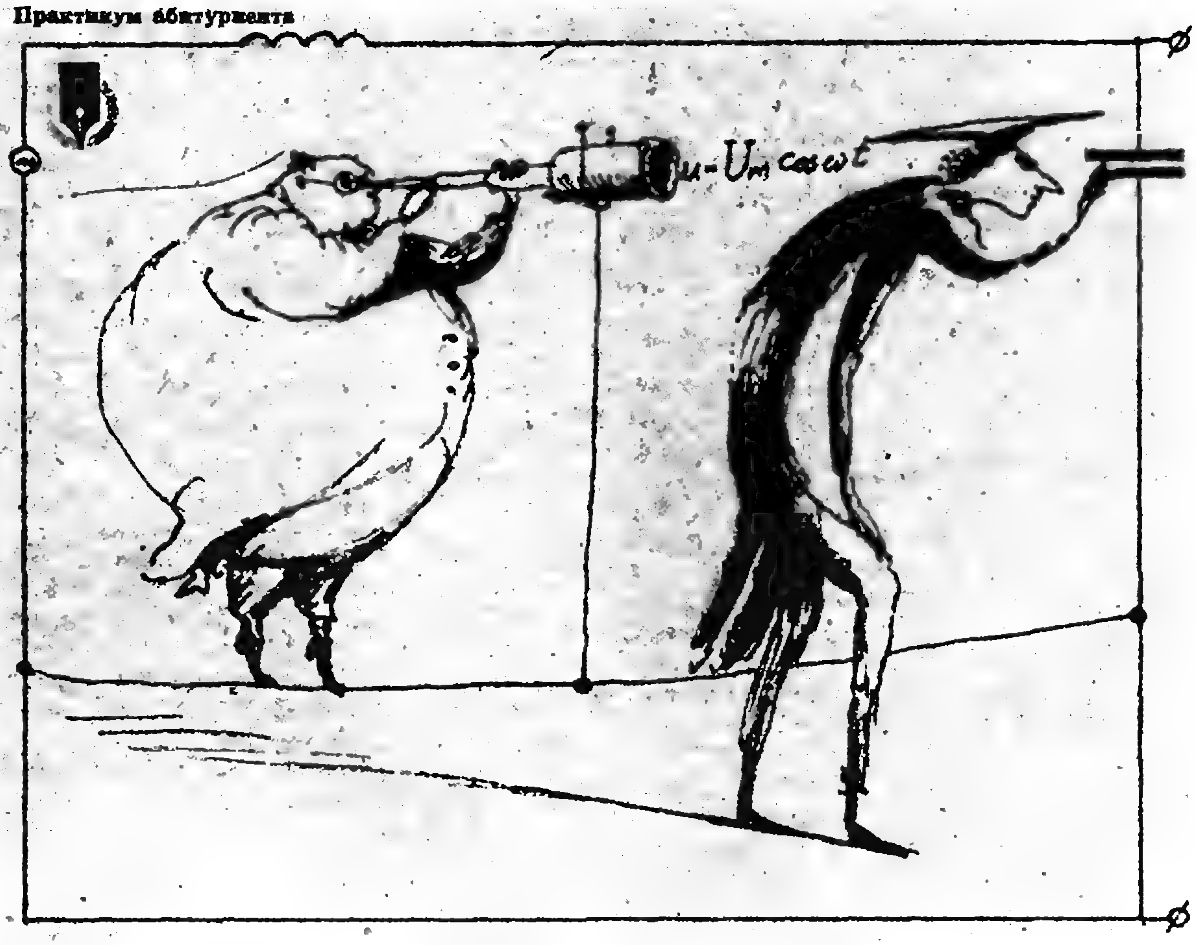
Для специалистов по информатике математические науки служат основным рабочим аппаратом. Но сама информатика — синтезирующая наука, она берет не только от математики, но и от феноменологических наук, от лингвистики, психологии. Информатика занимает особое положение в сонме других наук: ее цель — вскрыть и преподнести на блюдечке основные принципы единства обработки информации во Вселенной. (Замечу в скобках, что кибернетика имеет схожую, но не совпадающую сферу применения: изучить основные принципы обработки информационных потоков, но не во «всей Вселенной», а лишь в сфере управления.)

Можно сказать и так: если физика пытается ответить на «роковой вопрос» — почему мир устроен так, что в нем можно жить, информатика отвечает на свой «роковой вопрос» — почему мы можем познать окружающий нас мир, овладеть объективно существующей в природе информацией. Информатика как наука исходит из существования натуральных знаковых систем — носителей информации в природе, и сама создает знаковые системы, выявляет единство законов обработки информации в природе, в технике.

Создание искусственного интеллекта — одна из задач информатики. В промышленности, в технике автоматизация освобождает человека от физического труда. Информатика же решает проблему устранения человека из процесса обработки информации, что достигается доскональным объяснением его функций, перелагаемых затем на компьютер. Таким образом, здесь для познания информационного процесса надо выявить алгоритм его обработки. Поэтому часто говорят: мы это знаем, если мы можем это запрограммировать.

Я не буду вдаваться глубже в обсуждение предмета информатики. Скажу лишь, что информация — это и не вещество, и не энергия, а нечто третье. Любая наука изучает некоторые структуры природы. В каком-то смысле, информатика изучает структуру структуры, это не менее увлекательно и волнующе, чем исследование строения вещества,— мое юношеское увлечение,— о котором я говорил в начале нашей беседы.

Беседу записал А. Б. Сосинский



Цепи переменного тока

А. Р. ЗИЛЬБЕРМАН

Переменный ток (или напряжение) представляет собой вынужденные электрические колебания. Величина тока изменяется со временем по гармоническому закону

$$i=I_m\cos(\omega t+\varphi_0),$$

где I_m — амплитуда, ω — круговая (циклическая) частота (она измеряется в радианах за секунду, а пишут просто $с^{-1}$), φ_0 — начальная фаза колебаний. Аналогичное выражение можно записать и для переменного напряжения.

Пример. Запишем зависимость от времени напряжения сети: 220 В, 50 Гц. В этом случае амплитуда $U_m=U\sqrt{2}=220\sqrt{2}\text{ В}\approx311\text{ В}$ (напомним, что $U=220$ В — это действующее значение напряжения), круговая частота $\omega=2\pi\nu\approx6{,}28\cdot50\ с^{-1}\approx$ $\approx314\ с^{-1}$. Пусть еще нам известно, что в момент начала отсчета ($t=0$) напряжение было равно $u_0=50$ В и убывало. Тогда мы сможем найти начальную фазу φ_0:

$$u_0=U_m\cos\varphi_0,$$

$$\text{откуда } \varphi_0=\arccos\frac{u_0}{U_m}\approx1{,}4\text{ рад}$$

(подумайте сами — где мы учли убывание напряжения). Итак,

$$u=311\cos(314t+1{,}4).$$

Видно, что надлежащим выбором начала отсчета времени — а это в нашей власти — можно сделать φ_0 каким угодно, в частности нулем. Этим часто пользуются и без специальных оговорок записывают

$$u=U_m\cos\omega t.$$

Расчет цепей переменного тока обычно сводится к тому, чтобы при заданном напряжении источника определить токи. Совсем просто рассчитывать токи в цепях, содержащих только резисторы. В любом месте такой цепи ток изменяется «в такт» с

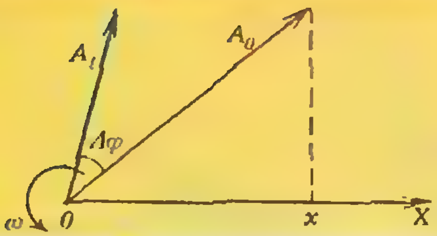


Рис. 1.

приложенным напряжением, то есть отсутствует сдвиг фаз между током и напряжением. Сложнее обстоит дело, если в цепи есть накопители энергии — катушки и конденсаторы. В этом случае моменты максимумов напряжений и токов могут и не совпадать — появляются соответствующие сдвиги фаз. Известно, например, что при включении в сеть катушки максимумы тока отстают от максимумов напряжения на четверть периода (сдвиг фаз $\pi/2$), а при подключении конденсатора — наоборот, опережают на четверть периода.

При расчетах в цепях постоянного тока можно просто складывать величины напряжений на последовательно соединенных элементах и величины токов на разветвленных участках цепи. В случае переменного тока все сложнее — амплитуда суммы не всегда равна сумме амплитуд. Например, амплитуда суммы двух токов по 1 А каждый может оказаться любой — от 0 до 2 А, нужно обязательно учитывать сдвиги фаз. Для расчета цепей переменного тока часто применяют удобный графический метод — *метод векторных диаграмм.* Он основан на простой идее.

Пусть вектор $\vec{A}_0$ (длиной A_0) вращается вокруг одного из своих концов против часовой стрелки с угловой скоростью ω. Тогда проекция второго конца на ось X, начало которой находится в центре вращения (рис. 1), равна

$$x = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

То есть получается именно та функция, которая нас интересует. (Собственно говоря, круговую частоту обозначают той же буквой, что и угловую скорость, как раз имея в виду эту модель.) На этом же рисунке можно изобразить еще один вектор $\vec{A}_1$, соответствующий другой функции с амплитудой A_1 и начальной фазой φ_1. При $\varphi_1 > \varphi_0$ вектор $\vec{A}_1$ «опережает» вектор $\vec{A}_0$ на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$. Важно, что A_0 и A_1 могут иметь и различную размерность (например, A_0 может измеряться в вольтах, а A_1 — в амперах).

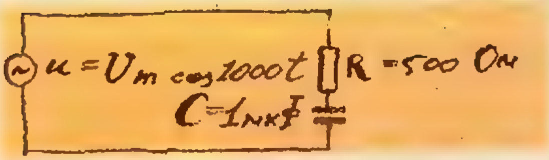


Рис. 2.

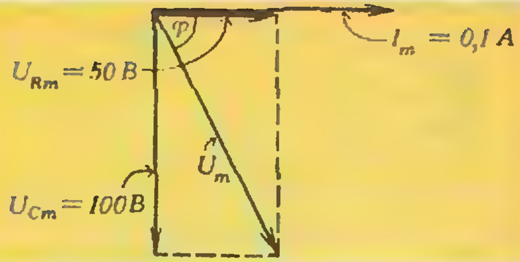


Рис. 3.

Теперь о самóм методе. Что такое «векторная диаграмма»? Это чертеж, на котором изображены в виде векторов (в заранее выбранном масштабе и с учетом сдвигов фаз) напряжения и токи исследуемой цепи. В рассматриваемом нами случае гармонических колебаний (в других случаях это неверно!) все эти векторы вращаются в одну сторону с одинаковой угловой скоростью ω, и углы между ними остаются постоянными, поэтому о вращении можно не говорить и рисовать «неподвижную» картинку. Если чертеж построен — задача уже решена, ведь он содержит все необходимые сведения о напряжениях и токах интересующей нас цепи. Метод построения векторных диаграмм — это и есть способ получения таких чертежей.

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

Задача 1. *На рисунке 2 изображена простая электрическая цепь, содержащая последовательно соединенные конденсатор и резистор. Амплитуда тока в цепи составляет $I_m = 0{,}1$ А. Найдите амплитуду напряжения источника и сдвиг фаз между этим напряжением и током в цепи.*

Выберем подходящие масштабы для изображения токов и напряжений. Нарисуем произвольно (так, как нам удобно!) вектор $\vec{I}_m$ (рис. 3). Теперь мы можем нарисовать вектор $\vec{U}_{Rm}$, изображающий напряжение на резисторе (изобразим его другим цветом, чтобы не путать векторы напряжений и токов). Его модуль

$$U_{Rm}=I_mR=50\text{ В}.$$

По направлению вектор $\vec{U}_{Rm}$ совпадает с вектором $\vec{I}_m$ (ведь сдвиг фаз между током и напряжением резистора равен нулю). Вектор напряжения на конденсаторе $\vec{U}_{Cm}$ равен по модулю $U_{Cm}=I_mX_C=100$ В, где $X_C=1/(\omega C)=1$ кОм — емкостное сопротивление, и отстает на $\pi/2$ по фазе от тока. Нарисуем и этот вектор. Напряжение на источнике $\vec{U}_m$ соответствует сумме векторов $\vec{U}_{Rm}$ и $\vec{U}_{Cm}$:

$$U_m=\sqrt{U_{Rm}^2+U_{Cm}^2}\approx 112\text{ В}.$$

Заметим, что мы уже нашли (нарисовали!) угол между током $\vec{I}_m$ и напряжением всей цепи $\vec{U}_m$. Этот угол можно просто измерить транспортиром или посчитать тригонометрически:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{U_{Cm}}{U_{Rm}}=2,$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}2\approx 1{,}1\text{ рад}\approx 64^\circ.$$

Эту задачу можно сформулировать немного по-другому: задать амплитуду напряжения источника, например $U'_m=220$ В, а найти амплитуду тока в цепи. Такая задача сложнее — ведь мы должны начать рисовать диаграмму, не зная амплитуды тока I'_m. Тут есть две возможности. Первая — решить вспомогательную задачу о нахождении амплитуды напряжения U_m при заданном токе I_m (мы только что такую задачу обсудили), а затем записать очевидное соотношение

$$\frac{U'_m}{U_m}=\frac{I'_m}{I_m}$$

и найти из него амплитуду тока I'_m:

$$I'_m=I_m\frac{U'_m}{U_m}\approx 0{,}18\text{ А}.$$

Вторая возможность — рисовать диаграмму не в конкретном численном масштабе, а в общем виде. При этом отношения длин всех векторов остаются теми же, а значит, и углы между ними не изменяются. Полученную из диаграммы формулу

$$U'_m=\sqrt{(U'_{Rm})^2+(U'_{Cm})^2}=$$
$$=\sqrt{(I'_mR)^2+(I'_mX_C)^2}$$

мы используем для нахождения I'_m:

$$I'_m=\frac{U'_m}{\sqrt{R^2+X_C^2}}\approx 0{,}18\text{ А}.$$

Способы эти по сложности примерно равноценны.

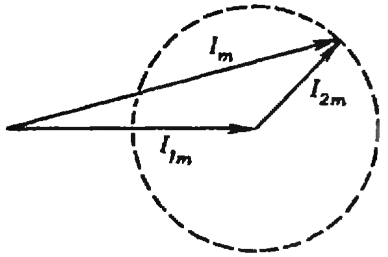


Рис. 4.

Задача 2. *К источнику переменного напряжения подключены две параллельные ветви. Амплитуда тока в первой $I_{1m}=1$ А, во второй $I_{2m}=0{,}3$ А. В каких пределах может находиться амплитуда тока, протекающего через источник? Каким может быть максимальный сдвиг фаз между полным током и током в первой ветви?*

Решение ясно из рисунка 4, на котором изображена векторная диаграмма для данной цепи (вектор $\vec{I}_{2m}$ нарисован так, чтобы его удобнее было складывать с вектором $\vec{I}_{1m}$):

$$I_{1m}-I_{2m}\leqslant I_m\leqslant I_{1m}+I_{2m},$$
$$0{,}7\text{ А}\leqslant I_m\leqslant 1{,}3\text{ А}.$$

Максимальный угол между $\vec{I}_m$ и $\vec{I}_{1m}$ соответствует касанию $\vec{I}_m$ с окружностью:

$$\sin\varphi_{\max}=\frac{I_{2m}}{I_{1m}}=0{,}3,$$

$$\varphi_{\max}\approx 0{,}31\text{ рад}\approx 18^\circ.$$

При этом $I_m=\sqrt{I_{1m}^2-I_{2m}^2}\approx 0{,}95$ А. Угол между $\vec{I}_m$ и $\vec{I}_{2m}$ может быть любым (от $-\pi$ до $+\pi$).

Задача 3. *В схеме, изображенной на рисунке 5, найдите ток, текущий через источник, и сдвиг фаз между этим током и напряжением источника.*

Начнем рисовать диаграмму, задавшись током через катушку. Положим, например, $I_{Lm}=0{,}1$ А. Тогда напряжение на катушке $\vec{U}_{Lm}$ равно по модулю $U_{Lm}=I_{Lm}X_L=100$ В, где $X_L=\omega L=1$ кОм — индуктивное сопротивление, и опережает ток $\vec{I}_{Lm}$ по фазе

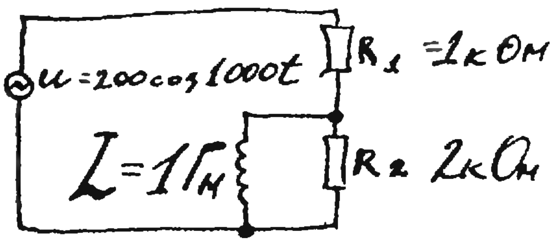


Рис. 5.

на $\pi/2$ (рис. 6). Ток через резистор с сопротивлением R_2 определяется этим напряжением и совпадает с ним по фазе:

$$I_{R_2m}=\frac{U_{Lm}}{R_2}=0{,}05\text{ А}.$$

Тогда общий ток

$$I_m=\sqrt{I_{Lm}^2+I_{R_2m}^2}\approx 0{,}112\text{ А}.$$

Напряжение $\vec{U}_{R_1m}$ на резисторе с сопротивлением R_1 совпадает с этим током по фазе:

$$U_{R_1m}=I_mR_1\approx 112\text{ В}.$$

Затем найдем суммарное напряжение $\vec{U}_m$ (сумму векторов $\vec{U}_{R_1m}$ и $\vec{U}_{Lm}$). После простых вычислений (это можно сделать и графически, если аккуратно строить диаграмму!) получаем

$$U_m\approx 180\text{ В},\quad \varphi\approx 0{,}52\text{ рад}\approx 30^\circ.$$

Теперь можно уточнить масштаб и найти общий ток в цепи при заданном напряжении источника:

$$I'_m=I_m\frac{U'_m}{U_m}\approx 0{,}112\,\frac{200}{180}\text{ А}\approx 0{,}124\text{ А}.$$

Все остальные токи и напряжения тоже увеличатся в $U'_m/U_m\approx 1{,}1$ раза, а сдвиги фаз при этом останутся теми же.

Реактивные элементы — катушки, конденсаторы — часто используются для получения определенного сдвига фаз между напряжением и током в цепи. Рассмотрим конкретный пример.

Задача 4. *Электродвигатель переменного тока содержит две одинаковые обмотки (индуктивность каждой $L=1$ Гн). Для нормальной работы необходимо, чтобы токи в обмотках были одинаковыми, но сдвиг фаз между ними составлял $\Delta\varphi=\pi/2$. При включении в сеть ($U=220$ В, $\nu=50$ Гц) одну из обмоток подключают к сети непосредственно, а другую — через последовательно соединенные конденсатор емкостью C и резистор сопротивлением R. Рассчитайте необходимые величины C и R. Потерями в обмотках пренебречь.*

Ток в катушке, которая подключена к сети непосредственно, отстает по фазе на $\pi/2$ от напряжения сети. Его модуль

$$I_1=\frac{U}{X_L}=\frac{U}{2\pi\nu L}\approx 0{,}7\text{ А}.$$

Обратите внимание: мы нашли действующее значение тока, так как заданное значение U — действующее. Ясно, что векторные диаграммы можно строить и для амплитудных, и для действующих значений — лишь бы на одной диаграмме были либо амплитуды, либо действующие значения.

Построим векторную диаграмму для последовательной цепи RCL (рис. 7). Будем рисовать все в общем виде. Нарисуем вектор $\vec{I}_2$, соответствующий току в цепи. Напряжение $\vec{U}_R$ ($U_R=I_2R$) совпадает по фазе с током, $\vec{U}_C$ ($U_C=I_2X_C$) — отстает на $\pi/2$, $\vec{U}_L$ ($U_L=I_2X_L$) — опережает на $\pi/2$. Общее напряжение $\vec{U}$ должно совпадать по фазе с током $\vec{I}_2$, при этом токи $\vec{I}_1$ и $\vec{I}_2$ и будут сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Из диаграммы видно, что для этого нужно, чтобы

$$X_C=X_L,\quad \frac{1}{\omega C}=\omega L,$$

$$C=\frac{1}{\omega^2L}=10^{-5}\text{ Ф}=10\text{ мкФ}.$$

При этом $I_2=I_1=U/R$, откуда

$$R=\frac{U}{I_1}\approx 314\text{ Ом}.$$

Отметим, что расчет такой цепи в реальном случае намного сложнее, так как сдвиги фаз между напряжением и током в обмотках у нагруженного двигателя не равны $\pi/2$, как у идеальной катушки, а зависят от нагрузки на вал двигателя.

Энергетические расчеты в цепях переменного тока осложняются тем,

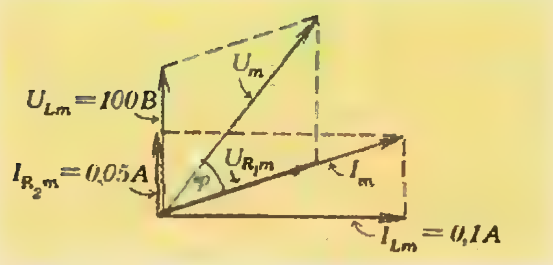


Рис. 6.

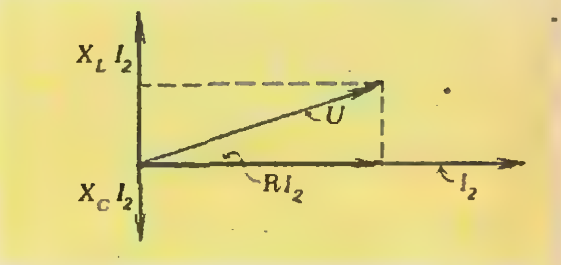


Рис. 7.

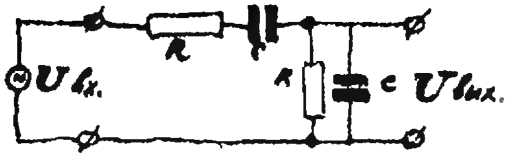


Рис. 8.

что мгновенная мощность меняется со временем. Нас может интересовать как среднее значение мощности — для расчета работы источника или выделяющегося в цепи тепла, так и максимальное значение мгновенной мощности.

Задача 5. *Амплитуда напряжения источника U_m, амплитуда тока, протекающего через него I_m, сдвиг фаз между напряжением и током φ. Найдите работу источника за большой отрезок времени T и максимальное значение мгновенной мощности.*

Запишем выражение для мгновенной мощности и приведем его к более удобному виду:

$$p=ui=U_mI_m\cos\omega t\cos(\omega t+\varphi)=$$

$$=\frac{1}{2}U_mI_m\cos(2\omega t+\varphi)+\frac{1}{2}U_mI_m\cos\varphi.$$

Среднее значение первого слагаемого за большой (гораздо больше периода колебаний) промежуток времени равно нулю. Тогда среднее значение мощности

$$\bar{P}=\frac{1}{2}U_mI_m\cos\varphi$$

и работа источника

$$A=\bar{P}T=\frac{1}{2}U_mI_mT\cos\varphi.$$

Максимальное значение первого слагаемого по модулю равно $1/2\,U_mI_m$ и

$$P_m=\frac{1}{2}U_mI_m(1+|\cos\varphi|).$$

Видно, что при $|\varphi|\approx\pi/2$ максимальная мощность может во много раз превышать среднюю. Это связано с тем, что электрическая цепь то накапливает энергию, то отдает ее назад источнику. Такой режим очень плох для питающей сети — увеличиваются потери на тепло в подводящих проводах. Пример такой цепи — лампа дневного света. Ток ее ограничивается при помощи катушки с большой индуктивностью, и сдвиг фаз получается

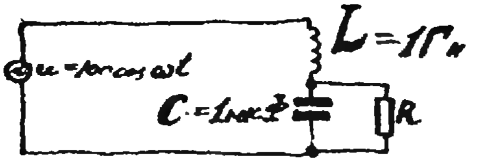


Рис. 9.

близким к $\pi/2$. Выход несложен — подключить параллельно цепи конденсатор. Если правильно выбрать его емкость (подумайте — как), то катушка и конденсатор будут обмениваться энергией между собой, а от сети будет отниматься только полезная мощность.

Задача 6. *Действующее значение напряжения сети в вечерние часы может падать от 220 до 190 В. Для поддержания мощности кипятильника на прежнем уровне последовательно с ним рекомендуется включать регулируемый источник постоянного напряжения. Каким должно быть его напряжение $U_и$ при минимальном напряжении сети?*

Напряжение, приложенное к кипятильнику,

$$u_к=U_{2m}\cos\omega t+U_и,$$

где $U_{2m}=190\sqrt{2}$ В — наименьшее амплитудное значение напряжения сети. Сдвиг фаз между напряжением на кипятильнике и током равен нулю (кипятильник — резистор). Тогда средняя мощность

$$\bar{P}=\frac{\overline{u_к^2}}{R}=\frac{\overline{U_{1m}^2}}{2R},$$

где $U_{1m}=220\sqrt{2}$ В. Но

$$\overline{u_к^2=U_{2m}^2\cos^2\omega t}+U_и^2+2U_и\cdot\overline{U_{2m}\cos\omega t}=$$

$$=\frac{U_{2m}^2}{2}+U_и^2.$$

Отсюда

$$U_и=\sqrt{\frac{U_{1m}^2}{2}-\frac{U_{2m}^2}{2}}\approx110\text{ В}.$$

Упражнения

1. Изображенная на рисунке 8 схема носит название «мост Вина». На какой частоте сдвиг фаз между выходным и входным напряжениями равен нулю? Во сколько раз выходное напряжение на этой частоте меньше входного?

2. Докажите, что в схеме, изображенной на рисунке 9, при частоте $\omega=1/\sqrt{LC}$ ток через резистор не зависит от величины его сопротивления. Найдите этот ток.

К нашим читателям

Продолжается подписка на журнал «Квант» на 1987 год. Индекс журнала в каталоге «Союзпечати» 70465. Подписная цена на год 4 рубля 80 копеек. Подписка принимается без ограничений в течение всего года в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи.

Список читателей, приславших правильные решения

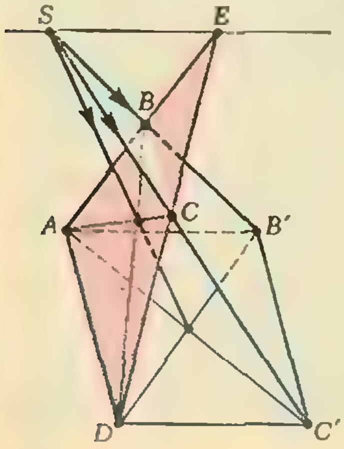
(Начало см. на с. 46)

69; *А. Мудрик* (Брест) 69; *Е. Муляров* (Москва) 78, 80; *М. Нагуманов* (Целиноград) 70; *А. Недачин* (Киев) 69, 75, 78, 80; *Г. Николаишвили* (Тбилиси) 69—75, 78, 80; *С. Новиков* (Херсон) 68—70, 72; *Д. Ноготков* (Алма-Ата) 74; *А. Нургалеев* (Днепродзержинск) 68; *Х. Нурекепов* (Алма-Ата) 78, 80; *В. Орепер* (Киев) 75; *Д. Пашко* (Запорожье) 73, 75, 78, 80; *В. Першин* (Мелитополь) 75; *В. Песоцкий* (д. Дворец Брестской обл.) 69—72; *Р. Плюснин* (Великие Луки) 78; *Д. Погребинский* (Киев) 68; *А. Покровский* (Киев) 68, 78; *С. Полищук* (Канев) 75; *А. Португалов* (Киев) 75, 78; *М. Постельник* (Белгород) 78; *О. Посудневский* (Береза) 69, 70; *Я. Пшеничка* (Черновцы) 78; *С. Ревков* (Киев) 68, 70; *С. Резнов* (Киев) 78; *М. Рзаев* (Баку) 74; *В. Родин* (Сасово) 73; *А. Розенберг* (Уфа) 70, 78; *Е. Розпощик* (Киев) 68, 75; *Т. Рокицкая* (Винница) 78, 80; *В. Рубман* (Одесса) 73, 75; *Ю. Рыбалочка* (Киев) 68, 69; *С. Рыжков* (Москва) 68, 72; *Й. Савчук* (Киров) 75; *Р. Сагайдак* (с. Матугов Черкасской обл.) 68, 70, 73, 75, 78, 80; *Т. Сагайдак* (Канев) 69, 70, 72; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 68; *Б. Самойлов* (Киев) 74; *В. Сандомирский* (Братск) 68; *М. Сергазин* (Кутаиси) 74; *А. Сибиряков* (Томск) 68, 78; *А. Сидоренко* (Киев) 68, 69, 75; *М. Ситников* (Климовск) 68, 69; *И. Скляров* (Киев) 75; *В. Служаев* (Димитровград) 80; *А. Снижко* (Запорожье) 68, 69, 73; *А. Соболев* (Харьков) 78; *И. Соколов* (Минск) 68, 70, 72; *Т. Соколовская* (Целиноград) 73—75, 78, 80; *С. Солянин* (п. Протвино Московской обл.) 68; *А. Ставицкий* (Баку) 68, 75, 80; *Д. Сторожук* (Киев) 73, 78; *А. Струнин* (Ярославль) 73, 78, 80, *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 68, 69, 78, 80; *Д. Тальга* (Алма-Ата) 78; *Х. Тарасов* (Новосибирск) 69; *А. Татаринов* (Тула) 78, 80; *Б. Татиевский* (Киев) 78; *А. Ткаченко* (Киев) 73, 78, 80; *Ф. Тринчук* (Москва) 78, 80; *М. Тумаш* (Львов) 68; *В. Тягнирядно* (Минск) 78, 80; *Р. Ульмасов* (Душанбе) 68; *М. Федоров* (Ульяновск) 75; *Г. Финкельштейн* (п. Черноголовка Московской обл.) 68—70, 73—75, 78, 80; *И. Химони* (Днепропетровск) 68, 69, 78, 80; *И. Чайка* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 78; *М. Чекумина* (Алма-Ата) 78, 80; *О. Челиков* (Могилев) 69, 73, 75, 78, 80; *А. Чернов* (Воронеж) 74; *И. Шехтман* (Киев) 69; *С. Шехтман* (Киев) 73; *А. Шуляк* (с. Молодецкое Черкасской обл.) 68, 78, 80; *А. Щербаков* (Харьков) 69, 70; *М. Щупак* (Тбилиси) 68; *М. Юдин* (Запорожье) 68—70, 73, 75, 78, 80; *С. Юсухно* (Киев) 78, 80; *В. Яйлиян* (Киев) 68—70; *Е. Якуб* (Бахчисарай) 70; *В. Яковлев* (Киев) 70; *А. Янчук* (Дубровица) 68, 78; *Ю. Яровой* (Канев) 75, 78; *В. Ясюченя* (Минск) 75, 80.

С выходом в пространство

Для девятиклассников и десятиклассников приведем доказательство утверждения задачи 3 из статьи И. А. Кушнира (см. с. 23) с помощью центральной проекции в пространстве.

Поместим трапецию *ABCD* в наклонной плоскости так, чтобы прямая *AD* располагалась горизонтально, а центр проекции *S* выберем так, чтобы прямая *SE* также была горизонтальной (и перпендикулярной *AD*). Тогда проекцией трапеции *ABCD* на горизонтальную плоскость *p*, проходящую через прямую *AD*, будет прямоугольник *AB′C′D*, проекциями диагоналей трапеции — диагонали прямоугольника, проекцией середины оснований *BC* — середина отрезка *BC*, так что утверждение задачи 3 следует из того очевидного факта, что середины двух противолежащих сторон прямоугольника и точки пересечения его диагоналей лежат на одной прямой.



Тот же прием помогает и в решении других задач из статьи И. А. Кушнира.

Н. Б.

Признак делимости на 8, 16, 32

Всем известен признак делимости на 4. Он гласит: *число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, образованное его последними двумя цифрами, делится на 4.* Будем рассматривать только числа, делящиеся на 4, так как иные числа не могут делиться на 8, 16, 32. Разделим на 4 число, образованное последними двумя цифрами исходного числа, и прибавим частное к числу, образованному оставшимися цифрами. Тогда *исходное число делится на 8, 16, 32 в том и только в том случае, когда полученное число делится соответственно на 2, 4, 8.* (Чтобы узнать, делится ли оно на 8, можно повторить над ним эту процедуру.)

Пример:

```
 13930|56
+   14|
 ------
 139|44
+ 11|
 ----
 150
```

делится на 32,
потому что
делится на 8,
потому что
делится на 2.

И действительно, 1393056::32=43533.

Подумайте над тем, как доказать этот признак.

Светлана Рубинштейн,
ученица 10 класса

Задачи XLIX Московской городской математической олимпиады

Заключительный тур 49-й Московской городской математической олимпиады состоялся 16 февраля в Московском университете. В нем участвовало 608 школьников 7—10 классов. Ниже приводятся задачи этого тура, предложенные С. Б. Гашковым, М. Пентусом, А. В. Рябининым, И. Н. Сергеевым, И. Г. Царьковым.

7 класс

1. На листе прозрачной бумаги нарисован четырехугольник. Укажите способ, как сложить этот лист (возможно, в несколько раз), чтобы определить, является ли исходный четырехугольник ромбом.

2. Докажите, что ни для каких чисел x, y, t не могут одновременно выполняться три неравенства: $|x|<|y-t|$, $|y|<|t-x|$, $|t|<|x-y|$.

3. Три гнома живут в разных домах на плоскости и ходят со скоростями 1, 2 и 3 км/ч соответственно. Какое место для ежедневных встреч нужно им выбрать, чтобы сумма времен, необходимых каждому из гномов на путь от своего дома до этого места (по прямой), была наименьшей?

4. Произведение некоторых 1986 натуральных чисел имеет ровно 1986 различных простых делителей. Доказать, что либо одно из этих чисел, либо произведение нескольких из них является квадратом натурального числа.

5. Известно, что в кодовом замке исправны только кнопки с номерами 1, 2, 3, а код этого замка трехзначен и не содержит других цифр. Написать последовательность цифр наименьшей длины, наверняка открывающую этот замок (замок открывается, как только подряд и в правильном порядке нажаты все три цифры его кода).

8 класс

1. См. задачу 1 за 7 кл. с заменой ромба квадратом.

2. Найдите все натуральные числа, не представимые в виде разности квадратов каких-либо натуральных чисел.

3. Докажите, что если $a_1=1$, $a_n=1/2(a_{n-1}+2/a_{n-1})$ при $n=2, \ldots, 10$, то $0<a_{10}-\sqrt{2}<10^{-370}$.

4. Квадратное поле разбито на 100 одинаковых участков, 9 из которых поросли бурьяном. Известно, что бурьян за год распространяется на те и только те участки, у каждого из которых не менее двух соседних участков уже поражены бурьяном (участки соседние, если они имеют общую сторону). Докажите, что полностью все поле бурьяном не зарастет.

5. Докажите, что система неравенств

$$\begin{cases} |x|>|y-z+t|, \\ |y|>|x-z+t|, \\ |z|>|x-y+t|, \\ |t|>|x-y+z| \end{cases}$$

не имеет решений.

9 класс

1. На листе бумаги отмечены точки A, B, C, D. Распознающее устройство может абсолютно точно выполнять два типа операций: а) измерять в сантиметрах расстояние между двумя заданными точками; б) сравнивать два заданных числа. Какое наименьшее число операций нужно выполнить этому устройству, чтобы наверняка определить, является ли четырехугольник $ABCD$ прямоугольником?

2. Из точки M по плоскости с постоянной скоростью ползет муравей. Его путь представляет собой спираль, которая наматывается на точку O и гомотетична некоторой своей части относительно этой точки. Сможет ли муравей пройти весь свой путь за конечное время?

3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} |x|<|y-z+t|, \\ |y|<|x-z+t|, \\ |z|<|x-y+t|, \\ |t|<|x-y+z|. \end{cases}$$

4. Произведение некоторых 48 натуральных чисел имеет ровно 10 различных простых делителей. Докажите, что произведение некоторых четырех из этих чисел является квадратом натурального числа.

5. На координатной плоскости нарисованы круги радиусом 1/14 с центрами в каждой точке, у которой обе координаты — целые числа. Докажите, что любая окружность радиусом 100 пересечет хотя бы один нарисованный круг.

10 класс

1. См. задачу № 1 за 9 кл. с заменой прямоугольника $ABCD$ квадратом.

2. Биссектриса угла A треугольника ABC продолжена до пересечения в D с описанной вокруг него окружностью. Докажите, что $AD>1/2(AB+AC)$.

3. Решите уравнение $x^{x^4}=4$ $(x>0)$.

4. Докажите, что ни для каких векторов a, b, c не могут одновременно выполняться три неравенства

$\sqrt{3}|a|<|b-c|$, $\sqrt{3}|b|<|c-a|$, $\sqrt{3}|c|<|a-b|$

5. Найдите минимум по всем α, β максимума функции

$$y(x)=|\cos x+\alpha\cos 2x+\beta\cos 3x|.$$

Избранные задачи Ленинградской городской олимпиады по математике

Заключительный тур (по традиции — устный) Ленинградской городской олимпиады по математике состоялся 16 февраля. Задачи 1—4 и 5а) входили в число 7 задач, предлагавшихся восьмиклассникам, задачи 1, 2, 6—8 — девятиклассникам, задачи 5б), 9—12 — десятиклассникам. Задачи предложили члены жюри С. Генкин, А. Гольберг, Л. Курляндчик, А. Меркурьев, Н. Нецветаев, А. Плоткин, Д. и С. Фомины.

1. Докажите, что в любом многоугольнике найдутся сторона BC и вершина A, отличная от B и C, такие, что основание перпендикуляра,

опущенного из A на прямую BC, лежит на отрезке BC.

2. Марсианин рождается в полночь и живет ровно сто суток. Известно, что за всю историю марсианской цивилизации (ныне вымершей) родилось нечетное число марсиан. Докажите, что было по крайней мере 100 дней, в каждый из которых число жителей Марса было нечетным.

3. В Швамбрании закрыли одну беспосадочную авиалинию. Известно, что после этого от любого швамбранского аэропорта до любого другого можно долететь, быть может, с пересадками. До закрытия линии это можно было сделать, совершив не более чем N посадок. Докажите, что теперь можно долететь из любого аэропорта в любой другой не более чем с $2N$ посадками. (При подсчете числа посадок учитывается и посадка в пункте назначения.)

4. Докажите, что на плоскости можно провести несколько прямых и отметить несколько точек так, чтобы на любой прямой лежало ровно 4 отмеченных точки и через каждую отмеченную точку проходило бы ровно 4 прямых.

5. Имеется лист клетчатой бумаги размером: а) 30×45, б) 30×80 клеток. Двое играют в следующую игру. За один ход (ходят по очереди) производится разрез по линии, соединяющей два соседних узла сетки. Первый игрок начинает резать от края листа. Каждый следующий разрез должен продолжать линию, образованную предыдущими разрезами. Выигрывает игрок, после хода которого лист распадается на два куска. Кто выигрывает при правильной игре?

6. Множество A состоит из вещественных чисел. Известно, что сумма любых двух его элементов также является его элементом, и любой отрезок $[a, b]$, $a < b$ содержит отрезок, целиком состоящий из элементов множества A. Докажите, что A содержит все вещественные числа.

7. Рассмотрим следующий алгоритм:

Шаг 0. Положить $n=m$.

Шаг 1. Если n четно, уменьшить n в два раза. Если n нечетно, увеличить n на 1.

Шаг 2. Если $n>1$, перейти к шагу 1. Если $n=1$, закончить выполнение алгоритма.

Сколько существует натуральных чисел m, для которых при выполнении этого алгоритма шаг 1 будет выполняться ровно 15 раз?

8. Король обошел доску 9×9, побывав ровно один раз на каждом ее поле. (Маршрут короля незамкнутый и, возможно, самопересекающийся.) Какова максимально возможная длина такого маршрута, если длина хода по диагонали равна $\sqrt{2}$, а длина ходов по вертикали и по горизонтали равна 1?

9. Диаметром множества на плоскости называется наибольшее из расстояний между двумя его точками. (Если такое существует.) Известно, что сумма диаметров многоугольников M_1, M_2, ..., M_n меньше, чем диаметр их объединения. Докажите, что существует прямая, не пересекающая ни один из этих многоугольников, по каждую сторону от которой лежит хотя бы один из них.

10. Докажите, что

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}>24.$$

11. Вычислите интеграл

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^3+\sqrt{1+x^6}}.$$

12. Дано:

$$u_1=ax+by+cz,\quad v_1=ax+bz+cy.$$
$$u_2=ay+bz+cx,\quad v_2=az+by+cx,$$
$$u_3=az+bx+cy,\quad v_3=ay+bx+cz,$$

где a, b, c, x, y, z — вещественные числа. Известно, что $u_1u_2u_3=v_1v_2v_3$. Докажите, что перестановкой чисел в тройке (u_1, u_2, u_3) можно получить тройку (v_1, v_2, v_3).

Публикацию подготовил *С. В. Фомин*

Задачи Ленинградской городской олимпиады по физике

8 класс

1. Определите радиус орбиты спутника Земли, который все время находится над одной и той же точкой земной поверхности. Радиус Земли $R=6400$ км, ускорение свободного падения на ее поверхности $g=10$ м/с^2.

2. На наблюдательной станции на планете X местное солнце никогда не поднимается над горизонтом выше $\alpha=75°$. Найдите широту, на которой находится станция, если ось планеты наклонена под углом $\beta=50°$ к плоскости ее вращения.

3. Чтобы вытащить пробку из горлышка термоса, вы втыкаете в нее шило (рис. 1). Под каким углом можно втыкать шило, не опасаясь, что пробка провалится внутрь термоса? Коэффициент трения о стенки $\mu=0{,}5$.

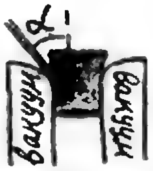


Рис. 1.

4. На краю тележки массой M и длиной l, стоящей на гладком горизонтальном столе, находится груз массой m. Вы толкаете груз с постоянной силой $\vec{F}$, направленной горизонтально, к противоположному краю тележки (рис. 2). Через какое время груз достигнет противоположного края тележки? Коэффициент трения между грузом и тележкой μ. Считать, что вся масса тележки сосредоточена в доске.

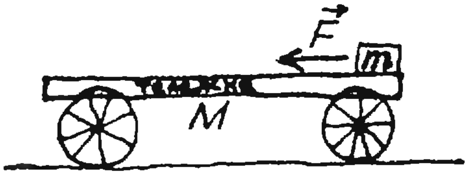


Рис. 2.

5. Два велосипеда — складной и обычный — выполнены так, что усилия, необходимые для движения, в обоих случаях одинаковы. Известно, что у обычного велосипеда радиус колес в 1,2 раза, а радиус большой шестерни (связанной с педалями) в 1,5 раза больше, чем у складного. Найдите соотношение между радиусами маленьких шестеренок (связанных с ведущим колесом). Педали считать одинаковыми у обоих велосипедов, потерями на внутреннее трение пренебречь.

6. На гладкой наклонной плоскости с углом $\alpha=30°$ к горизонту установлено устройство, стреляющее маленьким шариком. Началь-

ная скорость шарика направлена горизонтально вдоль плоскости. По плоскости свободно скользит шайба. Ее положение относительно стреляющего устройства в момент вылета шарика показано на рисунке 3; скорость $v_0=10$ м/с и направлена под углом $\beta=60°$ к горизонтали. Какую начальную скорость должен иметь шарик, чтобы попасть в шайбу?

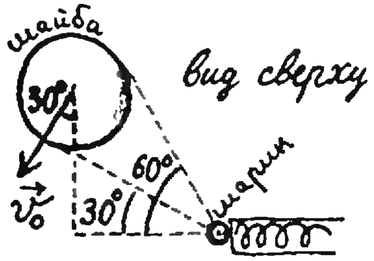


Рис. 3.

7. Автомобиль едет по мосту, имеющему форму параболы. Высота моста $h=5$ м, длина по горизонтали $l=60$ м. Найдите отношение силы давления автомобиля на дорогу на вершине моста к его весу на ровной дороге, если по мосту он едет с постоянной скоростью $v=54$ км/ч.

8. Система из трех одинаковых сосудов показана на рисунке 4. Два крайних сосуда заполнены водой, в среднем сосуде и в трубке — воздух, высота левого колена трубки в 3 раза меньше высоты сосудов H. Начальное давление в среднем сосуде $p_0 \gg \rho gH$ (ρ — плотность воды). В какое состояние перейдет система после открывания кранов?

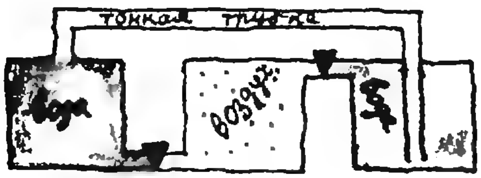


Рис. 4.

9 класс

1. Легкая пружина длиной l с жесткостью k одним концом прикреплена к вертикальной оси, вокруг которой может свободно вращаться, а другим — к маленькому грузу массой m. Вся система находится на горизонтальном гладком столе, пружина не растянута. Грузу ударом сообщают скорость $\vec{v}$, направленную перпендикулярно пружине. Найдите минимальное и максимальное расстояния груза от оси.

2. См. задачу 7 для 8 класса.

3. Если столкнуть два стеклянных шара, то один из них разобьется. Почему не разбиваются сразу оба шара?

4. В ванночке с водой (глубина воды h, площадь ванночки S, $\sqrt{S} \gg h$) образовался раствор тяжелых ионов (заряд иона $+q$, масса m, масса всех ионов M). Раствор перемешали. Опишите качественно и дайте количественные оценки распределения ионов в ванночке после установления равновесия. Как это распределение зависит от температуры раствора?

5. В кастрюле находится вода при температуре $t_1=60$ °C. Кастрюлю закрывают крышкой массой $m=5$ кг и площадью $S=100$ см^2 и медленно нагревают до $t_2=70$ °C. Сколько раз подпрыгнет крышка кастрюли за это время, если давление насыщенных паров при t_1 равно $p_1=2{,}0\cdot10^4$ Па, при t_2 — $p_2=3{,}1\cdot10^4$ Па, атмосферное давление $p_0=10^5$ Па.

6. В большую бочку с водой бросают раскаленные металлические шарики одинаковой температуры. Известно, что шарик радиусом $r_1=0{,}5$ см нагревает воду на $\Delta t_1=0{,}1$ °C, а радиусом $r_2=1$ см — на $\Delta t_2=1{,}2$ °C. Оцените изменение температуры воды при броске шарика радиусом $r_3=1{,}5$ см.

7. В схеме, изображенной на рисунке 5, на металлическом шаре A имеется заряд q. Каким будет заряд на шаре, если поменять местами резисторы с сопротивлениями r_1 и r_2?

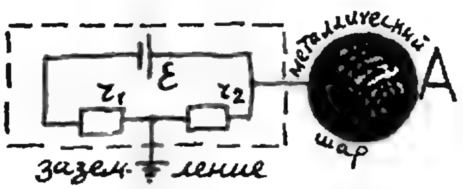


Рис. 5.

10 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. Тонкую легкую резину натянули на горизонтальный обруч радиусом r; в центре обруча к резине приклеили маленькую гирю массой m. Если обруч поднять, гиря опустится вниз на расстояние d ($d \ll r$). Оцените величину периода малых горизонтальных колебаний гири при закрепленном на горизонтальном гладком столе обруче (прогиба нет).

3. См. задачу 4 для 9 класса.

4. В кристалле существует выделенная ось X, вдоль которой удельная проводимость равна σ_1 (то есть если вырезать из кристалла прямой провод с осью, параллельной оси X, то сопротивление такого провода будет равно $R=l/(S\sigma_1)$, где l и S — длина и площадь сечения провода). Удельная проводимость по осям Y и Z равна σ_2, $\sigma_2 \neq \sigma_1$. Чему будет равна удельная проводимость прямого провода, вырезанного из этого кристалла под углом α к оси X?

5. Квадратная проволочная рамка (длина стороны a, сопротивление единицы длины проволоки ρ) вращается вокруг одной из своих сторон с угловой скоростью ω в постоянном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной оси вращения. Как изменится мощность, выделяемая в рамке, если середины противоположных сторон замкнуть проволокой из того же материала и длиной a?

6. У электромобиля четыре скорости, переключающиеся при помощи коробки передач (то есть двигатель может быть соединен с колесами с четырьмя различными коэффициентами передачи). Рекомендованные скорости, при которых следует изменять коэффициент передачи (для того чтобы двигатель потреблял минимальную мощность), такие: 10 км/ч, 20 км/ч, 45 км/ч. Максимально возможная скорость электромобиля 180 км/ч. Найдите соотношение между коэффициентами передачи (то есть между радиусами шестеренок, соединяющих двигатель с колесами) на различных скоростях. Для простоты можно считать, что в двигателе электромобиля ротор вращается в постоянном магнитном поле.

7. Как бы мы стали видеть, если бы скорость света возросла в 10^5 раз?

Публикацию подготовил *А. Ю. Алексеев*

Избранные задачи зарубежных математических олимпиад: Олимпиады США

Математические олимпиады и конкурсы имеют долгую историю. В некоторых странах, например в СССР и Венгрии, математические олимпиады имеют традицию, исчисляющуюся многими десятилетиями, другие страны стали проводить такие олимпиады совсем недавно. Но где бы ни проводились математические олимпиады, предлагаемые на них задачи всегда вызывают живой интерес у всех любителей математики.

В последние годы у нас в стране появились книги, знакомящие с задачами математических олимпиад Польши и Венгрии. Однако это — «капля в море»: ведь только в международных олимпиадах по математике участвуют 34 страны. Учитывая пожелания наших читателей, мы начинаем публиковать избранные задачи математических олимпиад зарубежных стран.

1 сентября 1971 года Американское математическое общество приняло решение о ежегодном проведении национальных математических олимпиад. Отбор участников национальной олимпиады США — двухступенчатый. В последние годы первым туром служат ежегодные «Экзамены по математике американской средней школы» (*EHSME*), проводимые на местах и доступные всем учащимся. Так, в 1985 году эти экзамены проводились в феврале, и в них приняли участие более 380 000 человек. Вторым туром служит «Американский математический экзамен по приглашению» (*AIME*). Этот экзамен состоит из пятнадцати вопросов и длится $2^1/_2$ часа. В 1985 году на этот экзамен были приглашены 932 учащихся, получившие на *EHSME* более 95 баллов из 150 возможных. Лучшие участники *AIME* (в 1985 году — это 64 человека, правильно ответившие более, чем на 10 вопросов) и допускаются на заключительный тур национальной олимпиады США.

Участники, занявшие первые восемь мест, приглашаются в Вашингтон на торжественное трехдневное заседание, проводимое под эгидой Национальной академии наук США.

Первая национальная математическая олимпиада была проведена 9 мая 1972 года.

Задачи первых трех национальных олимпиад США приведены в книге: Морозова Е. А., Петраков И. С., Скворцов В. А. Международные математические олимпиады. М.: Просвещение, 1976.

Ниже мы приводим несколько задач последующих олимпиад.

1 (1973 г.). Девять отмеченных точек расположены внутри единичного квадрата. Докажите, что среди них найдутся три, которые либо лежат на одной прямой, либо являются вершинами треугольника с площадью, не превосходящей 1/8.

2 (1975 г.). Пусть A, B, C, D — четыре точки в пространстве. Докажите, что

$$AC^2+BD^2+AD^2+BC^2 \geqslant AB^2+CD^2.$$

3 (1976 г.). Найдите решения уравнения в целых числах a, b, c:

$$a^2+b^2+c^2=a^2b^2.$$

4 (1978 г.). Целое число n назовем *хорошим*, если его можно представить в виде $n=a_1+a_2+\ldots+a_k$, где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — натуральные числа (не обязательно различные), удовлетворяющие соотношению $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}=1$. Известно, что натуральные числа 33, 34, ..., 73 — хорошие. Докажите, что все натуральные числа, не меньшие 33, являются хорошими.

5 (1979 г.). В некоторой организации имеется n человек ($n \geqslant 5$), а также $n+1$ комитетов, состоящих из трех человек, причем в разных комитетах составы участников не одинаковы. Докажите, что найдутся два комитета с ровно одним общим участником.

6 (1980 г.). Найдите максимальное число трехчленных арифметических прогрессий, которые могут быть выбраны из последовательности чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$.

7 (1980 г.). В тетраэдр вписана сфера, которая касается граней тетраэдра в их центрах тяжести (то есть в точках пересечения медиан). Докажите, что тетраэдр — правильный.

8 (1980 г.). Найдите все числа a_0, для которых бесконечная последовательность (a_n), определенная равенствами $a_n=2^{n-1}-3a_{n-1}$ при $n=1, 2, 3, \ldots$, строго возрастает, то есть $a_{n-1} < a_n$ при всех n.

9 (1981 г.). Дан угол, величина которого равна $\frac{180°}{n}$, где n — натуральное число, не делящееся на 3. Докажите, что (зная n) можно разделить этот угол на три равных угла только с помощью циркуля и линейки.

10 (1981 г.). Даны n точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Пусть A — множество всех тетраэдров с вершинами в этих точках. Плоскость α не содержит ни одной из данных точек. Докажите, что среди всех сечений тетраэдров из множества A плоскостью α четырехугольников не более чем $\frac{n^2(n-2)^2}{64}$.

11 (1982 г.). В обществе, состоящем из 1982 человек, среди любой группы из четырех человек есть по крайней мере один, кто знаком с остальными тремя. Каково наименьшее количество людей, которые знакомы со всеми?

12 (1984 г.). Математическая олимпиада проходила в два дня. Всего за два дня было 28 задач. Для любой пары задач нашлось ровно два участника, решивших эти задачи. Каждый участник решил семь задач. Докажите, что один из участников в первый день либо не решил ни одной задачи, либо решил не менее четырех.

13 (1985 г.). В пространстве даны четыре точки такие, что из шести попарных расстояний между ними не более двух превышают 1. Найдите максимальное возможное значение суммы всех этих шести расстояний.

Публикацию подготовили *М. Л. Ситников, Г. А. Тоноян*

Урок одной задачи

3. Поскольку векторы $\vec{BC}$ и $\vec{AD}$ сонаправлены, существует гомотетия с центром в точке E (см. рис. 2 с. 23) и коэффициентом $k_1 = BC:AD$, при которой

$$H_E^{k_1}: BC \to AD,\ B \to A,\ C \to D,\ F \to H.$$

Следовательно, точки E, F, H лежат на одной прямой EF. Поскольку векторы $\vec{BC}$ и $\vec{DA}$ противонаправлены, существует гомотетия с центром O и коэффициентом $k_2 = -OB:OD$, при которой

$$H_O^{k_2}: BC \to DA.$$

Следовательно, точки O, F, H принадлежат прямой OH. Прямые EF и OH имеют две общие точки (F, H), следовательно, они совпадают.

4. На прямой AK выберем произвольную точку X (рис. 1), соединим ее с точкой C и с точкой B. Прямая KC пересекает XB в точке O, через точки A и O проведем прямую AO, которая пересечет отрезок XC в точке E. Отрезок KE — искомый.

6. Учитывая построения, рассмотренные в задаче 5, найдем отрезок длиной y, чтобы

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}.$$

Затем строим отрезок длиной x, чтобы

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{b}.$$

9. Пусть m и n — данные параллельные прямые, P — данная точка. Произведем построения, показанные на рисунке 2: проводим через точку P — произвольную прямую, которая пересечет параллельные прямые в точках D и A, X — произвольная точка, принадлежащая прямой AP. Проводим через эту точку произвольную прямую — получаем точки C и B. Затем проводим AC и BD — получаем точку K, проводим KX, получаем точку H — середину AB, затем проводим CP — получаем точку E, прямая DE пересечет BX в точке L, прямая PL искомая.

10. Построение показано на рисунке 3, на котором номера указывают порядок построения.

11. Построение — оно называется построением *Брiансона* — показано на рисунке 4.

Избранные школьные задачи

1. а) Воспользуйтесь очевидными неравенствами:

$$a^2 \geqslant a^2-(b-c)^2,$$
$$b^2 \geqslant b^2-(c-a)^2,$$
$$c^2 \geqslant c^2-(a-b)^2.$$

б) Воспользуйтесь формулами $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{2S}{a+b+c}$, где

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)},$$

и задачей 1, а).

Равенство достигается в случае равностороннего треугольника.

2. $x^6+2x^4+2x^3+x^2+2x-1=(x^3+x+1)^2-2$. Отсюда наименьшее значение данного многочлена равно -2 (когда $x^3+x+1=0$). (Интерес представляет тот факт, что наименьшее значение определить можно, а соответствующее значение x — нельзя.)

3. $n^4+64=(n^2+8)^2-16n^2=(n^2+4n+8)(n^2-4n+8)$.

4. Одно решение находим подбором: $100+27+1=128$, то есть $x=10$, $y=3$, $z=1$,

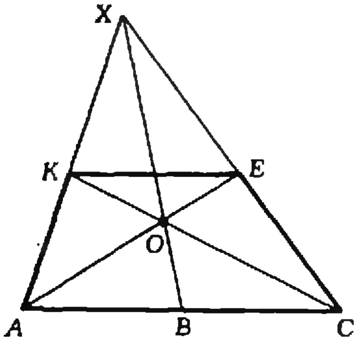


Рис. 1.

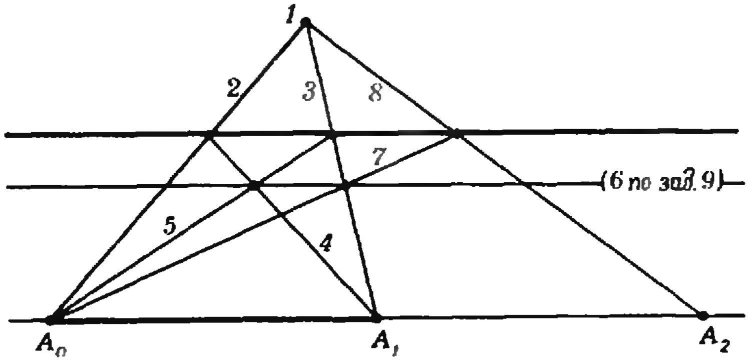


Рис. 3.

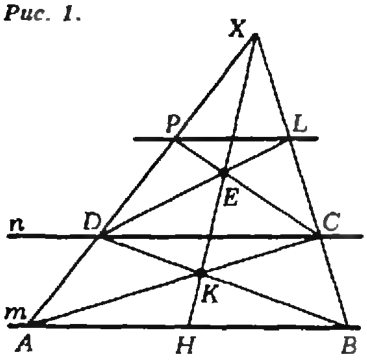


Рис. 2.

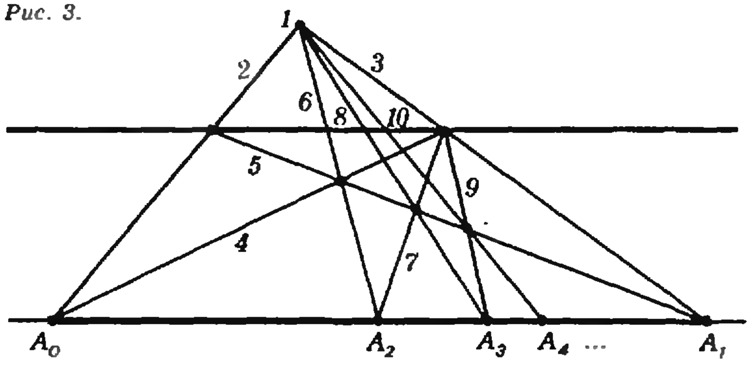


Рис. 4.

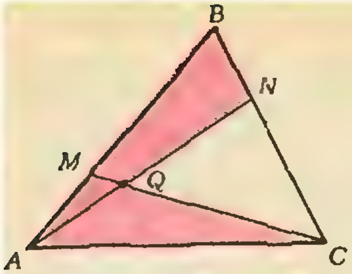


Рис. 5.

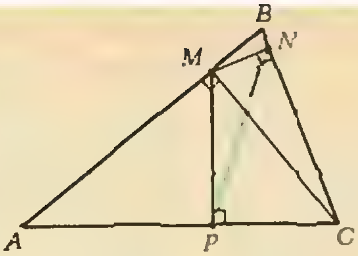


Рис. 6.

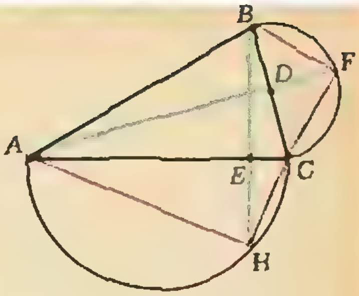


Рис. 7.

$t=2$. После этого найденные x, y, z, t умножаем соответственно на n^{105}, n^{70}, n^{42} и n^{30} (n — любое натуральное число). Таким образом, любой набор $\{10n^{105};\ 3n^{70};\ n^{42};\ 2n^{30}\}$, $n\in N$, дает решение данного уравнения.

5. Утверждение задачи вытекает из равенства площадей треугольников ABN и AMC (рис. 5): $S_{ABN}=S_{AMC}=\frac{1}{k+1}S_{ABC}$, где $k=AM:MB$.

6. Сложив почленно уравнения системы, после несложных преобразований получим

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0.$$

Отсюда находим решения: $x=y=z$.

7. а) Воспользуйтесь формулами:

$$a=2R\sin\alpha,\ b=2R\sin\beta,\ c=2R\sin\gamma$$

(R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC) и тем, что $\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma$.

б) $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=$

$$=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

Аналогично

$$\sin\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{b}{2\sqrt{ac}},\quad \sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{c}{2\sqrt{ab}}.$$

Таким образом,

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

Наибольшее значение равно $\frac{1}{8}$ и достигается в случае равностороннего треугольника.

8. Поскольку $k^5+3=(k^3-k)(k^2+1)+k+3$, k^5+3 делится на k^2+1, когда $k+3=0$, то есть $k=-3$. Однако при небольших k может получиться, что на k^2+1 делится и $k+3$. Поэтому необходимо проверить, что будет при $|k|<-3$ ($k\in Z$). Нетрудно убедиться, что подходят также значения $k=-1$, 0, 1 и 2. Ответ: $\{-3;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$.

9. *Поскольку углы P и N — прямые, вокруг* четырехугольника $MPCN$ можно описать окружность диаметром MC (рис. 6). Поэтому $PN=MC\cdot\sin\widehat{C}$, так что отрезок PN будет иметь минимальную длину тогда, когда будет минимальным отрезок MC, то есть когда MC — высота треугольника ABC. Поэтому искомое положение точки M на AB — это основание высоты, опущенной из вершины C.

10. Убедитесь, что на каждом из промежутков $]-\infty;\ 0]$, $]0;\ 1[$, $[1;\ \infty[$ функция $f(x)=x^{10}-x^7+x^2-x+1$ *положительна.*

11. Поскольку дискриминант уравнения равен $\sin^2 xy-1$, уравнение имеет решение только в случае $\sin^2 xy=1$, то есть $\sin xy=\pm1$. Поэтому $x=\pm1$, $y=\pi/2+\pi k$, $k\in Z$.

12. Воспользовавшись представлением

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=$$

$$=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{k+2}+\frac{D}{k+3},$$

докажите равенство

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k}-\frac{3}{k+1}-\frac{3}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right).$$

Искомая сумма равна $\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}-\right.$ $\left.-\frac{1}{n+3}\right)$.

13. Воспользуйтесь тождеством

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}-1.$$

14. Положив $\sqrt[3]{2-x}=a$, $\sqrt{x-1}=b$, получите *равносильную систему:*

$$2-x=a^3,\ x-1=b^2,\ a=1-b,\ b\geqslant0,$$

откуда

$$b^2+1=2-(1-b)^3.$$

Корни этого уравнения $b_1=0$, $b_2=1$, $b_3=3$. Корни данного уравнения $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=10$.

15. Из подобия треугольников ADC и BEC (рис. 7; BE и AD — высоты)

$$DC:AC=EC:BC. \qquad (1)$$

Из подобия треугольников CEH и CHA (H и *E — точки пересечения продолжений высот* с соответствующими полуокружностями)

$$HC:EC=AC:HC. \qquad (2)$$

Наконец, из подобия треугольников CDF и CFB

$$CF:CD=BC:CF. \qquad (3)$$

Поэтому

$$HC^2\overset{(2)}{=}EC\cdot AC\overset{(1)}{=}DC\cdot BC\overset{(3)}{=}CF^2.$$

Равенство остальных пар отрезков устанавливается аналогично.

Сколько велосипедов?

1. 12 кроликов и 23 фазана.
2. 100 старых баранов и 12 молодых.
3. Рулон белого сукна стоит 7 р., черного — 11 р., красного — 8 р., зеленого — 6 р., лазоревого — 7 р.
4. 5 мужчин, 1 женщина, 6 детей.

Цепи переменного тока

1. $\nu=1/(2\pi RC)$; $U_{вых}/U_{вх}=1/3$.
2. $I_m=U_m/(\omega L)=U_m\sqrt{C/L}=0{,}1$ А.

Избранные задачи зарубежных математических олимпиад: олимпиады США

1. Разобьем данный квадрат на четыре квадрата средними линиями. Хотя бы один из получившихся квадратов будет содержать по меньшей мере три отмеченные точки, и любые три точки, лежащие в одном маленьком квадрате, удовлетворяют условию задачи.

2. Обозначим векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ через $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Тогда доказываемое неравенство принимает вид

$$\vec{c}^2+(\vec{d}-\vec{b})^2+\vec{d}^2+(\vec{c}-\vec{b})^2\geqslant\vec{b}^2+(\vec{d}-\vec{d})^2;$$

после раскрытия скобок и перегруппировки слагаемых получаем

$$(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})^2\geqslant 0.$$

3. Очевидно, что $a=b=c=0$ — решение. Покажем, что других решений нет. Квадрат любого числа имеет остаток 0 или 1 от деления на 4. Из нашего равенства поэтому следует, что числа a^2, b^2, c^2 делятся на 4; значит, числа a, b, c делятся на 2. Положим $a=2a_1$, $b=2b_1$; $c=2c_1$. Имеем

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=4a_1^2b_1^2.$$

Теперь видно, что числа a_1^2, b_1^2, c_1^2 делятся на 4; полагаем $a_1=2a_2$, $b_1=2b_2$, $c_1=2c_2$, получаем

$$a_2^2+b_2^2+c_2^2=16a_2^2b_2^2.$$

Продолжая такие рассуждения, находим, что a, b и c делятся на 2^n при любом n.

4. Достаточно доказать, что если число n хорошее, то хорошими являются числа $2n+2$ и $2n+9$. Доказательство первого: если $\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_k}=1$, то $\frac{1}{2a_1}+\dots+\frac{1}{2a_k}+\frac{1}{2}=1$.

Доказательство второго: если $\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}=1$, то

$$\frac{1}{2a_1}+\dots+\frac{1}{2a_k}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1.$$

5. *Основная лемма*: если из нескольких комитетов, охватывающих не менее пяти человек, любые два комитета имеют двух общих членов, то существуют два человека, входящие во все эти комитеты.

6. Число a_k может быть средним членом не более чем $\min(k-1,\ n-k)$ трехчленных арифметических прогрессий. Поэтому общее число трехчленных арифметических прогрессий не может быть больше чем сумма

$$0+1+2+\dots+\left[\frac{n-1}{2}\right]+\dots+2+1+0.$$

Эта сумма равна $\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)$ при четном n и $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ при нечетном n. Это и есть ответ, поскольку именно столько трехчленных арифметических прогрессий содержится в последовательности 1, 2, 3, ..., n.

7. Расстояния от вершины трехгранного угла тетраэдра до точек касания сферы с гранями этого угла равны; в то же время эти расстояния равны 2/3 длины соответствующих медиан. Поэтому медианы граней тетраэдра, выходящие из одной вершины, равны. Расстояния от середины ребра тетраэдра до двух точек касания сферы с гранями, прилегающими к этому ребру, равны; в то же время эти расстояния равны 1/3 длины соответствующих медиан. Поэтому медианы граней тетраэдра, опущенные на одно ребро, равны.

Из этих двух утверждений о равенстве медиан следует, что все медианы всех граней тетраэдра равны. Из этого вытекает, что грани тетраэдра — одинаковые правильные треугольники.

8. Из условия следует, что

$$a_n=2^{n-1}-3\cdot2^{n-2}+9\cdot2^{n-3}-\dots=\frac{2^n+(-1)^{n+1}\cdot3^n}{5}+(-1)^n3^na_0,$$

откуда

$$a_n-a_{n-1}=\frac{2^{n-1}}{5}\left[1+4\cdot(-1)^{n+1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\times\times(1-5a_0)\right].$$

Ясно, что если $1-5a_0\neq0$, то знак этого выражения при достаточно большом n будет одним при четных n и другим при нечетных n; таким образом, последовательность (a_n) не будет возрастающей. Если же $1-5a_0=0$, то есть $a_0=\frac{1}{5}$, то $a_n-a_{n-1}=\frac{2^{n-1}}{5}$ и последовательность будет возрастающей. (Заметим, что если $a_0=\frac{1}{5}$, то $a_n=\frac{2^n}{5}$.)

9. Если $n=3k+1$, то $\frac{60^\circ}{n}=60^\circ-k$; если $n=3k-1$, то $\frac{60^\circ}{n}=k\cdot\frac{180^\circ}{n}-60^\circ$.

10. В сечении тетраэдра плоскостью α получится четырехугольник, только если две вершины тетраэдра лежат по одну сторону от плоскости α и две — по другую. Предположим, что по одну сторону лежат k точек и по другую $n-k$ точек. Из k точек можно составить $\frac{k(k-1)}{2}$ пар, из $n-k$ точек $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ пар. Поэтому общее число четырехугольных сечений будет равно $\frac{k(k-1)(n-k)(n-k-1)}{4}$, а это число меньше $\frac{n^2(n-2)^2}{64}$ при любом $k=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n$ (докажите!)

11. Ответ: 1979. Чтобы доказать, что их не может быть меньше, достаточно заметить, что не может быть двух непересекающихся пар незнакомых людей и не может быть человека, незнакомого с тремя людьми.

13. $4+2\sqrt{2}$.

Признак делимости на 8, 16, 32

(см. с. 56)

Представим исходное число в виде $100a+4b$, где $4b$ — число, образованное его последними двумя цифрами. Разделив его на 4, получим b, а прибавив частное к числу, образованному оставшимися цифрами, получим $a+b$. Между тем исходное число можно представить в виде $100a+4b=96a+4a+4b=32\cdot3a+4(a+b)$, то есть исходное число делится на 8, 16, 32 тогда и только тогда, когда $4(a+b)$ делится на 8, 16, 32, а это бывает тогда и только тогда, когда $a+b$ делится соответственно на 2, 4, 8.

«Квант» для младших школьников

(см. Квант № 8)

1. Обозначим через x вес сухого вещества в грибах. Тогда вначале грибы весили $10x$ кг, а вода в них весила $9x$ кг. После высыха-

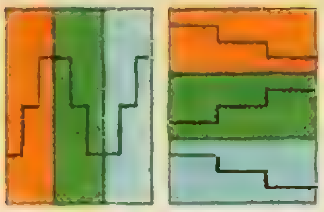


Рис. 8.

ния сухое вещество стало составлять $4/10$ веса грибов. Отсюда вес грибов равен $10x/4$, а вес воды равен $6x/4$. Из условия $9x-6x/4=15$, откуда $x=2$. Следовательно, первоначальный вес грибов равен 20 кг.

2. См. рисунок 8.

3. Пусть n — количество этажей в доме, l — количество подъездов до подъезда, в котором живет Коля, k — количество подъездов до подъезда, в котором живет Витя. Тогда из условия получаем систему

$$\begin{cases}83=4nl+16+3,\\ 169=4nk+8+1.\end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $nl=16$, из второго уравнения — что $nk=40$. У чисел 16 и 40 четыре общих делителя: 1, 2, 4, 8. Поскольку известно, что Коля живет на 5-м этаже, $n\geqslant5$; следовательно, $n=8$.

4. Звук, отражаясь от стволов деревьев, меняет направление и поэтому приходит к нам с разных сторон.

5. Заметим, что если лист бумаги покрывает больше половины другого такого же листа, то центр первого листа расположен в пределах второго. Отсюда следует, что если мы воткнем булавку в центр верхнего листа, то она проткнет и все остальные листы.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 6)

Задание 11 (Э. Погосянц). 1. Крf3! Крg1 2. Крe2 К:b2 (2...Кf2 3. b4 Кe4 4. b5 Кd6 5. b6 Крg2 6. Крd3 Крf3 7. Крd4 и т. д.) 3. Крd2 Крf2 4. Крc2 Крe3 5. Кр:b2 Крd4 6. Крa3 Крc5 7. Крa4 Крb6 8. Крb4 и оппозиция завоевана.

Задание 12 (Э. Погосянц). 1. Кg1 Крg2 (1...Крf2 2. Сc5+) 2. Кe2 (2. Сc5 Лc4 с ничьей) 2...Лc4 (2...Крf3 3. Кc1 h5 4. c7 h4 Кd3 Лg8+ 6. Крd7 h3 7. Сd6 Лg7+ 8. Крc6 Лg8 9. Крb7 Крg2 10. Кf4+ Крg3 11. Кg6+ Крg2 12. Кh4+ и пешка черных обезврежена) 3. Кc3 (3. Кc1? h5 4. Кd3 h4 5. Сd6 h3 6. Кf4+ Крg3 7. Кg6+ Крg2 с ничьей) 3...Лc4 4. Кd5! Л:c6+ 5. Крb7. Доминация! Черная ладья поймана почти на пустой доске. 5...Лc4(c2) 6. Кe3+; 5...Лe6(g6) 6. Кf4+.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян
Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев
Редакционная коллегия: А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, А. А. Варламов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант
Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. Н. Виленкин,
А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. В. Дубах, С. В. Иванов,
Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров,
А. М. Пономарева, И. Е. Смирнова,
П. И. Чернуский

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Т. С. Вайсберг

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

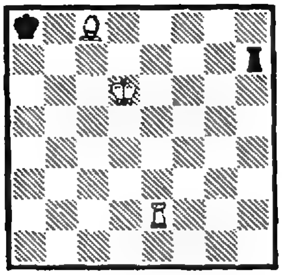
Сдано в набор 18.07.86. Подписано к печати 18.08.86.
Т-11649 Бумага 70×108/16
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,30
Тираж 195 427
Цена 40 коп. Заказ 1920

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

НОВЫЕ УСПЕХИ КОМПЬЮТЕРА

В «Кванте» № 2 за 1986 год подробно рассказывалось об эндшпиле «ладья и слон против ладьи». Он считается теоретически ничейным, однако на практике сильнейшая сторона часто берет верх. Мы писали, что точку в анализе должен поставить компьютер. И вот недавно был опубликован анализ одной американской ЭВМ, которая, в частности, обнаружила следующую рекордную позицию.



При наилучшей игре обеих сторон белые выигрывают, причем победа достигается в 59 ходов! Приведем оптимальный вариант игры. 1. Сf5 Лh4 2. Сd3 Лf4 3. Сe4+ Крa7 4.Сc6 Лg4 5. Крc7 Лg7+ 6. Сd7 Лg6 7. Сe6 Лg7+ 8. Крc6 Лg1 9. Лa2+ Крb8 10. Лb2+ Крa8 11. Крb6 Лc1 12. Сf5 Лc3 13. Лb1 Крb8 14. Лb4 Лa3 15. Сd7 Лa2 16. Лh4 Лb2+ 17. Сb5 Лc2 18. Сc4 Лb2+ 19. Крc6 Лf2 20. Лh8+ Крa7 21. Лh7+ Крb8 22. Лb7+ Крa8 23. Лh4 Лg2 24. Сd3 Лg3 25. Лd4 Лf3 26. Сc4 Лh3 27. Лd8+ Крa7 28. Сd5 Лh2 29. Лd7+ Крb8 30. Лb7+ Крa8 31. Лb1 Лc2+ 32. Крb6+ Крb8 33. Сe6 Лe2 34. Крc6+ Крa8 35. Лa1+ Крb8 36. Сd5 Лh2 37. Лb1+ Крa7 38. Сe4 Лh6+ 39. Крc5 Лb6 40. Лh1 Лa6 41. Лh8 Лa5+ 42. Крc6 Лg5 43. Лh7+ Крa6 44. Сd5 Крa5.

Белые добились «филидоровской позиции», дальнейшее известно. 45. Крc5 Лg6 46. Лh2 Лg4 47. Лb2 Лh4 48. Лb7 Лh6 49. Сf7 Лf6 50. Сc4 Лf5+ 51. Сd5 Лf6 52. Лb5+ Крa6 53. Лb2 Крa7 54. Лb7+ Крa6 55. Лe7 Крa5 56. Сe6 Крa6 57. Сc8+ Крa5 58. Лa7+ Лa6 59. Л:a6×.

Многие ходы белых единственные: играя иначе, белые упускают победу или отдаляют ее. Черные тоже защищались весьма тонко; при малейшей неточности они проигрывали быстрее. Нет сомнений, что такой анализ не в состоянии провести ни один из гроссмейстеров. Кстати, он наводит на мысль, что окончания такого вида, вопреки теории, следует считать выигранными для сильнейшей стороны (хотя имеются исключения).

Итак, правило 50 ходов в шахматном кодексе было изменено для этого эндшпиля не зря. Теперь сильнейшей стороне предоставляется 100 ходов, чтобы поставить мат или выиграть ладью.

Напомним теперь об одном достижении компьютера в решении шахматно-математических задач. Американский математик С. Ким придумал интересное обобщение знаменитой задачи о 8 ферзях.

Расставить на доске (8×8) наибольшее число ферзей так, чтобы каждый из них нападал ровно на p других ферзей.

Условие $p=0$ означает, что ферзи не угрожают друг другу, то есть мы приходим к классической задаче, которой интересовался еще великий Гаусс. Искомое число ферзей на доске 8×8 равно восьми. Для $p=1$ максимум равен десяти, для $p=2$ — четырнадцати. Полное решение задачи получили молодые киевские математики С. Белый и Е. Ровенский. Они доказали, что для $p=3$ максимум равен восемнадцати, а для $p=4$ — двадцати одному (для $p>4$ необходимых расстановок не существует).

Эти результаты были впервые опубликованы в «Кванте» № 8 за 1985 г. И вот совсем недавно С. Белый и Е. Ровенский прислали нам оттиск своей статьи, опубликованной в серьезном научном издании, где рассмотрено обобщение задачи на все квадратные доски $n\times n$ для $n\leqslant 8$. Максимальное число ферзей для различных значений n, p приведено в следующей таблице. Существенно, что она была получена при помощи ЭВМ!

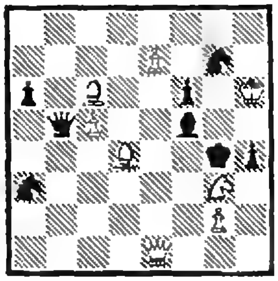
n \ p	0	1	2	3	4
1	1				
2	1	2	3	4	
3	2	2	4	6	
4	4	4	6	8	8
5	5	4	8	10	11
6	6	8	10	12	14
7	7	8	12	14	18
8	8	10	14	18	21

Авторы сообщают, что алгоритм решения основан на «поиске с возвращением» и вполне доступен школьникам, знакомым с программированием переборных задач.

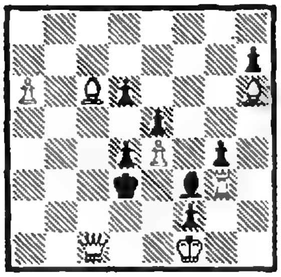
В заключение отметим, что задача Кима, как и многие другие математические задачи на шахматной доске, имеет прямое отношение к теории графов, и ее решение важно для этого раздела математики и кибернетики.

Конкурсные задания

Основным действующим лицом в обеих позициях также является ферзь.



17. Белые начинают и дают мат в 3 хода.



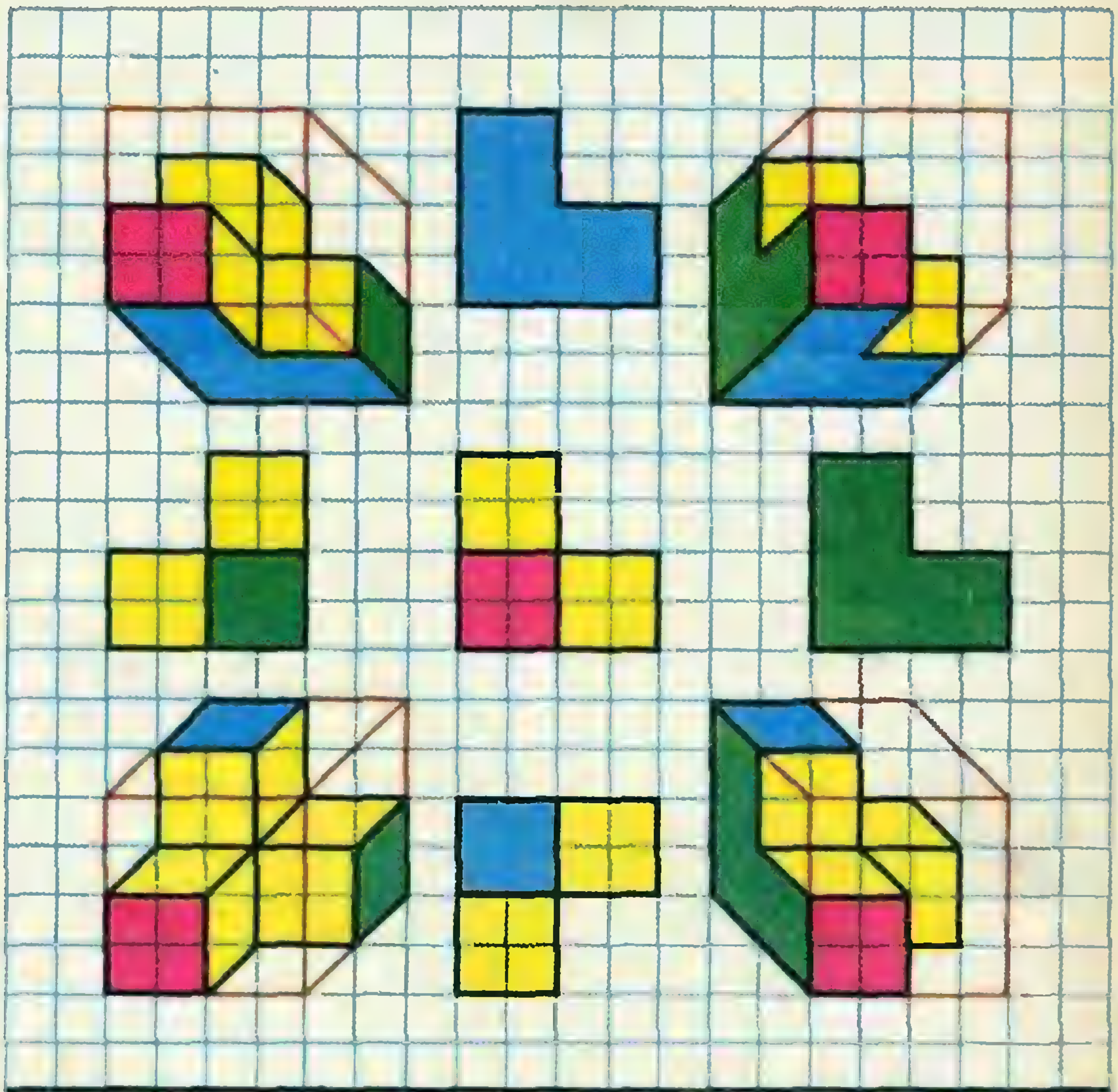
18. Белые начинают и дают мат в 3 хода.

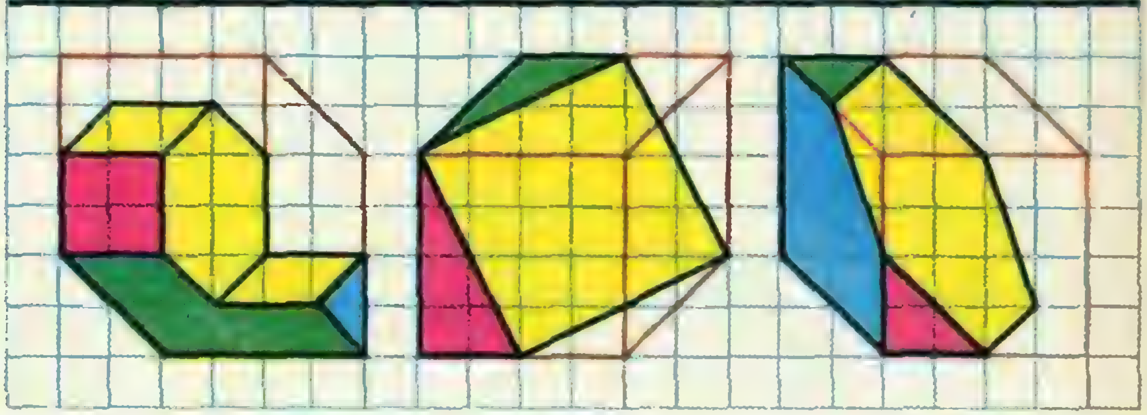
Срок отправки решений — 20 ноября 1986 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 17, 18».

Цена 40 коп.
Индекс 70465

Для проверки вашего пространственного воображения предлагаем выполнить следующее задание: изобразить три урезанных кубика, показанных внизу, в девяти ракурсах так, как это сделано в верхней части рисунка (образец решения). Ответы — в следующем номере журнала.

В. Ф. Канев





НОМЕР
10

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант 10 1986

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

ОРГКОМИТЕТ
МОСКОВСКОЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ОЛИМПИАДЫ

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

В НОМЕРЕ: | IN THIS ISSUE:

2	Реформа высшей школы	Reform of higher education
3	*А. Н. Зайдель, В. Я. Френкель.* И. В. Курчатов: первые шаги в ЛФТИ	*A. N. Zaidel, V. Ya. Frenkel.* I. V. Kurchatov: first steps at LPTI
6	*В. А. Олейников.* Иррациональность и неприводимость	*V. A. Oleinikov.* Irrationality and irreducibility
12	*Ф. Ф. Воронов.* Как делают алмазы	*F. F. Voronov.* How diamonds are made
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
19	*А. Н. Лузин.* Еще раз о ложке в струе воды	*A. N. Lusin.* Once more about spoons in streams of water
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
20	Математика 8—10	Mathematics 8—10
22	Избранные школьные задачи	Selected school problems
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
23	Задачи	Problems
24	Числа Мерсенна	Mersenne's numbers
	Наш календарь	**Our calendar**
26	Д. Фаренгейт и его термометры	D. Farenheit and his thermometers
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
28	Задачи М1006—М1010; Ф1018—Ф1022	Problems M1006—M1010; P1018—P1022
34	Решения задач М986—М990; Ф998—Ф1002	Solutions M986—M990; P998—P1002
32	**Калейдоскоп «Кванта»**	**Kvant's kaleidoscope**
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
42	*Л. П. Баканина.* Оптические приборы	*L. P. Bakanina.* Optical instruments
	Искусство программирования	**The art of programming**
47	*В. А. Каймин.* Решение задач и построение алгоритмов	*V. A. Kaimin.* Solving problems and constructing algorithms
	Олимпиады	**Olympiads**
52	I Всесоюзная олимпиада по физике учащихся средних профессионально-технических училищ	1st All-Union olympiad in physics for secondary professional technical institutions
53	XII Всероссийская олимпиада школьников	12th All-Russian school olympiad
	Информация	**Information**
11	Библиотечка «Квант»	Kvant's library
51	Встреча с читателями	Meeting with our readers
57	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Наша обложка *(22)*	**Our cover page** *(22)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Компьютерный клуб (*3-я с. обложки*)	The computer club (*3rd cover page*)

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1986

КПСС будет продолжать совершенствовать систему народного образования с учетом потребностей ускорения социально-экономического развития, перспектив коммунистического строительства, требований, выдвигаемых прогрессом науки и техники

Программа Коммунистической партии Советского Союза

Реформа высшей школы

XXVII съезд КПСС поставил задачу дальнейшего совершенствования всех систем образования и подготовки кадров в стране. Школьная реформа, начатая еще до XXVII съезда КПСС, последовательно проводится в жизнь. Пересматриваются программы, готовятся новые учебники, улучшаются трудовое обучение и профессиональная подготовка учащихся, укрепляется школьное самоуправление. Многое уже сделано, но впереди еще огромная работа.

Выполняя решения съезда, ЦК КПСС разработал и представил на всенародное обсуждение проект основных направлений перестройки высшего и среднего специального образования в стране. В его обсуждении участвовали миллионы рабочих, специалистов, ученых и преподавателей. Выразив поддержку планам партии, они внесли предложения, направленные на ускорение их реализации.

Многие читатели нашего журнала готовятся к поступлению в вузы, и им весьма полезно внимательно ознакомиться с предстоящей перестройкой высшего образования — ведь не за горами то время, когда и они станут активными участниками этой перестройки.

Научно-техническая революция оказывает огромное преобразующее влияние на все современные профессии, все виды трудовой деятельности человека. Ускорение социально-экономического развития страны требует от каждого не только хорошей профессиональной подготовки. Необходим пытливый, инициативный, творчески активный работник, способный найти и реализовать огромные резервы, скрытые в современном производстве и управлении. Он должен обладать основательной марксистско-ленинской подготовкой, современным экономическим мышлением, навыками управленческой и организаторской работы. Ему придется умело использовать электронно-вычислительную технику, непрерывно совершенствовать свои знания, быстро приспосабливаться к изменяющимся условиям практической деятельности. Основным показателем работы вузов становится качество подготовленных ими кадров.

Растут требования к будущим специалистам, а значит, и к студентам и абитуриентам. На экзаменах и во время собеседования надо убедительно продемонстрировать не только хорошее знание школьной программы, но и обоснованность выбора будущей профессии. А готовиться к этому надо еще в школе. Именно этому призван способствовать наш журнал. Опыт прошлых лет свидетельствует, что тот, кто активно работает с «Квантом», уверенно поступает
физико-математического и инженерного профиля. Решение разнообраз-
дач, придумывание новых задач, наши конкурсы, факультативные
я, работа в школьных кружках, участие в олимпиадах на всех доступ-
ам уровнях — таков путь к вузу, к высокому мастерству будущих
листов.

И. В. Курчатов: первые шаги в ЛФТИ

Доктор физико-математических наук
А. Н. ЗАЙДЕЛЬ,
доктор физико-математических наук
В. Я. ФРЕНКЕЛЬ

Когда, ознакомившись с биографией выдающегося советского ученого и организатора науки Игоря Васильевича Курчатова (1903—1960), задаешься вопросом: каким емким словом определить его индивидуальность? — самым подходящим представляется: стремительность. Он необычайно быстро входил в новую, незнакомую ему область науки — это характерно и для зрелого, и для совсем юного Курчатова. В 1923 году он окончил Симферопольский университет и в том же году, менее чем за пять месяцев, выполнил исследование радиоактивности снега, овладев и тонкой экспериментальной техникой измерений радиоактивности, и комплексом геофизических сведений, необходимых для проведения и осмысления этой работы, ставшей предметом его первой научной публикации.

Проходит полгода, Курчатов оказывается на метеорологической станции в Феодосии, где изучает физику моря. Четыре месяца потребовалось молодому человеку (ему едва исполнился 21 год), чтобы провести сложное исследование колебаний уровня Азовского и Черного морей. Эти его работы уже в начале 30-х годов, когда имя Курчатова было известно сравнительно узкому кругу коллег, вошли в классические труды по физике моря.

1 октября 1925 года. В архиве Физико-технического института им. А. Ф. Иоффе АН СССР (ФТИ) сохранилась датированная этим числом запись: Игорь Васильевич Курчатов (заметим: успевший к этому времени выполнить и опубликовать пять научных работ) зачисляется в Институт в качестве сотрудника I разряда (это звание примерно соответствовало теперешней должности старшего научного сотрудника). А 16 ноября этого же года Курчатов вместе с К. Д. Синельниковым (1901—1966), с которым они учились в Симферопольском университете, датируют окончание первой физтеховской работы «К вопросу о прохождении электронов через тонкие металлические фольги». Работа сразу же переводится на английский язык, и оба ее варианта — русский и английский — направляются в печать: в «Труды Ленинградской физико-технической лаборатории» и в американский журнал «Physical Review» («Физическое обозрение»). Обе статьи увидели свет в следующем, 1926 году — 60 лет тому назад.

Исследование, предпринятое молодыми учеными из ФТИ, имело как чисто научный, так и прикладной интерес. Выяснение степени проницаемости тонких фольг для электронов могло способствовать усовершенствованию трубок Брауна — так в то время называли осциллографы. Чувствительность люминофоров, которыми покрывался экран трубки Брауна, была недостаточной для успешного фотографирования кривых, вычерчиваемых электронным лучом. Поэтому фотопластинку или фотопленку помещали внутрь откачанной трубки, причем ее перемещение осуществлялось довольно сложно, с помощью специального приспособления (так называемого вакуумного шлюза). Возникла мысль: вывести электронный луч через закрытый тонкой металлической фольгой торец трубки прямо наружу, вне вакуумного объема, и там поместить фотопластинку. Для этого надо было выяснить, насколько проницаемы для медленных (малоэнергичных) электронов металлические фольги. К этому вопросу имела отношение работа американского ученого Г. Гартига, опубликованная в 1925 году на страницах «Physical Review» (вот почему физтеховцы сочли необходимым послать английский вариант своей статьи в этот журнал). Из результатов, полученных Гартигом, следовало, что электроны, ускоренные даже в небольших полях порядка нескольких вольт, простреливают насквозь алюминиевые фольги толщиной до 10 мкм. Это казалось странным.

Курчатов и Синельников решили проверить работу Гартига. Они повторили его эксперимент на аналогичной установке: на пути электронов, вылетающих с катода, помещалась фольга; если электроны «пробивают» фольгу, то они попадают на анод, в цепи появляется ток. Результаты, полученные физтеховцами, казалось бы, подтвердили выводы Гартига. Но затем они решили проверить: не являются ли

Игорь Васильевич Курчатов — научный сотрудник 1-го разряда Физико-технического института АН СССР. (Ленинград, 1925 год.)

эти результаты следствием несовершенства фольг — наличием в них невидимых отверстий. (Гартиг убеждался в совершенстве своих фольг, просматривая их на просвет.) С помощью несложной установки ленинградцы обнаружили, что в бездефектных «на глаз» фольгах на самом деле могут быть отверстия. Существование таких отверстий было доказано путем наблюдения в жидкости пузырьков, образующихся при продувании сквозь фольгу воздуха. Этот простой опыт явился решающим доказательством ошибочности результатов Гартига. Схема опыта, поставленного ленинградскими авторами, показана на рисунке. Применяя отобранные с помощью такой установки бездефектные фольги, Курчатов и Синельников убедились, что медленные электроны не пробивали фольгу-мишень; сделав же в бездефектной фольге небольшие отверстия, физтеховцы воспроизводили результаты Гартига.

Очевидно, что американский физик «прозевал» дефектность использованных в его экспериментах фольг. Нам не известны точные условия опыта, в котором он просматривал их на просвет, но некоторые вероятные предположения о них можно сделать и попытаться оценить размеры отверстия, которое Гартиг мог увидеть.

Возможность увидеть свет, проходящий через малое отверстие, определяется величиной той световой энергии, которая, пройдя через отверстие, попадает в зрачок. Сделав естественные предположения о силе света источника, освещающего отверстие, и зная пороговую чувствительность глаза, оценим размеры отверстия, которое еще можно увидеть.

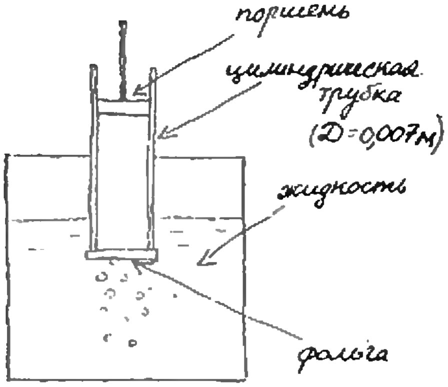
Экспериментально установлено, что в условиях непрерывного освещения величина энергетического потока, соответствующего зрительному порогу хорошо адаптированного (привыкшего к темноте) глаза, составляет примерно $5 \cdot 10^{-17}$ Дж/с. Электрическая лампочка преобразует в световую энергию, воспринимаемую глазом, примерно 2 % подводимой к ней электроэнергии. Следовательно, лампа мощностью 40 Вт — именно такие были наиболее распространенными в середине 20-х годов — излучает ежесекундно 0,8 Дж световой энергии. Полагая, что эта энергия равномерно излучается во все стороны, подсчитаем ту ее часть, которая проходит через отверстие в экране (диаметр отверстия d), находящемся на расстоянии l от лампочки. Площадь такого отверстия $\pi d^2/4$, а телесный угол, выделяемый им из сферы радиуса l, составляет $\pi d^2/4l^2$. Отсюда для потока световой энергии, проходящего через отверстие, получим величину

$$\Phi_d = \frac{0{,}8}{4\pi}\,\frac{\pi d^2}{4l^2} = 5 \cdot 10^{-2}\,\frac{d^2}{l^2}\ \text{Вт}.$$

Полагая $l = 0{,}1$ м, имеем:

$$\Phi_d = 5d^2\ \text{Вт},$$

где d выражено в метрах. Можно считать, что отверстие очень малого диаметра в экране (исследуемой на просвет фольге) излучает равномерно в пределах полусферы, то есть телесного угла 2π (это происходит вследствие



Семинар А. Ф. Иоффе по физике твердого тела. И. В. Курчатов — крайний справа в дальних рядах. У доски справа — академик А. Ф. Иоффе. (Ленинград, 1928 год.)

дифракции). Тогда на расстоянии наилучшего зрения $r=0{,}25$ м на зрачок диаметром $d_{зр}$ придется поток энергии

$$\Phi_{зр}=\frac{\Phi_л}{2\pi}\frac{\pi d_{зр}^2}{4r^2}=0{,}625\frac{d_{зр}^2}{r^2}\,d^2\ \text{Вт}.$$

Принимая диаметр зрачка адаптированного глаза равным 0,005 м, для попадающей в него мощности находим:

$$\Phi_{зр}=0{,}625\frac{25\cdot10^{-6}}{0{,}625\cdot10^{-1}}\,d^2=$$
$$=2{,}5\cdot10^{-4}\,d^2\ \text{Вт}.$$

Приравнивая ее к пороговой мощности $5\cdot10^{-17}$ Вт, получим соотношение для определения d: $2{,}5\cdot10^{-4}d^2=5\cdot10^{-17}$, откуда $d\approx0{,}5\cdot10^{-6}$ м $=0{,}5$ мкм.

Итак, предельный размер отверстия, которое можно заметить на просвет,— 0,5 мкм.

Интересно подсчитать давление, которое обеспечило бы «проталкивание» (выдувание) воздуха через такое отверстие в фольге, то есть давало бы картину пузырьков в сосуде, наблюдавшихся Курчатовым и Синельниковым (см. рисунок).

Известно, что поверхность жидкости ведет себя подобно растянутой пленке (обладает поверхностным натяжением). Поэтому, чтобы выдуть, например, мыльный пузырь, в нем надо создать избыточное давление, определяемое формулой Лапласа:

$$\Delta p=\frac{2\sigma'}{R},$$

где $\sigma'=2\sigma$ — удвоенный коэффициент поверхностного натяжения жидкости (у пленки две поверхности), R — радиус пузыря. Если поместить трубочку в жидкость на глубину h, то чтобы выдуть с ее помощью воздушный пузырь, надо создать в нем давление, превышающее атмосферное на величину, равную сумме лапласовского давления Δp и гидростатического давления ρgh. Размер пузырьков — порядка диаметра трубки, и если он мал, то лапласовское давление значительно больше гидростатического, которым в этом случае можно пренебречь. Считая пузырь полусферой, избыточное давление можно тогда найти по формуле

$$\Delta p=\frac{2\sigma}{R}=\frac{4\sigma}{d} \qquad (*)$$

(у воздушного пузырька в жидкости одна поверхность). Такой же формулой можно воспользоваться, чтобы оценить избыточное давление, которое нужно создать у поверхности фольги, погруженной в воду, чтобы продуть сквозь отверстие в ней воздух. Ясно, что это давление будет тем меньше, чем меньше поверхностное натяжение жидкости.

(Окончание см. на с. 50).

Иррациональность и неприводимость

В. А. ОЛЕЙНИКОВ

Древние греки знали, что

величина $\sqrt{2}$ иррациональна

и умели это доказывать.

Если допустить, что величина $\sqrt{2}$ рациональна, и представить ее в виде несократимой дроби $\sqrt{2}=a/b$, то

$$2=\frac{a^2}{b^2},\quad 2b^2=a^2.$$

Ясно, что число a делится на 2, a^2 — на 4 и, значит, b — на 2. Так что a/b — дробь сократимая.

Дробь $a/b=\sqrt{2}$ не может одновременно быть сократимой и несократимой, значит, величина $\sqrt{2}$ — не дробь. Это качество делало $\sqrt{2}$ нежеланным гостем в мире чисел, где царили гармония и порядок, простота и совершенство.

Своим появлением $\sqrt{2}$ был обязан диагонали единичного квадрата и неудачным попыткам измерить ее рациональными отрезками. Неудача сильно беспокоила древних греков, вызывая брожение умов. Реальность, выраженная геометрическим образом, настойчиво стучалась в мир чистого и прекрасного.

Прошло много веков, $\sqrt{2}$ завоевал себе место среди чисел, став другой реальностью — корнем уравнения $x^2-2=0$, и оказалось, что

число $\sqrt{2}$ иррационально

потому, что

многочлен x^2-2 неприводим.

О связи иррациональности и неприводимости — наш рассказ.

Неприводимость

Многочлен

$$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

степени n по x с целыми коэффициентами

$$a_0, a_1, \ldots, a_n;\quad a_n\neq 0$$

называется *неприводимым*, если он не может быть представлен в виде произведения

$$P(x)=L(x)\cdot Q(x)$$

многочленов $L(x)$ и $Q(x)$ также с целыми коэффициентами, но степеней меньших, чем n. Если же подобное возможно, то $P(x)$ называется *приводимым*.

Например, многочлен x^3+x^2+x+1 приводим (он равен $(x+1)(x^2+1)$ — проверьте!), а многочлен x^2+1 неприводим (подумайте, почему).

Линейный двучлен a_0+a_1x дает простейший пример неприводимого многочлена. Его единственный корень $x=-a_0/a_1$ есть число рациональное. Но

среди корней неприводимого многочлена степени $n\geqslant 2$ не может быть рациональных.

Это свойство вытекает из более общего факта:

> ТЕОРЕМА. *Если число α является корнем одновременно двух многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ и один из них, скажем $Q(x)$, неприводим, то многочлен $d\cdot P(x)$ при некотором целом $d\neq 0$ делится на $Q(x)$:*
> $$d\cdot P(x)=L(x)\cdot Q(x).$$

Эта ТЕОРЕМА связана с именем прославленного немецкого математика К. Ф. Гаусса (1777—1855).

Она будет доказана на с. 10, а указанное выше свойство вытекает из нее, поскольку линейный двучлен не может делиться на многочлен степени $n\geqslant 2$.

Открывается возможность получать много новых иррациональных чисел. Их следует искать среди корней неприводимых многочленов. В загадочную страну неприводимых многочленов нас вводит

> **Признак Эйзенштейна.** *Если для многочлена $P(x)$ можно указать такое простое число p, что старший коэффициент a_n не делится на p, а все остальные коэффициенты a_k делятся на p, $k=0, 1, \dots, n$, но свободный член a_0, делясь на p, не делится на p^2, то такой многочлен $P(x)$ неприводим.*

Ф. Г. М. Эйзенштейн (1823—1852) — тоже немецкий математик — испытал немилость судьбы и равнодушие современников. Его идеи были восприняты лишь много лет спустя.

Доказательство

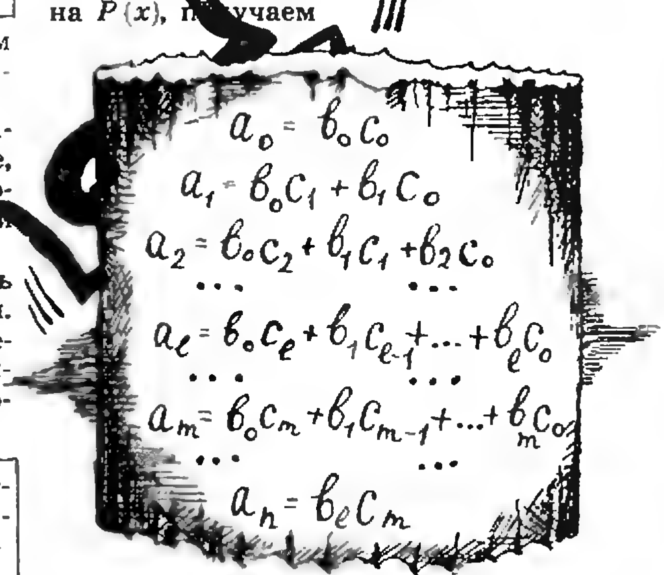
Пусть, в противоречие с утверждением, многочлен $P(x)$ с указанными свойствами коэффициентов приводим и потому разлагается в произведение

$$P(x)=L(x)\cdot Q(x)$$

многочленов

$$L(x)=b_0+b_1x+\dots+b_lx^l,$$
$$Q(x)=c_0+c_1x+\dots+c_mx^m$$

также с целыми коэффициентами. Их старшие коэффициенты b_l и c_m отличны от нуля, и будем считать для определенности, что $m\geqslant l\geqslant 1$. Собирая коэффициенты при одинаковых степенях x в произведении $L(x)Q(x)$ и сравнивая их с коэффициентами многочлена $P(x)$, получаем



$$a_0=b_0c_0$$
$$a_1=b_0c_1+b_1c_0$$
$$a_2=b_0c_2+b_1c_1+b_2c_0$$
$$\dots \qquad \dots$$
$$a_l=b_0c_l+b_1c_{l-1}+\dots+b_lc_0$$
$$\dots \qquad \dots$$
$$a_m=b_0c_m+b_1c_{m-1}+\dots+b_mc_0$$
$$\dots \qquad \dots$$
$$a_n=b_lc_m$$

В первом из написанных равенств свободный член a_0 делится на p; значит, или b_0, или c_0 делится на p; они не могут делиться на p одновременно, ибо $a_0=b_0c_0$ не делится на p^2.

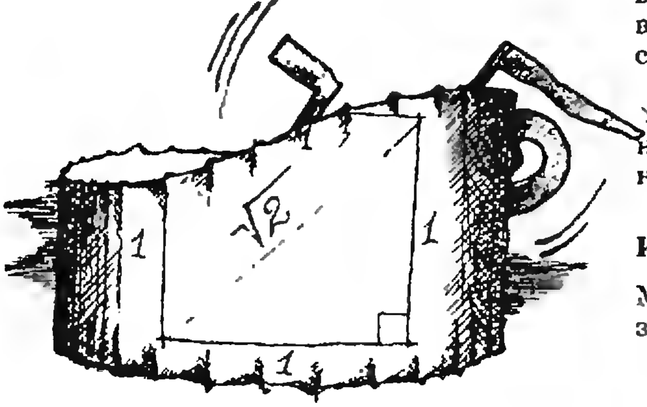
Пусть b_0 делится на p, а c_0 не делится. Тогда переходим ко второму равенству: a_1 делится на p, b_0c_1 делится на p; значит, b_1c_0 также делится на p и b_1 делится на p...

...И так идем до $l+1$-го равенства (при x^l): a_l делится на p, все $b_0, \dots, b_{l-1}$ делятся на p; тогда b_lc_0 делится на p и, значит, b_l делится на p.

А теперь переносимся в последнее равенство: значит, старший коэффициент $a_n=b_lc_m$ делится на p, что невозможно по условию признака.

Если же в первом равенстве c_0 делится на p, а b_0 не делится, то, начав все сначала, идем до $m+1$-го равенства (при x^m), а затем опять переносимся в последнее.

Значит, разложение $P(x)=L(x)\times Q(x)$ невозможно, и многочлен $P(x)$ неприводим. Признак установлен, а нас уже ждут



Иррациональные радикалы

Многочлен x^2-2 неприводим по признаку Эйзенштейна (возьмите $p=2$).

Вместе с $\sqrt{2}$ мы получим новые иррациональные числа

$$\sqrt[n]{p},$$

где p — любое простое, а $n=2, 3, \ldots$ Каждое такое число есть корень многочлена

$$P(x)=x^n-p,$$

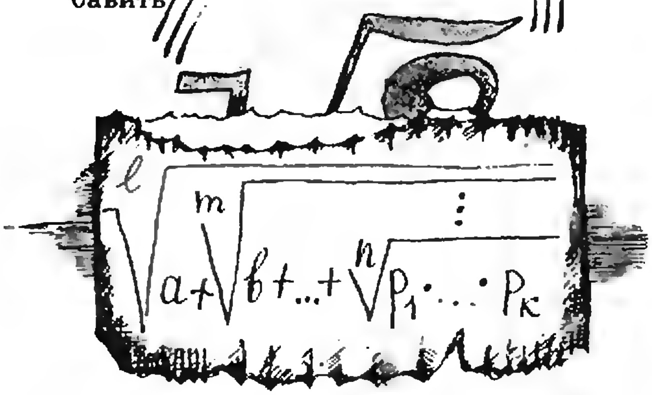
который неприводим по признаку Эйзенштейна. Число

$$\sqrt[n]{p_1\ldots p_k}$$

иррационально, если $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа. Это число есть корень неприводимого многочлена

$$P(x)=x^n-p_1\ldots p_k.$$

К этим иррациональностям можно добавить


$\sqrt[l]{a+\sqrt[m]{b+\ldots+\sqrt[n]{p_1\cdot\ldots\cdot p_k}}}$
⋮

при любых натуральных $a, b, \ldots$ (Попробуйте сами построить многочлены для этих монстров и доказать их неприводимость.)

Рассмотренные примеры иллюстрируют действие признака Эйзенштейна. Однако в них мы еще недалеко ушли от древних греков. Иррациональность последнего выражения легко может быть доказана последовательным возведением в степени $l, m, \ldots, n$ и таким же рассуждением, как при доказательстве иррациональности числа $\sqrt{2}$. Более внушительно выглядит сумма радикалов

$$\frac{a_1}{b_1}\sqrt[n_1]{p^{m_1}}+\ldots+\frac{a_k}{b_k}\sqrt[n_k]{p^{m_k}}.$$

Если все дроби $m_1/n_1, \ldots, m_k/n_k$

$$\frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_k}{n_k}$$

правильные и различные, то указанная сумма представляет собой иррациональное число. Действительно, предположим противное: пусть эта сумма равна a/b. Обозначим $N=n_1\ldots n_k$. Тогда число $\sqrt[N]{p}$ есть корень многочлена с целыми коэффициентами

$$\frac{a_1B}{b_1}x^{\frac{m_1N}{n_1}}+\ldots+\frac{a_kB}{b_k}x^{\frac{m_kN}{n_k}}-\frac{aB}{b},$$

где $B=b\cdot b_1\ldots b_k$. Степень этого многочлена меньше N. По ТЕОРЕМЕ он должен делиться на неприводимый многочлен x^N-p степени N, что невозможно.

Это занятие можно с успехом продолжить и дальше (например, комбинируя последний пример с предпоследним). Успех окрыляет и рождает иллюзии. Может показаться, что, нагромождая радикалы друг на друга и применяя четыре арифметических действия к целым числам $a, b, \ldots$, мы всегда без особых хлопот будем получать новые иррациональные числа... От иллюзий в математике хорошо помогают «частные случаи». Одним из них является задача об иррациональности радикала $\sqrt[n]{a^n+b^n}$ при любых натуральных a, b и $n\geqslant 3$, равносильная «великой теореме Ферма»:

Уравнение $a^n+b^n=c^n$ неразрешимо в натуральных a, b, c при $n\geqslant 3$.

Эту задачу оставил в наследство потомкам П. Ферма — французский математик XVII века. С тех пор, вот уже триста с лишним лет, ее безуспешно пытаются решить лучшие (и худшие) математики всего мира. Привлекая своей «доступностью», она стала предметом внимания и многих любителей математики, поглотив, подобно болотной трясине, не одну наивную необученную душу.

В 1908 году немецкий богач П. Вольфскель предложил крупную денежную премию за доказательство «великой теоремы». С тех пор, все время нарастая, идет лавина ошибочных «решений». И даже девальвация марки в 30-х годах, сильно обесценившая эту премию, не остановила это «творчество».

Вывод очевиден — массовое производство иррациональных радикалов представляется перспективным, но в то же время дьявольски опасным делом.

Вариации

Признак Эйзенштейна далеко не всегда решает вопрос о неприводимости многочлена $P(x)$, ибо он требует, чтобы все коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, кроме старшего a_n, имели общий простой делитель p. Существует много многочленов, как, например,

$$x^2+1,\ x^4+1,\ x^6+x^3+1,$$

не имеющих такого делителя. Тем не

менее и здесь признак Эйзенштейна нельзя считать исчерпанным — следует только «расшевелить» $P(x)$, меняя переменную x.

Вопрос о неприводимости многочлена

$$P(x)=x^2+1$$

сводится к признаку Эйзенштейна следующим образом. Если бы $P(x)$ был приводим, то и $P(x+1)$ был бы приводим. Но $P(x+1)=x^2+2x+2$ неприводим по признаку Эйзенштейна при $p=2$. Многочлены x^4+1, x^6+x^3+1 неприводимы по той же причине. Аналогичное преобразование решает вопрос о неприводимости многочлена

$$P(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1,$$

называемого многочленом «деления круга».

Многочлен $P(x)$ приводим, если $n=p\cdot k$ — составное число, так как

$$P(x)=\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{(x^p)^k-1}{x-1}=$$

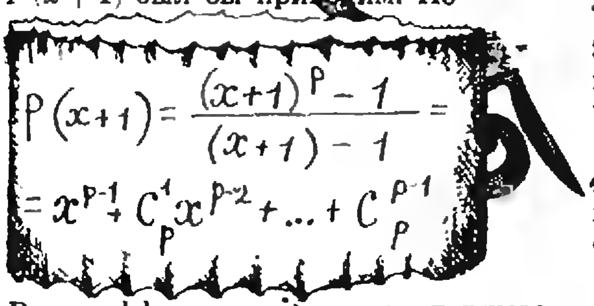
$$=\frac{(x^p-1)(x^{p(k-1)}+x^{p(k-2)}+\ldots+1)}{x-1}=$$

$$=(x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+1)\times$$

$$\times(x^{p(k-1)}+x^{p(k-2)}+\ldots+1),$$

и неприводим, если $n=p$ — простое число.

Действительно, если бы $P(x)$ был приводим в этом случае, то и $P(x+1)$ был бы приводим. Но



$$P(x+1)=\frac{(x+1)^p-1}{(x+1)-1}=$$

$$=x^{p-1}+C_p^1x^{p-2}+\ldots+C_p^{p-1}$$

Все коэффициенты*), кроме старшего, делятся на p, ибо

$$C_p^k=\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}\quad(k<p),$$

числитель делится на p, а знаменатель не делится. Кроме того, свободный член равен $C_p^{p-1}=p$ и не делится на p^2. Тогда, согласно признаку Эйзенштейна, $P(x+1)$ неприводим, а значит, неприводим и $P(x)$.

Из доказанной неприводимости $P(x)$ следует, что среди корней уравнения деления круга

$$x^{p-1}+x^{p-2}+\ldots+1=0$$

при любом простом $p\geqslant 3$ не может быть рациональных.

Можно доказать, что уравнение деления круга не имеет и действительных корней — все они комплексные числа, — и задать более трудный вопрос: когда эти корни «не слишком иррациональны», то есть когда они представимы квадратичными радикалами (это значит, что их можно получить, применяя к целым числам четыре арифметических действия и операцию извлечения квадратных корней)? Этот вопрос, в сущности, интересовал еще древнегреческих математиков, так как он равносилен такой задаче на построение: при каких p можно построить правильный p-угольник циркулем и линейкой?

В юности Гаусс справился с этой задачей и доказал*), что корни уравнения деления круга выражаются квадратными радикалами тогда (и только тогда**)), когда p есть *простое число Ферма*, $p=3,\ 5,\ 17,\ 257,\ \ldots,\ 2^{2^k}+1,\ldots$ Гаусс очень гордился своим открытием и даже «выразил желание, чтобы в памятнике на его могиле был увековечен семнадцатиугольник».

К другим, более скромным достижениям Гаусса относится

Лемма о примитивных многочленах

Эта лемма поможет нам дать обещанное доказательство теоремы. Многочлен

$$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$$

называется *примитивным*, если его коэффициенты $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ не имеют общих простых делителей.

Лемма Гаусса утверждает, что

> *Произведение двух примитивных многочленов есть снова примитивный многочлен.*

Эта лемма используется во многих теоремах теории чисел и алгебры. Читатель, прошедший доказательство признака Эйзенштейна (на с. 7), легко освоит и доказательство, приведенное ниже, ибо они имеют между собой много общего.

---

*) Мы пользуемся биномиальными коэффициентами C_p^k и формулой бинома Ньютона — см. «Квант», 1986, № 1, с 23.

*) Подробности этого события отражены С. Г. Гиндикиным в «Рассказах о физиках и математиках» (М.: Наука, 1981.— Серия Библ. «Квант», вып. 14).

**) Эта часть утверждения доказана П. Л. Ванцелем (1814—1848) — репетитором Политехнической школы в Париже.

Допустим противное, что произведение примитивных многочленов

$$L(x)=b_0+b_1(x)+\ldots+b_ix^l,$$
$$Q(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_mx^m$$

есть многочлен

$$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n,$$

не являющийся примитивным. Пусть тогда p — один из простых делителей его коэффициентов. Пусть b_i — самый младший коэффициент $L(x)$, не делящийся на p, $0\leqslant i\leqslant l$, а c_j — самый младший коэффициент $Q(x)$, не делящийся на p, $0\leqslant j\leqslant m$. Такие коэффициенты обязательно найдутся, иначе $L(x)$ и $Q(x)$ не были бы примитивными. Коэффициент при x^{i+j} в произведении

$$L(x)Q(x)$$

имеет вид

$$\ldots+b_{i-1}c_{j+1}+\quad+b_{i+1}c_{j-1}+\ldots$$

и не делится на p, так как все слагаемые этой суммы, кроме одного b_ic_j, делятся на p. С другой стороны, эта сумма равна a_{i+j} — коэффициенту многочлена $P(x)$ и должна делиться на p. Полученное противоречие доказывает лемму.

И наконец,

Доказательство ТЕОРЕМЫ,

которая утверждает, что любой многочлен $P(x)$, имеющий общий корень α с неприводимым многочленом $Q(x)$, делится на него после умножения на некоторое целое $d\neq0$.

Разделим многочлен $P(x)$ на $Q(x)$ «с остатком»:

$$\begin{array}{r|l} -\,a_nx^n+\ldots+a_0 & c_mx^m+\ldots+c_0 \\ \cline{2-2} \underline{a_nx^n+\ldots} & \frac{a_n}{c_m}x^{n-m}+\ldots \\ \ldots\ldots & \\ \ldots\ldots & \\ \ldots & \\ \underline{\ldots} & \\ r_{m-1}x^{m-1}+\ldots & \end{array}$$

В результате получим, что

$$P(x)=L_1(x)\cdot Q(x)+R_1(x).$$

Частное $L_1(x)=\frac{a_n}{c_m}x^{n-m}+\ldots$ и остаток $R_1(x)=r_{m-1}x^{m-1}+\ldots$ будут многочленами от x с коэффициентами — рациональными числами.

Если $P(x)$ разделится на $Q(x)$ без остатка: $R_1\equiv0$, то все уже доказано, ибо тогда

$$P(x)=L_1(x)\cdot Q(x)=\frac{1}{d}\,L(x)\cdot Q(x),$$

где d — общий знаменатель коэффициентов многочлена $L_1(x)$.

Если же $R_1(x)\not\equiv0$, то его степень по x будет строго меньше степени делителя $Q(x)$, а число α, будучи одновременно корнем $P(x)$ и $Q(x)$, является также корнем многочлена $R_1(x)$:

$$R_1(\alpha)=P(\alpha)-L_1(\alpha)\cdot Q(\alpha)=0.$$

Разделив $Q(x)$ на $R_1(x)$, получим в остатке новый многочлен $R_2(x)$ с аналогичным свойством. Его степень будет строго меньше степени $R_1(x)$, а значит, и степени $Q(x)$.

Последовательно деля $Q(x)$ на получающиеся остатки $R_1(x)$, $R_2(x)$, ..., $R_k(x)$, придем либо к противоречию:

$$R_k(x)\equiv c\neq0,$$

и α не может быть корнем $R_k(x)$, либо к тому, что $Q(x)$ разделится на $R_k(x)$ без остатка: $Q(x)=L_k(x)\cdot R_k(x)$. Приводя рациональные коэффициенты многочленов $L_k(x)$, $R_k(x)$ к общему знаменателю и вынося за скобки общие делители числителей, перепишем это равенство в виде

$$Q(x)=\frac{a}{b}\,[L(x)\,R(x)],$$

где a/b — несократимая дробь, а $L(x)$, $R(x)$ — примитивные многочлены.

Остается показать, что числовой коэффициент a/b в последнем разложении есть целое число, то есть что $b=\pm1$. Допустим противное, и пусть p — простой делитель числа b. Тогда из равенства

$$bQ(x)=a[L(x)\,R(x)]$$

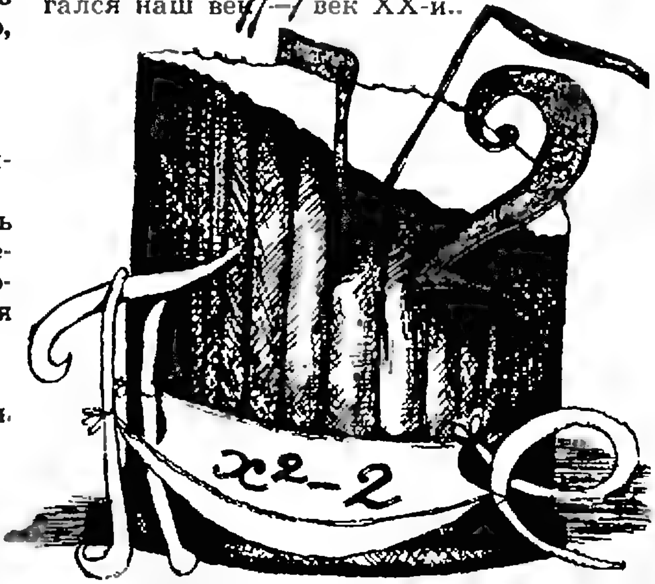
видим, что все коэффициенты правой части делятся на p; a не может делиться на p — в противном случае дробь a/b сократима. Значит, на p делятся все коэффициенты многочлена $L(x)\,R(x)$, что невозможно по лемме Гаусса.

Значит, многочлен

$$Q(x)=[\pm aL(x)]\cdot R(x)$$

приводим, что противоречит условию ТЕОРЕМЫ и тем самым полностью ее доказывает.

Давно канули в небытие древние греки. Миновала средневековая неразбериха. Уходил и XIX век, классический век математики. За ним надвигался наш век — век XX-й..



Библиотечка «Квант»

В этом году в Библиотечке «Квант» — серии научно-популярных книг для школьников — выходит из печати пятидесятый выпуск — сборник «Занимательно о физике и математике» под редакцией профессора Л. Г. Асламазова. В этот сборник вошли лучшие статьи и задачи, опубликованные в разные годы в журнале «Квант» под рубрикой «Квант» для младших школьников».

Библиотечка «Квант» издается Главной редакцией физико-математической литературы издательства «Наука» с 1980 года. Книги серии рассказывают о том, как много интересного таят в себе физика и математика, знакомят читателя с проблемами современной науки, способствуют развитию творческого мышления и привлечению школьников к серьезным самостоятельным занятиям. Среди авторов книг — известные ученые, активно работающие в самых разных областях физики, математики и смежных наук.

Отметим, что книги Библиотечки пользуются большой популярностью не только у школьников — их с интересом читают студенты, преподаватели, все, кто интересуется физикой и математикой. Надеемся, что познакомившись с Библиотечкой «Квант» в школе, вы будете возвращаться к ней и в вашей дальнейшей учебе. Кстати, некоторые выпуски используются в вузах в качестве пособий при изучении специальных разделов физики и математики. В качестве примера назовем книги А. Л. Эфроса «Физика и геометрия беспорядка», М. Н. Аршинова и Л. Е. Садовского «Коды и математика», М. Е. Левинштейна и Г. С. Симина «Знакомство с полупроводниками».

В 1987 году издательство «Наука» планирует выпустить в Библиотечке «Квант» девять книг.

Почему петляют реки и как они размывают берега? Отчего звучит скрипичная струна? Как сверхпроводимость помогает расшифровать магнитное поле мозга и сердца? Как распространяется звук в океане? Об этом и еще о многих других интересных физических явлениях вы сможете узнать, прочитав книгу Л. Г. Асламазова и А. А. Варламова «Удивительная физика».

Книга М. Б. Балка и В. Г. Болтянского «Геометрия масс» на примерах трех сотен задач рассказывает об оригинальном способе доказательства геометрических теорем. Он основан на аналогии между некоторыми геометрическими объектами и понятиями физической механики.

В сборник «Задачи Московских физических олимпиад» (под редакцией кандидата физико-математических наук С. С. Кротова) войдут наиболее интересные и оригинальные задачи (и их решения) Московских городских олимпиад за последние пятнадцать лет. Сборник будет интересен всем, кто любит задачи «с изюминкой», окажется полезным при подготовке к конкурсным экзаменам в вузы.

Книга М. Е. Левинштейна и Г. С. Симина «Барьеры (от кристалла до интегральной схемы)» популярно расскажет о полупроводниковых приборах, их устройстве и технологии изготовления, о современной полупроводниковой электронике. Этот выпуск будет продолжением книги тех же авторов «Знакомство с полупроводниками» (выпуск 33).

Проблемам современной волновой оптики посвящена книга Г. Р. Локшина, С. М. Козела и В. Е. Белонучкина «Экскурсия в волновую оптику». В книге пойдет речь о когерентности и об уникальных свойствах лазерного излучения, о дифракции, о пределах, которые ставит волновая природа света, о возможностях волновой оптики.

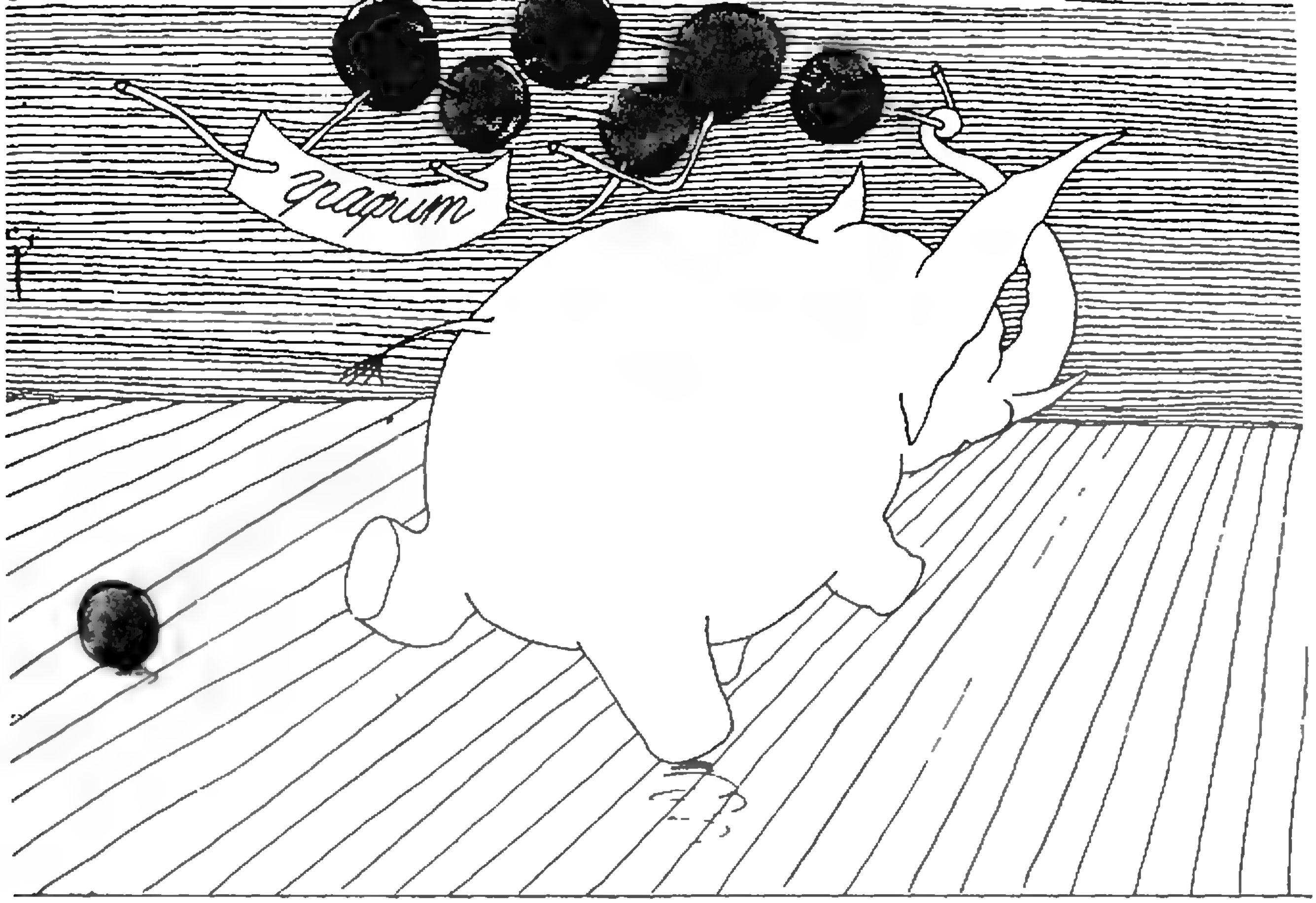
Понятие времени — одно из самых фундаментальных в физике. В простой и наглядной форме расскажет о развитии наших представлений о времени книга А. Д. Чернина «Физика времени». В ней излагаются важнейшие вопросы, связанные с природой времени как физического понятия, с прошлым и будущим Вселенной.

Многие книги Библиотечки уже стали библиографической редкостью, а сегодняшним старшеклассникам они наверняка были бы интересны и полезны. Именно поэтому в 1987 году планируется переиздать книги М. Д. Франк-Каменецкого «Самая главная молекула» и Я. А. Смородинского «Температура».

Вторым изданием в Библиотечке выйдет книга известного американского физика-теоретика Р. Фейнмана «Характер физических законов», в которой автор рассказывает о фундаментальных законах природы, о том, как их открывают, каковы их особенности. (А в самом начале 1988 года в Библиотечке планируется выпуск новой книги Р. Фейнмана «КЭД (квантовая электродинамика) — странная теория света и вещества».)

Тем, кто хочет пополнить свою библиотеку новыми выпусками Библиотечки «Квант», советуем заранее оформить заказы на них в книжных магазинах.

А. Б.



Как делают алмазы

Кандидат физико-математических наук
Ф. Ф. ВОРОНОВ

> *Алмазы.— Кончится тем, что их будут изготовлять!*
> *— И подумать только, что это не что иное, как уголь!*
>
> Г. Флобер. Лексикон прописных истин

Алмаз с незапамятных времен привлекал внимание людей красотой своих прозрачных кристаллов, ярким блеском и своей исключительной твердостью. Крупные алмазы украшали священные статуи, скипетры царей, оружие вельмож. Им давали имена, их покупали за баснословные деньги, похищали, пускали в ход для разрешения государственных конфликтов.

С давних лет человек стремился получить алмаз в лаборатории. Алхимики растирали, прокаливали на «двойном жару» смеси из серы, ртути и других веществ — но безрезультатно.

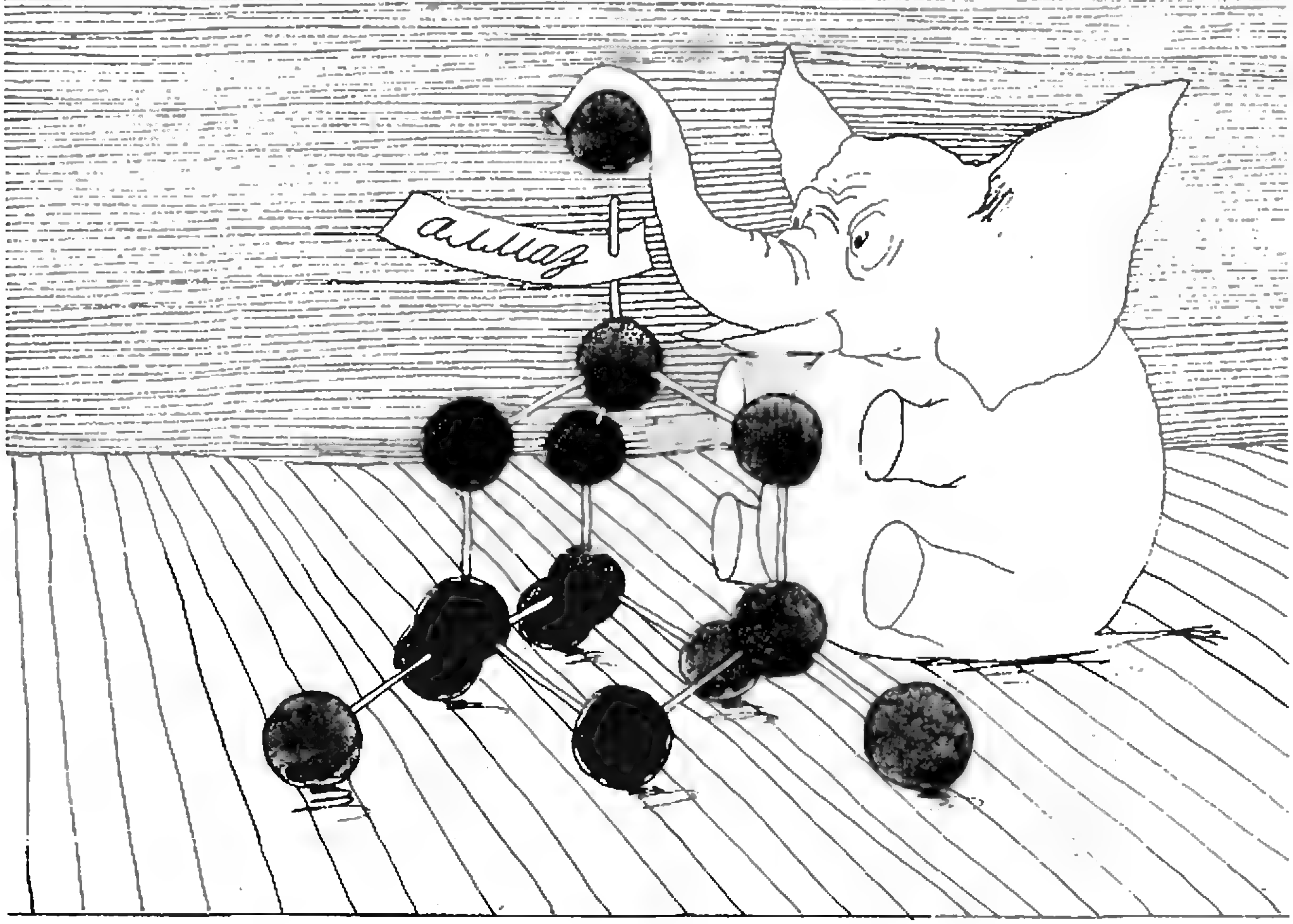
Лишь после того как в 16—17 веках на смену алхимии пришла практическая химия с ее количественными методами исследований, ученые поняли природу алмаза.

В 1797 году англичанин С. Теннант установил, что алмаз, сгорая в кислороде, полностью переходит в углекислый газ. Из этого следовало, что алмаз состоит из атомов углерода. Стало ясно: чтобы получить алмаз, надо исходить из графита или других содержащих углерод веществ.

Но как заставить атомы углерода образовать кристалл алмаза? Какие для этого нужны условия?

Ученые знали, что алмаз, устойчивый при обычных температурах, при нагревании без доступа воздуха переходит в графит. Это наводило на мысль, что и обратное превращение надо искать при высоких температурах. Но как вызвать это превращение, как заставить графит перейти в алмаз?

Из сравнения плотности угля ($1{,}3 \times 10^3$ кг/м^3), графита ($2{,}2 \cdot 10^3$ кг/м^3) и алмаза ($3{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3) следовало, что для получения алмаза уголь и графит надо уплотнить, сжать — применить высокое давление.



Итак, высокие давления и высокие температуры — вот что может принести успех!

К такому же выводу можно было прийти, рассматривая условия образования алмазов в природе.

Действительно, изучение алмазных месторождений показывает, что образование алмазов происходило, по-видимому, глубоко в недрах Земли, в условиях высоких давлений и температур. Подземными взрывами алмазы вместе с окружающей их породой были выброшены по трубчатым прорывам на земную поверхность.

Давно было замечено, что в метеоритах, состоящих из железа, часто встречаются вкрапления графита. Но совершенно неожиданно в 1882 году алмазы были найдены в железном метеорите, упавшем в Венгрии, а позднее, в 1891 году, алмазы обнаружили в огромном метеорите, упавшем в Аризоне (США).

Считалось, что метеориты представляют собой обломки застывшей магмы, выброшенной из вулканов планет. При остывании давление внутри метеоритов повышалось, и возникали условия, в которых могли образоваться алмазы.

В 1893 году французский химик А. Муассан решил повторить в лаборатории естественный процесс образования алмазов в метеоритах — быстро охладить расплавленное железо, содержащее углерод.

В этот период Муассан изучал химические реакции, проходящие при очень высоких температурах, которые он получал с помощью вольтовой дуги в особой электрической печи. Устройство печи показано на рисунке 1. В куске негашеной извести *A* было сделано углубление для тигля *n*; над тиглем находились два угольных электрода *C* и *D*. Все это закрывалось крышкой *B* из куска извести. Когда угли подключали к источнику тока, между ними загоралась

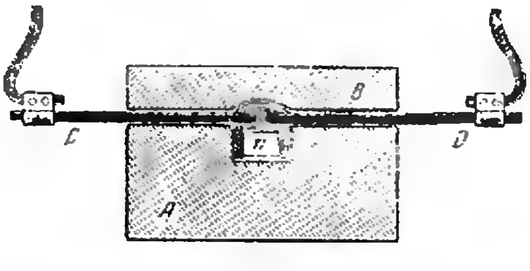


Рис. 1. Электрическая печь Муассана.

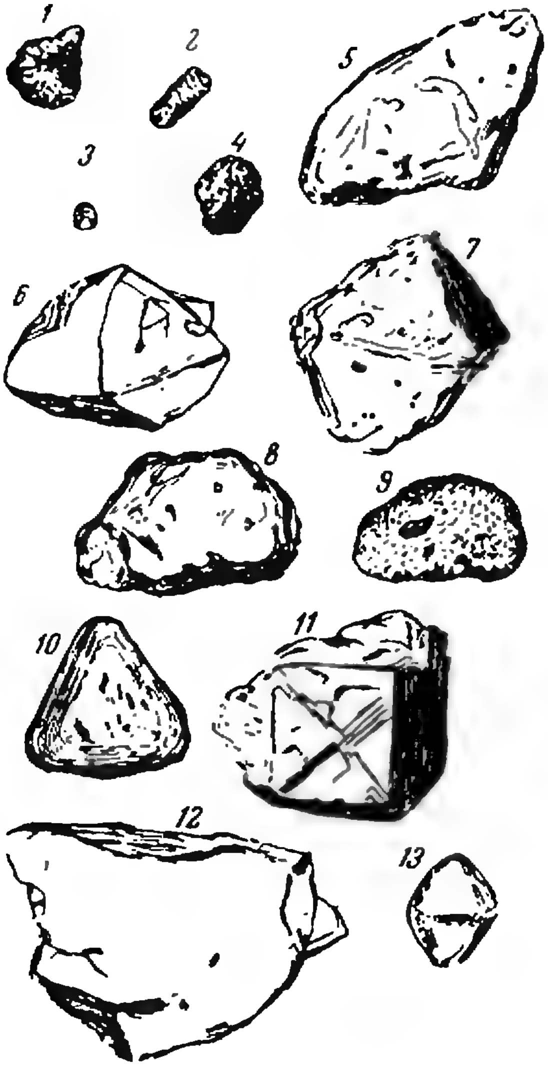


Рис. 2. Алмазы, полученные Муассаном (зарисовка). 1—4 — алмазы черного цвета; 5, 6 — желтоватые алмазы; 7 — бесцветный, чистой воды; 8, 9 — бесцветные с черными точками; 10, 11 — бесцветные; 12 — ноздреватый, похожий на бразильские алмазы; 13 — алмаз правильной формы.

вольтова дуга и нагревала тигель и помещенные в него вещества до очень высокой температуры.

Муассан решил использовать свою высокотемпературную печь для получения алмазов. Он проделал в дне печи отверстие и под ним поставил сосуд с водой. В печи железо расплавлялось, насыщалось углеродом, и капельки этого насыщенного углеродом расплавленного железа падали в холодную воду. Внешние слои капельки быстро охлаждались и, сжимаясь, оказывали огромное давление на находящееся внутри и еще не успевшее остыть железо. Получавшиеся железные шарики растворялись в кислотах. Внутри шариков были найдены маленькие кристаллики более или менее правильной формы размером до 0,5—0,7 мм (рисунок 2). Эти кристаллики были очень твердые, и химический анализ — сжигание в кислороде — показал, что они состоят из чистого углерода.

Четыре кристаллика были черного цвета, два желтоватых, остальные бесцветные. Три кристаллика с черными точками очень напоминали бразильские алмазы. Один был исключительно правильной формы. Кристалл самой «чистой воды» Муассан назвал «регентом».

Получение алмазов в лаборатории вызвало мировую сенсацию. Однако многочисленные попытки других ученых повторить опыты Муассана оказались безрезультатными. Только немецкому профессору Руффу удалось получить маленький кристаллик размером 0,05 мм, который по удельному весу, свечению в ультрафиолетовых лучах и горению в кислороде был признан алмазом.

Известны имена и других ученых, занимавшихся «алмазотворением». Н. В. Каразин в России (1823 г.), Каньяр-Латур и Ганналем во Франции (1829 г.) «жжением угля» получили кристаллы, похожие на алмазы, но они оказались карбидами — соединениями металлов с углеродом. В России К. Д. Хрущев (1893 г.) пытался получить алмазы кристаллизацией углерода из расплава серебра при атмосферном давлении, и также получил прозрачные кристаллы карбидов.

Все это были поиски вслепую.

Впервые условия образования алмазов были определены в работах советского физика О. И. Лейпунского, который в 1931 году рассчитал давления и температуры, необходимые для превращения графит→алмаз.

Комментируя свои расчеты, О. И. Лейпунский писал: «Во-первых, надо нагреть графит не меньше, чем до 2000 градусов, чтобы атомы углерода могли переходить с места на место. Во-вторых, его надо при этом сжать чудовищным давлением, не меньше чем 60 тысяч атмосфер [≈6 ГПа]. Тогда он обязательно перейдет в алмаз, подобно тому, как камень, подброшенный рукой, обязательно поднимется с земли в воздух».

Рассчитанная О. И. Лейпунским кривая равновесия между графитом и алмазом изображена на рисунке 3. По оси абсцисс отложено давление в ГПа, по оси ординат — температура в градусах Кельвина. Поле, лежащее справа от кривой равновесия и охватывающее область высоких давлений, соответствует условиям стабильности алмаза. Поле слева от кривой соответствует условиям стабильности графита. Это значит, что если процесс выделения углерода (например, в результате химической реакции или осаждения из раствора) происходит при температуре и давлении, соответствующих правому полю (например, точке p_1, T_1), то углерод будет образовывать кристаллы алмазов; если p и T соответствуют левому полю (например, точке p_2, T_2) — образуются кристаллы графита. При давлениях и температурах, соответствующих точкам кривой равновесия, углерод будет выделяться в виде алмаза и графита одновременно. Алмаз, находящийся в условиях стабильности графита (левое поле), превращается в графит, а графит, помещенный в условиях стабильности алмаза (правое поле), переходит в алмаз. Однако эти превращения при комнатной температуре протекают очень медленно. Поэтому в обычных условиях алмазы существуют миллионы лет. При нагревании скорость превращения увеличивается. При температуре 1800 К и атмосферном давлении алмаз чернеет и быстро превращается в графит. Температуру 1800 К называют температурой графитизации алмаза. Прямое превращение графита в алмаз при комнатной температуре осуществить не удалось, даже подвергая графит чудовищным давлениям в 40 ГПа. Причина неудачи — необычайно малая скорость превращения при комнатной температуре. Для получения заметных количеств алмаза в этих условиях процесс должен протекать миллионы лет. Лишь при температуре 3000 К и давлении 12 ГПа удалось получить из графита прозрачные бесцветные кристаллики алмаза.

Обеспечить условия прямого перехода графит→алмаз необычайно трудно, поэтому для производства алмазов используют иные процессы — например, выделение углерода из раствора в жидком металле (например, железе), требующее не столь высоких давлений и температур. Понятно, что в этом случае рабочая область (значения T и p) должна одновременно быть областью стабильного алмаза и областью существования жидкого железа. Чтобы определить эту область, проведем на рисунке 3 кривую зависимости температуры плавления железа от давления (синяя линия). Как видно из графика, углерод будет выделяться из расплавленного железа в виде алмазов при давлениях $p \geqslant 6$ ГПа. (Если в опытах Муассана в остывающей капле железа возникало давление больше 6 ГПа, то он мог получить алмазы! Мы про-

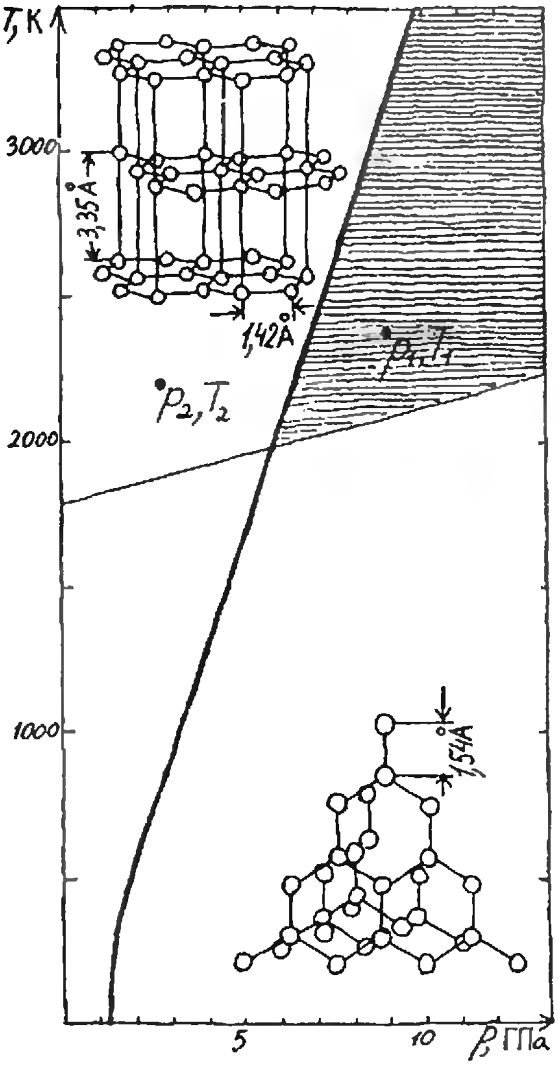


Рис. 3. Кривая равновесия графит — алмаз, рассчитанная О. И. Лейпунским, и расположение атомов углерода в алмазе и графите. В кристалле алмаза каждый атом углерода соединен прочными ковалентными связями с четырьмя соседними атомами, одинаково расположенными в пространстве. Этим объясняется высокая твердость алмаза.

В кристалле графита каждый атом углерода соединен тремя ковалентными связями с тремя соседними атомами, лежащими в том же слое. Большие расстояния и слабая связь между слоями обуславливают «низкие» механические свойства графита.

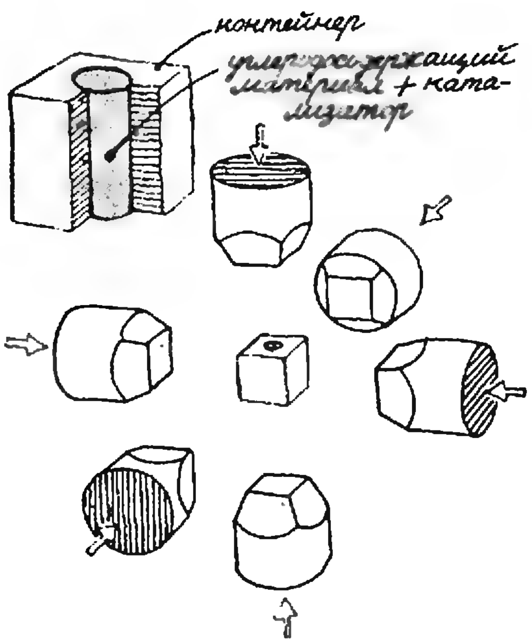


Рис. 4. Кубический аппарат высокого давления.

верим это предположение в конце статьи.)

Создать столь высокие давления в сочетании с высокими температурами оказалось трудной задачей. Попытки американского ученого П. Бриджмена, основателя физики высоких давлений, получить алмазы в лаборатории окончились в 1940 году неудачей. Лишь в 1955 году в печати появилось сообщение о том, что группа американских ученых во главе с Ф. Банди получила первые алмазы.

В Советском Союзе проблема получения искусственных алмазов была решена в 1960 году коллективом сотрудников Института физики высоких давлений АН СССР, возглавляемым академиком Л. Ф. Верещагиным. В 1961 году были получены 2000 каратов (1 карат$=2\cdot10^{-4}$ кг) алмазов, а сейчас наша промышленность производит сотни тысяч каратов алмазов в год.

Для промышленного получения искусственных алмазов была разработана специальная аппаратура. Прежде чем познакомиться с принципами ее работы, поговорим о способах создания высоких давлений.

Давайте мысленно проделаем следующий эксперимент. В толстостенный стальной стакан с внутренним диаметром 10 см нальем воду и вставим поршень с уплотнением. Вдвигая поршень в стакан, будем сжимать воду. Чтобы уменьшить ее объем на 18 %, нам придется приложить к поршню огромную силу — 7,8 МН! При этом в воде давление будет равно 1 ГПа, что в 10 000 раз больше атмосферного. При таком давлении и комнатной температуре вода затвердеет. В интервале давлений 1—2 ГПа твердеют практически все жидкости и начинают разрушаться стальные поршни, так как механические напряжения в них превосходят предел прочности стали.

Более высокие давления можно получить, сжимая твердые тела.

Приложим к двум противоположным граням кубика из твердого вещества сжимающие силы. Тогда внутри кубика, в сечении, перпендикулярном приложенным силам, разовьется механическое напряжение $\sigma=F/S$, где F — величина силы, S — площадь сечения кубика. Когда это напряжение превысит предел прочности на сжатие материала кубика — он разрушается. Но если на каждую пару противоположных граней кубика действовать одновременно строго одинаковыми сжимающими силами, то в кубике в трех взаимно перпендикулярных сечениях будут возникать одинаковые напряжения σ_1, σ_2, σ_3, и даже при самых высоких сжимающих усилиях кубик не разрушится. Такое равномерное сжатие создает во внутренних областях кубика всестороннее давление $p=\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$.

На этом принципе работает кубический аппарат высоких давлений, изображенный на рисунке 4. Шесть особой формы деталей, называемых пуансонами, сводятся одновременно к центру по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Пуансоны сжимают контейнер — кубик из пластического материала, помещенный в центре аппарата. Сведение пуансонов производится с помощью шести поршней гидравлического пресса. Пресс отрегулирован таким образом, что силы, действующие на разные грани кубика, всегда равны, и в кубике создается всестороннее давление.

Часто применяют более простые аппараты, состоящие из двух пуансонов с лунками, которые сжимают контейнер, имеющий форму чечевицы (рисунок 5).

Самый мощный гидравлический пресс для научных исследований, развивающий усилие до 500 МН, имеет высоту многоэтажного дома. Он используется для создания высоких давлений в аппаратах большого объема. Большая часть пресса расположена под землей, а над уровнем пола возвышается лишь верхняя часть пресса с рабочим пространством, в которое помещают аппараты высокого давления. В этом пространстве может свободно разгуливать человек.

Материалом для пуансонов, которые должны выдерживать огромные сжимающие напряжения, служит карбид вольфрама, сцементированный кобальтом. Этот сверхтвердый сплав много прочнее стали.

Контейнеры изготавливают из глинистого минерала пирофиллита или других подобных ему материалов. Пирофиллит — плохой проводник тепла и электричества. Это позволяет получать в контейнере высокие температуры, используя для нагрева электрический ток.

В контейнер помещают графит и металл-катализатор (железо, никель или их сплавы) и сжимают его между пуансонами. Когда достигнуто необходимое давление ($p \geqslant 6$ ГПа), через пуансоны пропускают электрический ток, который нагревает содержимое контейнера до высокой температуры. Таким образом создаются условия, соответствующие p — T-области образования алмаза.

За процессом следят по силе тока, протекающего через аппарат. Алмаз не электропроводен, и его образование вызывает увеличение электросопротивления содержимого контейнера и, соответственно, уменьшение тока через аппарат. После окончания процесса выключают нагрев, дают контейнеру охладиться, снимают давление и извлекают контейнер из аппарата.

Полученные алмазы — кристаллики размером от долей миллиметра до 1—2 миллиметров — отмывают в кислотах от частичек металла и графита, сортируют и отправляют на изготовление алмазного инструмента.

Ученые разработали и другие способы получения алмазов и изделий из них. Если процесс вести в присутствии катализатора (ускорителя) при более высоких давлениях, то образуется огромное количество мельчайших кристаллов алмаза одновременно, которые срастаются в прочный поликристаллический блок больших размеров черного цвета — карбонадо. Карбонадо обладают большей прочностью и более стойки к ударам, чем обычные алмазы.

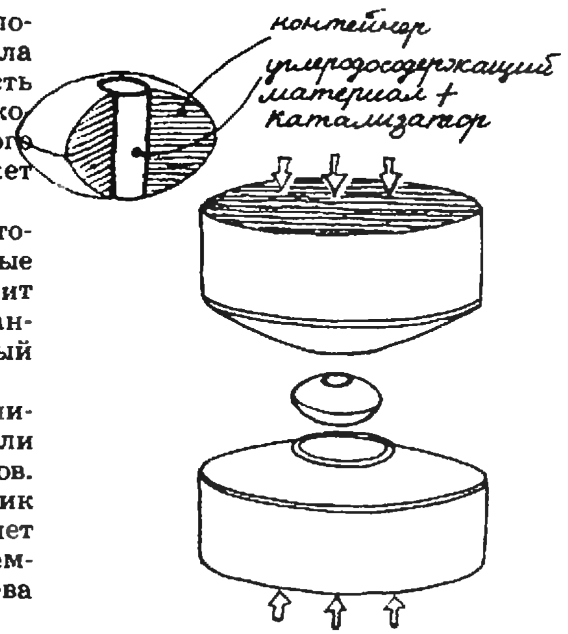


Рис. 5. Аппарат типа «чечевица».

Поликристаллические алмазы можно получать любой желаемой формы и таким образом избежать трудоемких операций обработки алмазных блоков. Для этого заготовке из углеродсодержащего материала придают с учетом усадки необходимую форму, помещают в трубочку-нагреватель, засыпают порошкообразным катализатором и помещают сборку в контейнер. После образования поликристаллических алмазов из контейнера вынимают готовое алмазное изделие заданной формы — например, в виде резца. Осталось заточить у него режущую кромку, закрепить в держателе и поставить на станок. Алмазные резцы в сотни раз более стойки, чем обычные. Ими обрабатывают твердые сплавы, металлы, пластмассы. Алмазные резцы работают на огромных скоростях и дают высокую чистоту обрабатываемой поверхности.

Из кристаллов алмаза, спеченных с металлической связкой, делают пилы и шлифовальные круги для резки и обработки твердых металлов, графита, камней.

Алмазные коронки и долота применяются при бурении скважин в горных породах. При этом скорость бурения возрастает больше чем в два раза, а стоимость работ снижается на 40—60 %.

Невозможно перечислить все профессии алмаза, ведь сейчас выпускается более 5000 видов алмазного инструмента. Подсчитано, что каждый карат алмаза сберегает народному хозяйству около 100 рублей, а вся экономия по стране составляет многие миллионы рублей в год.

Алмаз оказался помощником ученых в исследованиях при высоких давлениях. В миниатюрных аппаратах-наковальнях из алмазов получают огромные давления в миллионы атмосфер (100 ГПа), и так как алмазы прозрачны для света, рентгеновских лучей и других видов излучения, то ученые могут видеть, что происходит при этих давлениях с веществом, исследовать его с помощью рентгеновских лучей.

Недавно в Институте физики высоких давлений имени Л. Ф. Верещагина АН СССР были получены полупроводниковые алмазы и был создан на их основе электронный прибор термистор — высокочувствительный тепловой датчик.

Так перед алмазом, сделанным руками человека, открылось новое поле деятельности — мир электроники.

Получил ли Муассан алмазы?

Оценим, какие давления могли создаваться внутри остывающих капелек железа в опытах Муассана. Представим такую остывающую капельку в виде жесткой сферической оболочки — корки из твердого железа, внутри которой находится жидкое железо, насыщенное углеродом.

При изменении температуры от T_1 до $T_2 = T_1 + \Delta T$ объем оболочки изменится от V_1 до

$$V_2 = V_1(1 + \alpha\Delta T),$$

где α — коэффициент объемного термического расширения. Относительное изменение объема составит

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \frac{V_2 - V_1}{V_1} = \alpha\Delta T. \qquad (1)$$

При охлаждении ($\Delta T < 0$) корка-оболочка уменьшится в объеме и сожмет жидкую середину капли. Относительное изменение объема жидкой капли будет $\Delta V/V_1$. Определим, какое давление возникнет внутри жидкого железа при таком сжатии.

Вспомним, что механическое напряжение, возникающее при растяжении образца, прямо пропорционально относительному удлинению:

$$\sigma = E\frac{\Delta l}{l_0},$$

где коэффициент пропорциональности E — модуль Юнга.

Аналогичной зависимостью связаны давление, возникающее при всестороннем сжатии образца, и относительное изменение объема:

$$p = -B\frac{\Delta V}{V_1}, \qquad (2)$$

где коэффициент пропорциональности B называют модулем объемной упругости. Он, так же как и σ, имеет размерность давления. Знак минус показывает, что уменьшение объема приводит к увеличению давления внутри капли.

Подставив (1) в (2), получим выражение для давления внутри остывающей капли:

$$p = -B\alpha\Delta T. \qquad (3)$$

Проведем численную оценку этой величины.

Корка-оболочка твердого железа, которая образовалась при попадании капельки в воду, охлаждается от температуры плавления (затвердевания) железа 1811 К до температуры воды, которую примем равной 293 К (20 °С), то есть

$$\Delta T = -1518\ \text{К} \approx -1{,}5 \cdot 10^3\ \text{К}.$$

Значение коэффициента объемного термического расширения примем равным

$$\alpha = 35 \cdot 10^{-6}\ \text{К}^{-1}.$$

Модуль объемной упругости жидкого железа положим равным модулю объемной упругости твердого железа:

$$B = 168\ \text{ГПа}.$$

Подставив эти данные в формулу (3), получим величину давления внутри остывающей капли:

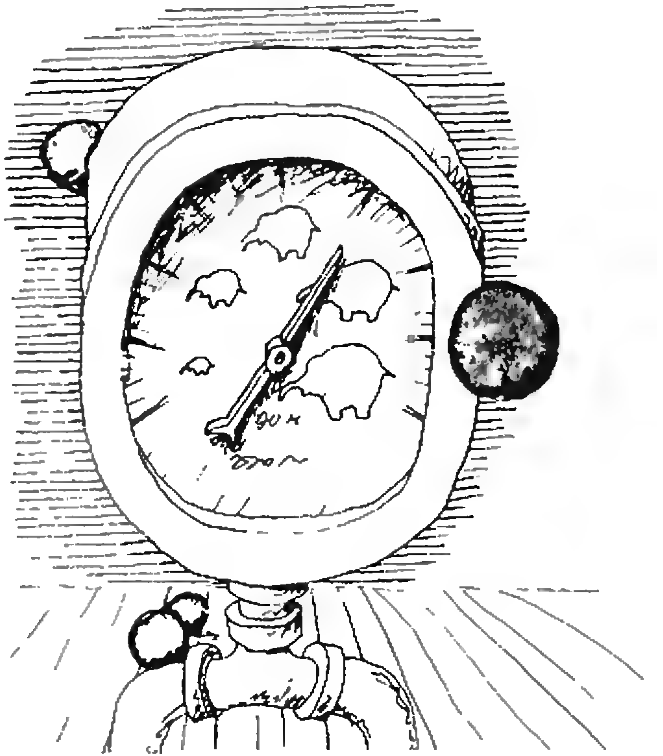
$$p = -B\alpha\Delta T = -(168 \cdot 35 \cdot 10^{-6}(-1{,}5 \cdot 10^3))\,\text{ГПа} \approx 8{,}9\ \text{ГПа}.$$

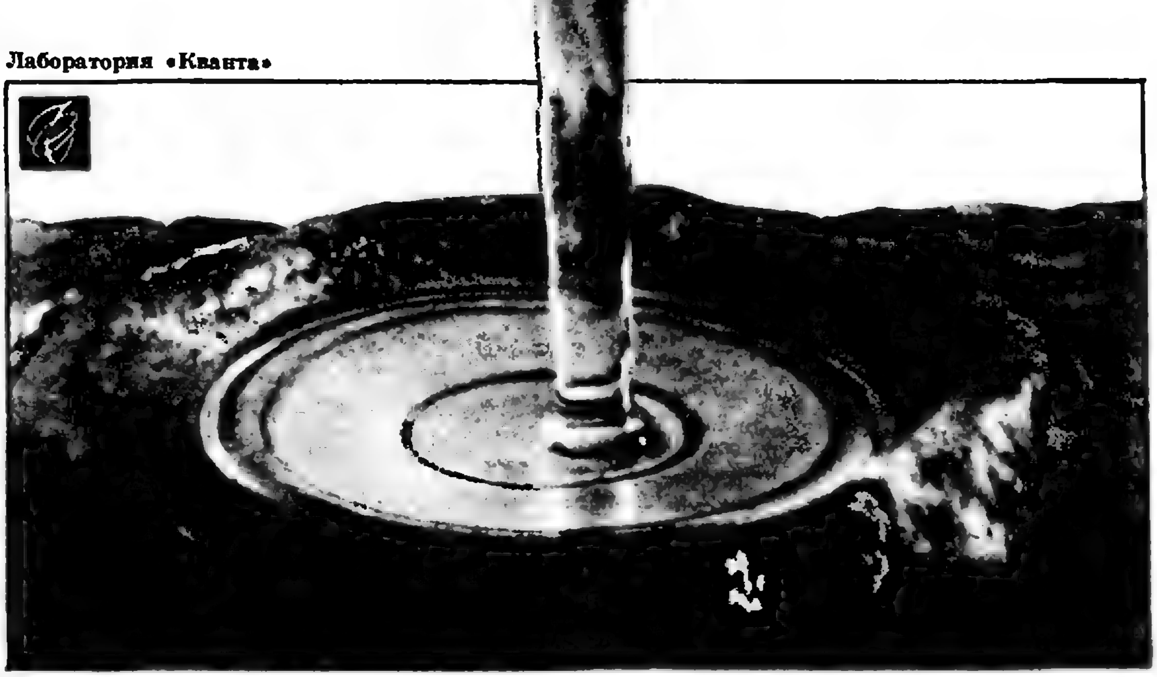
Это давление в 1,5 раза больше необходимого для осаждения углерода из расплавленного железа в виде алмазов.

Наша оценка, конечно, носит приблизительный характер. Мы не учитывали, например, разницы в температурах внутренних и внешних своев оболочки, различия в свойствах чистого железа и насыщенного раствора углерода в железе; мы не учитывали уменьшения объема при затвердевании железа, а также прочности и упругости оболочки, которая несколько увеличивает свой объем под действием создаваемого давления, и т. п.

Эти факторы по-разному влияют на величину расчетного давления. Можно ожидать, однако, что в сумме их учет существенно не изменит результат.

Итак, наша оценка показывает, что в опытах Муассана могли образоваться алмазы.





Еще раз о ложке в струе воды

Кандидат физико-математических наук
А. Н. ЛУЗИН

Возьмем обыкновенную глубокую тарелку, нальем в нее воду и поставим в кухонную раковину. На край тарелки положим легкую алюминиевую ложку, так, чтобы пустая она плавала, а наполненная водой — тонула.

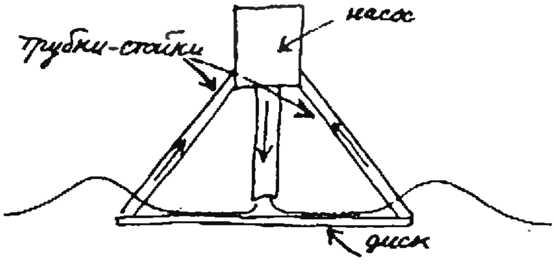
Придержим плавающую ложку за черенок и направим на нее струю воды. Струя должна быть такой, чтобы в ложке остался только тонкий слой воды. Перестанем поддерживать ложку — а она не тонет, хотя на нее сильно давит вертикальная струя воды. Опыт легко удается, если струя ровная, гладкая, без видимых завихрений. (Именно такая струя и течет обычно из кухонного смесителя.)

Опыт выглядит более эффектно, если вместо ложки взять плоский диск, например металлическую крышку от консервной банки. Крышка с герметизирующей резиной плавает еще более устойчиво. В качестве диска можно использовать также аккуратно вырезанное дно жестяной консервной банки.

Плавающий диск не будет «убегать» в сторону из-под струи воды, если в центре его имеется небольшое по «высоте» (1—2 мм) и диаметру (10—20 мм) углубление. Такие углубления почти всегда есть на крышках и донышках консервных банок. Если же углубления нет, его легко сделать, положив диск на хоккейную шайбу и постучав по его центру молотком.

Почему же диск (и ложка) не тонет? Понаблюдайте некоторое время, и вы увидите, что на поверхности диска возникает водяной валик, который растекающаяся тонким слоем вода отгоняет все дальше и дальше к краям диска. В результате образуется нечто похожее на пустой сосуд, дном которого является диск, а стенками — водяной валик. Понятно, что чем больше объем такого «сосуда», тем более устойчиво он будет плавать. Как показывает опыт, диск особенно устойчив в струе теплой воды. (Практический совет — если в наполняемую водой ванну опустить указанный диск, вода будет шуметь гораздо меньше.)

Теперь предлагаем вам превратить жестяной диск в плавающую и одновременно вращающуюся турбинку. Для этого край диска разрежьте на одинаковые «лепестки» и каждый из них с одной стороны загните. Можно ли сказать заранее — по часовой стрелке или против будет вращаться ваша турбинка? Попытайтесь также сделать игрушечный кораблик с водяными бортами, схематически изображенный на рисунке. С помощью насоса и наклонных труб-стоек вода засасывается из сосуда, в котором плавает кораблик, под напором подается в центр диска и растекается по нему тонким слоем. А дальше все происходит точно так же, как и с обычным диском.



Математика 8—10

Заметка «Формула Герона» адресована восьмиклассникам.
Заметка «Где ошибка?» — девятиклассникам и десятиклассникам.

Формула Герона

В учебном пособии А. В. Погорелова «Геометрия 6—8» на с. 166 разбирается задача 26, в которой предлагается вывести следующую формулу для площади треугольника:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

a, b, c — длины сторон треугольника, p — его полупериметр.

Эта формула в честь древнегреческого ученого Герона Александрийского (около I в. н. э.) называется *формулой Герона* (она содержится, в частности, в геометрическом разделе математического трактата «Метрика», написанного Героном Александрийским).

В этой заметке мы дадим еще три доказательства формулы Герона, отличные от приведенного в решении задачи 26 из «Геометрии 6—10». Наши доказательства используют некоторые весьма полезные соотношения, с которых мы и начнем.

Пусть в треугольник ABC со сторонами $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ вписана окружность (рис. 1). Отрезки касательных, проведенных к этой окружности из точек A, B, C, равны (для каждой из этих точек); их длины обозначены на рисунке буквами x, y, z соответственно. Очевидно, что $x+y=c$, $x+z=b$, $y+z=a$, $x+y+z=p$, где p — полупериметр треугольника ABC, поэтому

$$x=p-a,\ y=p-b,\ z=p-c. \qquad (1)$$

Рассмотрим теперь окружность, касающуюся стороны BC и продолжений сторон AB и AC (рис. 2). (Докажите сами, что такая окружность существует для любого треугольника и что ее центр — точка пересечения биссектрисы внутреннего угла BAC и внешних углов PBC и KCB треугольника ABC.) По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, $AP=AK$, $BP=BQ$, $CK=CQ$. Кроме того, $AP+AK=(AB+BQ)+(AC+CQ)=2p$. Следовательно,

$$AP=AK=p,\quad BQ=p-c,\quad CQ=p-b. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) часто применяются при решении планиметрических задач, поэтому их полезно запомнить (или, во всяком случае, знать об их существовании и уметь вывести).

Первое доказательство. Проведем в треугольнике ABC касательную MN к вписанной окружности, параллельную стороне AB (рис. 3). Треугольник AON прямоугольный, поскольку $\widehat{OAN}+\widehat{ONA}=\frac{1}{2}(\widehat{BAN}+\widehat{MNA})=90^\circ$, при этом $OK=r$ — высота, опущенная из вершины прямого угла (буквой r обозначен радиус вписанной окружности). Следовательно, $KN=r^2/x$. Аналогично из прямоугольного треугольника BOM получаем, что $LM=r^2/y$. Далее, $MN=KN+LM=\frac{r^2(x+y)}{xy}$.

Из формул (2) следует, что z — полупериметр треугольника MNC. В подобных треугольниках MNC и BAC полупериметры относятся как сходственные стороны, поэтому $p:z=AB:MN$, то есть $p:z=(x+y):\frac{r^2(x+y)}{xy}$, откуда $p:z=xy:r^2$ и

$$pr^2=xyz. \qquad (3)$$

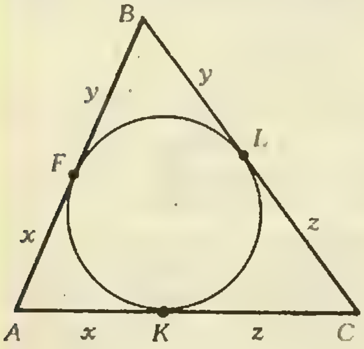


Рис. 1.

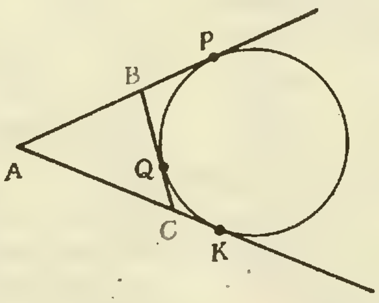


Рис. 2.

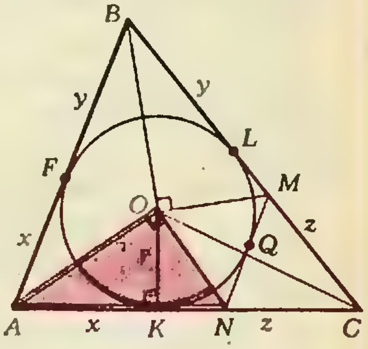


Рис. 3.

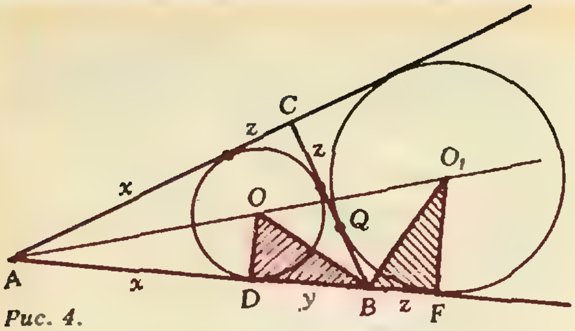


Рис. 4.

Легко видеть, что формула (3) эквивалентна формуле Герона: так как $S=pr$, то с учетом (1) и (3) получаем $S^2=p^2r^2=pxyz=p(p-a)(p-b)(p-c)$.

Второе доказательство. Пусть O_1 и r_1 — центр и радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AC и AB, F — точка касания этой окружности с прямой AB (рис. 4). Тогда (см. формулы (2)) $BF=p-c=z$. Треугольники ODB и O_1BF подобны ($O\widehat{D}B=B\widehat{F}O_1=90^\circ$, $F\widehat{B}O_1=\frac{1}{2}C\widehat{B}F=\frac{1}{2}(180^\circ-C\widehat{B}D)=$ $=90^\circ-O\widehat{B}D=D\widehat{O}B$). Следовательно, $OD:BF=DB:O_1F$, то есть $r:z=y:r_1$, откуда $r_1=yz/r$. Прямоугольные треугольники AO_1F и AOD также подобны, откуда $AF:AD=O_1F:OD$, поэтому $p:x=r_1:r$. Подставляя в это равенство $r_1=yz/r$, получим $p:x=yz/r^2$, то есть $pr^2=xyz$, что, как было показано в конце первого доказательства, эквивалентно формуле Герона.

Третье доказательство. Докажем сначала, что в любом треугольнике

$$\operatorname{ctg}(\widehat{A}/2)+\operatorname{ctg}(\widehat{B}/2)+\operatorname{ctg}(\widehat{C}/2)=$$
$$=\operatorname{ctg}(\widehat{A}/2)\operatorname{ctg}(\widehat{B}/2)\operatorname{ctg}(\widehat{C}/2). \quad (4)$$

Действительно,

$$\operatorname{ctg}(\widehat{C}/2)=\operatorname{ctg}((180^\circ-\widehat{A}-\widehat{B})/2)=$$
$$=\frac{\operatorname{tg}(\widehat{A}/2)+\operatorname{tg}(\widehat{B}/2)}{1-\operatorname{tg}(\widehat{A}/2)\operatorname{tg}(\widehat{B}/2)},$$

поэтому

$$\operatorname{ctg}(\widehat{A}/2)+\operatorname{ctg}(\widehat{B}/2)+\operatorname{ctg}(\widehat{C}/2)=$$
$$=\frac{\operatorname{tg}(\widehat{A}/2)+\operatorname{tg}(\widehat{B}/2)}{\operatorname{tg}(\widehat{A}/2)\operatorname{tg}(\widehat{B}/2)}+\frac{\operatorname{tg}(\widehat{A}/2)+\operatorname{tg}(\widehat{B}/2)}{1-\operatorname{tg}(\widehat{A}/2)\operatorname{tg}(\widehat{B}/2)}=$$
$$=\frac{\operatorname{ctg}(\widehat{A}/2)+\operatorname{ctg}(\widehat{B}/2)}{1-\operatorname{tg}(\widehat{A}/2)\operatorname{tg}(\widehat{B}/2)};$$

$$\operatorname{ctg}(\widehat{A}/2)\operatorname{ctg}(\widehat{B}/2)\operatorname{ctg}(\widehat{C}/2)=$$
$$=\operatorname{ctg}(\widehat{A}/2)\operatorname{ctg}(\widehat{B}/2)\times$$
$$\times\frac{\operatorname{tg}(\widehat{A}/2)+\operatorname{tg}(\widehat{B}/2)}{1-\operatorname{tg}(\widehat{A}/2)\operatorname{tg}(\widehat{B}/2)}=$$
$$=\frac{\operatorname{ctg}(\widehat{A}/2)+\operatorname{ctg}(\widehat{B}/2)}{1-\operatorname{tg}(\widehat{A}/2)\operatorname{tg}(\widehat{B}/2)}.$$

Из прямоугольного треугольника AOK (см. рис. 3) находим $\operatorname{ctg}(\widehat{A}/2)=$ $=x/r$, аналогично $\operatorname{ctg}(\widehat{B}/2)=y/r$, $\operatorname{ctg}(\widehat{C}/2)=z/r$. Подставляя эти значения в (4), получаем $x/r+y/r+z/r=$ $=xyz/r^3$, откуда $pr^2=xyz$, что эквивалентно формуле Герона.

Отметим, что все наши рассуждения можно провести в обратном порядке и вывести из формулы Герона равенство (4). Проделайте это самостоятельно.

А. Д. Белый

Где ошибка?

Пользуясь стандартными методами решения школьных задач, следует помнить, что каждый из этих методов имеет определенные границы применимости, забвение которых может привести к ошибкам. Особенно поучительны случаи, когда такую ошибку допускают сами авторы задачи. Ниже приводятся три задачи, взятые из различных учебных пособий, вместе с приведенными там неправильными ответами или решениями. Попытайтесь исправить ошибки (правильные ответы и указания приведены на с. 57).

1. *При каких значениях a уравнение $x^2-4x+a^2-1=0$ имеет два корня, больших* 1?

Решение. Условие задачи равносильно системе неравенств

$$x_1+x_2>2,\ x_1x_2>1,$$
$$D=16-4(a^2-1)>0$$

(x_1, x_2 — корни). Эта система равносильна системе

$$4>2,\ a^2-1>1,\ a^2<5,$$

решая которую, получаем

Ответ: $\sqrt{2}<a<\sqrt{5}$ или $-\sqrt{5}<$ $<a<-\sqrt{2}$.

2. *$ABCD$ — правильный тетраэдр. Точка X такова, что $XA=XC$, $XB=XD$, $XA=\sqrt{3}\,XD$. Установите положение точки X относительно тетраэдра.*

Ответ: граничная.

3. *В каждый из трехгранных углов прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которой $ABCD$ — ромб, $AC=8$, $BD=6$, $AA_1=1$, вписан шар, касающийся конуса с вершиной в точке $O=(A_1C_1)\cap(B_1D_1)$ и основанием, вписанным в ромб $ABCD$.* Найдите радиусы шаров.

Ответ: $\frac{12}{29}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{12}{25}$, $\frac{3}{5}$.

П. П. Горнуша

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Докажите, что ни при каком натуральном n число $n^4+2n^3+2n^2+2n+1$ не может быть точным квадратом.

2. Постройте отрезок с серединой в данной точке так, чтобы его концы лежали на данной прямой и данной окружности.

3. Найдите все натуральные числа n, для которых число n^3+3 делится на $n+3$.

4. Существует ли треугольник с высотами $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}+\sqrt{3}$?

5. Автомобилист собирается пересечь пустыню. Его машина тратит 1 л бензина на 10 км пути. Автомобилист имеет 450 л бензина, но может взять с собой не более 150 л. Однако он может преодолеть более 1500 км, оставляя по пути следования часть бензина и возвращаясь обратно для пополнения бензобака. Пустыню какой наибольшей ширины может пересечь автомобилист?

Девятый класс

6. Что больше: $7^{\sqrt{5}}$ или $5^{\sqrt{7}}$?

7. Двумя отрезками длины 1 отсеките от данного угла четырехугольник наибольшей площади.

8. В последовательности $\{u_n\}$

$$u_1=u_2=1 \text{ и } u_{n+2}=u_{n+1}^2+u_n^2 \ (n\geqslant 1).$$

Делится ли число u_{1986} на 7?

9. На сторонах AB и AC треугольника ABC берутся точки M и N соответственно так, что $AM=\frac{1}{n}AB$, $AN=\frac{1}{n+1}AC$. Докажите, что при всех натуральных n прямые MN проходят через одну и ту же точку, и найдите ее.

10. Решите уравнение

$$\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x.$$

Десятый класс

11. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неотрицательные числа, сумма которых равна 1. Чему равно наибольшее значение величины $x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n$?

12. Докажите, что если в тетраэдре все грани равновелики, то они все равны.

13. n — натуральное число. Докажите, что

$$\frac{2}{3}n\sqrt{n}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}<\frac{4n+3}{6}\sqrt{n}.$$

14. Одна треугольная пирамида целиком помещается внутри другой. Может ли сумма длин ребер у внутренней пирамиды быть больше, чем у внешней?

15. Найдите сумму коэффициентов при нечетных степенях x у многочлена $(x^5+x-1)^{1986}$.

Публикацию подготовил *Л. Д. Курляндчик*

Наша обложка

Тринадцать шаров в одной клетке

Хорошо известно, что на плоскости к одному кругу радиуса 1 можно приложить 6 кругов того же радиуса так, чтобы они его касались и друг друга не пересекали (рис. 1). При этом центры шести кругов лежат в вершинах правильного шестиугольника, а центр первого круга является центром этого шестиугольника. Не очень трудно строго доказать, что больше 6 кругов приложить нельзя.

А в пространстве? Сколько одинаковых материальных шаров можно приложить к такому же шару? Многие знают, что ответ — 12. Но можно ли столь же наглядно и четко, как с кругами, представить себе картину расположения 12 шаров, приложенных к одному шару? Оказывается — можно (см. 4-ю с. обложки).

Для начала представим себе шар, который касается всех 12 ребер некоторого куба (рис. 2). Такой шар называется *полувписанным* в куб. Теперь изготовим «клетку» для 13 шаров. Для этого разобьем большой куб на 27 одинаковых кубиков. Остов этого разбиения, то есть ребра всех составляющих кубиков, и образует искомую «клетку». Мысленно закрасим это разбиение в «шахматном порядке» так, чтобы черными были центральный кубик и те 12 кубиков, которые имеют с ним ровно одно общее ребро, а белыми — остальные 14. В каждый «черный» кубик полувписываем шар (рис. 3). Шары касаются ребер клеток и через них касаются друг друга. Двенадцать внешних шаров касаются центрального шара.

12 шаров можно приложить к такому же шару и другими способами. В связи с этим возникает вопрос: а нельзя ли приложить 13? По этому вопросу возник знаменитый спор еще у Исаака Ньютона и английского монаха и математика Грегори. Но этот спор был решен в пользу Ньютона (нельзя!) лишь в 1953 году в совместной статье Шютте и Ван-дер-Вардена.

В. В. Произволов

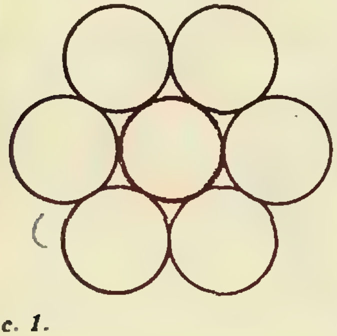


Рис. 1.

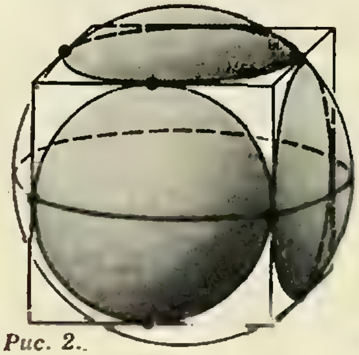


Рис. 2.

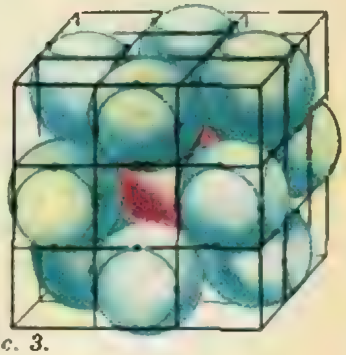
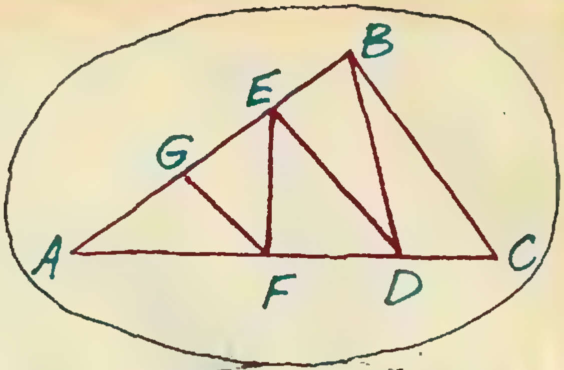


Рис. 3.

квант для младших школьников



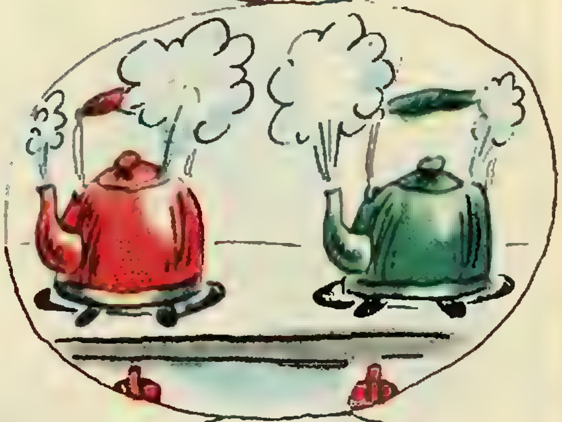
Задачи

1. Как в треугольнике *ABC* провести ломаную *BDEFG* (см. рисунок), чтобы все пять полученных треугольников имели одинаковые площади?

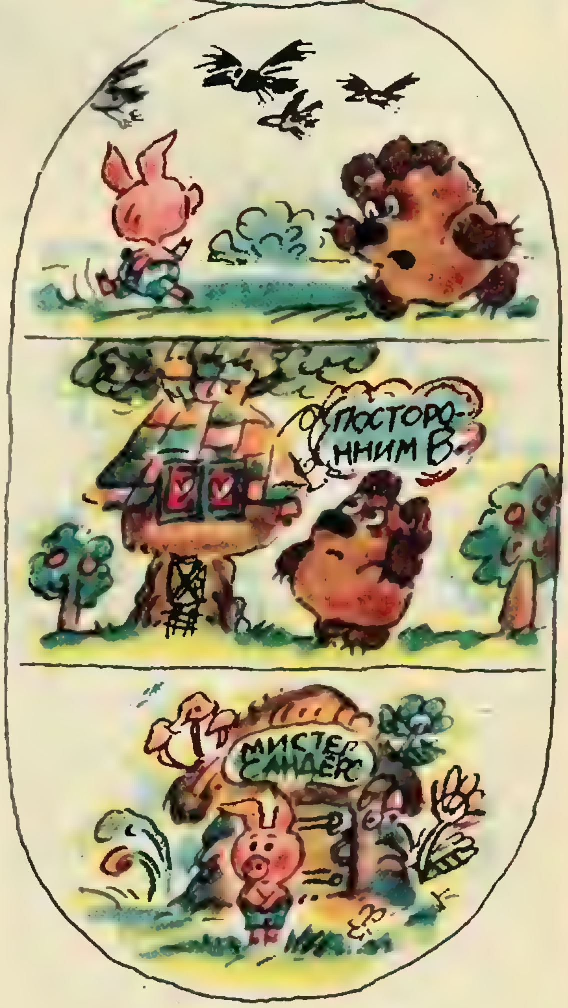
2. Произведение миллиарда натуральных чисел равно миллиарду. Какое наибольшее значение может принять сумма всех этих чисел?

3. Можно ли к числу 9999 приписать справа еще четыре цифры так, чтобы полученное восьмизначное число стало квадратом целого числа?

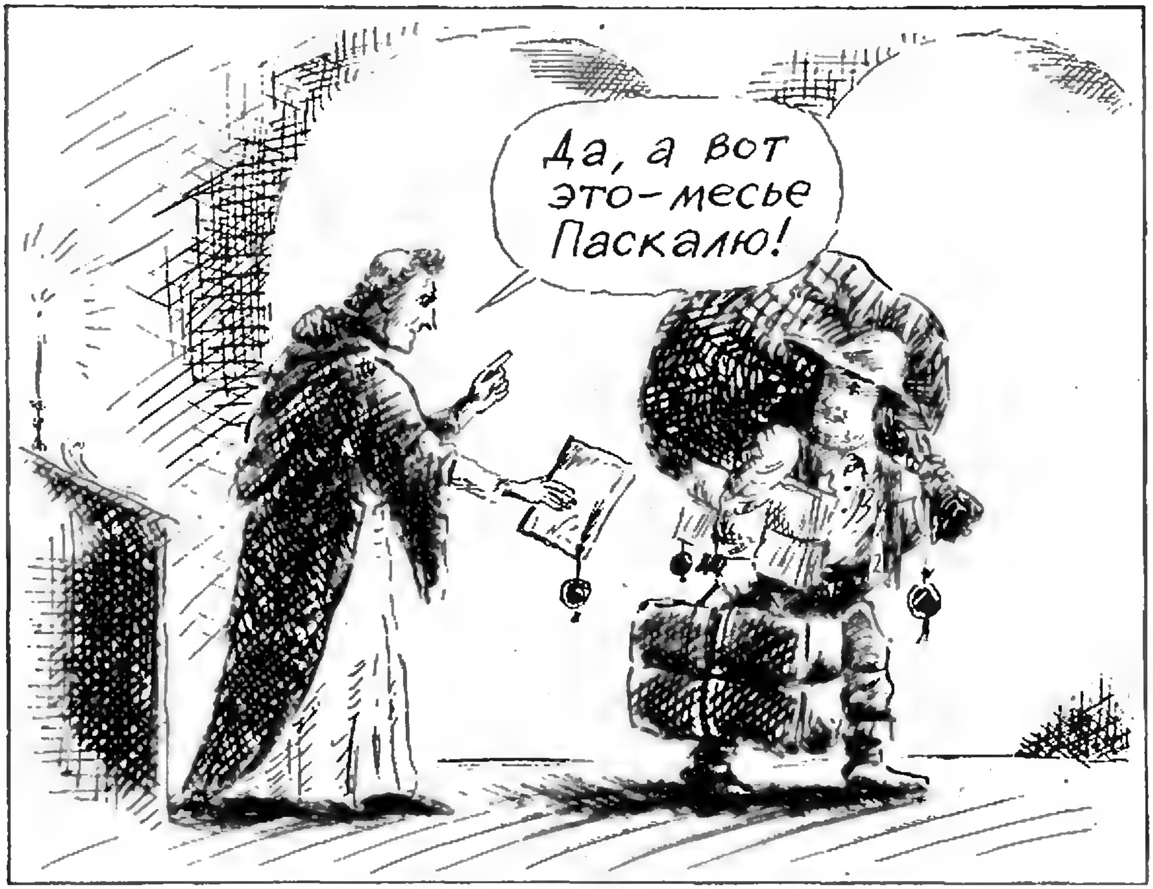
4. Два одинаковых чайника с водой одинаковой температуры поставили на одинаковые источники тепла. Через некоторое время вода в обоих чайниках закипела (см. рисунок). В каком чайнике вода закипела раньше?



5. Винни-Пух и Пятачок одновременно отправились в гости друг к другу. Но поскольку Винни-Пух всю дорогу сочинял очередную «шумелку», а Пятачок считал пролетавших галок, они не заметили друг друга при встрече. После встречи Пятачок подошел к дому Винни-Пуха через четыре минуты, а Винни-Пух подошел к дому Пятачка через одну минуту. Сколько минут был в пути каждый из них?



Эти задачи нам предложили *А. П. Савин, Г. А. Гальперин, Л. Д. Курляндчик, В. Д. Вьюн, С. Р. Сефибеков.*


Да, а вот это-месье Паскалю!

Числа Мерсенна

Математика, как и большинство современных наук, в настоящее время развивается со все возрастающей скоростью. В мире выходят сотни математических журналов, в которых публикуются ежегодно десятки тысяч научных работ. А 350 лет назад никаких математических журналов еще не было, и ученые обменивались результатами своих исследований в личных письмах. Правда, был один человек — французский монах Марен Мерсенн (1588—1648), который получал таких писем больше других. Написать об открытии новой теоремы Мерсенну означало установить свой приоритет, поскольку Мерсенн, как правило, сообщал об этом остальным своим корреспондентам, в числе которых были Р. Декарт, Б. Паскаль, П. Ферма, Х. Гюйгенс и многие другие ученые того времени.

Эта деятельность Марена Мерсенна способствовала созданию в Париже Академии наук.

Из собственных математических достижений Мерсенна наибольшей известностью пользуются изученные им числа вида $M_n=2^n-1$.

Тот, кто знает, что такое геометрическая прогрессия, сразу заметит, что M_n равняется сумме первых n членов геометрической прогрессии с начальным членом $2^0=1$ и разностью 2:

$$M_n=2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-1}.$$

Мерсенна интересовало, какие из чисел $M_n=2^n-1$ являются простыми. Вопрос этот возник в задаче, поставленной древними греками (к ней мы еще вернемся).

Простые числа, получающиеся по формуле 2^n-1, и называются *числами Мерсенна*.

Попробуем и мы немного коснуться проблемы поиска чисел Мерсенна.

Вычислим несколько первых чисел $M_n=2^n-1$ и запишем их по порядку в таблицу из четырех столбцов. Первое наблюдение: числа, попадающие в один и тот же столбец, оканчиваются на одну и ту же цифру. А именно, числа, попадающие в первый столбец, оканчиваются на 1, во второй — на 3, в третий — на 7 и в четвертый — на 5 (попробуйте строго

Таблица

$M_1=$ 1	$M_2=$ 3	$M_3=$ 7	$M_4=$ 15
$M_5=$ 31	$M_6=$ 63	$M_7=$ 127	$M_8=$ 255
$M_9=$ 511	$M_{10}=$ 1.023	$M_{11}=$ 2.047	$M_{12}=$ 4.095
$M_{13}=$ 8.191	$M_{14}=$ 16.383	$M_{15}=$ 32.767	$M_{16}=$ 65.535
$M_{17}=$ 131.071	$M_{18}=$ 262.143	$M_{19}=$ 524.287	$M_{20}=$ 1.048.575
$M_{21}=$ 2.997.151	$M_{22}=$ 4.194.303	$M_{23}=$ 8.388.607	$M_{24}=$ 16.777.215
$M_{25}=$ 33.554.431	$M_{26}=$ 67.108.863	$M_{27}=$ 134.217.727	$M_{28}=$ 268.435.455
$M_{29}=$ 536.870.911	$M_{30}=$ 1.073.741.823	$M_{31}=$ 2.147.483.647	$M_{32}=$ 4.294.967.295
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
M_{4n-3}	$M_{2(2n-1)}$	M_{4n-1}	M_{4n}

обосновать это наблюдение). Значит, числа M_n, попадающие в четвертый столбец, делятся на 5, и среди них не может быть чисел Мерсенна.

Несложно доказать и второе наблюдение: числа, попадающие во второй и четвертый столбцы, делятся на 3. В самом деле, разность двух последовательных чисел M_{2k} и M_{2k+2} с четными номерами равна

$$(2^{2k+2}-1)-(2^{2k}-1)=2^{2k+2}-2^{2k}=3\cdot 2^{k}.$$

Поэтому, если число M_{2k} делится на 3, то и M_{2k+2} тоже делится на 3. А число M_2 равно трем.

Поэтому числа Мерсенна (за исключением $M_2=3$) имеет смысл искать только в первом и третьем столбцах.

Более пристальное изучение чисел M_n приводит к третьему наблюдению: если n — составное число, $n=kl$, $k>1$, $l>1$, то M_n делится на M_k и на M_l. (Это следует из того, что $2^{kl}-1=(2^k)^l-1=(2^l)^k-1$, а $(x^m-1)=(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+...+x+1)$.) Кстати, из третьего наблюдения вытекают и первые два, поскольку все числа во втором столбце делятся на $M_2=3$, а все числа в четвертом столбце делятся на $M_4=15$.

Итак, *число 2^n-1 будет простым только при условии, что n — простое.*

Но для любого ли простого p число M_p будет простым? Надежда на положительный ответ рушится очень быстро: уже число $M_{11}=2047=23\cdot 89$ является составным.

Сам Мерсенн указал все простые значения n, не превосходящие 257, для которых, по его мнению, числа $M_n=2^n-1$ будут простыми. Однако Мерсенн не дал доказательства; впоследствии выяснилось, что его предсказание было частично ошибочным.

Поисками чисел Мерсенна занимался и Леонард Эйлер, член Петербургской Академии наук, один из величайших математиков Нового времени. В 1750 году он обнаружил десятое по счету число Мерсенна; это $M_{31}=2\,147\,483\,647$.

Если раньше поиск чисел Мерсенна велся «кустарными» методами, то в 20-м веке в работу включились ЭВМ, считающие с огромной скоростью. В 1952 году было найдено сразу пять новых чисел Мерсенна: M_{521}, M_{607}, M_{1279}, M_{2203} и M_{2281}; они являются соответственно тринадцатым — семнадцатым числами Мерсенна. Следующие шесть чисел Мерсенна были найдены в период с 1958 года по 1963 год. Наконец, в 1971 году было найдено 24-е число Мерсенна M_{19937}, в 1978 году — 25-е число Мерсенна M_{21701}, в 1979 году — 26-е и 27-е числа Мерсенна M_{23209} и M_{44497}. Последнее известное нам число Мерсенна найдено в 1983 году: это M_{86243}; но пока неизвестно, является ли оно 28-м по счету числом Мерсенна.

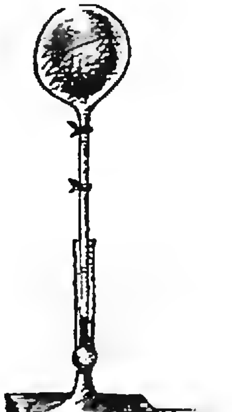
И в заключение объясним интерес к числам Мерсенна. Дело в том, что они связаны с так называемыми *совершенными числами* (которыми и занимались древние греки) — числами, равными сумме всех своих делителей, отличных, конечно, от самого числа (например, $6=1+2+3$, $28=1+2+4+7+14$, $496=1+2+4+8+16+31+62+124+248$ — первые три совершенных числа). Еще Евклид доказал (докажите и вы!), что *если число 2^n-1 простое, то число $2^{n-1}(2^n-1)$ — совершенное.* Леонард Эйлер доказал, что все четные совершенные числа имеют вид $2^{n-1}(2^n-1)$, где 2^n-1 — число Мерсенна. А нечетные совершенные числа? А нечетных совершенных чисел пока никто не нашел, и никто еще пока не доказал, что таких чисел нет.

По материалам *Ю. В. Королева* и *О. М. Мамедова*

Д. Фаренгейт и его термометры

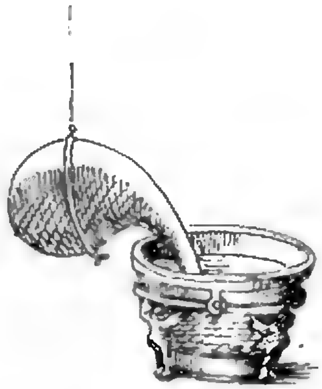
В этом году исполнилось 300 лет со дня рождения Даниеля Габриеля Фаренгейта (1686—1736) — создателя первых термометров, которыми можно было пользоваться как стандартными и надежными лабораторными приборами.

Считается, что идея использования для температурных измерений известного еще с античных времен свойства теплового расширения воздуха и жидкостей принадлежит Г. Галилею. В конце XVI века он изобрел основанный на этом принципе простой прибор — термоскоп, впервые позволивший в какой-то мере объективно судить об изменениях температуры. Термоскоп Галилея представляет собой небольшую стеклянную колбу, наполненную воздухом, с очень узким и длинным горлышком, опущенным в сосуд с водой. По мере нагревания или остывания колбы воздух в ней расширялся или сжимался и уровень воды соответственно понижался или повышался.

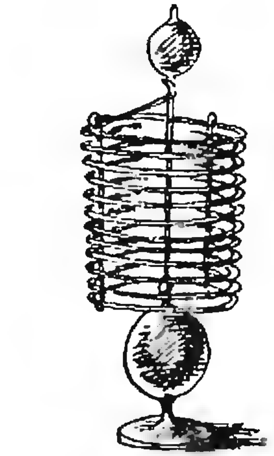


В течение следующего, XVII столетия многие ученые занимались усовершенствованием этого прибора. Так, в 1615 году его снабдили измерительной шкалой и с 1628 года все чаще стали называть уже не термоскопом, а термометром. В 1630 году на смену воздушным пришли более удобные жидкостные, прежде всего водяные, термометры. Десятилетием спустя их начали запаивать, чтобы на показания не влияли колебания атмосферного давления. С конца 50-х годов вслед за учеными из флорентийской «Академии опыта» в качестве термометрической жидкости стали чаще всего использовать винный спирт, не замерзающий при самых сильных морозах и обладающий небольшой вязкостью и сравнительно высоким коэффициентом теплового расширения.

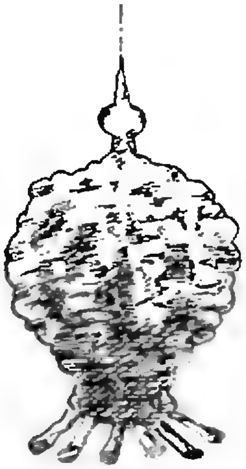
Но, несмотря на то, что конструктивные принципы в основном определились, термометры, изготовлявшиеся в то время, были совершенно непригодны для точных и систематических температурных измерений. И прежде всего потому, что не существовало никакого соответствия между их показаниями — каждый из них, по существу, показывал «свою» температуру. Да и могло ли быть иначе, если градуировка термометров производилась фактически произвольным образом — в разметке измерительных шкал царил полный разнобой, а за начало отсчета принимались, например, самые низкие зимние температуры во Флоренции или Магдебурге, температура размягчения сливочного масла или температурный уровень глубоких пещер.



Как избавиться от произвола в температурных измерениях, как сделать так, чтобы различные термометры давали «согласные» показания? По мере накопления опыта работы с термометрами становилось все более очевидным, что за начало температурной шкалы следует принимать какую-то «постоянную» (и легко воспроизводимую) температуру, например температуру тела здорового человека, точку замерзания или кипения воды. Эту идею выдвигали и с большим или меньшим успехом реализовывали в своих термометрах Х. Гюйгенс, Р. Гук, И. Ньютон и другие ученые. Начиная с 80-х годов XVII века все большую привлекательность приобретала идея построения температурной шкалы на основе двух «постоянных» точек (при таком способе отпадала необходимость в очень затруднительной операции определения объемов резервуара и капилляра у каждого экземпляра термометра).

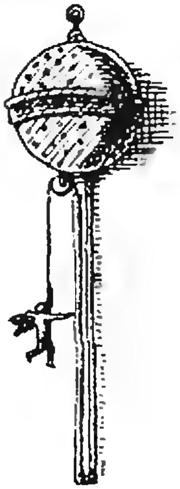


Так, в 1701 году И. Ньютон построил термометр (с льняным маслом в качестве рабочей жидкости), на шкалу которого нанес 12 равноотстоящих делений, причем температуре замерзания воды соответствовало нулевое деление, а нормальной температуре человеческого тела — деление «12». В это же время начал изготовлять свои спиртовые термометры датский астроном О. Рёмер. За «постоянные» точки температурной шкалы он принимал температуры замерзания и кипения воды. В 1708 году Рёмера посетил Фаренгейт, которого датчанин во всех деталях ознакомил со своим способом градуировки термометров. По-видимому, Фаренгейт сразу же осознал, что этот способ содержит в себе решение давно назревшей задачи создания стандартных термометров, дававших «согласные» показания (в одинаковых условиях они показывали одинаковую температуру). Уже через пару лет он сумел наладить производство таких приборов, и они быстро завоевали признание в европейских лабораториях. Учеными, свыкшимися с разнобоем в показаниях старых термометров, термометры Фаренгейта воспринимались как своего рода чудо. При этом нужно сказать, что Фаренгейт отнюдь не копировал рёмеровские термометры — он много работал над усовершенствованием их конструкций, изыскивал наиболее подходящие сорта стекла и, наконец, модифицировал шкалу, сделав ее значительно более удобной. Температурная шкала Фаренгейта до настоящего времени применяется в англоязычных странах. Она устроена так: интервал между точками таяния льда и кипения воды делится на 180 частей, причем первой точке присваивается значение 32, а второй 212 °F (градусов по шкале Фаренгейта).



Важнейшей заслугой Фаренгейта является также то, что он первый (в 1717 году) начал изготовлять ртутные термометры. Нужно сказать, что эту идею еще за полвека до него рассматривали флорентийские академики. Но тогда ртуть, из-за ее низкого коэффициента теплового расширения (раз в шесть меньше, чем у спирта), сочли малоперспективной. Фаренгейт пришел к заключению, что этот недостаток ртути с избытком компенсируется легкостью ее получения и сохранения в чистом виде, благодаря чему без затруднений выполняется требование тождественности рабочей жидкости, заполняющей различные экземпляры термометра. (Спирт в этом отношении менее удобен, так как, интенсивно поглощая воду, существенно изменяет коэффициент теплового расширения.)

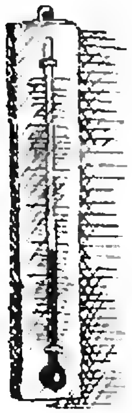
О жизни Фаренгейта известно немного, его портрет до нас не дошел. Родился он в Данциге (ныне Гданьск) в купеческой семье, получил неплохое начальное образование. В 15-летнем возрасте он неожиданно лишился обоих родителей. «Отцы» города решили, что мальчик должен пойти по стопам отца, и в 1702 году послали его в Амстердам обучаться купеческому делу. Профессию он успешно освоил, но интересы его все более склонялись к естественным наукам и особенно к конструированию точных научных приборов. По делам службы Фаренгейт часто выезжал из Амстердама в другие города Голландии и за границу, в том числе и в Россию, и всякий раз он старался не упустить возможности пополнить свои познания в технике и науке у ведущих мастеров — приборостроителей и ученых Европы. Так произошла упоминавшаяся выше встреча Фаренгейта с Рёмером, так же установились научные контакты со знаменитыми в те времена голландскими учеными — медиком Г. Бургаве и физиками В. Сгравесандом и П. ван Мусхенбруком, с будущим великим шведским естествоиспытателем К. Линнеем.



Как мастер-профессионал Фаренгейт в 1710—1712 годах начал изготовлять прецизионную (очень точную) аппаратуру для физических, химических и астрономических исследований — термометры, барометры, ареометры, оптические инструменты, устройства точной механики. Спрос на изделия Фаренгейта возрастал, и в 1717 году он основал в Амстердаме специальную фирму по производству точных научных приборов, и в частности ртутных термометров различного назначения, которые были вне конкуренции. Небезынтересно, что в 1721 году комплект фаренгейтовских термометров заказал Петр I. В 1724 году Фаренгейт был избран членом Лондонского Королевского общества, президентом которого в это время был И. Ньютон.

Помимо изготовления приборов, Фаренгейт много работал и как физик-экспериментатор. Он обнаружил зависимость температуры кипения жидкостей от давления, открыл явление переохлаждения воды, исследовал температурные зависимости плотности и коэффициента линейного теплового расширения различных материалов. В течение ряда лет он читал амстердамским студентам лекции по экспериментальной физике.

Конечно, Фаренгейта нельзя считать изобретателем термометра, да и он сам никогда не скрывал, сколь многим он обязан Рёмеру и другим своим предшественникам. Но неоспоримой заслугой Фаренгейта является введение в широкое употребление стандартного термометра, чем было положено начало научной термометрии, впервые позволившей осознать важнейшее различие между понятиями теплоты и температуры (в отношении которых ранее царила полная неразбериха).



Б. Е. Явелов

задачник кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 декабря 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10—86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1006, М1007» или «Ф1018». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию, имя и домашний адрес просим писать печатными буквами.

Задачи Ф1018—Ф1022 предлагались на заключительном этапе XX Всесоюзной олимпиады по физике.

Задачи

М1006—М1010; Ф1018—Ф1022

М1006. Через две вершины треугольника проведены две прямые, разбивающие его на три треугольника и четырехугольник.

а) Могут ли площади всех четырех частей быть равными?

б) Какие три из этих частей могут иметь равные площади? Во сколько раз отличается от них площадь четвертой части?

Г. А. Гальперин, А. П. Савин

М1007. Докажите, что треугольники с длинами сторон a, b, c и a_1, b_1, c_1 подобны, если и только если

$$\sqrt{aa_1}+\sqrt{bb_1}+\sqrt{cc_1}=\sqrt{(a_1+b_1+c_1)(a+b+c)}.$$

В. П. Чичин

М1008. Лестница состоит из $2n+1$ ступеней. На n нижних ступенях лежит по одному камню. Двое по очереди таскают камни. Первый может переложить любой камень вверх на первую свободную ступеньку, а второй — переложить камень на одну ступеньку вниз, если она свободна. Цель первого — положить камень на верхнюю ступеньку. Может ли второй ему помешать?

С. Л. Елисеев

М1009. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает прямые BC и CD в точках K и L соответственно. Докажите, что центр окружности, проведенной через точки C, K и L, лежит на окружности, проведенной через точки B, C и D.

И. Ф. Шарыгин

М1010. Последовательность r_1, r_2, r_3, ... определяется условиями

$$r_1=2,\ r_{n+1}=r_1r_2\ldots r_n+1,$$

так что $r_2=3$, $r_3=7$, $r_4=43$, ...

а) Докажите, что при любом n

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_n}<1.$$

б)* Пусть n натуральных чисел таковы, что сумма их обратных величин меньше 1. Докажите, что эта сумма не больше

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_n}.$$

Известные нам доказательства опираются на такую лемму, которую мы предлагаем доказать читателям.

в)* Среди всех наборов $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ из n вещественных чисел, удовлетворяющих условиям:

$$\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\ldots\geqslant\alpha_n\geqslant 0,\quad \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1,$$
$$\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\leqslant\alpha_{k+1}+\alpha_{k+2}+\ldots+\alpha_n\ (k=1, 2, \ldots, n-1),$$

выбран тот, для которого значение a_n наименьшее. Тогда

$$a_k = 1/r_k \text{ для } k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad a_n = 1/(r_n - 1).$$

О. Т. Ижболдин, Л. Д. Курляндчик

Ф1018. Катер, привязанный у берега большого озера (береговая линия — прямая), неожиданно отвязался, и ветер погнал его с постоянной скоростью $v_0 = 2{,}5$ км/ч под углом $\alpha = 15^\circ$ к берегу. Сможете ли вы догнать катер, если ваша скорость на берегу $v_1 = 4$ км/ч, в воде — $v_2 = 2$ км/ч? При какой скорости катера это вообще возможно?

С. С. Кротов

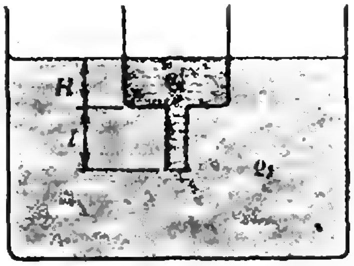


Рис. 1.

Ф1019. В большой сосуд с жидкостью, плотность которой ρ_1, опущен маленький цилиндрический сосуд с площадью основания S, в дно которого вставлена трубочка длиной l (рис. 1); стенки сосудов жестко скреплены между собой. В маленький сосуд наливают подкрашенную жидкость плотностью ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$) до высоты H так, что уровни жидкостей в большом и малом сосудах совпадают. В некоторый момент времени отверстие в трубочке открывают. Тяжелая жидкость начинает вытекать в большой сосуд, через некоторое время легкая жидкость из большого сосуда втекает в маленький сосуд; затем процесс повторяется. Какая масса тяжелой жидкости вытечет из маленького сосуда в первый раз? Какая масса тяжелой жидкости будет вытекать каждый раз в дальнейшем? Какая масса легкой жидкости будет втекать каждый раз в маленький сосуд? Считать, что жидкости не смешиваются; поверхностным натяжением пренебречь.

В. Е. Скороваров

Таблица

t, °C	$p_н \cdot 10^{-5}$, Па
100	1
120	2
133	3
152	5
160	10

Ф1020. Подвижный поршень делит цилиндр на две одинаковые части объемом $V_0 = 10^{-3}$ м^3. В одной части находится сухой воздух, в другой — водяной пар и $m = 4$ г воды. При медленном нагревании цилиндра поршень приходит в движение. После смещения поршня на 1/4 длины цилиндра движение прекратилось. Какая масса водяных паров находилась в сосуде до нагревания? Какова масса воздуха, находящегося в сосуде, и его начальная температура? При какой температуре поршень перестал двигаться?

Зависимость давления насыщенных паров воды от температуры приведена в таблице.

А. И. Буздин

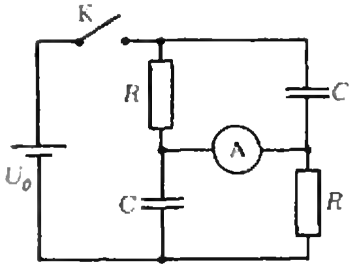


Рис. 2.

Ф1021. В цепи, показанной на рисунке 2, $R = 100$ Ом, $C = 10$ мкФ, $U_0 = 10$ В, внутреннее сопротивление батареи и сопротивление амперметра пренебрежимо малы. Ключ К периодически замыкают на время $\tau_1 = 1 \cdot 10^{-4}$ с и размыкают на время $\tau_2 = 20 \cdot 10^{-4}$ с. При таком режиме переключений стрелка амперметра практически не дрожит. Какой ток показывает амперметр?

А. Р. Зильберман

Ф1022. «Черный ящик» содержит катушку, резистор и конденсатор и имеет три вывода. При его исследовании были получены следующие результаты.

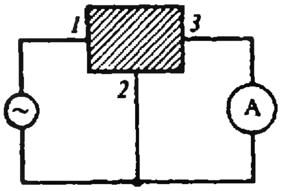


Рис. 3.

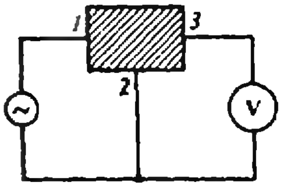


Рис. 4.

В схеме, показанной на рисунке 3, амперметр показал $I_1 = 0{,}1$ А при частоте генератора $\nu_1 = 1000$ Гц; ток через амперметр отставал по фазе от входного напряжения на $\Delta\varphi_1 = \pi/6$. Когда частоту генератора уменьшили в 100 раз, ток возрос менее чем в 2 раза. Частоту генератора вернули к прежнему значению и вместо амперметра в цепь включили вольтметр (рис. 4). Вольтметр показал $U_1 = 20$ В, а сдвиг фаз между напряжением на вольтметре ($u_{\text{в}}$) и входным напряжением ($u_{\text{вх}}$) опять составил $\Delta\varphi_1 = \pi/6$.

Найдите по этим данным параметры элементов «черного ящика». Во сколько раз нужно изменить частоту генератора, чтобы в схеме с вольтметром (см. рис. 4) сдвиг фаз между $u_{\text{в}}$ и $u_{\text{вх}}$ составил $\Delta\varphi_2 = \pi/2$?

Измерительные приборы считать идеальными. Внутреннее сопротивление генератора пренебрежимо мало.

А. Р. Зильберман

Problems

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than December 15th, 1986, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the

M1006—M1010; P1018—P1022

M1006. Two lines, drawn through two vertices of a triangle, divide it into two triangles and a quadrilateral.
a) Can the areas of the four parts all be equal?
b) What three of these parts can have equal areas? How much will the area of the fourth part differ from them?

G. A. Galperin, A. P. Savin

M1007. Prove that two triangles with sides a, b, c and a_1, b_1, c_1 are similar if and only if

$$\sqrt{aa_1} + \sqrt{bb_1} + \sqrt{cc_1} = \sqrt{(a_1 + b_1 + c_1)(a + b + c)}\,.$$

V. P. Chichin

M1008. There are $2n+1$ steps in a staircase. There is one rock on each of the n lowest steps. Two persons take turns carrying rocks. The first may place any rock on the lowest free step, the second may move a rock one step down on a free step. The aim of the first is to put a rock on the top step. Can the second stop him?

S. L. Eliseev

M1009. The bissector of angle A of parallelogram $ABCD$ intersects lines BC and CD at points K and L respectively. Prove that the centre of the circle passing through points C, K and L lies on the circle passing through points B, C and D.

I. F. Sharygin

M1010. The sequence $r_1, r_2, r_3, \ldots$ is determined by the conditions

$$r_1 = 2, \ r_{n+1} = r_1 r_2 \ldots r_n + 1,$$

so that $r_2 = 3$, $r_3 = 7$, $r_4 = 43, \ldots$
a) Prove that for any n

$$1/r_1 + 1/r_2 + \ldots + 1/r_n < 1.$$

b) Suppose that the sum of the inverses of n natural numbers is less than 1. Prove that this sum is then no greater than

$$1/r_1 + 1/r_2 + \ldots + 1/r_n.$$

The proofs that we have are all based on the following lemma, which we propose to our readers for proof.
c)* Among all the sequences $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ of n real numbers

Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

satisfying the conditions

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \dots \geqslant \alpha_n \geqslant 0,$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1,$$
$$\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k \leqslant \alpha_{k+1} + \alpha_{k+2} + \dots + a_n \ (k = 1,2,\dots,n-1),$$

choose the one for which the value of α_n is minimal. Then

$$\alpha_k = 1/r_k \text{ for } k = 1,2,\dots,n-1, \ \alpha_n = 1/(r_n - 1).$$

O. T. Izboldin, L. D. Kurlyanchik

P1018. A motorboat, tied to the shore of a large lake (whose shoreline is straight), suddenly comes loose, and is chased by the wind with constant velocity $v_0=2{,}5$ km/h, forming an angle of $\alpha=15°$ with the shore. Will you be able to catch the boat if your velocity on shore is 4 km/h and 2 km/h in the water? For what velocities of the motorboat is this possible?

S. S. Krotov

P1019. A small cylindrical vessel of base area S with a thin tube of length l in its bottom is placed in a large vessel filled with a liquid of density ϱ_1 (see figure Рис. 1); the walls of the vessels are rigidly fixed together. The little vessel is filled with a tainted liquid of density ϱ_2 $(\varrho_2>\varrho_1)$ to the level H, so that the level of liquids in the two vessels is the same. At some moment the tube is opened. The heavy liquid begins to flow out into the big vessel, after a while the light liquid starts flowing into the small vessel from the big one; the process repeats itself. What mass of heavy liquid will flow out of the little vessel the first time? What mass of heavy liquid will flow out each of the subsequent times? What mass of light liquid will flow into the small vessel each time? It may be assumed that the liquids don't mix and surface tension is negligible.

V. E. Skorovarov

P1020. A mobile piston divides the cylinder into two identical parts of volume $V_0=10^{-3}$ m^3. One part contains dry air, the other water vapors and $m=4$ g of water. When the cylinder is heated slowly the piston begins to move. After the piston had moved by one fourth of the length of the cylinder, it stopped. What was the mass of air contained in the cylinder and its initial temperature? At what temperature did the piston stop moving? The dependence of the pressure of saturated vapors on temperature is given in the table on p. 29.

A. I. Buzdin

P1021. In the circuit shown on figure Рис. 2, $R=100$ Ohms, $C=10$mkF, $U_0=10$V, the inner resistance of the source and the resistance of the ammeter are negligible. The switch K is periodically turned on for $\tau_1=1\cdot10^{-3}$ s and switched off for $\tau_2=20\cdot10^{-3}$ s. In this working rithm the ammeter indicator is practically motionless. What is the current in the ammeter?

A. R. Zilberman

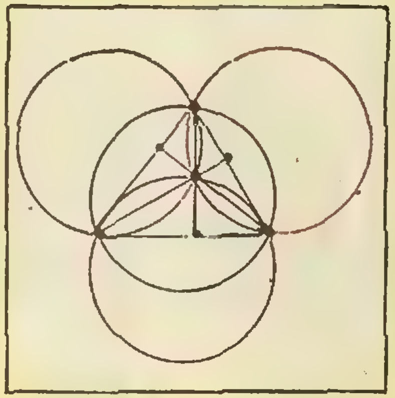
P1022. A "black box" contains a coil, a resistor and a capacitor, and has three outputs. The following results were obtained in its study. For the scheme shown on figure Рис. 3, the ammeter reading was $I_1=0.1$ A with generator oscillation frequency $\nu_1=1000$ Hz; the current lagged in its phase from the input voltage by $\Delta\varphi_1=\pi/6$. When the generator's frequency was decreased 100-fold, the current increase was less than 2-fold. The frequency of the generator was then returned to the previous value and a voltmeter put in place of the ammeter into the circuit (Рис. 4). The voltmeter showed $U_1=20$ V, and the phase shift between the voltage on the voltmeter u_v and the input voltage u_{in} again was $\Delta\varphi_1=\pi/6$. Use this data to find the parameters of the "black box". How must the generator frequency be changed in order to obtain a phase shift of $\Delta\varphi_2=\pi/2$ between u_v and u_{in} in the voltmeter circuit? The measuring devices are assumed ideal, the inner resistance of the generator — negligible.

A. R. Zilberman

КАЛЕЙДОСКОП

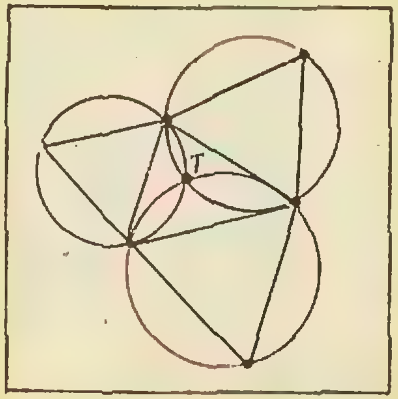
Замечательные точки и линии

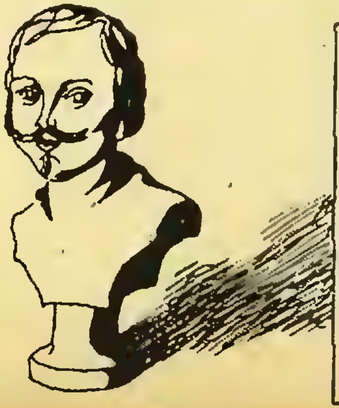
В курсе геометрии вы знакомитесь с некоторыми замечательными точками в треугольнике: с точками пересечения высот, медиан, биссектрис и серединных перпендикуляров к сторонам. Эти точки замечательны не только тем, что в них пересекаются сразу три рассматриваемые прямые. О других свойствах этих точек, а также о других замечательных линиях и точках мы расскажем в нашем «Калейдоскопе».



Все знают, что высоты треугольника пересекаются в одной точке — *ортоцентре* треугольника. Но мало кто знает, что если окружность, описанную вокруг треугольника, зеркально отразить относительно его сторон, то полученные три окружности пересекутся в ортоцентре этого треугольника.

Эванжелиста Торричелли известен не только как физик, но и как математик. Его именем помимо «торричеллевой пустоты» названа одна из точек в треугольнике. Получается она так. Сначала на сторонах данного треугольника строятся равносторонние треугольники, потом вокруг каждого из них описывается окружность (она называется *окружностью Торричелли*). Оказывается, окружности Торричелли пересекаются в одной точке. Эту точку и назвали *точкой Торричелли*.

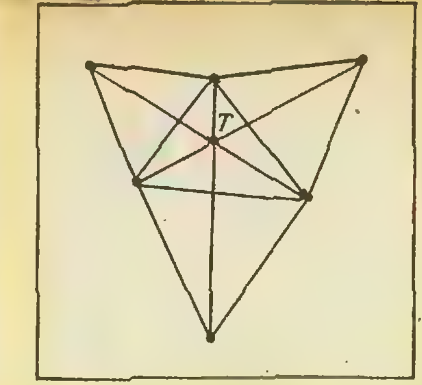




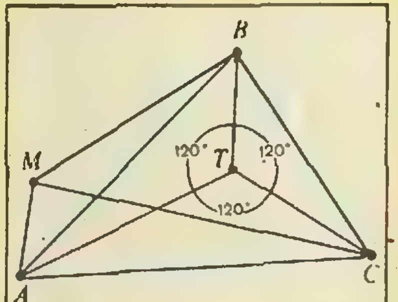
Э. Торричелли (1608— 1647)

П. Ферма (1601—1665)

Пьер Ферма обнаружил, что если удаленные вершины равносторонних треугольников, построенных на сторонах произвольного треугольника, соединить с противоположными им вершинами исходного треугольника, то эти три прямые пересекаются в одной точке — точке Торричелли, поэтому ее называют и *точкой Ферма*.

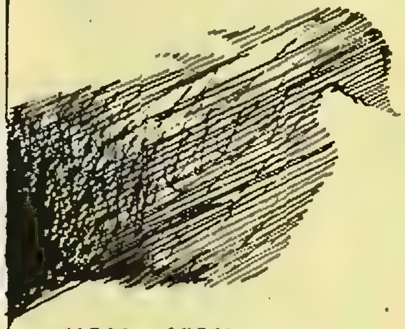


Довольно очевидно, что отрезки, соединяющие точку Торричелли с вершинами остроугольного треугольника, образуют друг с другом углы в 120°. Но удивительно, что сумма длин этих отрезков, то есть сумма расстояний точки Торричелли от вершин треугольника, меньше, чем такая же сумма от любой другой точки плоскости.



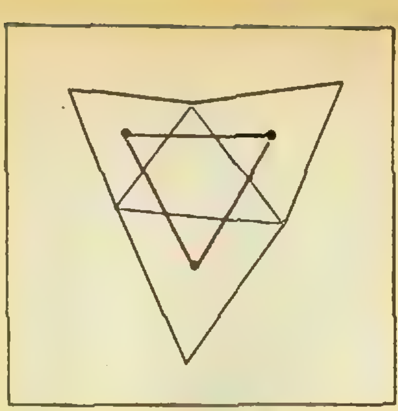
$$AT+BT+CT< <AM+BM+CM$$

Наполеон Бонапарт



(1769—1821)

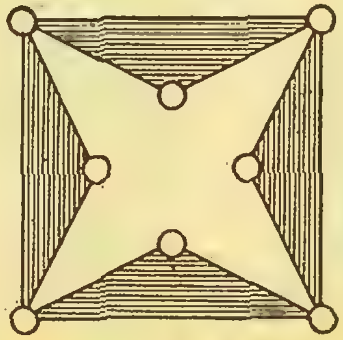
Любопытно, что центры равносторонних треугольников, рассмотренных при построении точки Торричелли, сами являются вершинами равностороннего треугольника. Это утверждение приписывают Наполеону.



Головоломки

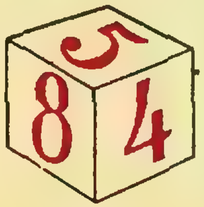
Треугольники и квадрат

Разместите в кружочках рисунка числа от 1 до 8 так, чтобы сумма чисел в вершинах каждого из заштрихованных треугольников равнялась сумме чисел в вершинах квадрата.



Цифры на кубике

На гранях кубика написаны шесть различных цифр. Сумма цифр на противоположных гранях одна и та же для каждой пары параллельных граней. Каковы остальные три цифры, если три видны на рисунке?

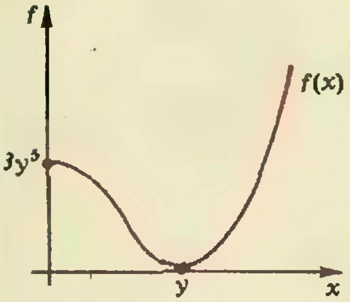


Решения задач

М986—М990; Ф998—Ф1002

М986. *Докажите, что для любых положительных чисел a и b выполняется неравенство*

$$2\sqrt{a}+3\sqrt[3]{b}\geqslant 5\sqrt[5]{ab}.$$



Положим $a=x^{10}$, $b=y^{15}$ и рассмотрим функцию

$$f(x)=2x^5+3y^5-5x^2y^3,\ x\geqslant 0$$

(при фиксированном $y>0$). Надо доказать, что $f(x)\geqslant 0$. Производная

$$f'(x)=10x^4-10xy^3=10x(x^3-y^3)$$

обращается в 0 при $x=y$, отрицательна при $0<x<y$ и положительна при $x>y$. Таким образом (см. рисунок), при $x=y$ функция $f(x)$ принимает минимальное значение, и при всех $x>0$

$$f(x)\geqslant f(y)=2y^5+3y^5-5y^5=0.$$

Другие доказательства, не использующие математического анализа, можно получить, разложив $f(x)$ на множители:

$$f(x)=(x-y)^2(2x^3+4x^2y+6xy^2+3y^3)$$

или воспользовавшись неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим для пяти чисел x^5, x^5, y^5, y^5, y^5:

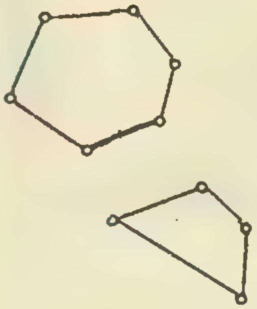
$$\frac{2x^5+3y^5}{5}\geqslant\sqrt[5]{x^{5\cdot 2}y^{5\cdot 3}}=x^2y^3.$$

(Подробное обсуждение этой задачи содержится в новом издании книги «Заочные математические олимпиады», М.: — «Наука», 1986, задача 4-16.)

Н. Б. Васильев

◆

М987. *В турнире участвуют $2m$ команд. В первом туре встретились некоторые m пар команд, во втором — другие m пар команд. Докажите, что после этого можно выбрать m команд, никакие две из которых еще не играли между собой.*



Изобразим наши $2m$ команд точками на плоскости. Пары команд, встречавшихся в первом туре, соединим красными отрезками, во втором — голубыми. Тогда из каждой точки будет выходить один красный и один голубой отрезок. Любая команда принадлежит некоторому «циклу» — замкнутой ломаной, состоящей из чередующихся голубых и красных отрезков, так что все $2m$ точек и $2m$ соединяющих их отрезков образуют один или несколько таких циклов (см. рисунок). Поскольку цвета чередуются, число команд в каждом цикле четно. Выбрав в каждом цикле половину команд, стоящих через одну, получим набор m команд, которые еще не играли друг с другом. Из решения видно, что такой набор можно выбрать 2^c разными способами, где c — число циклов, и что более чем m команд, не игравших друг с другом, выбрать нельзя*).

М. Бона

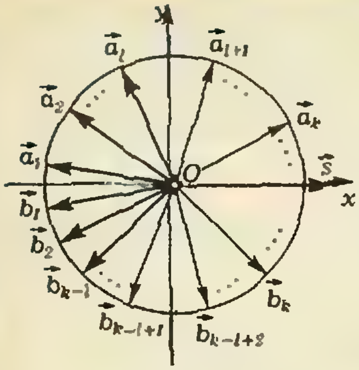
◆

М988. *Из точки O плоскости проведено n векторов единичной длины. Докажите, что если для некоторого $k<n/2$ по обе стороны от каждой прямой, проходящей через O, лежит не менее k векторов, то длина суммы всех n векторов не больше $n-2k$.*

Пусть $\vec{s}$ — сумма данных векторов; можно считать $\vec{s}\neq\vec{0}$, иначе все очевидно. Направим положительную полуось Ox системы координат Oxy вдоль вектора $\vec{s}$. Двигаясь по часовой стрелке от

---

*) Вот еще одна задача с похожей идеей решения: доказать, что если каждый из m участников кружка решил две из m предложенных задач, то можно организовать разбор задач так, чтобы каждый рассказал одну решенную им задачу (см. задачу 5-42 в книге, упомянутой в решении М986).



отрицательной полуоси Ox, занумеруем данные векторы, лежащие в верхней полуплоскости $y \geqslant 0$: $\vec a_1$, $\vec a_2, \ldots$; аналогично, двигаясь против часовой стрелки, занумеруем остальные векторы (в нижней полуплоскости): $\vec b_1, \vec b_2, \ldots$ (см. рисунок). По условию по крайней мере k векторов лежат в левой полуплоскости $x \leqslant 0$; пусть это будут $\vec a_1, \vec a_2, \ldots, \vec a_l$ и $\vec b_1, \vec b_2, \ldots, \vec b_{k-l}, \ldots$ Условие «по обе стороны от каждой прямой лежит не менее k векторов» эквивалентно тому, что *каждый из n векторов вместе с k следующими за ним против часовой стрелки (или по часовой стрелке) лежат в одной полуплоскости. Отсюда следует, что k попарных сумм векторов:* $\vec a_l + \vec b_{k-l+1}$ (то есть сумма вектора a_l и k-го от него против часовой стрелки, $\vec a_{l-1} + \vec b_{k-l+2}, \ldots, \vec a_1 + \vec b_k$, а также $\vec b_{k-l} + \vec a_{l+1}$, $\vec b_{k-1-l} + \vec a_{l+2}, \ldots, \vec b_1 + \vec a_k$ — все дают отрицательные проекции на ось Ox. (Действительно, например, сумма $\vec v = \vec a_1 + \vec b_k$ направлена по биссектрисе угла, образованного векторами $\vec a_1$ и $\vec b_k$, а отрицательная полуось Ox лежит внутри *этого угла и потому составляет острый угол с $\vec v$.*) Проекции каждого из остальных $n-2k$ векторов не больше 1. Поэтому проекция суммы всех векторов, а она равна длине $\vec s$, не больше $n-2k$.

Заметим, что в условии задачи вектор, лежащий на прямой, можно считать расположенным по любую сторону от нее.

Интересно было бы получить утверждение, аналогичное нашей задаче, для векторов в пространстве.

П. А. Калугин, В. В. Прасолов

◆

М989. *Найдите все такие натуральные числа a, для которых число $a-1$ является суммой а) двух; б)* трех делителей числа a (необязательно различных; в число делителей a включается 1); в)* докажите, что для любого n существует лишь конечное число натуральных a таких, что $a-1$ является суммой n делителей числа a.*

Пусть $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — такие делители числа a, что

$$a-1=\frac{a}{d_1}+\frac{a}{d_2}+\ldots+\frac{a}{d_n}.$$

Тогда

$$1-\frac{1}{a}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\ldots+\frac{1}{d_n}<1. \qquad (1)$$

Идея решения задачи заключается в том, чтобы для каждого $n=2, 3, \ldots$ в множестве X_n чисел, представимых суммой n чисел, обратных натуральным, указать наибольшее число μ_n, строго меньшее 1. Тогда из (1) будет следовать оценка для a:

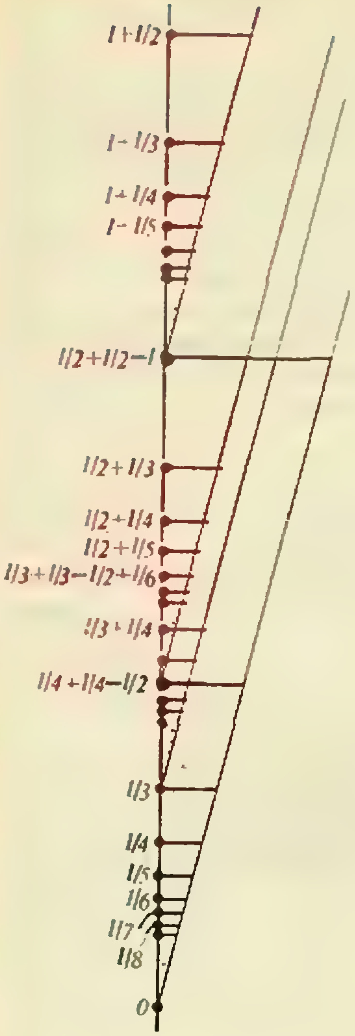
$$1-\frac{1}{a} \leqslant \mu_n \Rightarrow a \leqslant \frac{1}{1-\mu_n}. \qquad (2)$$

Заметим, что поскольку множество X_n бесконечно, даже существование такого μ_n для каждого n нуждается в доказательстве: наглядное объяснение этого доказательства, которое мы приведем в пункте в), состоит в том, что X_n *получается* прибавлением к каждому числу из X_{n-1} всех чисел вида $1/k$ ($k=1, 2, \ldots$) и потому точки из X_n в бесконечном количестве накапливаются лишь справа от каждой точки из X_{n-1} и не могут скопиться слева от какой-либо точки (в частности, от точки 1).

а) Ответ: $a=3, 4, 6$. Если

$$x=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}<1, \quad k_1 \leqslant k_2,$$

то $k_1 \geqslant 2$, $k_2 \geqslant 3$ (иначе $x \geqslant 1/2+1/2=1$), поэтому $x \leqslant \mu_2 = 1/2+1/3=5/6$ и из (2) следует, что $a \leqslant 6$. Перебирая все такие a, видим, что число $a-1$



можно представить в виде суммы двух делителей a лишь при $a=3$, 4 и 6 (в этих случаях $a-1$ равно $2=1+1$, $3=2+1$, $5=3+2$; представить 4 в виде суммы двух делителей $a=5$ нельзя).

б) Пусть

$$x=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3}<1, \quad k_1\leqslant k_2\leqslant k_3.$$

Если $k_1\geqslant 3$, то $x\leqslant 1/3+1/3+1/4=11/12$; если $k_1=2$, $k_2\geqslant 4$, то $x\leqslant 1/2+1/4+1/5=19/20$; если $k_1=2$, $k_2=3$, то $k_3\geqslant 7$ и

$$x\leqslant 1/2+1/3+1/7=41/42.$$

Таким образом, $\mu_3=41/42$ и из (2) следует, что $a\leqslant 42$. Перебирая эти a, можно выбрать те, для которых $a-1$ представляется в виде суммы трех делителей $a-1$. Ответ: $a=4$, 6, 8, 10, 12, 18, 20, 24 и 42.

в) Докажем, что для любого $c>0$ в множестве чисел, принадлежащих X_n и меньших c, есть наибольшее число $\mu_n(c)$. (Для решения задачи достаточно доказать это для $c=1$, но более общее утверждение легче доказать индукцией по n.) Напомним, что X_n — бесконечное множество чисел вида

$$x=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\ldots+\frac{1}{k_n}, \tag{3}$$

где k_1, k_2, ..., k_n — натуральные числа.

Для $n=1$ наше утверждение очевидно: $\mu_n(c)$ — это наибольшее число вида $1/k$, меньшее c, то есть $1/[c+1]$ (квадратные скобки означают целую часть числа). Пусть наше утверждение доказано для X_{n-1}; докажем его для X_n.

Выберем натуральное k такое, что $n/k<c$ (можно взять $k=[n/c]+1$). Тогда среди чисел x из X_n, меньших c, имеется число n/k (сумма n дробей $1/k$), а в представлении (3) любого числа x, такого, что $n/k<x<c$, хоть одна из дробей $1/k_i$ больше $1/k$, то есть $k_i\leqslant k-1$. При этом $x-1/k_i$ принадлежит X_{n-1} и наибольшее из таких x — а это и есть $\mu_n(c)$ — будет равно наибольшему из конечного набора чисел

$$\frac{n}{k},\ \mu_n\left(c-\frac{1}{k-1}\right)+\frac{1}{k-1},$$

$$\mu_n\left(c-\frac{1}{k-2}\right)+\frac{1}{k-2},\ \ldots,\ \mu_n\left(c-\frac{1}{l}\right)+\frac{1}{l}$$

(где l — наименьшее натуральное число, для которого $c-1/l>0$, то есть $l=[1/c]+1$).

Оказывается, можно для каждого $n=3$, 4,... указать наибольшее число a_n, для которого a_n-1 представляется в виде суммы n делителей a_n: довольно давно была сформулирована гипотеза о том, что $\mu_n(1)$ — ближайшее слева к 1 число вида (3) — равно сумме первых n дробей ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{43}+\frac{1}{1807}+\ldots,$$

в котором знаменатель каждой дроби на 1 больше произведения знаменателей всех предыдущих; из нее вытекает, что a_n — это произведение знаменателей первых n дробей (то есть $a_{n+1}=a_n^2-a_n$).

Н. Б. Васильев

М990. *В пространстве заданы три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, у которых эти три прямые:*

а) проходят по ребрам,

б) проходят по ребрам или диагоналям граней,

в) содержат 6 вершин параллелепипеда?

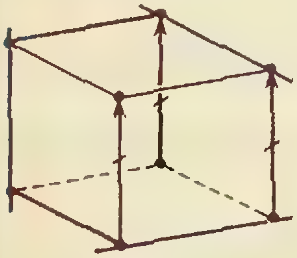


Рис. 1.

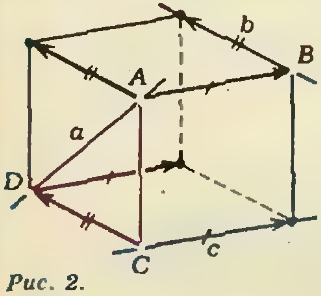


Рис. 2.

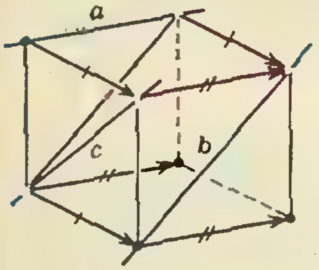


Рис. 3.

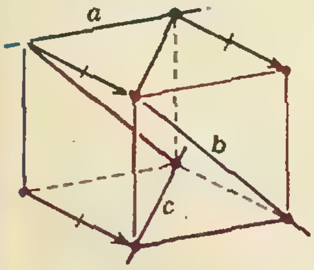


Рис. 4.

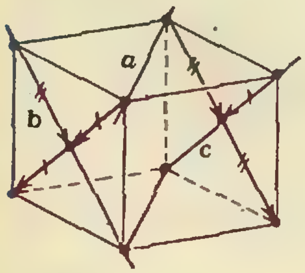


Рис. 5.

Заметим сначала, что *для любых трех попарно скрещивающихся прямых a, b и c, не параллельных одной плоскости, существует единственный отрезок с концами на a и b, параллельный c.*

Действительно, искомый отрезок должен лежать в плоскости α, содержащей a и параллельной c. Очевидно, такая плоскость существует (ее можно провести через a и любую прямую, пересекающую a и параллельную c), единственна и не параллельна b. Точка пересечения α и b — один из концов нашего отрезка. Проведя через него прямую, параллельную c, до пересечения с a, получим второй конец.

Такого рода отрезок нам придется проводить много раз; для краткости будем называть его *c-мостиком* между a и b или просто *c-мостиком*. На рисунках 1—9 данные прямые обозначены синим цветом, мостики — красным.

а) Ответ: 1. Ясно, что 3 мостика, определяемые данными прямыми, являются ребрами искомого параллелепипеда (рис. 1). Построив их, мы получим 6 вершин, после чего однозначно восстанавливаются и 2 последние вершины.

б) Ответ: 19. Перечислим сначала всевозможные наборы из трех попарно скрещивающихся ребер или диагоналей граней параллелепипеда. Они могут содержать:

1) 3 ребра (см. задачу а));

2) диагональ грани a, ребро b, параллельное этой грани, и ребро c, ее пересекающее (рис. 2);

3) ребро a, диагональ b грани, параллельной a, и диагональ c грани, пересекающей a (рис. 3);

4) ребро a и диагонали b и c двух граней, параллельных a (рис. 4);

5) 3 диагонали a, b и c граней, из которых 2 (скажем, b и c) лежат в параллельных гранях (рис. 5).

В каждом из этих случаев параллелепипед можно однозначно восстановить, если заданы прямые, содержащие отрезки a, b и c, и указано, какой именно прямой принадлежит каждый из этих отрезков; при этом в качестве таких прямых можно брать любые 3 прямые, удовлетворяющие условию задачи.

Как построить параллелепипед с помощью наших «мостиков», объясняют рисунки 2—5. Разберем подробнее только один случай, скажем 2). Построив c-мостик AB между a и b и b-мостик CD между c и a, получим 4 вершины параллелепипеда — концы A и D диагонали грани a и по одному концу — B и C — ребер b и c. Для построения остальных вершин достаточно отложить вектор $\overrightarrow{AB}$ от точек C и D и вектор $\overrightarrow{CD}$ от точек A и B. Построения в случаях 3) и 4) аналогичны, а в случае 5) концы наших мостиков дают 4 вершины и центры двух противоположных граней параллелепипеда, что позволяет легко найти остальные вершины.

В каждом из случаев 2)—5) надо еще указать, какой из отрезков a, b, c будет лежать на каждой из трех данных прямых. Такое «распределение ролей» можно осуществить 6 разными способами, причем, как видно из построения, в случаях 2) и 3) это дает по 6 разных параллелепипедов, а в случаях 4) и 5) — по 3 (поскольку построения не меняются при перестановке b и c). Суммируя число параллелепипедов по всем случаям, получим $1+6+6+3+3=19$.

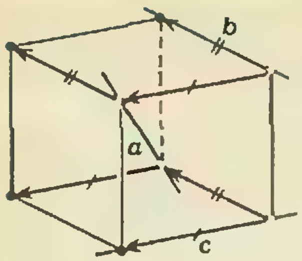


Рис. 6.

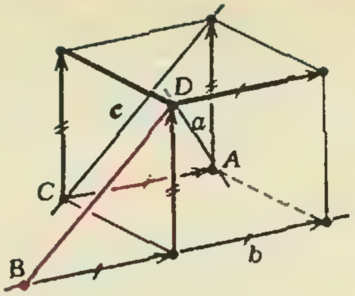


Рис. 7.

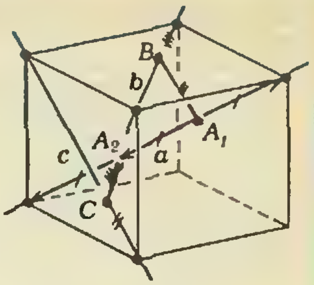


Рис. 8.

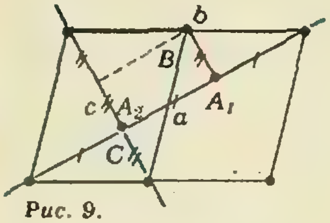


Рис. 9.

в) Ответ: 31. К вариантам, рассмотренным при решении задачи б), добавляются те, при которых

одна из прямых содержит диагональ a параллелепипеда, а 2 другие —

6) 2 ребра b и c (рис. 6),

7) ребро b и диагональ грани c (рис. 7),

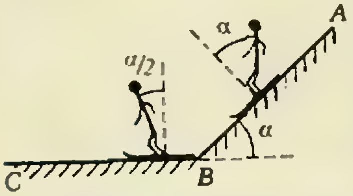
8) 2 диагонали граней b и c (рис. 8).

Построим b- и c-мостики. В случае 6) их концы являются вершинами параллелепипеда, и дальнейшее построение ясно из рисунка 6. В случае 7) b-мостик AC между a и c является ребром параллелепипеда; если BD — это c-мостик между b и a, то точка D (как и точки A, C) — вершина параллелепипеда, еще 2 вершины — это концы векторов, равных $\overrightarrow{CA}$, отложенных от D и B, остальные 3 вершины строятся очевидным образом (рис. 7). Несколько сложнее построение в последнем случае 8). Пусть A_1B и A_2C — c- и b-мостики между a и b, или соответственно a и c (рис. 8). Тогда точки A_1 и A_2 делят диагональ a параллелепипеда на 3 равные части, а точки B и C делят отрезки b и c в отношении 2:1, причем отрезки A_1B и A_2C в 3 раза короче диагоналей c и b соответственно. (Эти утверждения становятся очевидными, если взглянуть на проекцию параллелепипеда вдоль диагонали b — рис. 9 — и учесть, что при параллельной проекции отношения длин параллельных отрезков сохраняются.) Теперь, отложив от A_1 векторы $\overrightarrow{A_2A_1}$ и $2\overrightarrow{A_1A_2}$, мы найдем концы отрезка a; отложив от C векторы $\overrightarrow{BA_1}$ и $2A_1B$, найдем концы отрезка c и, аналогично, концы b, после чего остается построить по 6 вершинам 2 остальные.

Поскольку в случае 7) имеется 6 способов «распределить роли» между данными прямыми, а в случаях 6) и 8) — 3, общее число параллелепипедов равно $19+3+6+3=31$.

В. Н. Дубровский

Ф998. *Горнолыжник спускается с высокой горы с установившейся скоростью v. Гора образует угол α с горизонтом и плавно переходит в горизонтальный участок. Как должен наклоняться лыжник, чтобы не упасть в момент перехода? Считать, что переход происходит очень быстро. Масса лыжника равна M. Сопротивление воздуха не учитывать.*



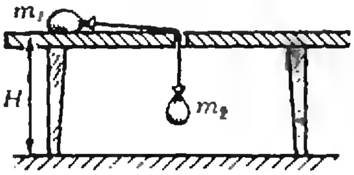
◆

Так как переход плавный, кинетическая энергия лыжника постоянна и его скорость v_1 сразу после перехода на горизонтальный участок равна (по модулю) v. Изменение импульса лыжника за время τ перехода равно $\Delta\vec{p}=M(\vec{v}_1-\vec{v})$ и направлено по биссектрисе угла ABC (см. рисунок).

Из закона изменения импульса, учитывая малое значение τ, имеем: $\Delta\vec{p}=\vec{f}\tau$, где $\vec{f}$ — сила, действующая на тело лыжника со стороны лыж (она также направлена по биссектрисе). Для равновесия лыжника необходимо, чтобы вектор этой силы проходил через центр масс лыжника. Из этого условия находим, что в момент перехода на горизонтальный участок лыжник должен наклониться вперед на угол $\alpha/2$ от того положения, которое он занимал при движении по склону.

А. Н. Семенов

Ф999. *По гладкой горизонтальной поверхности стола скользит мешок массой m_1, связанный жесткой невесомой веревкой с мешком массой m_2. Веревка, соединяющая мешки, проходит через небольшое отверстие в столе (см. рисунок). Длина веревки L, высота стола H, причем $H < L$. На какую высоту поднимется мешок m_2 после удара об пол, если в начальный момент вся веревка лежала на столе и мешки не двигались?*



Скорости v мешков к моменту удара одного из них об пол определяются законом сохранения энергии:

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = m_2gH. \qquad (1)$$

После удара мешок массой m_1 будет двигаться по столу, пока не натянет веревку. В этот момент мешок m_2, лежавший на полу, рывком ускоряется так, что скорости мешков становятся одинаковыми по величине.

Изменение скоростей мешков по абсолютной величине при этом рывке такое же, как если бы мешок массой m_2 лежал не на полу, а на столе. Действительно, взаимодействие мешков осуществляется через веревку, и сила, прилагаемая к мешку, лежащему на полу, лишь по направлению отличается от той, которая была бы, если бы он лежал на столе.

Таким образом, скорости мешков u после рывка можно найти с помощью закона сохранения импульса:

$$m_1v = (m_1+m_2)u. \qquad (2)$$

Дальнейшее движение мешков вновь «контролируется» законом сохранения энергии, и максимальная высота h подъема мешка m_2 определяется соотношением

$$m_2gh = \frac{1}{2}(m_1+m_2)u^2. \qquad (3)$$

Исключая v, u из (1), (2), (3), получаем:

$$h = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 H.$$

Г. Л. Коткин

◆

Ф1000. *Ток I, текущий по контуру, образованному четырьмя ребрами куба (рис. 1), создает в центре куба магнитное поле с индукцией B_0. Найти величину и направление вектора индукции магнитного поля, создаваемого в центре куба током I, текущим по контуру из шести ребер (см. рисунок 2 на с. 40).*

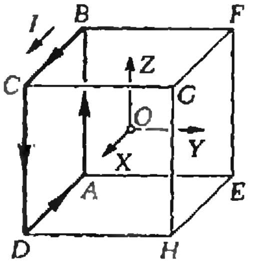


Рис. 1.

Из соображений симметрии следует, что индукция $\vec{B}_0$ поля, создаваемого в центре куба (в точке O) током I, текущим по контуру $ABCDA$ (см. рис. 1), параллельна оси OY. Действительно, при повороте на 90° вокруг OY контур $ABCDA$ переходит сам в себя, следовательно, вектор $\vec{B}_0$ тоже должен перейти сам в себя. По правилу буравчика вектор $\vec{B}_0$ направлен вдоль OY. Таким образом, в проекции на оси OX, OY, OZ

$$\vec{B}_0 = (B_x, B_y, B_z) = (0, B_0, 0).$$

Чтобы найти поле $\vec{B}$, создаваемое током, текущим по контуру $ABCGHEA$ (см. рис. 2), воспользуемся принципом суперпозиции. Заметим, что точно такое же распределение тока по ребрам куба получится, если взять три контура: $ABCDA$, $DCGHD$ и $ADHEA$, по каждому из которых течет ток I. Значит, совокупность этих трех контуров создает в центре куба искомое поле $\vec{B}$. В соответствии с принципом суперпозиции, $\vec{B}$ равно векторной сумме трех полей, создаваемых каждым из контуров:

$$\vec{B} = \vec{B}_{ABCDA} + \vec{B}_{DCGHD} + \vec{B}_{ADHEA} =$$
$$= (0, B_0, 0) + (-B_0, 0, 0) + (0, 0, B_0) = (-B_0, B_0, B_0).$$

Таким образом, вектор $\vec{B}$ направлен вдоль главной диагонали куба ($\overrightarrow{DF}$), а его величина равна $B_0\sqrt{3}$.

Заметим, что индукцию $\vec{B}$ можно найти, просто сложив поля всех шести ребер контура, но это потребовало бы более громоздких вычислений.

М. М. Цыпин

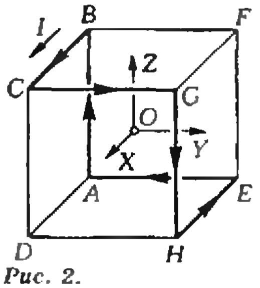


Рис. 2.

◆

Ф1001. *В однородном электрическом поле находится незаряженный металлический шар. При выключении поля в шаре выделилось количество тепла Q. Какое количество тепла выделилось бы в шаре втрое большего радиуса?*

Очевидно, при помещении незаряженного металлического шара в однородное электрическое поле на поверхности шара появятся наведенные электрические заряды. Они расположатся по его поверхности так, чтобы напряженность результирующего электрического поля внутри шара была равной нулю. Ясно, что поверхностная плотность заряда σ определяется величиной напряженности внешнего электрического поля и геометрией проводника. При заданной геометрии чем больше внешнее электрическое поле, тем больше величина σ в каждой точке поверхности проводника.

При выключении внешнего электрического поля в шаре выделится тепло за счет потенциальной энергии поля, созданного наведенными на шаре зарядами. Эту энергию можно найти как сумму потенциальных энергий всевозможных пар заряженных точек поверхности шара. Разобьем поверхности шаров на подобные малые участки. Энергия взаимодействия пары участков поверхности меньшего шара, находящихся на расстоянии R_{12} друг от друга, равна

$$\Delta W = k\sigma_1\sigma_2\frac{\Delta S_1\cdot\Delta S_2}{R_{12}},$$

где σ_1 и σ_2 — соответствующие плотности заряда, ΔS_1 и ΔS_2 — площади соответствующих участков. Поверхностные плотности заряда на подобных участках большого шара также равны σ_1 и σ_2. (Покажите это самостоятельно, воспользовавшись принципом суперпозиции и условием равенства нулю напряженности поля внутри проводника.) Если радиус этого шара больше в n раз, чем радиус меньшего шара, то энергия пары подобных участков большого шара равна

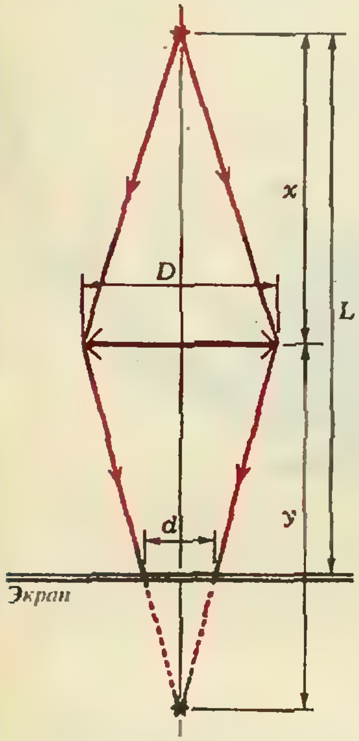
$$\Delta W' = k\sigma_1\sigma_2\frac{\Delta S_1'\cdot\Delta S_2'}{R_{12}'} = k\sigma_1\sigma_2\frac{n^2\cdot\Delta S_1\cdot n^2\cdot\Delta S_2}{nR_{12}} = n^3\cdot\Delta W,$$

где $\Delta S_1'$ и $\Delta S_2'$ — площади соответствующих увеличенных участков, R_{12}' — расстояние между ними.

Таким образом, при увеличении размеров шара в три раза ($n=3$) потенциальная энергия поля наведенных зарядов увеличится в $3^3=27$ раз, и следовательно, во столько же раз возрастет количество тепла, которое выделится при выключении внешнего поля.

С. С. Кротов

Ф1002. *Точечный источник света находится на расстоянии L от экрана. Собирающую линзу с фокусным расстоянием $F > (L/4)$, параллельную экрану, перемещают между источником и экраном. При каком положении линзы диаметр пятна, видимого на экране, будет минимальным?*



Пусть линза сдвигается в сторону так, что расстояние между ней и экраном не изменяется. Тогда остаются неизменными и размеры пятна на экране, ведь пучок лучей за линзой представляет собой конус с вершиной в действительном или мнимом изображении источника и образующими, проходящими через периметр линзы. Так как точки пересечения плоскостей линзы и экрана с высотой конуса при таком сдвиге не изменяются, то (из подобия) не изменяется и размер пятна.

Поэтому мы можем сдвинуть линзу так, чтобы источник находился на ее главной оптической оси. Пусть x — расстояние от источника до линзы. Нетрудно показать, что при условии $F > (L/4)$ получить резкое изображение источника (точку) на экране невозможно — при любом положении линзы на экране будет видно пятно, диаметр d которого зависит от x и минимален при $x = x_0$. В самом деле, изображение источника попадает на экран, если

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{L-x} = \frac{1}{F}, \text{ или } x^2 - Lx + FL = 0,$$

но данное уравнение не имеет решений — его дискриминант $L^2 - 4FL = 4L((L/4) - F)$ по условию отрицателен.

Если $x < F$, то пучок лучей за линзой расходится, и пятно тем больше, чем дальше линза от экрана. При $F \geqslant L$ имеем $x < F$ для всех возможных x, и в этом случае d минимально при $x_0 = L$, то есть когда линза установлена вплотную к экрану. Если же $(L/4) < F < L$, то очевидно, что $x_0 > F$ (пучок должен сходиться). В этом случае изображение источника находится за экраном на расстоянии y от линзы таком, что

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{F}, \text{ то есть } y = \frac{xF}{x-F}.$$

Из соображений подобия получаем (см. рисунок): $\frac{d}{D} = \frac{y-(L-x)}{y}$, откуда

$$d = D\frac{y-(L-x)}{y} = D\left(1 - \frac{(L-x)(x-F)}{xF}\right) =$$

$$= D\left(2\sqrt{\frac{L}{F}} - \frac{L}{F} + \left(\sqrt{\frac{L}{x}} - \sqrt{\frac{x}{F}}\right)^2\right).$$

Это выражение имеет минимальное значение при $x = x_0 = \sqrt{LF}$, и

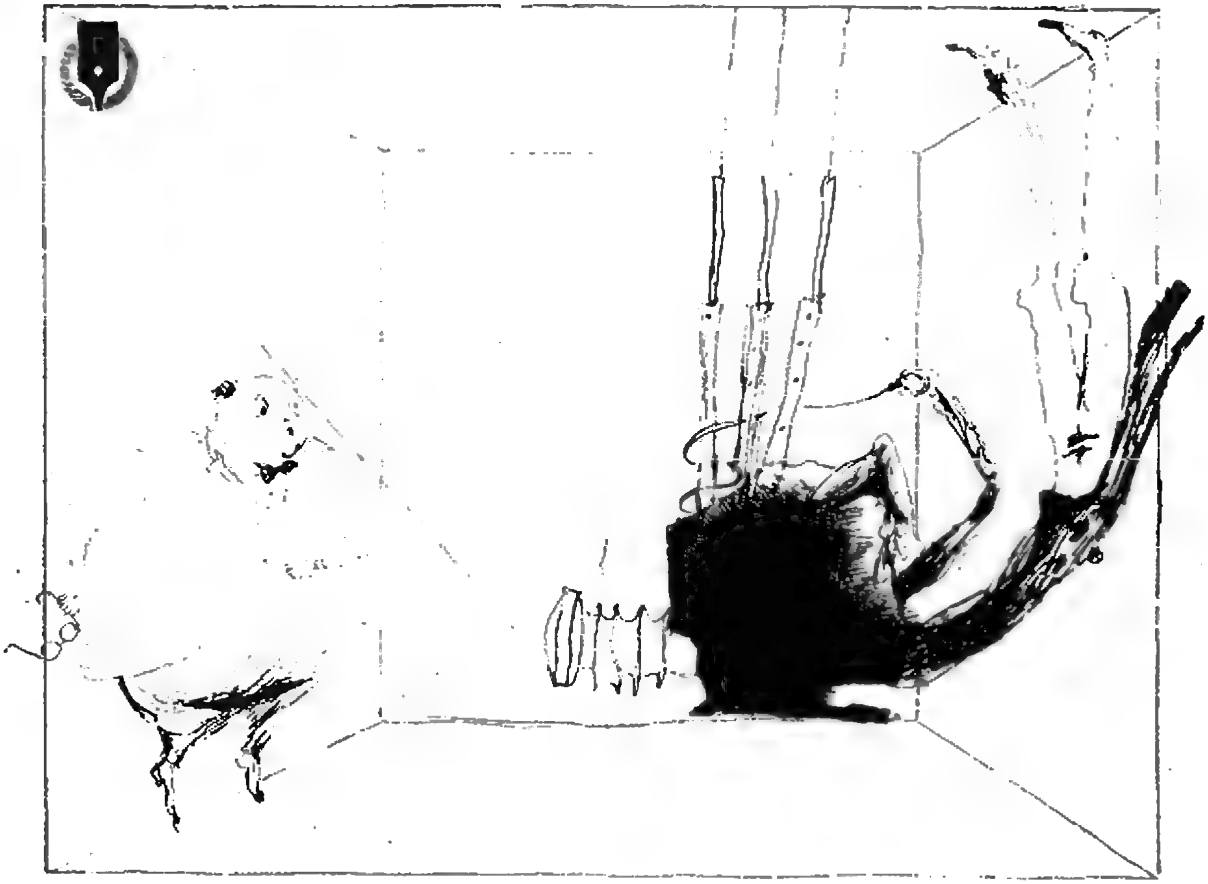
$$d_{\min} = D\sqrt{\frac{L}{F}}\left(2 - \sqrt{\frac{L}{F}}\right).$$

Таким образом, размер пятна минимален
при $x_0 = L$, если $F \geqslant L$,
при $x_0 = \sqrt{LF}$, если $F < L$.

Д. Ю. Григорьев

Поправка

На четвертой странице обложки в «Кванте» № 6 неправильно указана фамилия автора программы. Автором этой программы является А. А. Левин.



Оптические приборы

Л. П. БАКАНИНА

Существует много различных оптических приборов, и каждый из них призван так или иначе «помогать» нашему глазу. Например, телескоп и бинокль позволяют рассматривать весьма удаленные предметы, а лупа и микроскоп служат для рассматривания очень мелких предметов. Фотоаппарат дает возможность запечатлеть изображение на пленке, а проекционный аппарат позволяет получить увеличенное изображение этой пленки на экране, которое может видеть сразу большое число людей. Очки восполняют различные недостатки зрения у людей. О некоторых из перечисленных приборов и пойдет речь в данной статье.

Принципиальное устройство этих приборов очень простое — их оптическая система состоит из одной или двух линз. Сколько и какие именно линзы при этом используются — зависит от назначения конкретного прибора.

Очки

Наш глаз обладает способностью аккомодировать, то есть «настраиваться» на рассматривание различно удаленных предметов. Для нормального глаза область аккомодации лежит в пределах от бесконечно больших расстояний до расстояний порядка 10 см (с возрастом это расстояние увеличивается). При этом в первом случае глазу удается получить на сетчатке отчетливое изображение без каких-либо мышечных усилий.

Человек, страдающий близорукостью, не может сфокусировать на сетчатке изображение удаленных предметов, а человек, страдающий дальнозоркостью, не имеет возможности отчетливо видеть близкие к глазу предметы. Простые очки со сферическими линзами позволяют скорректировать близорукость или дальнозоркость глаза, «приближая» или «удаляя» предметы относительно глаза. Очевидно, что в первом случае используются рассеивающие линзы, а во втором — собирающие.

Принято различать очки «для дали» и очки «для чтения». Первые «переносят» предметы, находящиеся на бесконечно большом расстоянии, на дальнюю границу области аккомодации данного глаза. Вторые «переносят» предметы со стандартного для нормального глаза расстояния наилучшего зрения $d_0=25$ см на расстояние наилучшего зрения близорукого или дальнозоркого глаза.

Задача 1. *Близорукий человек лучше всего различает мелкий шрифт, расположенный на расстоянии $d=15$ см от глаза. Какие очки для чтения нужны этому человеку?*

Считаем, что очки расположены вплотную к глазу, а книгу человек держит на расстоянии наилучшего зрения $d_0=25$ см от глаза (рис. 1). По формуле линзы

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}, \text{ или } \frac{1}{d_0}-\frac{1}{d}=\frac{1}{F},$$

находим оптическую силу очков:

$$D=\frac{1}{F}=\frac{d-d_0}{d_0 d}\approx -2{,}7 \text{ дптр.}$$

Задача 2. *Какие очки нужны человеку, у которого расстояние наилучшего зрения оказалось равным $d=75$ см?*

Так же, как и в предыдущей задаче, предполагаем, что человеку удобно держать книгу на расстоянии $d_0=25$ см, а изображение в очках должно получиться на расстоянии $d=75$ см (рис. 2). По формуле линзы получаем, что оптическая сила очков

$$D=\frac{1}{F}=\frac{1}{d_0}-\frac{1}{d}=\frac{d-d_0}{d_0 d}=+2{,}7 \text{ дптр.}$$

Фотоаппарат

В фотоаппарате с помощью линзы-объектива получают на пленке изображение фотографируемых предметов. Перемещая объектив относительно пленки, добиваются четкого изображения предметов, находящихся на разных расстояниях от фотоаппарата. Качество изображения зависит также от времени экспозиции, в течение которого открыт объектив фотоаппарата, и диаметра диафрагмы, стоящей перед объективом. Величина этих параметров определяется яркостью предмета и чувствительностью пленки. Если снимаются движущиеся предметы, время экспозиции должно быть достаточно малым, иначе изображение на пленке будет размытым. Диаметр диафрагмы определяет не только освещенность пленки, но и глубину резкости.

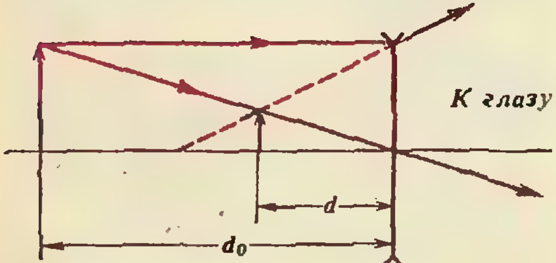


Рис. 1.

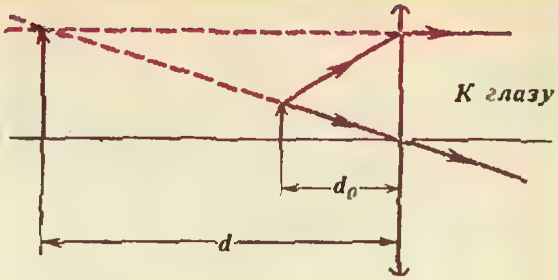


Рис. 2.

Задача 3. *На спутнике, летящем по круговой орбите на высоте $H=200$ км от Земли, расположен фотоаппарат, объектив которого имеет фокусное расстояние $F=40$ см. Разрешающая способность пленки (определяемая зернистой структурой фотоэмульсии), то есть минимальный размер различимых деталей изображения, равна $a=10$ мкм. Каков минимальный размер предметов на Земле, которые можно различить на пленке? Каково допустимое время экспозиции?*

Так как $H\gg F$, можно считать, что фотографируются предметы, находящиеся в бесконечности, и их изображения получаются четкими в фокальной плоскости объектива. По условию задачи можно различить

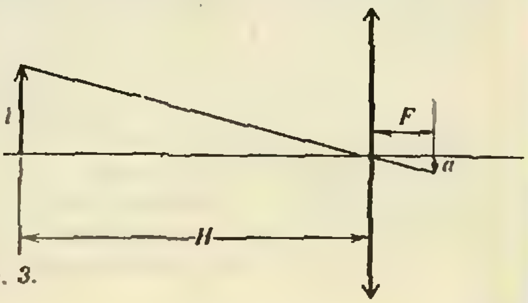


Рис. 3.

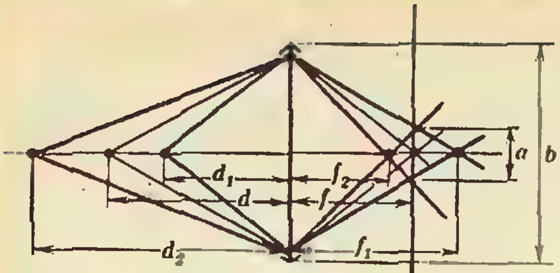


Рис. 4.

предметы, размер изображения которых больше a, поэтому (рис. 3)

$$l \geqslant a\frac{H}{F} = 5 \text{ м.}$$

За время экспозиции t спутник и, следовательно, оптическая ось объектива поворачиваются на угол $\alpha = 2\pi t/T$, где $T = 2\pi\sqrt{R/g}$ — период обращения спутника, $R \approx R_З = 6400$ км. Изображение при этом «размоется» на величину αF. Это размытие должно быть не больше a. Отсюда

$$t = \frac{\alpha T}{2\pi} \leqslant \frac{a}{F}\sqrt{\frac{R}{g}} = 0{,}02 \text{ с.}$$

Задача 4. *Из-за конечной разрешающей способности фотопленки на ней четко изображаются предметы, находящиеся от фотоаппарата на расстояниях от $d_1 = 15$ м до $d_2 = 30$ м. Не меняя наводки на резкость, объектив задиафрагмировали (то есть уменьшили диаметр открытой части объектива). При этом ближняя граница глубины резкости стала равной $d'_1 = 10$ м. Найдите дальнюю границу глубины резкости.*

Пусть размер зернистой структуры фотоэмульсии a, диаметр объектива фотоаппарата b, а его фокусное расстояние F. Если аппарат навели на предмет, расположенный на расстоянии d от фотоаппарата, пленка расположена от объектива на расстоянии f, определяемом по формуле линзы (рис. 4):

$$f = \frac{dF}{d-F}.$$

Предмет, находящийся на расстоянии $d_1 < d$, будет четко изображаться на расстоянии $f_1 = d_1F/(d_1 - F)$. При этом каждая точка этого предмета будет засвечивать на пленке кружок. Если диаметр этого кружка не превышает размера зерен фотоэмульсии, мы не заметим расфокусировки. То же будет для предметов, расположенных на расстоянии $d_2 > d$. Каждая точка таких предметов будет изображаться точкой на расстоянии $f_2 = d_2F/(d_2 - F)$ от объектива, а на пленке будет образовываться кружок, диаметр которого не должен превышать a.

Из подобия треугольников на рисунке 4 имеем

$$\frac{a}{b} = \frac{f - f_2}{f_2} = \frac{f_1 - f}{f_1},$$

откуда получаем

$$\frac{2}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}. \qquad (1)$$

Если диаметр объектива стал b', то

$$\frac{a}{b'} = \frac{f - f'_2}{f'_2} = \frac{f'_1 - f}{f'_1},$$

или

$$\frac{2}{f} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}, \qquad (2)$$

где

$$f'_2 = \frac{d'_2F}{d'_2 - F} \text{ и } f'_1 = \frac{d'_1F}{d'_1 - F}.$$

Из (1) и (2) находим

$$\frac{1}{f'_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f'_1},$$

откуда, выражая f через d, получаем

$$d'_2 = \frac{1}{\dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2} - \dfrac{1}{d'_1}} \Rightarrow \infty.$$

Итак, дальняя граница глубины резкости лежит в бесконечности, и, следовательно, на пленке четко изображаются все предметы, расположенные дальше 10 м от объектива.

Микроскоп

Задача, которая ставится при конструировании этого прибора,— получить как можно большее увеличение изображения мелких предметов.

Микроскоп состоит из двух собирающих линз — объектива и окуляра. Объектив, обращенный к предмету, дает действительное увеличенное изображение предмета, а окуляр, расположенный непосредственно перед глазом наблюдателя, используется как

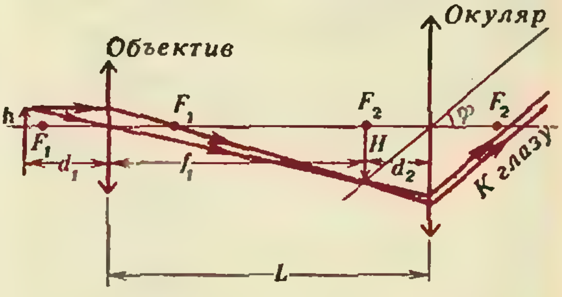


Рис. 5.

лупа, дающая мнимое увеличенное изображение. При этом глаз обычно аккомодирован на бесконечность.

Как видно из рисунка 5, изображение в микроскопе получается увеличенным и перевернутым. Найдем его угловое увеличение γ — отношение угла зрения φ на предмет через микроскоп к углу зрения φ_0 при наблюдении невооруженным глазом: $\gamma=\varphi/\varphi_0$. Если размер предмета h и он рассматривается глазом с расстояния наилучшего зрения d_0, то

$$\varphi_0=\frac{h}{d_0}.$$

Теперь найдем φ.

Увеличение системы линз всегда равно произведению увеличений каждой из линз, входящих в эту систему. Чтобы увеличение объектива было по возможности бо́льшим, предмет должен находиться близко к фокусу, поэтому можно принять, что $d_1=F_1$. Изображение, даваемое объективом, является предметом для окуляра. Если глаз аккомодирован на бесконечность, то «предмет» должен находиться в фокальной плоскости окуляра, то есть $d_2=F_2$. Из рисунка 5 получаем

$$\varphi=\frac{H}{F_2}=\frac{h(L-F_1-F_2)/F_1}{F_2}.$$

Очевидно, что в качестве и объектива, и окуляра разумно использовать короткофокусные линзы. Тогда

$$\varphi=\frac{hL}{F_1F_2},$$

и увеличение микроскопа в этих приближениях можно считать равным

$$\gamma=\frac{\varphi}{\varphi_0}=\frac{Ld_0}{F_1F_2}.$$

На основании этой формулы можно подумать, что, увеличивая расстояние между линзами L и приближая предмет к фокусу объектива, мы можем получить любые, сколь угодно большие увеличения микроскопа. Однако это не так. При достаточно больших расстояниях между линзой и изображением уже нельзя пользоваться приближенными построениями геометрической оптики, необходимо учитывать волновые свойства света и, в частности, явление дифракции, которое приводит к искажению изображения и даже к тому, что изображения не получается вообще. Из рассмотрения дифракционных явлений можно получить, что минимальный размер предмета, который можно рассмотреть в микроскоп без искажений, должен быть порядка длины световой волны. Для видимого света величина $l_{\min}\sim0{,}5$ мкм, а максимально возможное увеличение микроскопа $\sim10^3$.

Задача 5. *Микроскоп имеет объектив с фокусным расстоянием $F_1=1$ см и окуляр с фокусным расстоянием $F_2=3$ см, расстояние между ними $L=20$ см. На каком расстоянии от фокуса объектива должен находиться объект, чтобы его изображение получилось на расстоянии наилучшего зрения $d_0=25$ см от окуляра? Чему равно при этом увеличение микроскопа?*

Будем считать, что изображение, даваемое объективом, находится приблизительно в фокусе окуляра. Тогда расстояние от объектива до изображения $f_1=L-F_2=17$ см, а искомое расстояние

$$x=d_1-F_1=\frac{f_1F_1}{f_1-F_1}-F_1=\frac{F_1^2}{L-F_1-F_2}\approx$$
$$\approx0{,}06\text{ см}.$$

Увеличение микроскопа равно приближенно

$$\gamma=\frac{(L-F_2)d_0}{F_1F_2}\approx130.$$

Зрительные трубы. Телескоп

Зрительные трубы, предназначенные для наблюдений удаленных предметов, делятся на две группы: 1) состоящие из двух собирающих линз — «астрономическая труба», или труба Кеплера; 2) состоящие из собирающей и рассеивающей линз — «земная труба», или труба Галилея. И та, и другая трубы могут быть использованы в качестве телескопа. Систему линз называют телескопической, если входящий в нее параллельный пучок лучей выходит тоже параллельным, но под другим углом к оптической оси. Угловым увеличением зрительной трубы называют отношение углов, под которыми распространяются выходящий и входящий параллельные пучки света: $\gamma=\varphi_2/\varphi_1$.

Как правило, при рассматривании удаленных предметов с помощью зрительной трубы глаз наблюдателя аккомодирован на бесконечность, но бывают и исключения.

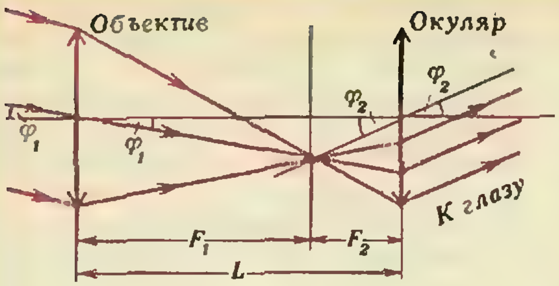


Рис. 6.

Труба Кеплера. Рассмотрим трубу Кеплера как телескопическую систему, настроенную на бесконечность. Из рисунка 6 видно, что

$$F_1\,\mathrm{tg}\,\varphi_1 = F_2\,\mathrm{tg}\,\varphi_2.$$

Если углы малы, то

$$\frac{\mathrm{tg}\,\varphi_2}{\mathrm{tg}\,\varphi_1} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \gamma = \frac{F_1}{F_2},$$

то есть увеличение трубы равно отношению фокусных расстояний объектива и окуляра. Длина трубы в этом случае равна $L = F_1 + F_2$; изображение в трубе перевернутое.

Задача 6. *Наблюдатель рассматривает удаленный предмет с помощью зрительной трубы Кеплера. Фокусные расстояния объектива и окуляра равны соответственно $F_1 = 30$ см и $F_2 = 5$ см. Наблюдатель видит четкое изображение предмета, если расстояние между объективом и окуляром трубы находится в пределах от $L' = 33$ см до $L'' = 34{,}5$ см. На каких расстояних наблюдатель отчетливо видит предмет невооруженным глазом?*

Изображение удаленных предметов в объективе трубы получается в его фокальной плоскости, то есть на расстоянии $d_2 = L - F_1$ от окуляра. Изображение в окуляре всегда мнимое, и его расстояние до глаза (считаем, что глаз приложен вплотную к окуляру) меняется в пределах, вычисляемых по формуле линзы:

$$f_2 = \frac{d_2 F_2}{F_2 - d_2},$$

при $\begin{cases} d_2' = 3 \text{ см } f_2' = 7{,}5 \text{ см}, \\ d_2'' = 4{,}5 \text{ см } f_2'' = 45 \text{ см}. \end{cases}$

Как видно, наблюдатель страдает близорукостью — он не может видеть предметы, удаленные более чем на 45 см от глаза.

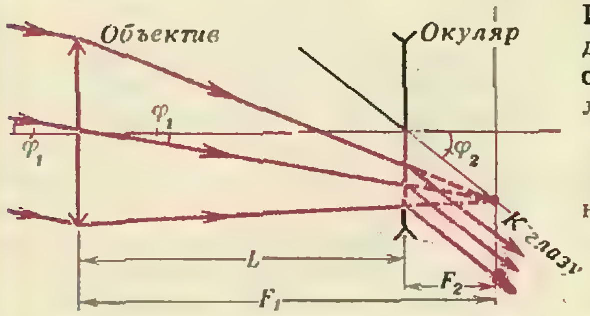


Рис. 7.

Труба Галилея. Рассмотрим настроенную на бесконечность трубу Галилея (рис. 7). В этом случае длина трубы $L = F_1 - F_2$; увеличение трубы

$$\gamma = \frac{\mathrm{tg}\,\varphi_2}{\mathrm{tg}\,\varphi_1} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{F_1}{F_2},$$

то есть тоже равно отношению фокусных расстояний (как и в трубе Кеплера). Изображение в трубе Галилея не перевернутое, а прямое, поэтому она удобнее для наблюдения удаленных предметов на Земле (почему ее иногда и называют «земной трубой»). В частности, театральный бинокль представляет собой не что иное, как трубу Галилея.

Задача 7. *Объективом театрального бинокля служит собирающая линза с фокусным расстоянием $F_1 = 8$ см, а окуляром — рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F_2 = 4$ см. Чему равно расстояние между объективом и окуляром, если изображение рассматривается глазом с расстояния наилучшего зрения? На сколько нужно переместить окуляр, если глаз аккомодирован на бесконечность?*

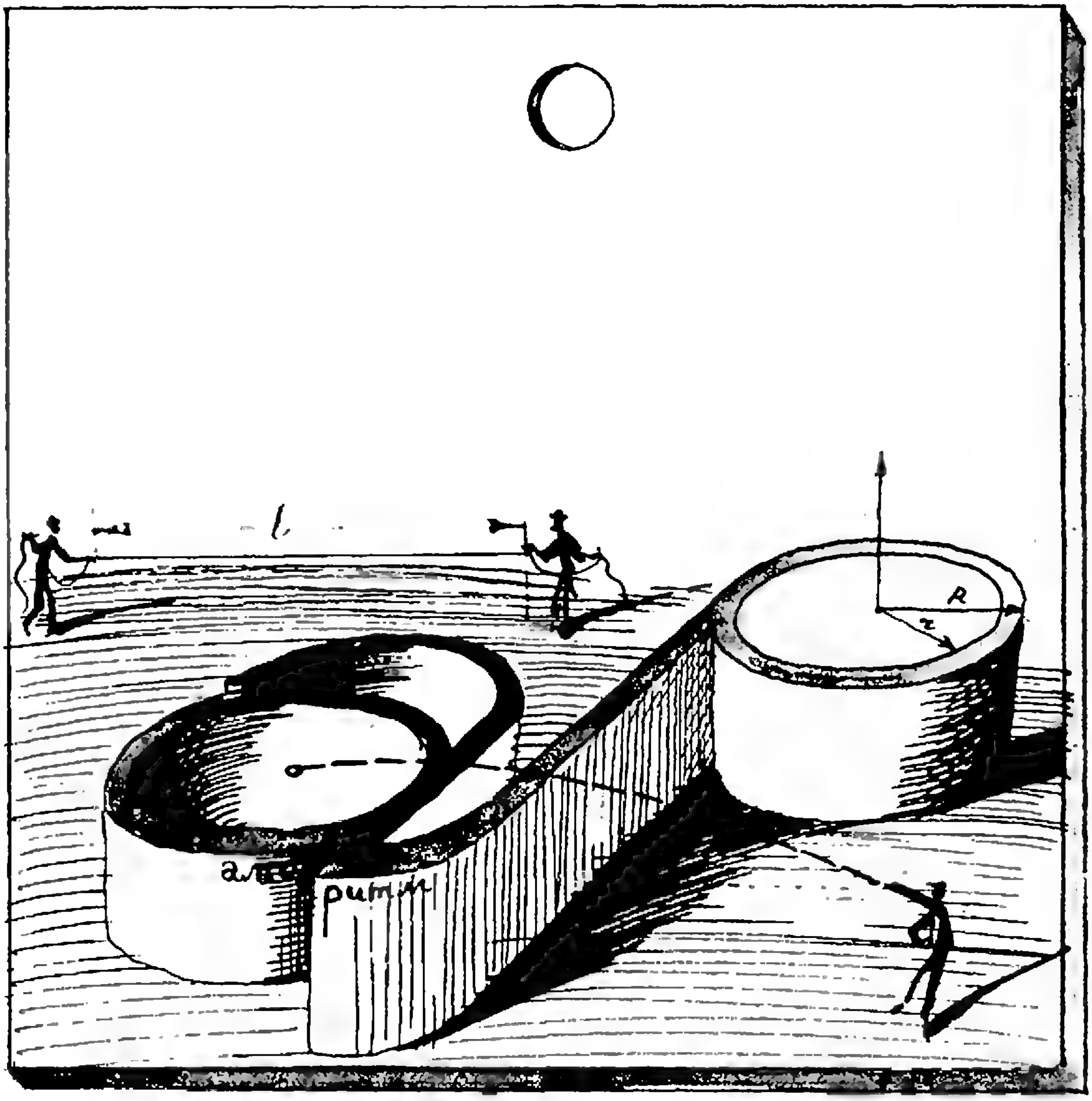
Так как расстояние до сцены, безусловно, много больше F_1, то изображение, даваемое объективом, будет расположено в его фокальной плоскости. Если расстояние между линзами L_1, то это изображение находится от окуляра на расстоянии $d_2 = F_1 - L_1$ справа от линзы по ходу лучей. Изображение в окуляре (мнимое) должно быть расположено на расстоянии $f_2 = d_0$. Применяя формулу линзы

$$-\frac{1}{F_1 - L_1} - \frac{1}{d_0} = -\frac{1}{F_2},$$

находим

$$L_1 = F_1 - \frac{F_2 d_0}{d_0 - F_2} \approx 3{,}2 \text{ см}.$$

(Окончание см. на с. 51)



Решение задач и построение алгоритмов

Кандидат технических наук
В. А. КАЙМИН

Задачи, задачи, задачи... Наша учеба, работа и личная жизнь — это каждодневное, ежечасное решение задач — учебных и производственных, инженерных и научных, организационных и личных. Квалификация и компетентность рабочего, инженера и специалиста определяются его знаниями и умением решать возникающие в работе задачи. Первым этапом в решении задачи является ее *постановка*. Второй этап решения задачи заключается в *подборе средств и способов решения*. Для решения сложных задач мы составляем планы, в которых выделяются вспомогательные *подзадачи*, а затем подбираются способы и средства для решения выделенных подзадач. Последний этап — это *реализация* выбранных планов и способов решения, завершающихся получением требуемых результатов.

Когда речь идет о решении задач с помощью компьютера, центральное место занимает *подбор алгоритмов* для решения задачи. В этой и в следующей заметке мы расскажем о *систематическом конструировании алгоритмов* применительно к тем задачам, которые решаются в курсе «Основ информатики и вычислительной техники» в 9-м и 10-м классах.

Ключевые этапы систематического конструирования алгоритмов можно проиллюстрировать следующей диаграммой (рис. 1). Посмотрим, как эта поэтапная

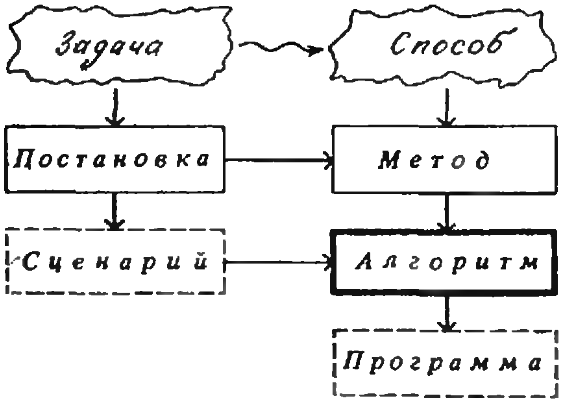


Рис. 1. Систематическое конструирование алгоритмов. Контуры около слов задача и способ расплывчаты: в начале задача и ее решение понимаются расплывчато, в общих чертах. Затем возникает уточненная постановка задачи, после которой общий способ превращается в четкий математический метод решения, а тот в свою очередь — в алгоритм. (Что имеется в виду под словом сценарий, вы узнаете в следующем номере «Кванта»; о программах речь пойдет лишь в конце 10-го класса.)

схема реализуется на нескольких простейших задачах.

Задача о площади кольца. В общих чертах ставится задача вычисления площади кругового кольца (рис. 2). В принципе понятно, как ее решать: из площади большего круга нужно вычесть площадь меньшего. Точную постановку задачи можно записать так:

Задача: *найти площадь кольца.*
Дано: r — внутренний радиус,
R — внешний радиус.
Треб: S — площадь кольца.
Связь:

$$\begin{cases} S=S_1-S_2 & \text{— площадь кольца,} \\ S_1=\pi\cdot R^2 & \text{— площадь большего круга,} \\ S_2=\pi\cdot r^2 & \text{— площадь меньшего круга.} \end{cases}$$

При: $0<r<R$.

Обратите внимание на запись после слова **связь**: она, в сущности, дает нам метод решения в виде системы уравнений. Важна также и запись после слова **при**: в ней указываются ограничения на переменные, входящие в задачу.

Теперь из метода легко получить алгоритм: в данном случае остается только в нужном порядке присвоить значения параметрам с учетом ограничений. Получим такой алгоритм:

```
алг площадь (вещ $r1$ $\dot{r}2$, $S$)
  арг $r$
  рез $S$
нач вещ $S1$, $S2$
  если $0<r1$ и $r1<r2$
  то $\pi:=3{,}14159$
     $S1:=\pi\cdot r1^2$
     $S2:=\pi\cdot r2^2$
  все
кон
```

Задача о расстоянии между пешеходами. В общих чертах речь идет о вычислении расстояния между двумя пешеходами, идущими навстречу друг другу, в данный момент времени (рис. 3). Точная постановка — следующая:

Задача: *Найти расстояние между пешеходами, идущими навстречу друг другу.*
Дано:
l_0 — начальное расстояние,
τ — время движения,
v_1 — скорость первого пешехода,
v_2 — скорость второго пешехода.
Треб: l_τ — текущее расстояние.
Связь:

$$\begin{cases} s_1+l_\tau+s_2=l_0 & \text{— общее расстояние.} \\ s_1=v_1\cdot\tau & \text{— путь первого пешехода,} \\ s_2=v_2\cdot\tau & \text{— путь второго пешехода.} \end{cases}$$

При: $\tau\geqslant 0$ и $v_0>0$.

Из уравнений, описывающих условие задачи (они следуют за словом **связь**), сразу извлекается метод решения:

$$\begin{cases} s_1=v_1\tau, \\ s_2=v_2\tau, \\ l_\tau=l_0-(s_1+s_2). \end{cases}$$

Алгоритм теперь выписывается сразу:

```
алг расстояние (вещ $l0$, $v1$, $v2$, $t$, $lt$)
  арг $l0$, $v1$, $v2$, $t$
  рез $lt$
нач
  если $l0>0$ и $t>0$
то $s1:=v1\cdot t$
     $s2:=v2\cdot t$
     $lt:=l0-(s_1+s_2)$
  все
кон
```

Важным моментом в конструировании алгоритмов является нахождение уравнений связи, дающих точное математическое описание поставленной задачи. Иногда говорят, что этот выбор дает *математическую модель* рассмотренной задачи. В двух рассмотренных задачах выбор модели (уравнений связи) осуществляется однозначно, а вот в задачах по физике можно выбирать разные модели. Рассмотрим такой пример.

Задача о полете камня. В этой задаче, рассматриваемой в школьном учебнике по информатике, речь идет о полете камня, брошенного под некоторым углом к горизонту (рис. 4). В ней можно учитывать 1) кривизну поверхности Земли, 2) сопротивление воздуха, 3) изменение ускорения свободного падения, 4) притяжение Луны и другие тонкие физические явления и эффекты. Если в этой задаче движение по вертикали рассматривать как равнозамедленное, а движение по горизонтали — как равномерное, то мы получим следующие постановку, метод и алгоритм решения задачи.

Задача: *Найти дальность полета камня, брошенного под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0.*

Дано: α — начальный угол [рад],
v_0 — начальная скорость [м/с].
Треб: l — дальность полета [м].
Связь:
$l=v_{x0}t$ — дальность полета,
$-gt^2/2+v_{y0}t=0$ — уравнение полета,
$v_{x0}=v_0\cos\alpha$ — горизонтальная скорость,
$v_{y0}=v_0\sin\alpha$ — вертикальная скорость,
$g=9{,}81$ — ускорение свободного падения.

При: $v_0>0$ и $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

Метод

$$\left\{\begin{array}{l} l=vx0\cdot t, \\ t=2\,vy0/g, \\ vx0=v0\cdot\cos\alpha, \\ vy0=v0\cdot\sin\alpha, \\ g=9{,}81. \end{array}\right.$$

Алгоритм

```
алг дальность (вещ $a$, $l$, $v0$)
  арг $v0$, $a$
  рез $l$
нач вещ $g$, $vx0$, $vy0$, $t$
  $g:=9{,}81$
  $vx0:=v0\cdot\cos a$
  $vy0:=v0\cdot\sin a$
  $t:=2vy0/g$
  $l:=vx0\cdot t$
кон
```

* * *

Для элементарных задач методы решения удается получать в точной аналитической форме. Для сложных задач, когда явная система расчетных формул не может быть получена, используются методы приближенных решений, требующие большого объема вычислений. Для приближенного вычисления некоторой величины y определяется некоторая последовательность приближений: $y_0, y_1, y_2, \ldots$, которые в пределе стремятся к искомой величине $y=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Последовательность приближений y_k $(k=0,1,2)$ обычно подбирается таким образом, чтобы очередное значение y_k зависело от предыдущего члена определяемой последовательности y_{k-1}. Простейшей иллюстрацией служит метод Герона для извлечения квадратных корней.

Извлечение квадратного корня. Здесь постановка, метод и алгоритм следующие.
Задача: *Приближенно извлечь квадратный корень.*
Дано: x — исходное число,
e — точность вычисления.
Треб: $z: |\sqrt{x}-z|<e$.
При: $x\geqslant 0$, $e>0$.

Метод

$$\left\{\begin{array}{l} y_0=x, \\ y_k=1/2(y_{k-1}+x/y_{k-1}) \end{array}\right.$$

$$[(k=(1,2,\ldots))\ \text{до}\ |y_k-y_{k-1}|<e]$$

```
алг квадр. кор (вещ $x$,$z$)
  арг $x$
  рез $z$
нач вещ $e$, $v$, $y$
  $e:=0{,}0001$
  $v:=x$
  $y:=1/2(v+x/v)$
пока $|y-v|\geqslant e$
  нц
  $v:=y$
  $y:=1/2(v+x/v)$
  кц
  $z:=y$
кон
```

Этот алгоритм практически полезен лишь в ситуации, когда у исполнителя есть карманный калькулятор без клавиши $\boxed{\sqrt{\ }}$. А вот следующий алгоритм часто используется и на калькуляторе, и на ЭВМ; он позволяет решить практически любое уравнение.

Решение уравнений методом половинного деления. Для приближенного решения уравнений вида $f(x)=0$, где $f(x)$ — непрерывная функция на отрезке $[a;\ b]$, может быть применен метод половинного деления, если значения функции в концах отрезка имеют разные знаки — $f(a)\cdot f(b)<0$. Суть метода состоит в анализе значения функции в середине отрезка $c=\dfrac{a+b}{2}$. Если $f(c)=0$, то корень найден, в противном случае корень нужно искать на левом $[a;\ c]$ или на правом $[c;b]$ полуотрезке в зависимости от того, на

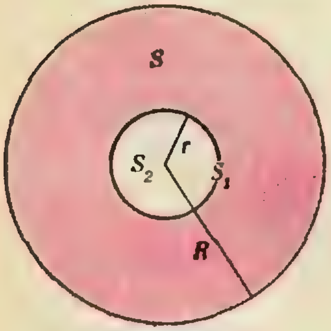


Рис. 2. Вычисление площади кольца.

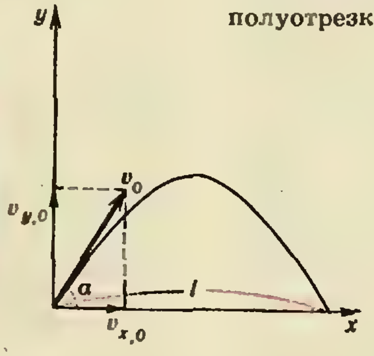


Рис. 3. Расстояние между пешеходами: а) начальный момент, б) текущий момент.

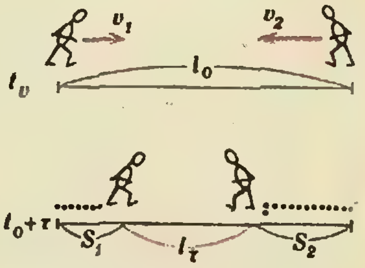


Рис. 4. Дальность полета брошенного камня.

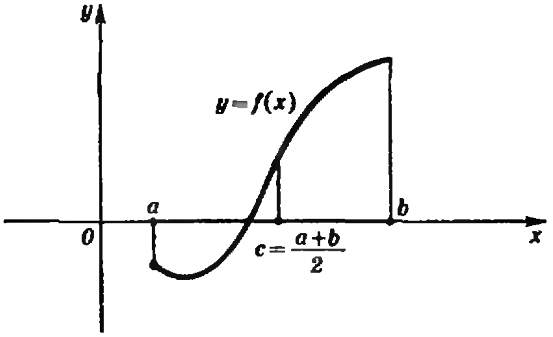


Рис. 5. Метод половинного деления.

концах какого из полуотрезков функция имеет противоположные знаки (рис. 5). Деление отрезков пополам продолжается до получения такого отрезка, что его длина $[a_k; b_k]$ станет меньше заданного ε. Этот метод можно записать так:

$$[a_0; b_0]=[a; b],$$
$$c_k=\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2},$$
$$[a_k; b_k]=\begin{cases}[a_{k-1}; c_k] \text{ при} \\ f(a_{k-1})\cdot f(c_k)<0, \\ [c_k; b_{k-1}] \text{ при} \\ f(c_k)\cdot f(b_{k-1})<0;\end{cases}$$
$$k=1, 2, \ldots \text{ до } |b_k-a_k|<\varepsilon$$

Его реализация на алгоритмическом языке, то есть искомый алгоритм, можно записать следующим образом:

```
алг прибл. реш (вещ $a$, $b$, $e$, $x0$)
арг $a$, $b$, $\varepsilon$
рез $x0$
нач вещ $c$
  $c:=(a+b)/2$
    пока $f(c)\neq 0$ и
         $(b-a)\geqslant e$
    нц
      если $f(a)\cdot f(c)<0$
      то $b:=c$
      иначе
      $a:=c$
      все
      $c:=(a+b)/2$
    кц
  $x0:=c$
кон
```

И. В. Курчатов: первые шаги в ЛФТИ

(Начало см. на с. 3)

(Курчатов и Синельников не указывают, в какую жидкость помещалась трубка с поршнем; они пишут, что опускали «...конец трубки с закрепленной фольгой в сосуд с жидкостью и осторожно вдували воздух».) При обычных температурных условиях σ для целого ряда жидкостей (этиловый эфир, диэтиламин и др.) лежит в пределах 0,015—0,020 Дж/м^3. Положим $\sigma=0{,}015$ Дж/м^2. Тогда, подставляя в (*) это значение σ и $d=0{,}5$ мкм, находим искомую величину Δp: $\Delta p=1{,}2\cdot 10^5$ Па ($\sim$1 атм) — достаточно большое давление! Недаром авторы писали о том, что сжимали воздух в цилиндрической трубке «с осторожностью». Нужно было, чтобы фольга не отклеилась от торца трубки, а главное, не разорвалась. Примененные Курчатовым и Синельниковым фольги были достаточно прочны, чтобы выдержать приложенное давление. Это же следует и из расчетов (по известным формулам сопротивления материалов для мембран), согласно которым напряжение, развивающееся при рассмотренном нами значении Δp, меньше предела прочности алюминия.

(Заметим, что формулу Лапласа для сходных целей в 1923 году использовал не кто иной, как А. Эйнштейн в совместной со своим другом, врачом Г. Мюзамом экспериментальной работе. В этой работе была предложена методика «экспериментального определения размера каналов в фильтрах» (так называлась соответствующая статья, в которой изучались пористые фильтры, применяемые для бактериологических и медицинских целей). По минимальному значению Δp, начиная с которого воздух продувался через фильтр и образовывал пузырьки в сосуде с жидкостью, куда этот фильтр помещался, определялся максимальный диаметр пор (каналов) в фильтре.)

Как видно из проведенных оценок, отверстия диаметром меньше 0,5 мкм вполне могли остаться не замеченными Гартигом. Между тем, поток электронов сквозь такие отверстия в фольге более чем достаточен, чтобы быть зафиксированным в опытах. Цель работы Курчатова и Синельникова, достигнутая в результате их простых и красивых контрольных экспериментов, и состояла в том, чтобы показать ошибочность сделанных Гартигом выводов о проницаемости сплошных (бездефектных) тонких фольг для медленных электронов.

Встреча с читателями

Нынешним летом, как и в прошлые годы, при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова проводились курсы повышения квалификации учителей средних школ страны. Программа математического отделения курсов предусматривала, в частности, традиционную встречу с членами редакционной коллегии журнала «Квант». Эта встреча состоялась 30 июня на механико-математическом факультете МГУ. В гости к слушателям курсов — учителям математики — пришли заместитель главного редактора журнала Ю. П. Соловьёв, члены редколлегии В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, Н. Х. Розов, А. П. Савин, А. Б. Сосинский.

Открывая встречу, Ю. П. Соловьев подробно остановился на задачах, которые стоят сегодня перед журналом, на ближайших и перспективных планах работы редакции. Выступившие на встрече члены редколлегии рассказали о различных разделах журнала, поделились своими соображениями о возможных формах использования журнала в практической деятельности школьного учителя. Большое внимание было уделено роли журнала в повышении уровня преподавания математики в школе, углублении математических знаний, учащихся, в решении актуальной сейчас проблемы их профессиональной ориентации. Особый интерес слушатели проявили к материалам журнала, которые призваны помочь ученикам и учителям в изучении нового школьного предмета «Основы информатики и вычислительной техники». Члены редакционной коллегии журнала ответили также на многочисленные вопросы участников встречи.

Подчеркивая важную роль журнала в развитии интереса школьников в математике, высоко оценивая его помощь учителям в классной и особенно во внеклассной работе, многие выступавшие на встрече учителя высказали в то же время критические замечания, внесли конкретные конструктивные предложения по дальнейшему улучшению журнала. В частности отмечалась явно недостаточная связь редакции, авторов с учительской общественностью страны, говорилось о том, что статьи журнала не всегда полностью увязаны с действующей школьной программой и иногда чрезмерно трудны для массового читателя-школьника.

Состоявшееся обсуждение журнала «Квант» показало, что у журнала имеется немало резервов для того, чтобы лучше и полнее удовлетворить запросы своих основных читателей — учащихся и учителей, чтобы стать более доступным и популярным для многочисленных любителей математики. Несомненно, что использование этих резервов поможет журналу еще активнее способствовать реализации тех задач, которые намечены документами о реформе общеобразовательной и профессиональной школы.

Н. Р.

Оптические приборы

(Начало см. на с. 42)

Если глаз аккомодирован на бесконечность, из бинокля должны выходить параллельные лучи, поэтому

$$L_2=F_1-F_2=4\ \text{см}.$$

Значит, окуляр нужно переместить на $\Delta L=L_2-L_1\approx 0{,}8$ см.

Упражнения

1. Человек видит мелкие детали предмета, если он расположен не далее 20 см от глаз. Какие очки ему необходимы?

2. При аэрофотосъемках местности используется фотоаппарат, объектив которого имеет фокусное расстояние $F=15$ см. Минимальный размер различимых деталей изображения на фотопленке $a=10$ мкм. На какой высоте должен лететь самолет, чтобы на фотографии можно было различить предметы размером до $l=10$ см? При какой скорости самолета изображение «не испортится», если время экспозиции $t=10^{-1}$ с?

3. Фотоаппарат сфокусирован на предмет, находящийся на расстоянии $d=5$ м от него. До какого размера b нужно задиафрагмировать объектив с фокусным расстоянием $F=20$ см, чтобы четко изображались предметы, расположенные на $\Delta d=0{,}5$ м ближе снимаемого? Допустимая размытость деталей на пленке $a=0{,}1$ мм.

4. Увеличение микроскопа $k=600$, длина тубуса $L=24$ см, фокусное расстояние окуляра $F_2=4$ см. Чему равна оптическая сила объектива?

5. Две трубы — Галилея и Кеплера — имеют одинаковую длину $L=40$ см и одинаковое увеличение $\gamma=9$. Определите фокусные расстояния линз, из которых собраны эти трубы.

I Всесоюзная олимпиада по физике учащихся средних профессионально-технических училищ

На олимпийской «карте» появилась еще одна «координата» — олимпиада по физике учащихся СПТУ. По форме проведения эта новая олимпиада ничем не отличалась от традиционной школьной. Однако при подборе задач было учтено, что учащиеся профессионально-технических училищ теснее связаны с практикой, чем школьники, и поэтому их больше должны интересовать конкретные, можно сказать, «прикладные» задачи.

20 мая. Открытие олимпиады

Участники и организаторы олимпиады собрались в живописном комсомольском городке «Борис Дзнеладзе» недалеко от Тбилиси.

Председатель Госкомитета по профтехобразованию Грузинской ССР Н. В. Гургенидзе объявляет олимпиаду открытой. Все выступающие (среди них крупные ученые, учителя и сами участники олимпиады) пришли к единодушному мнению: главное — это участие, и все собравшиеся уже добились большой победы, завоевав право представлять свои республики на Всесоюзной олимпиаде.

Вечером проводилась викторина, во время которой в игровой форме олимпийцы должны были ответить на довольно сложные вопросы по физике, продемонстрировать свое логическое мышление и смекалку. Ответы ребят показали, что уровень подготовки собравшихся в Тбилиси довольно высок, а сама викторина послужила хорошей размнинкой перед главными испытаниями.

21 мая. Теоретический тур

В течение пяти часов ребята упорно и настойчиво решали предложенные им шесть задач. Вот условия этих задач:

I курс

1. На невесомой нити жесткостью k висит тело массой m. Нить выдерживает натяжение T. Тело приподнимают на высоту x (x отсчитывается от положения равновесия) и отпускают. При каком минимальном x нить оборвется?

2. Поршень в цилиндрическом сосуде прикреплен к правой стенке пружиной (рис. 1). Слева от поршня в цилиндре находится азот, справа — вакуум. При температуре $T_1 = 300$ К расстояние $x_1 = 40$ см, при $T_2 = 500$ К — $x_2 = 50$ см. Чему равна длина пружины в недеформированном состоянии? Каково будет расстояние x при температуре жидкого гелия? Длина сосуда $L = 80$ см. Трением поршня о стенки цилиндра пренебречь.

3. В сосуд, где должна поддерживаться постоянная температура (термостат), поместили $m = 1$ кг нафталина, причем k-я часть его расплавлена. В термостат наливают $M = 2$ кг воды. На сколько может отличаться начальная температура воды от температуры плавления нафталина, чтобы температура в термостате не изменилась? Температура плавления нафталина $t_{пл} = 80$ °С, удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг·К), удельная теплота плавления нафталина $\lambda = 151$ кДж/кг, считать $k = 1/2$.

4. Какое сопротивление R_0 должен иметь вольтметр, чтобы с точностью до 1 % измерить падение напряжения на резисторе с сопротивлением $R = 1$ кОм (рис. 2)? В цепи между точками A и B источник обеспечивает постоянный ток.

5. Вычислите сопротивление между точками A и B проволочной фигуры, изображенной на рисунке 3, если сопротивление одного звена равно R (звеном называется отрезок между двумя точками).

6. Гидрофон, установленный около дна большого водоема, зарегистрировал несколько последовательных сигналов, обусловленных взрывом на дне. Промежуток времени между первым и вторым сигналами оказался равным $T_1 = 1$ с, между первым и третьим сигналами — $T_2 = 3$ с. На каком расстоянии от гидрофона произошел взрыв? Скорость распространения звука в воде $v = 1500$ м/с, дно водоема плоское.

II и III курсы

1. Через неподвижное горизонтально закрепленное бревно переброшена веревка (рис. 4). Для того чтобы удерживать груз массой $m = 6$ кг, подвешенный на этой веревке, необходимо тянуть второй конец веревки с минимальной силой $F_1 = 40$ Н. С какой минимальной силой F_2 надо тянуть веревку, чтобы груз начал подниматься?

2. Для создания искусственной тяжести две части космического корабля (отношение масс $m_1 : m_2 = 1:4$) разводятся на расстояние L и приводятся во вращение вокруг их общего центра масс. Определите период вращения T, если маятниковые часы в кабине космонавта, расположенной в более массивной части корабля, идут вдвое медленнее, чем на Земле.

3. При изготовлении льда в холодильнике потребовалось $\tau_1 = 6$ мин, чтобы охладить воду

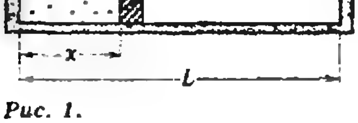


Рис. 1.

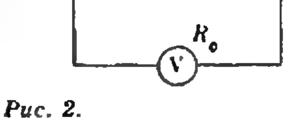


Рис. 2.

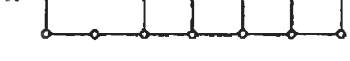


Рис. 3.

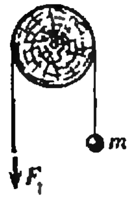


Рис. 4.

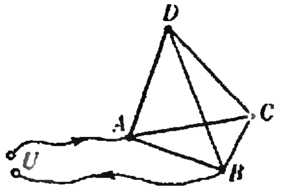


Рис. 5.

от $t_1=4$ °С до $t_2=0$ °С, и еще $\tau_2=2$ ч, чтобы превратить ее в лед. Чему равна удельная теплота плавления льда? Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг·К).

4. Шкала прибора с ценой деления $i_0=5$ мкА имеет $n=100$ делений. Внутреннее сопротивление прибора $r=50$ Ом. Как из этого прибора сделать вольтметр для измерения напряжений до $U=200$ В или миллиамперметр для измерения токов до $I=800$ мА?

5. Проволочный каркас в виде тетраэдра подключен к источнику постоянного напряжения U (рис. 5). Сопротивление каждого ребра равно R. Исключение какого из ребер каркаса приведет к наибольшему изменению тока I в цепи? Чему равно это максимальное изменение тока $\Delta I_{\max}$? Сопротивлением подводящих проводов пренебречь.

6. На дне озера глубиной h находится точечный источник света. На поверхности воды плавает круглый плот, причем центр плота находится как раз над источником. С вертолета, летающего над озером, обнаружить источник не удается. Коэффициент преломления воды равен n. Каков радиус плота?

Результаты оказались отличными: было довольно много работ со 100-процентным результатом, не нашлось ни одного человека, кто не смог решить хотя бы одну задачу.

Вечером того же дня был проведен разбор решений теоретических задач.

22 мая. День отдыха

В этот день с утра ребят ждала экскурсия по городу. После обеда те, кто был не согласен с оценкой своей работы, могли обратиться в жюри с апелляцией. Оказалось, что, ознакомившись накануне с решениями задач, ребята достаточно объективно оценили свои результаты и несогласных почти не было. А те немногие, кто обратился в апелляционную комиссию, в основном отстаивали свои в целом верные, но неумело сформулированные идеи. Особенно рьяно боролся за интересы ребят из своей команды заместитель капитана сборной Украины А. Новосельский (Киев, СПТУ № 16), за что и был впоследствии отмечен специальным призом «За настойчивость в спорах с жюри».

Вечером состоялась встреча с молодыми учеными Грузии и дискотека.

23 мая. Экспериментальный тур

За четыре часа каждый участник должен был выполнить два эксперимента (два часа на каждое задание). Работы были подобраны так, чтобы путь получения результата и оценка его точности и достоверности оказались не менее важными, чем сам результат. По ходу дела выяснилось, что большинство «думают руками»: сначала что-то сделают, а лишь потом понимают, что получилось. К сожалению, вопрос о точности полученных величин многие посчитали второстепенным, и некоторые вообще не обратили на него внимания.

В целом оценки за эксперимент хорошо коррелировали с оценками за теоретический тур. Правда, некоторые ребята лучше справились с экспериментом, чем с теоретическими задачами, что вполне естественно: в Тбилиси приехали ребята, знакомые с практикой не только по книгам.

24 мая. Закрытие олимпиады

Закрытие — это прежде всего подведение итогов и награждение победителей.

Дипломы I степени получили

по I курсу: Д. Вялков (Челябинск, СПТУ № 44), И. Екимов (Барановичи, СПТУ № 118), С. Михайлуца (Дубна, СПТУ № 67), А. Печенкин (Павлодар, СПТУ № 7), В. Уторин (Стрый, СПТУ № 34);

по II и III курсам: О. Влашин (Ивано-Франковск, СПТУ № 4), В. Дерюгин (Красноярск, СПТУ № 10), И. Петрухин (Северодонецк, СПТУ № 99), Ю. Прудкой (Комсомольский Харьковской обл., СПТУ № 31), В. Трофимюк (Здолбунов, СПТУ № 2).

Больше других дипломы I, II и III степени получили команды Украины, РСФСР, Казахстана и Белоруссии. На Украину уехало и несколько специальных призов, в том числе — за абсолютно лучший результат (В. Трофимюк). Специальный приз журнала «Квант» — годовая подшивка журнала за 1985 год с автографами членов редколлегии — был вручен А. Шамову, приехавшему в Тбилиси с Камчатки.

А. Э Аринштейн, Б. И. Геллер

XII Всероссийская олимпиада школьников

По сложившейся традиции, в дни весенних школьных каникул проходил заключительный, зональный этап Всероссийской физико-математической и химической олимпиады школьников 8—10 классов. Ниже приводятся условия задач по математике и физике, предлагавшихся на заключительном этапе, и фамилии победителей XII Всероссийской олимпиады школьников.

Математика

8 класс

1. Через точку O внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ проведены четыре окружности одинакового радиуса, каждая из которых касается двух смежных сторон четырехугольника. Докажите, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

2. Длина стороны правильного пятиугольника равна a. Вычислите длину диагонали пятиугольника: а) используя формулы тригонометрии; б) не используя формулы тригонометрии.

3. Целые числа a, b, c в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию. Может ли последняя цифра в десятичной записи числа $N=a^3+b^3+c^3-3abc$ быть равной 0, а предпоследняя цифра при этом быть равной 2?

4. По дороге едут четверо: первый — на автомобиле, второй — на мотоцикле, третий — на мопеде, четвертый — на велосипеде, каждый — со своей постоянной скоростью. Едущий на автомобиле догнал мопед в 12 часов,

встретился с велосипедистом в 14 часов, а с мотоциклистом — в 16 часов. Мотоциклист встретил мопед в 17 часов и догнал велосипедиста в 18 часов. Когда велосипедист встретил мопед?

5. На прямоугольном столе без наложений лежат 25 монет так, что нельзя положить еще одну монету, не накладывая ее на лежащие монеты. Докажите, что, допуская наложения монет, весь стол можно покрыть 100 такими монетами. (Монеты — это кружочки одинакового радиуса. Монета может высовываться за край стола, но так, чтобы ее центр оставался на столе. Покрыть стол монетами — значит расположить монеты на столе так, чтобы каждая точка стола находилась под какой-нибудь монетой.)

9 класс

1. По окружности в некотором порядке расположены 15 черных и 15 белых фишек. За один ход разрешается поменять местами любые две фишки. За какое наименьшее число ходов из произвольного исходного расположения фишек можно перейти к расположению, в котором каждые две соседние фишки имеют разный цвет?

2. Числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 неотрицательные, причем $a_1=a_7=0$. Докажите, что для некоторого номера $i\in\{2, 3, 4, 5, 6\}$ выполняется неравенство $a_{i+1}+a_{i-1}\leqslant a_i\sqrt{3}$.

3. Равные прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (вершины перечислены против часовой стрелки) наложены друг на друга так, что середины M их гипотенуз AB и A_1B_1 совпадают. Пусть D — точка пересечения прямых BC и B_1C_1, E — точка пересечения прямых AC и A_1C_1. Докажите, что точки C, D, M и E лежат на одной окружности.

4. На доске нарисовали треугольник ABC. На сторонах AB и BC вне треугольника построили квадраты с центрами P и Q, а на стороне AC отметили точку R, такую, что $AR:RC=1:2$. После этого с доски стерли все, кроме точек P, Q, R. Как с помощью циркуля и линейки восстановить треугольник ABC?

5. Натуральные числа 1, 2, ..., $3n$ произвольно разделили на три группы по n чисел в каждой. Докажите, что из каждой группы можно выбрать по одному числу так, что одно из выбранных чисел будет равно сумме двух других.

10 класс

1. Даны окружность и точка M внутри нее. Докажите, что сумма квадратов длин взаимно перпендикулярных хорд данной окружности, пересекающихся в точке M, есть постоянная величина.

2. Пусть a и b — различные положительные числа. Докажите, что справедливы неравенства:

$$\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}.$$

3. Найдите объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если диагонали AB_1, B_1C, BD_1 попарно перпендикулярны и их длины равны соответственно a, b, c.

4. Имеются гири массой 1^2 г, 2^2 г, 3^2 г, ..., 1000^2 г. Докажите, что их можно разделить на две группы одинаковой массы по 500 гирь в каждой.

5. Каждая точка плоскости окрашена в один из двух цветов. Известно, что у любого правильного треугольника со стороной 1 имеются вершины обоих цветов. а) Докажите, что найдется правильный треугольник со стороной $\sqrt{3}$, все вершины которого одного цвета. б) Приведите пример раскраски плоскости, удовлетворяющей условию задачи.

Физика

Задание по физике состояло из четырех теоретических и двух экспериментальных задач. Каждая задача оценивалась по десятибалльной системе и считалась решенной, если за ее решение давалось шесть и более баллов. Результаты оказались следующими:

Теоретический тур

Класс	Задачи: 1	2	3	4
8	48 %	14 %	37 %	2 %
9	49 %	23 %	9 %	23 %
10	74 %	23 %	51 %	5 %

Экспериментальный тур

Класс	Задачи: 1	2
8	25 %	13 %
9	55 %	51 %
10	24 %	25 %

Как видно, наибольшие затруднения вызвала задача 4 для учащихся 8 и 10 классов и задача 3 для учащихся 9 классов.

Теоретический тур

8 класс

1. В сосуде с водой плавает кусочек льда, удерживаемый нитью (рис. 1). Натяжение нити $F=10$ Н. На сколько изменится уровень воды в сосуде, если лед растает? Площадь сечения сосуда $S=100$ см^2.

2. На наклонной плоскости с углом наклона $\alpha=45°$ находится доска массой $M=1$ кг и длиной $l=1{,}4$ м, на конце которой лежит кубик массой $m=0{,}5$ кг (рис. 2). В начальный момент доска и кубик покоятся. Определите время соскальзывания кубика с доски. Коэффициент трения доски о плоскость $\mu=0{,}7$, трением кубика о доску пренебречь.

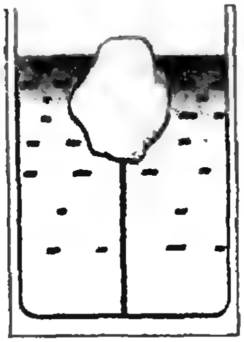


Рис. 1.

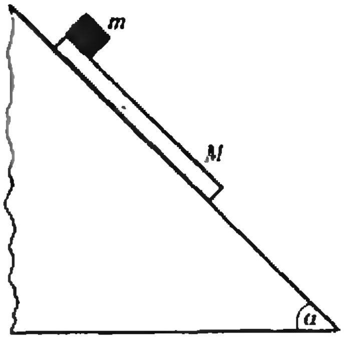


Рис. 2.

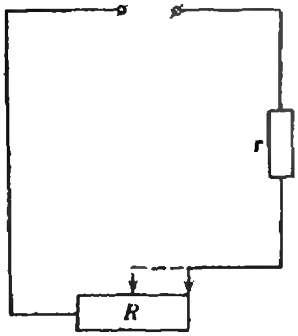


Рис. 3.

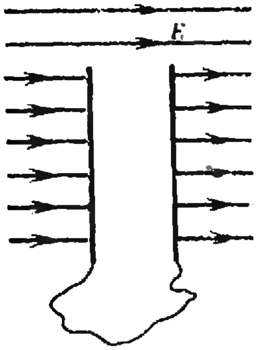


Рис. 4.

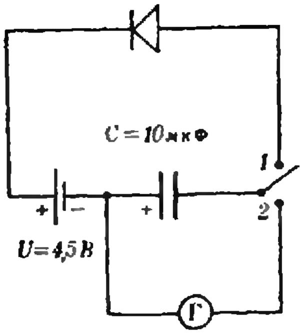


Рис. 5.

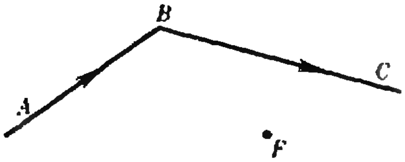


Рис. 6.

3. Нагреватель подключен к сети через реостат (рис. 3). Сопротивление реостата $R=30$ Ом. Если сопротивление нагревателя $r=90$ Ом, то при полностью введенном реостате вода закипает через время $t=8$ мин. При каком сопротивлении нагревателя вода закипит через время $t'=4$ мин, если реостат введен наполовину? Тепловыми потерями пренебречь.

4. Тело бросили вертикально вверх со скоростью $v_0=10$ м/с. В момент падения на землю оно имело скорость $v_к=9$ м/с. Определите время движения тела, если сила сопротивления пропорциональна скорости тела.

9 класс

1. Утюг с терморегулятором при номинальном напряжении сети периодически включается на 1 минуту, поддерживая почти неизменную температуру. При пониженном на 10 % напряжении сети это время увеличивается до 2 минут. При каком напряжении в сети терморегулятор еще может поддерживать эту температуру?

2. На берегу реки на некотором расстоянии друг от друга находятся два пункта A и B. Ваша задача приплыть на катере из пункта A, стоящего ниже по течению реки, в пункт B, затратив при этом минимальное количество горючего. Будем считать, что сила сопротивления пропорциональна скорости катера относительно воды, а расход горючего пропорционален мощности, развиваемой двигателем. Эти предположения являются несколько упрощенными, но они правильно отражают действительность. На скорость течения реки вдоль пути следования ограничений не накладывается, то есть она может меняться достаточно произвольно. Конечно, имеется в виду, что мощность двигателя достаточна, чтобы плыть против течения. Как найти необходимое время, если известна скорость реки в каждой точке пути?

3. Тело массой $m=1$ кг бросили вертикально вверх. Разность между начальной скоростью и скоростью в момент падения тела на землю $\Delta v=1$ м/с. Определите среднюю мощность, развиваемую силой сопротивления за все время движения, если сила сопротивления пропорциональна скорости тела.

4. Две плоскопараллельные пластины площадью S каждая соединены проводящей проволокой и находятся во внешнем однородном электростатическом поле с напряженностью $\vec{E}$ на расстоянии d друг от друга (рис. 4). Какую работу надо совершить для сближения пластин на расстояние $d/2$? Вектор напряженности $\vec{E}$ перпендикулярен плоскости пластин. Размеры пластин много больше расстояния между ними.

10 класс

1. Для измерения обратного тока полупроводникового диода была собрана схема, приведенная на рисунке 5. Перед подключением конденсатор зарядили до полного напряжения батареи, а затем включили в схему «плюсом» к «минусу» батареи. Выдержав ключ в положении *1* время $\tau_1=1$ мин, его перебросили в положение *2*. При этом стрелка гальванометра отклонилась на $n_1=5$ делений. Опыт повторили, время выдержки выбрали $\tau_2=2$ мин, при этом стрелка гальванометра отклонилась в другую сторону на $n_2=20$ делений. Определите по этим данным обратный ток диода, считая, что он практически не зависит от приложенного к диоду обратного напряжения.

2. На гладкой горизонтальной поверхности льда покоится доска массой M и длиной l, на одном из концов которой сидит котенок массой m. С какой наименьшей скоростью относительно льда он должен прыгнуть, чтобы попасть на другой конец доски? Какой угол α_0 с горизонтом должна составлять эта скорость, чтобы котенок затратил на прыжок к другому концу доски минимум энергии?

3. Два одинаковых маленьких шарика подвешены на одинаковых длинных нитях к одному крючку. Один из шариков отводят влево на некоторый малый угол, а второй — вправо (в той же плоскости) на угол вдвое меньший и одновременно отпускают. Через время τ после этого происходит упругое центральное соударение шариков. Через сколько времени после соударения нить второго шарика отклонится на свой первоначальный угол?

4. На рисунке 6 дан ход луча ABC через тонкую собирающую линзу и точка F — ее задний фокус. Найдите построением с помощью циркуля и линейки с делениями положение линзы и ее главную оптическую ось.

Экспериментальный тур

8 класс

1. Исследуйте зависимость КПД генератора переменного тока от величины нагрузочного сопротивления.

Оборудование: электрический генератор переменного тока, штатив с муфтой и лапкой, нить, соединительные провода, вольтметр переменного тока, магазин сопротивлений, линейка, секундомер, набор грузов для работ по механике.

2. Оцените свою максимальную мощность при прыжке в высоту без разбега.

Оборудование: измерительная лента.

(Окончание см. на с. 57)

Призеры XII Всероссийской олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Безрукавников Р. (Калуга, с. ш. № 24),
Блинова Т. (Йошкар-Ола, с. ш. № 4),
Калинин А. (Саратов, с. ш. № 13),
Румынин Д. (Красноярск, с. ш. № 10);

по 9 классам —
Васильев К. (Тула, с. ш. № 36),
Дынников И. (Жуковский, с. ш. № 1),
Каринский А. (Невинномысск, с. ш. № 6),
Лещенко А. (Новокузнецк, с. ш. № 11),
Стыркас К. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Чувелев М. (Горький, с. ш. № 4);

по 10 классам —
Дынников А. (Жуковский, с. ш. № 1),
Игнатьев М. (Саратов, с. ш. № 13),
Капович В. (Хабаровск, с. ш. № 2),
Шеремет С. (Воркута, с. ш. № 14).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Гравит В. (Северодвинск, с. ш. № 27),
Либанов М. (Ангарск, с. ш. № 10),
Шамов З. (Махачкала, с. ш. № 39),
Щербаков К. (Арзамас, с. ш. № 2);

по 9 классам —
Гусманов Р. (п. Дюртюли Башкирской АССР, с. ш. № 3),
Малыгин С. (Липецк, с. ш. № 52),
Рогонов А. (Касимов, с. ш. № 1),
Черных А. (Краснодар, с. ш. № 4),
Шанько Ю. (Красноярск, с. ш. № 10);

по 10 классам —
Арапов А. (Воронеж, с. ш. № 58),
Вайсбурд М. (Томск, с. ш. № 6),
Рябочкин М. (Калуга, с. ш. № 10),
Филимоненков В. (Свердловск, с. ш. № 130).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Вологодский В. (Омск, с. ш. № 91),
Исаханов А. (Сочи, с. ш. № 22),
Пелевин О. (Кострома, с. ш. № 32),
Петрова Н. (Пермь, с. ш. № 22);

по 9 классам —
Меркулов Б. (Куйбышев, с. ш. № 11),
Осолоткин А. (Петрозаводск, с. ш. № 29),
Плотников А. (Новочеркасск, с. ш. № 7),
Поляков К. (Хабаровск, с. ш. № 2),
Руденко К. (Андропов, с. ш. № 27);

по 10 классам —
Асташкевич А. (Томск, с. ш. № 24),
Клеонский В. (Кириши, с. ш № 4),
Муштари А. (Казань, с. ш. № 18),
Рощин А. (Тамбов, с. ш. № 29).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Григорян Г. (Краснодар, с. ш. № 34),
Жуков В. (Магадан, с. ш. № 1),
Медведев М. (Горький, с. ш. № 40),
Мороз В. (Калининград, с. ш. № 32);

по 9 классам —
Будько Д. (Белгород, с. ш. № 3),
Васильев Ю. (Ангарск, с. ш. № 10),
Карасев Д. (п. Тучково Московской обл., Тучковская с. ш.),
Мельников Д. (Тула, с. ш. № 36),
Наянов Ю. (Саратов, с. ш. № 13),
Пигарев А. (Улан-Удэ, с. ш. № 9),
Щербаков А. (Обнинск, с. ш. № 10),
Янович А. (Челябинск, с. ш. № 31);

по 10 классам —
Бедов К. (Челябинск, с. ш. № 138),
Булатов О. (Ставрополь, с. ш. № 1),
Волков О. (Горький, с. ш. № 23),
Иртегов Д. (Иркутск, с. ш. № 19),
Кларк П. (Тула, с. ш. № 36),
Мингалев И. (Апатиты, с. ш. № 2).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Билибин А. (Боровичи, с. ш. № 1),
Мамаев А. (Заволжье, с. ш. № 17),
Михайловский Н. (Красноярск, с. ш. № 20),
Шандыбин С. (Брянск, с. ш. № 7);

по 9 классам —
Бобылев С. (Березники, с. ш. № 3),
Бознев А. (Нальчик, с. ш. № 2),
Ивашкович Е. (Прокопьевск, с. ш. № 72),
Розенберг А. (Уфа, с. ш. № 91),
Слесарев В. (Тула, с. ш. № 36);

по 10 классам —
Зайденварг А. (Кемерово, с. ш. № 1),
Иванов С. (Уфа, с. ш. № 12),
Мячин А. (Кострома, с. ш. № 34),
Патрушев К. (Элиста, с. ш. № 3).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Волынский К. (п. Протва Калужской обл., с. ш. № 1),
Головин Д. (Тамбов, с. ш. № 29),
Сибиряков А. (Томск, с. ш. № 30),
Тодощенко И. (Пермь, с. ш. № 16);

по 9 классам —
Бабанов М. (Полевской, с. ш. № 18),
Вихлин А. (Рязань, с. ш. № 20),
Курзенков А. (Ковров, с. ш. № 1),
Логвиненко С. (Орел, с. ш. № 19),
Тернугов В. (Томск, с. ш. № 50);

по 10 классам —
Абанов А. (Красноярск, с. ш. № 170),
Ларкин А. (Армавир, с. ш. № 6),
Нецветаев Д. (Челябинск, с. ш. № 127),
Орехов Д. (Новгород, с. ш. № 10).

(Начало см. на с. 53)

9 класс

1. Определите влажность воздуха в комнате.

Оборудование: водяной манометр, шар для взвешивания воздуха, резиновая трубка, термометр, пипетка, справочник по физике.

2. Одним из способов получения холода является смешивание снега (или льда) с поваренной солью. Определите, какую максимальную концентрацию соли имеет смысл создавать в таком холодильнике.

Оборудование: снег (или мелко колотый лед), калориметр, термометр, весы с разновесами, ложечка.

10 класс

1. Определите оптическую систему «черного ящика».

Оборудование: «черный ящик», миллиметровая бумага, лист картона, булавки, линейка.

2. Исследуйте зависимость жесткости пружины от ее диаметра. Полученные результаты объясните.

Оборудование: штатив с лапкой, набор пружин, линейка, набор грузов, нить.

Публикацию подготовили

Б. Б. Буховцев, Б. Н. Кукушкин,
Л. П. Купцов, О. Ю. Овчинников,
С. В. Резниченко

Ответы, указания, решения

Где ошибка?
(*см. с. 21*)

1. Написанная система неравенств выражает **необходимое**, но не достаточное условие того, что оба корня больше 1. Чтобы найти правильное решение, вычислим корни: $x_{1,2}=2\pm\sqrt{5-a^2}$. Условие задачи равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2+\sqrt{5-a^2}>1, \\ 2-\sqrt{5-a^2}>1, \\ a^2<5 \end{cases}$$

(первое из которых, конечно, можно отбросить, поскольку оно является следствием второго).
Ответ: $2<a<\sqrt{5}$ или $-\sqrt{5}<a<-2$.

2. Условиям задачи удовлетворяет середина O_1 ребра BD, которая, конечно, действительно является граничной точкой тетраэдра. Но на самом деле таких точек две. Чтобы получить вторую точку, необходимо провести прямую через точку O_1 и середину O_2 ребра AC и взять на ней такую точку X, что O_1 есть середина отрезка XO_2 (рис. 1). Чтобы обосновать это, удобно воспользоваться прямоугольной системой координат с началом в точке O_1, у которой ось x направлена по ребру BD, а ось z — по прямой O_1O_2.
Ответ: граничная или внешняя.

3. В каждый из трехгранных углов призмы можно вписать шар, касающийся конуса или его продолжения. Восемь получающихся шаров разбиваются на четыре пары одинаковых. Радиусы четырех различных шаров найдены правильно. Однако один из этих шаров условиям задачи не удовлетворяет: шары радиуса 3/5, вписанные в трехгранные углы с вершинами A_1 и C_1, касаются не конуса, а его **продолжения**. Остальные шары действительно касаются конуса.

Ответ: $\frac{12}{29}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{12}{25}$.

Избранные школьные задачи

1. $(n^2+n)^2=n^4+2n^3+n^2<n^4+2n^3+2n^2+2n+1<n^4+2n^3+3n^2+2n+1=(n^2+n+1)^2$.

2. **Указание.** Один из концов отрезка лежит на пересечении данной окружности и прямой, центрально-симметричной данной прямой относительно данной точки. Задача может иметь 0, 1 или 2 решения.

3. $\{1; 3; 5; 9; 21\}$. **Указание.** Из равенства

$$n^3+3=(n^3+27)-24=(n+3)(n^2-3n+9)-24$$

следует, что число $n+3$ является делителем числа 24.

4. Существует. **Указание.** Воспользуйтесь тем, что $a=\frac{S}{2h_a}$, и докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}>\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

5. 2300 км. **Решение.** Рассмотрим произвольный путь автомобилиста. Отмерив от конца 1500 км, заметим, что в этой точке у автомобилиста было не менее 150 л бензина. Значит, до этого места он проехал каждую точку пути не менее трех раз. Отложим от этого места еще 500 км назад и увидим, что здесь у автомобилиста должно быть не менее 300 л бензина. Поэтому любую предыдущую точку пути он проехал не менее пяти раз. Отложим назад еще 300 км. На эти 300 км потрачено не менее 150 л бензина. Значит, более 2300 км автомобилист проехать не может. Покажем, что автомобилист может проехать 2300 км.

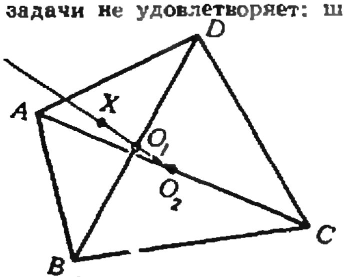


Рис. 1.

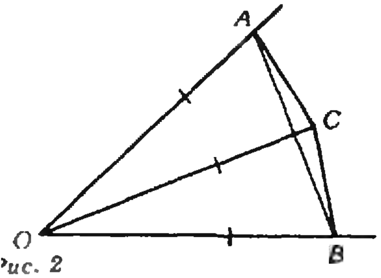


Рис. 2

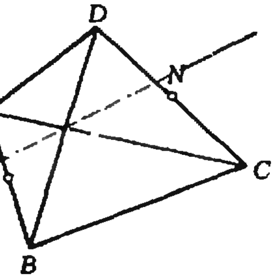


Рис. 3.

Автомобилист берет 150 л бензина и проезжает 300 км. Оставляет 90 л, возвращается назад, снова берет 150 л бензина и снова проезжает 300 км. Оставляет еще 90 л, опять возвращается назад, забирает последние 150 л и снова проезжает расстояние 300 км. Тем самым на отметке в 300 км он имеет 300 л бензина. Автомобилист наполняет бак и проезжает 500 км. Оставляет 50 л, возвращается к бензину и забирает его весь. Доехав до отметки 800 км, забирает оставленные 50 л, после чего проезжает еще 1500 км.

6. $(7^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}=7^5=16\,807>15\,625=5^6>(5^{\sqrt{7}})^{\sqrt{5}}$, так что

$$7^{\sqrt{5}}>5^{\sqrt{7}}.$$

7. Нужно выбрать такую конфигурацию, для которой $OA=OB=OC$ (рис. 2). Указание. Докажите, что из треугольников с данным углом и данной противолежащей стороной наибольшую площадь имеет равнобедренный. Применив это утверждение к треугольнику OAB (считая пока треугольник ABC неизменным), получаем, что для четырехугольника $OABC$ наибольшей площади должно быть $OA=OB$, то есть точка C должна лежать на биссектрисе угла AOB. Остается применить то же утверждение к треугольникам OAC и OBC.

8. Не делится. Решение. Пусть v_n — остаток от деления на 7 числа u_n. Легко посчитать несколько первых членов последовательности v_n:

$$v_1=1,\ v_2=1,\ v_3=2,\ v_4=5,\ v_5=1,\ v_6=5,\ v_7=5,\ v_8=1.$$

Так как пара (v_4, v_5) совпадает с парой (v_7, v_8), последовательность v_n, начиная с четвертого члена, периодическая с периодом 3, то есть $v_{n+3}=v_n$ при $n\geqslant 4$. Значит, среди членов последовательности v_n нет нуля.

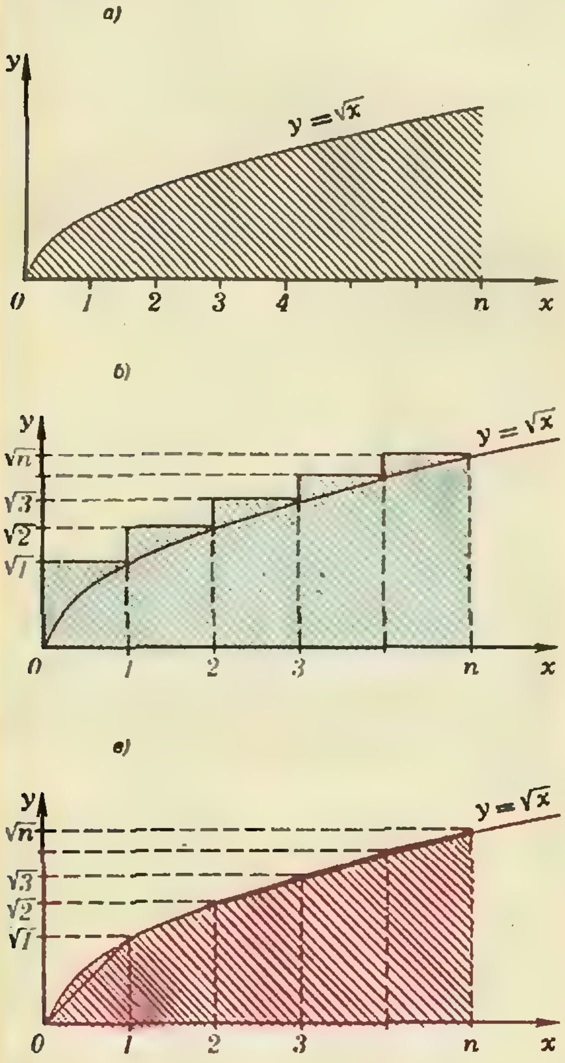


Рис. 4.

9. Выберем произвольную точку O плоскости. Обозначим

$$\vec{OA}=\vec{a},\ \vec{OB}=\vec{b},\ \vec{OC}=\vec{c},\ \vec{OM}=\vec{m},\ \vec{ON}=\vec{n}.$$

Тогда

$$\vec{n}=\frac{n}{n+1}\vec{a}+\frac{1}{n+1}\vec{c},$$

$$\vec{m}=\frac{n-1}{n}\vec{a}+\frac{1}{n}\vec{b}.$$

Пусть $\vec{b}=x\vec{a}+y\vec{c}$. Тогда

$$\vec{n}=\frac{n}{n+1}\left(\vec{a}+\frac{1}{n}\vec{c}\right),$$

$$\vec{m}=\left(1-\frac{1}{n}+\frac{x}{n}\right)\vec{a}+\frac{y}{n}\vec{c}.$$

Если прямая MN проходит через точку O, то векторы $\vec{n}$ и $\vec{m}$ коллинеарны, то есть $1-\frac{1}{n}+\frac{x}{n}=y$, откуда $y-1=(1-x)\cdot\frac{1}{n}$. Так как это равенство должно выполняться при любом натуральном n, получаем, что $x=1$, $y=1$. Поэтому $\vec{b}=\vec{a}+\vec{c}$. Значит, *точка O такова, что четырехугольник ABCO — параллелограмм.*

10. При $a<-\frac{1}{4}$ решений нет.

При $a\geqslant-\frac{1}{4}$ получаем $x=\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$.

11. $\frac{1}{4}$. Решение. Пусть $x_1+x_3+x_5+\ldots=a$, $x_2+x_4+x_6+\ldots=b$. Тогда $a+b=1$ и

$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n\leqslant$$
$$\leqslant(x_1+x_3+\ldots)(x_2+x_4+\ldots)=$$
$$=ab=a(1-a)=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-a\right)^2\leqslant\frac{1}{4}.$$

Если положить $x_1=x_2=1/2$, $x_3=x_4=\ldots=x_n=0$, то

$$x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=\frac{1}{4}.$$

12. Проведем общий перпендикуляр MN к противоположным ребрам AB и CD тетраэдра (рис. 3) и рассмотрим симметрию тетраэдра относительно прямой MN. При этой симметрии прямая AB перейдет в себя, точка C перейдет в точку C', расположенную от прямой AB на таком же расстоянии, как точка C. Но на прямой CD, кроме точки C, есть не более одной точки, отстоящей от прямой AB на такое же расстояние, как точка C (при удалении от N расстояние увеличивается).

С другой стороны, из условия задачи следует, что точка D отстоит от прямой AB на такое же расстояние, как точка C (эти расстояния — высоты равновеликих треугольников ADB и ACB с общим основанием AB). Значит, при нашей симметрии вершина C переходит в вершину D (другая возможность $C\to C$, $D\to D$ привела бы к тому, что $C=D$). Аналогично вершина A переходит в вершину B и B переходит в A. Следовательно, треугольник DBC переходит в треугольник CAD и, значит, эти треугольники равны.

13. Рассмотрим график функции $y=\sqrt{x}$ на отрезке $[0; n]$. Пусть S — площадь криволинейного треугольника, ограниченного кривой $y=\sqrt{x}$, осью Ox и прямой $x=n$ (рис. 4, а).

Тогда $S=\int\limits_0^n \sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\,n\sqrt{n}$.

Пусть $S_n=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}$. Легко видеть, что S_n — это площадь голубой фигуры на рисунке 4, *б*. Поэтому $S_n>S$.

С другой стороны, площадь розовой фигуры на рисунке 4, *в* равна $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n-1}+\frac{\sqrt{n}}{2}=(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n})-\frac{\sqrt{n}}{2}=S_n-\frac{\sqrt{n}}{2}$.

и меньше S. Таким образом, $S_n>S>S_n-\frac{\sqrt{n}}{2}$.

Это и дает требуемое неравенство.

14. Может. Указание. Рассмотрите правильную пирамиду $ABCD$ с очень большим по сравнению с ребром основания ABC боковым ребром и возьмите точки K и L где-нибудь на основании ABC и две другие точки M и N где-то у вершины D. Сумма длин ребер пирамиды $KLMN$ почти в 4/3 раза больше суммы длин ребер пирамиды $ABCD$.

15. $\frac{1-3^{1986}}{2}$. Указание. Рассмотрите многочлен $\frac{P(x)-P(-x)}{2}$, где $P(x)=(x^5+x-1)^{1986}$.

Искомая сумма равна $\frac{P(1)-P(-1)}{2}$.

Калейдоскоп «Кванта»

Головоломки

Цифры на кубике. Условию задачи удовлетворяет только тот случай, при котором суммы цифр на противоположных гранях равны по 11, то есть против цифры 4 находится цифра 7, против цифры 5 — цифра 6, против цифры 8 — цифра 3.

Треугольники и квадрат. См. рисунок 5.

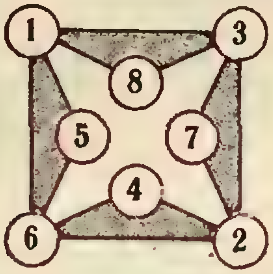


Рис. 5.

Оптические приборы

1. $D=-5$ дптр.
2. $H\leqslant Fl/a=1500$ м $=1{,}5$ км, $v\leqslant l/t=100$ м/с $=360$ км/ч.
3. $b=2$ см.
4. $D_1=kF_2/(Id_0)=400$ дптр.
5. Труба Галилея: $F_1=\gamma L/(\gamma-1)=45$ см, $F_2=F_1-L=5$ см;
   труба Кеплера: $F_1=\gamma L/(\gamma+1)=36$ см, $F_2=L-F_1=4$ см.

I Всесоюзная олимпиада по физике учащихся средних профессионально-технических училищ

Теоретический тур

I курс

1. $x=\frac{1}{k}\left(mg-T+\frac{T^2}{2mg}\right)$ при $T\geqslant 2mg$,

$x=\frac{T-mg}{k}$ при $T<2mg$.

2. $l_0=\frac{(L-x_1)\,x_1T_2-(L-x_2)\,x_2T_1}{x_1T_2-x_2T_1}=70$ см;

при температуре жидкого гелия $x=L-l_0=10$ см.

3. $\Delta T_+=(1-k)\,m\lambda/(cM)$; $\Delta T_-=km\lambda/(cM)$; при $k=1/2$ $\Delta T_+=\Delta T_-\approx 9$ К.
4. $R_0\geqslant 99R=99$ кОм.
5. $R_{AB}=629R/60\approx 10{,}5R$.
6. $l=\frac{v\,(T_2^2-4T_1^2)}{2\,(4T_1-T_2)}=3750$ м $=3{,}75$ км.

Указание. Первый сигнал идет от места взрыва до гидрофона по прямой, без отражений; второй сигнал испытал отражение от поверхности воды; третий сигнал испытал два отражения от поверхности воды и одно отражение от дна водоема.

II и III курсы

1. См. решение задачи Ф993 из «Задачника «Кванта».
2. $T=4\pi\sqrt{L/(5g)}$.
3. $\lambda=c\,(t_1-t_2)\,\tau_2/\tau_1\approx 336$ кДж/кг.
4. В первом случае последовательно с прибором нужно включить добавочное сопротивление $R_1=(U/(i_0n))-r\approx 400$ кОм; во втором случае параллельно прибору нужно включить шунт сопротивлением $R_2=ri_0n/(I-i_0n)\approx 0{,}03$ Ом.
5. $\Delta I_{\max}=-U/R$; это изменение тока достигается исключением ребра AB.
6. $R\geqslant h/\sqrt{n^2-1}$.

XII Всероссийская олимпиада школьников

Математика

8 класс

1. Центры A_1, B_1, C_1, D_1 данных окружностей являются вершинами четырехугольника, вписанного в окружность того же радиуса с центром O (рис. 6). Следовательно, $\widehat{A_1B_1C_1}+\widehat{A_1D_1C_1}=180°$. Так как соответствующие стороны четырехугольников $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллельны, то $\widehat{ABC}+\widehat{ADC}=180°$, и поэтому около $ABCD$ можно описать окружность.

Предостережение: четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ не обязательно подобны!

2. а) Ответ: $2d\cos 36°$.

б) Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник со стороной a, M — точка пересечения диагоналей AD и CE, x — отношение длины диагонали к длине стороны (рис. 7). Из подобия треугольников EMD и AMC получаем:

$$\frac{ED}{EM}=\frac{AC}{MC},\ \text{или}\ \frac{a}{(x-1)\,a}=\frac{xa}{a}.$$

Следовательно, $x^2-x-1=0$, $x=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, или $AC=\frac{(1+\sqrt{5})\,a}{2}$.

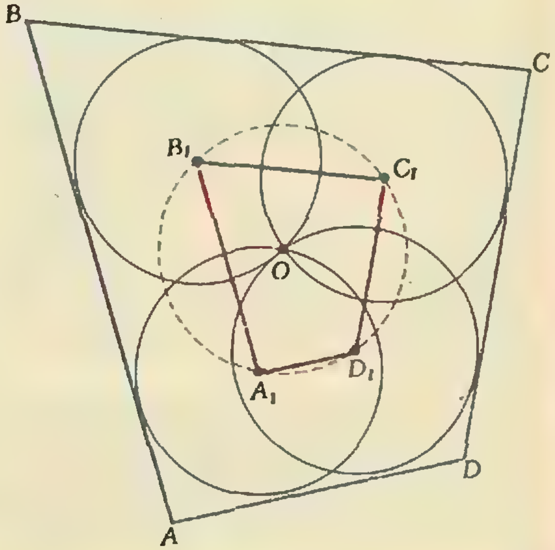


Рис. 6.

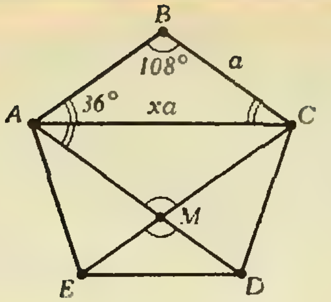


Рис. 7.

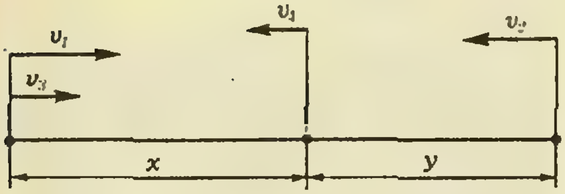


Рис. 8.

3. Если десятичная запись числа N оканчивается на 20, то $N=100M+20$, где M — целое число. Следовательно, N делится на 5 и не делится на 25. Последнее невозможно: если данное число N делится на простое число p, то оно делится и на p^2. Действительно, знаменатель прогрессии q — рациональное число. Представив q в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, получим, что $c=am^2/n^2$, то есть a делится на n^2. Следовательно, $a=kn^2$, $b=knm$, $c=km^2$, где k — целое число. Если $N=k^3(n^3-m^3)^2$ делится на p, то либо k, либо n^3-m^3 делится на p, то есть N делится на p^2.

4. **Ответ.** В 15 ч 20 мин. **Решение.** Обозначим через v_1, v_2, v_3, v_4 скорости автомобиля, мотоцикла, мопеда и велосипеда, через x и y — расстояния, отделявшие в 12 часов велосипедиста от автомобилиста и мотоциклиста (рис. 8). Условия задачи приводят к системе уравнений $x=2(v_1+v_4)$, $x+y=4(v_1+v_2)$, $x+y=5(v_2+v_3)$, $y=6(v_2-v_4)$. Пусть велосипедист встретил мопед в t часов. Тогда $x=(t-12)(v_3+v_4)$. Из полученной системы находим, что $x=\frac{10}{3}(v_3+v_4)$. Следовательно, $t=15\frac{1}{3}$.

5. **Решение.** Из условия следует, что каждая точка стола удалена от центра некоторой монеты на расстояние, меньшее диаметра монеты. Уменьшим все линейные размеры (стола, монет и т. д.) вдвое. Полученный столик можно считать четвертью данного стола. На столике расположены 25 монет вдвое меньшего радиуса (назовем их монетками), причем каждая его точка будет удалена от центра некоторой монетки на расстояние, меньшее радиуса монеты (не монетки!). Если теперь, не меняя положения центров монеток на столике, увеличить их радиусы вдвое (то есть превратить в монеты), то столик будет покрыт 25 монетами. Таким образом, четверть данного стола может быть покрыта 25 монетами, а весь стол, следовательно, — 100 монетами.

9 класс

1. **Решение.** Занумеруем фишки по часовой стрелке числами 1, 2, 3, ..., 30. Не ограничивая общности, можно считать, что среди 15 фишек с четными номерами не более 7 белых. Тогда среди фишек с нечетными номерами столько же черных. Меняя их местами с белыми фишками, имеющими четные номера, добьемся требуемого расположения не более чем за 7 ходов.

Замечание. Если фишки расположены так, что сначала подряд идут 15 белых фишек, а затем — 15 черных, то менее чем за 7 ходов получить требуемое расположение нельзя.

2. **Решение.** Предположим противное: $a_3+a_1>a_2\sqrt{3}$, $a_4+a_2>a_3\sqrt{3}$, $a_5+a_3>a_4\sqrt{3}$, $a_6+a_4>a_5\sqrt{3}$, $a_7+a_5>a_6\sqrt{3}$. Так как $a_1=0$, то из первых двух неравенств следует, что $a_4+a_2>a_3\sqrt{3}>3a_2$, или $a_4>2a_2$. Из двух последних неравенств аналогично находим, что $a_4>2a_6$. Следовательно, $a_4>a_2+a_6$. С другой стороны, сложив второе и четвертое неравенства, получим, учитывая третье неравенство, что $a_6+2a_4+a_2>(a_3+a_5)\sqrt{3}>3a_4$, то есть $a_2+a_6>a_4$. Противоречие.

Замечание. Семерка чисел 0, 1, $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{3}$, 1, 0 удовлетворяет условию задачи; для нее при каждом $i=2, 3, 4, 5, 6$ выполняется равенство $a_{i+1}+a_{i-1}=a_i\sqrt{3}$.

3. **Указание.** Треугольник ABC получается из $\triangle A_1B_1C_1$ поворотом вокруг точки M на некоторый угол α. Пусть K — середина отрезка BC, L — середина AC, K_1 — середина отрезка B_1C_1, L_1 — середина A_1C_1. Точка K_1 получается из K тем же поворотом. Рассмотрим отрезок DM. Этот отрезок является биссектрисой угла KMK_1, причем длина его равна $MK/\cos(\alpha/2)$. Аналогично рассуждаем про точку E. Итак, точки D и E получаются из точек K и L произведением поворота на угол $\alpha/2$ и гомотетии с центром в точке M и коэффициентом $1/\cos(\alpha/2)$. Поэтому угол DME — прямой и, следовательно, точка M лежит на окружности с диаметром DE. Точки C и C_1 также принадлежат этой окружности.

4. **Исследование.** Пусть S — середина AC. Тогда PQS — равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой PQ. Это очевидно, если $\hat{B}=90°$. Пусть, для определенности, $\hat{B}<90°$ и пусть D и E — середины сторон AB и BC соответственно (рис. 9). Тогда треугольники PDS и SEQ равны по двум сторонам ($PD=SE$ и $DS=EQ$) и углу между ними ($\widehat{PDS}=\widehat{SEQ}$). Следовательно, $PS=QS$ и $\widehat{PSD}=\widehat{SQE}$. Стороны DS и EQ равных углов PSD и SQE взаимно перпендикулярны, эти углы отложены от прямых DS и EQ в одном и том же направлении (на рисунке 9 — по часовой стрелке), поэтому стороны PS и SQ также взаимно перпендикулярны.

Построение. На срединном перпендикуляре к отрезку PQ от середины T отрезка откладываем отрезок $ST=\frac{1}{2}PQ$ так, чтобы точки S и R находились по одну сторону от прямой PQ. На прямой RS строим точки A и C такие, что $AR=2RS$, $CS=AS$. Точку B находим из

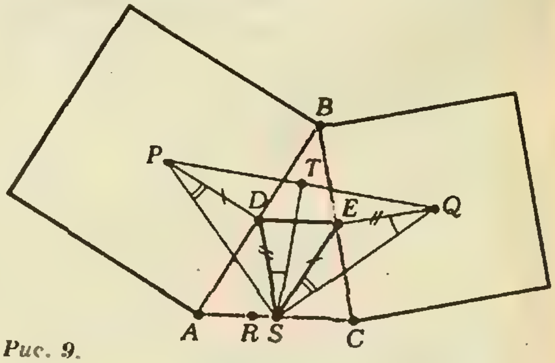


Рис. 9.

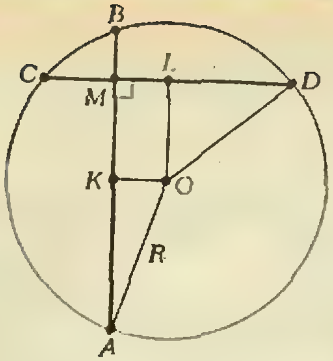


Рис. 10.

условия, что $\triangle APB$ — равнобедренный прямоугольный с гипотенузой AB.

5. Предположим противное: числа 1, 2, ..., $3n$ разделены на три такие группы A, B, C, что указанный выбор невозможен. Пусть a, b, c — наименьшие элементы в группах, причем $a<b<c$. Тогда $a=1$, $b\geqslant 2$. Если $b=2$, то $c\neq 3$ и, следовательно, $c\geqslant 4$. Если $b>2$, то $c\geqslant b+1\geqslant 4$, то есть в любом случае $c\geqslant 4$. Обозначим через s наименьшую (по абсолютной величине) разность между соседними членами последовательности, образованной из чисел группы C, расположенных в порядке возрастания. Рассмотрим три случая.

а) $s\geqslant 3$. Тогда из чисел $3k-2$, $3k-1$, $3k$, где $k=1, 2, ..., n$, не более чем одно входит в C, причем из чисел 1, 2, 3 ни одно не входит в C. Следовательно, в C содержится не более $n-1$ чисел. Противоречие.

б) $s=2$. Пусть c' — произвольное число из C. Тогда $c'-1\notin C$. Так как $1\in A$ и $(c'-1)+1=c'$, то $c'-1\notin B$. Следовательно, $c'-1\in A$, то есть в A содержится n чисел вида $c'-1$, где $c'\in C$. Так как $1\in A$, а $c'-1\geqslant 3$ для любого $c'\in C$, то в A содержится не менее $n+1$ чисел. Противоречие.

в) $s=1$. Выберем среди чисел c, принадлежащих C и таких, что $c+1$ также принадлежит C, наименьшее число $\bar{c}$. Рассмотрим (натуральные!) числа $\bar{c}-b$ и $\bar{c}-b+1$ и докажем, что они оба принадлежат C (тем самым будет получено противоречие с выбором $\bar{c}$). Очевидно, что $b-1\in A$. Так как $(\bar{c}-b+1)+(b-1)=\bar{c}$, то $\bar{c}-b+1\notin B$. Так как $(\bar{c}-b+1)+b=\bar{c}+1$, где $\bar{c}+1\in C$ в силу выбора $\bar{c}$, то $\bar{c}-b+1\notin A$. Следовательно, $\bar{c}-b+1\in C$. Аналогично доказывается, что $\bar{c}-b\in C$.

10 класс

1. **Решение.** Пусть O — центр круга, R — его радиус, AB и CD — взаимно перпендикулярные хорды, K и L — середины AB и CD (рис. 10). Если $M=O$, то утверждение очевидно. Если $M\neq O$, то $AB^2+CD^2=4(AK^2+LD^2)=4((R^2-OK^2)+(R^2-OL^2))=8R^2-4OM^2$.

2. **Указание.** Не ограничивая общности, можем считать, что $0<b<a$. Обозначим $x=\frac{a}{b}$. Тогда данные неравенства равносильны неравенствам $2\frac{x-1}{x+1}<\ln x<\frac{x-1}{\sqrt{x}}$. Оба эти неравенства доказываются аналогично. Для доказательства левого неравенства достаточно проверить, что функция $f(x)=\ln x-2\frac{x-1}{x+1}$ строго возрастает при $x>1$. Проверку можно провести, например, с помощью производной.

3. **Ответ.** $V=\frac{1}{3}abc$. **Решение.** Пусть h — высота параллелепипеда, проведенная из вершины B_1 к основанию $ABCD$. Возьмем на продолжении отрезка DB за точку B точку O так, чтобы $OB=BD$ (рис. 11). Тогда OB_1D_1B — параллелограмм, и поэтому $OB_1\parallel BD_1$, $OB_1=c$. Следовательно, $V_{B_1AOC}=\frac{1}{3}OB_1\cdot\left(\frac{1}{2}AB_1\cdot CB_1\right)=\frac{1}{6}abc$. Так как $S_{AOC}=\frac{3}{2}S_{ABCD}$, то $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}=h\cdot S_{ABCD}=2\cdot\left(\frac{1}{3}h\cdot S_{AOC}\right)=2V_{B_1AOC}=\frac{1}{3}abc$.

4. **Указание.** Пользуясь тождеством $x^2+(x+3)^2+(x+5)^2+(x+6)^2=(x+1)^2+(x+2)^2+(x+4)^2+(x+7)^2$ и полагая $x=1+8k$, где $k=0, 1, 2, ..., 124$, находим нужные 125 четверок гирь для каждой из групп.

5. а) Возьмем отрезок AB длины 2 с разноцветными концами. Такой отрезок существует: в противном случае все точки окружности α радиуса 2 с центром в произвольной точке O были бы окрашены в тот же цвет, что и точка O, и рассматривая всевозможные окружности β радиуса 2 с центрами на окружности α, получили бы круг радиуса 4 с центром O, все точки которого одного цвета, что невозможно. Пусть цвет точки C — середины AB — совпадает с цветом точки A. Построим правильные треугольники ACD и ACE, как на рисунке 12. По условию точки D и E окрашены в тот же цвет, что и точка B, и BDE — искомый треугольник.

б) Разобьем плоскость на горизонтальные полосы ширины $\sqrt{3}/2$, включающие свои нижние границы, но не включающие верхние. Раскра-

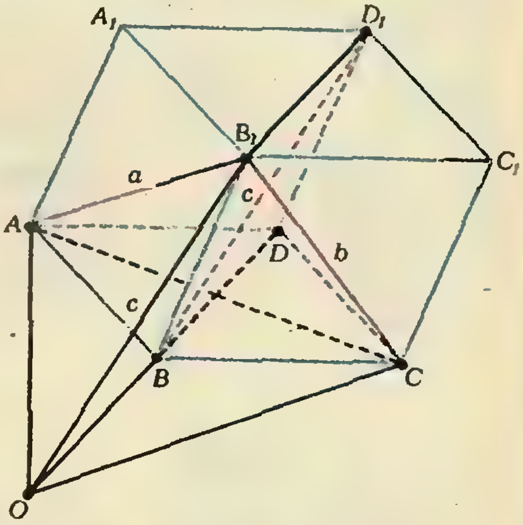


Рис. 11.

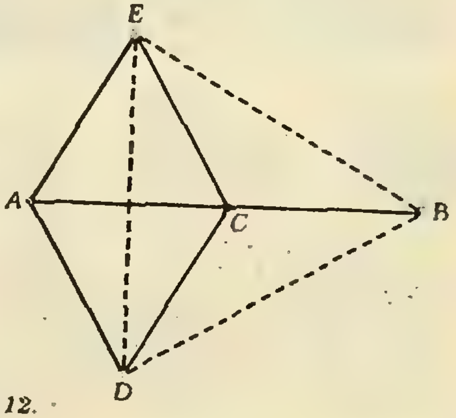


Рис. 12.

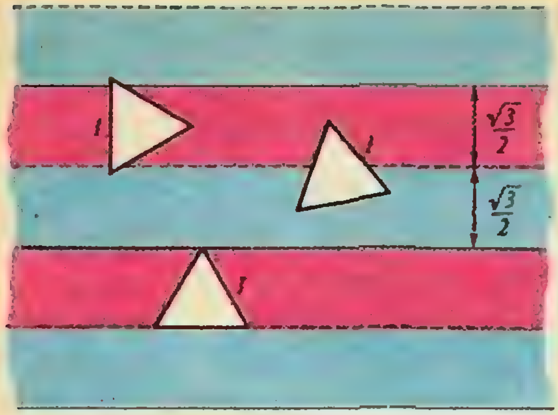


Рис. 13.

сим полосы поочередно в два цвета, как на рисунке 13. Указанная раскраска удовлетворяет, очевидно, условию задачи.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. $\Delta h = F/(\rho_в gS) = 0{,}1$ м $= 10$ см, где $\rho_в = 10^3$ кг/м^3 — плотность воды.
2. Поскольку доска не скользит, время движения кубика

$$t = \sqrt{2l/(g \sin \alpha)} \approx 0{,}6 \text{ с.}$$

3. $r' = 45$ Ом или $r'' = 5$ Ом.
4. $t = (v_0 + v_к)/g \approx 1{,}9$ с.

9 класс

1. Допустимо падение напряжения на 20 %.
2. Время движения

$$t = \Delta l \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v_i},$$

где Δl — длина каждого i-го участка пути, на котором скорость реки v_i можно считать постоянной, n — число таких участков (чем больше n, тем точнее можно определить t).
3. $N_{ср} = mg\Delta v/2 = 4{,}9$ Вт.
4. $A = \varepsilon_0 SdE^2/4$, где ε_0 — диэлектрическая постоянная.

10 класс

1. $I = \dfrac{CU(n_1 + n_2)}{n_1\tau_2 + n_2\tau_1} \approx 0{,}6$ мкА.
2. $v_{0\,\min} = \sqrt{\dfrac{lg}{(1 + m/M)\sin 2\alpha}}$,

$\alpha_0 = \operatorname{arctg} \sqrt{1 + m/M}$.
3. $t = \tau/3$.
4. Построение ясно из рисунка 14. Соединим точки B и F и проведем окружность с диаметром BF. Продолжим луч AB и будем вращать линейку с делениями вокруг точки F до тех пор, пока отрезок FK (точка K лежит на луче BC) не станет равным отрезку EG (точка G принадлежит окружности). Восставим перпендикуляр FO (точка O лежит на окружности) к прямой FE. Точка O — оптический центр линзы, FO — отрезок, принадлежащий ее главной оптической оси.

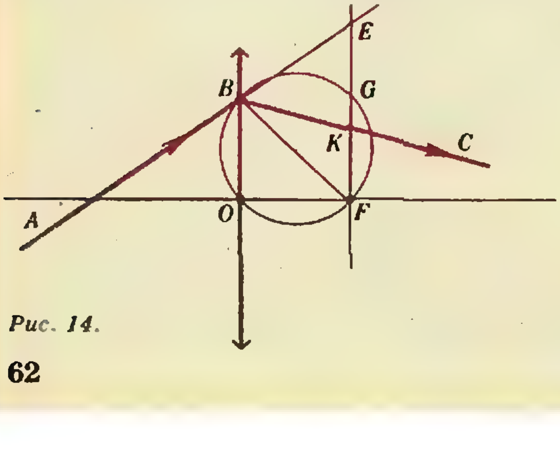


Рис. 14.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 9)

1. Из первого и третьего рисунков условия задачи следует, что три кочана капусты уравновесят две дыни и две свеклы. Если добавить на каждую чашку весов еще по две свеклы, то равновесие не нарушится. Но три кочана капусты и три свеклы, согласно второму рисунку, весят столько же, сколько весят три дыни. Поэтому три дыни весят столько же, сколько две дыни и пять свекол. Значит, дыня в пять раз тяжелее свеклы.
2. Из условия задачи следует, что первая цифра неизвестного множителя — 8 или 9, а вторая — 1 или 6. Перебрав все четыре возможных варианта: 81, 91, 86 и 96, получаем, что цифра 2 стоит в третьем разряде произведения только в случае множителя 81.
3. Электрическая лампочка нагревает окружающий ее воздух, возникает конвективный поток вверх, содержащиеся в воздухе пылинки прилипают к потолку после удара об него, образуя пятно над лампой.
4. 8 монет, например, $1+2+2+5+10+10+20+50$ или $1+2+3+5+10+20+20+50$.
5. Пар невидим. Мы видим не клубы пара, а клубы тумана, образующегося, когда горячий воздух перестает обтекать чайник.

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 9)

Вопросы и задачи

1. Ускорения направлены одинаково (на север).
2. См. рис. 15. Пути, проходимые за последовательные равные промежутки времени, численно равны заштрихованным разным цветом площадям и относятся как 1:3:5:7...
3. См. рис. 16.
4. Ускорение тела, например, массы M равно

$$a = g - F/M,$$

где F — сила сопротивления. Следовательно, скорее упадет тело с большей массой.

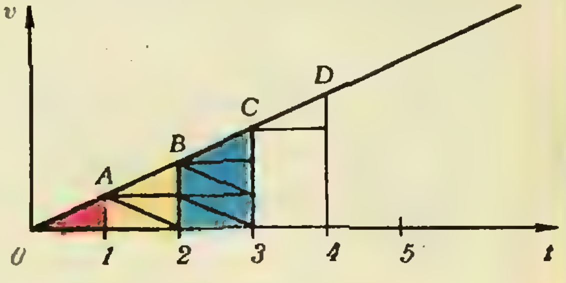


Рис. 15.

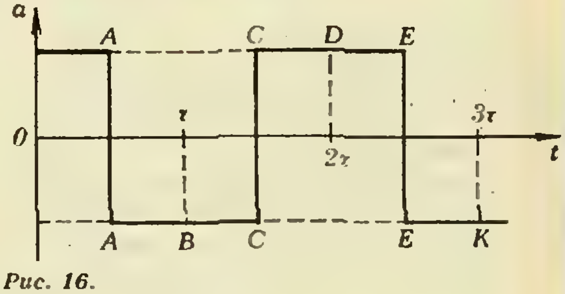


Рис. 16.

5. Величина ускорения книги относительно лифта зависит не от направления скорости лифта, а от направления его ускорения. Если оно направлено вверх, то ускорение книги равно $g+a$; если вниз, то $g-a$.

6. Ускорение растет из-за уменьшения массы ракеты.

7. Центростремительное ускорение, связанное с обращением Земли вокруг Солнца, чрезвычайно мало по сравнению с ускорением силы тяжести на Земле.

8. В принципе — да, поскольку все тела, в том числе человек, на экваторе легче из-за центростремительного ускорения, обусловленного вращением Земли.

9. Минимальное центростремительное ускорение в этой точке равно ускорению свободного падения g.

10. $T=2\pi\sqrt{R/g}$, где R — радиус Земли; $T\approx 1$ ч 24 мин.

11. При движении с ускорением (взлете) — уменьшается, при движении по орбите маятник не совершает колебаний.

Микроопыт

Гирька, подвешенная к потолку вагона с помощью нити, при равноускоренном движении отклонится (рис. 17). Из подобия треугольников AOB и ACD находим:

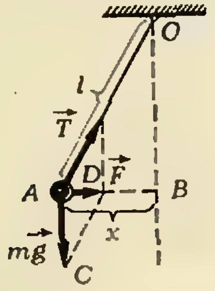


Рис. 17.

$$a=g\frac{x}{\sqrt{l^2-x^2}}.$$

Наша обложка
(см. «Квант» № 9, 4-я с. обл.)

См. рис. 18.

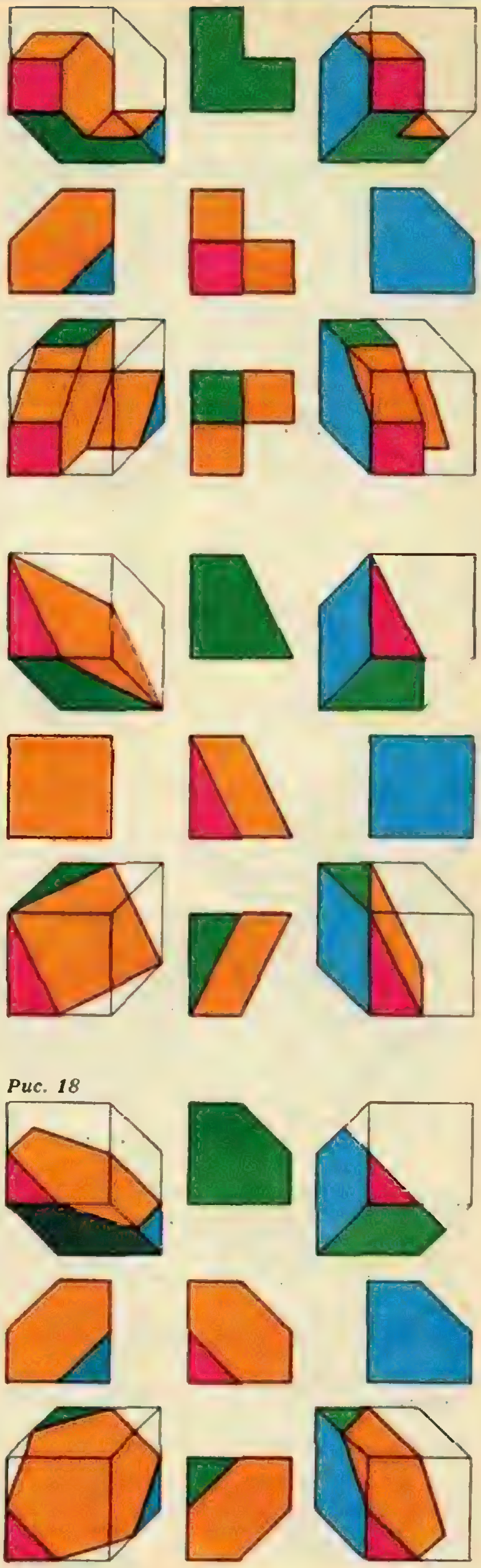


Рис. 18

VIII Турнир юных физиков
(см. «Квант» № 8)

2. При плохом контакте образуется окисная пленка, которая может иметь большое активное сопротивление. Окисная пленка чрезвычайно тонка, и в месте плохого контакта образуется значительная электрическая емкость. Первая программа передается в области низких частот (до 10 кГц), а третья — в частотном диапазоне около 150 кГц. На высоких частотах сказывается наличие емкости: ее сопротивление на высоких частотах может стать гораздо меньше активного сопротивления окисной пленки, и третья программа будет хорошо слышна.

3. До температуры примерно 36 °С термометр нагревается просто теплым выдыхаемым воздухом. Кроме того, натуральная шерсть способствует энергичной конденсации водяного пара, содержащегося в большом количестве в выдыхаемом воздухе, при этом дополнительно выделяется теплота конденсации. Взвешивание 1 г натуральной шерсти на аналитических весах после того, как через нее было сделано 10 медленных выдохов, показало, что ее масса увеличилась на 20 мг. Таким образом, при одном выдохе конденсируется примерно 2 мг воды и выделяется количество теплоты 4,5 Дж. Этого тепла достаточно, чтобы нагреть 1 г ртути и 1 г стекла (примерные массы стекла и ртути, на-

греваемые при измерениях температуры медицинским термометром) на 4 °С. Ясно, что на нагрев термометра уходит лишь часть теплоты, но и этого достаточно, чтобы термометр показал завышенную температуру.

4. Искривление траектории полета «крученого» мяча объясняется его вращением (эффект Магнуса).

5. При игре на гитаре музыкант кратковременно воздействует на струну, тогда как при игре на скрипке смычок взаимодействует со струной почти непрерывно. Так как усилия, оказываемые на струны гитары и скрипки, примерно равны, то вклад энергии при игре на гитаре значительно меньше, чем при игре на скрипке.

6. Совершенно неправильно было бы искать причину опрокидывания бумажной мишени в световом давлении. Световой пучок энергией в несколько Дж и длительностью порядка 0,01 мкс не может сообщить мишени достаточный для опрокидывания механический импульс. Опыт показывает, что в результате местного нагрева вещество взрывоподобно испаряется, что и создает реактивную тягу. Это — главная причина опрокидывания мишени.

7. В водяном молотке находится вода и водяной пар, а воздуха практически нет. При комнатной температуре (20 °С) давление насыщенных паров воды составляет 0,02 % от нормального атмосферного давления. При встряхивании пробирки в воде образуются пустоты, затем вода падает, практически не испытывая сопротивления, и пустоты «схлопываются». Соударения происходят жестко, как между твердыми телами, и поэтому слышен характерный «металлический» звук.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 7)

Задание 13 (Л. Куббель, 1937 г.). 1...Се6! 2. Кf1! Лd5! 3. Кd2 Лff5! 4. Кре2 Фf6! 5. Кре3 Кре5 6. Кс4×.

Задание 14 (Дж. Бэбиз, 1978 г.). Задача имеет 2 решения: а) 1...Крb7 2. а8Ф+ Крс7 3. Фg8 Кf6 4. Ф:g3 Крd6 5. Ф:f3 Кре5 6. Ф:h3 Кре4 7. Ф:h1 Крf3 8. Ф:g2×; б) 1...Крb7 2. а8Ф+ Крb6. 3. Фа2 Кe1 4. Ф:g2 Крb5 5. Крf1 Крс4 6. Кр:e1 Крd3 7. Крd1 Фd4 8. Фс2×.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян
Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев
Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, А. А. Варламов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант
Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлева

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский,
А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили
Ю. А. Ващенко, М. В. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов,
Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева,
И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, В. Б. Юдин

Фото представили.
В. В. Дгебуадзе, В. М. Лукин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Д Храпко

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 15.08.86. Подписано к печати 17.09.86
Т-19576 Бумага 70×108/16
Печать офсетная. Усл. кр. от. 23,8
Усл. печ. л. 6,97 Уч.-изд. л. 5,6
Тираж 196 490 экз.
Цена 40 коп. Заказ 2236

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Консультирует экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

КОМПЬЮТЕРНЫЙ КЛУБ

В своем самом первом интервью для газеты «Советский спорт» 11-летний Гарри Каспаров сказал: «В школе мне больше всего нравятся уроки математики. Я выступал на республиканской олимпиаде и занял третье место».

Через четыре года в журнале «Юность» были опубликованы такие слова будущего чемпиона мира: «Уж если не шахматами, то занялся бы математикой. Только два варианта». Когда ведущему «страничку» спустя еще несколько лет удалось самому взять интервью у Каспарова («Квант», 1981, № 5), он уже был гроссмейстером и признался в беседе, что сейчас шахматы вытеснили все остальное.

Однако прошло несколько лет, и Гарри Каспаров нашел возможность если и не самому вернуться к точным наукам, то способствовать математическому, компьютерному образованию школьников. Через полгода после завоевания короны он стал президентом... первого детского компьютерного клуба в Москве «Наш Арбат».

На торжественном открытии клуба вице-президент АН СССР академик Е. П. Велихов, стоя на пороге клуба вместе с Г. К. Каспаровым, предоставил право перерезать ленточку семилетнему Боре Степанову. Дети, не смущаясь ни юпитерами программы «Время», ни присутствием иностранных гостей, демонстрировали свое умение работать на ЭВМ. А Каспаров тем временем отвечал на вопросы журналистов.

— Гарри, шахматным автоматам вы не раз давали сеансы одновременной игры. А знакомы ли вы с нешахматными компьютерами?

— Да, и неплохо. Уже три года общаюсь с разными персональными компьютерами.

— Не кажется ли вам, что происходит некоторая переоценка роли компьютера в жизни общества?

— Иногда проявляется такая тенденция — слишком надеяться на ЭВМ. Порой это может быть даже немного опасно, нерасчетливо. Но дело в том, что пока мы не достигли того практического уровня компьютеризации, когда об этом нужно беспокоиться. Поэтому я считаю, что опасения преждевременны. Скажу другое: сегодня овладеть компьютером жизненно важно — особенно для детей. Причем делать это надо сейчас, немедленно — жизнь стремительно идет вперед, и завтра уже может быть поздно. Освоится ребенок с ЭВМ — это будет для него огромный шаг вперед.

— Как для человека?

— Как для человека — это первое. И как для будущего специалиста — это второе, причем необходимое.

— Почему именно Каспаров взял на себя компьютерную нагрузку? — спросил корреспондент академика Е. П. Велихова.

— Каспаров как-то позвонил мне и предложил создать подобный клуб. Так что он — один из главных инициаторов. Ну а я очень рад, что он стал во главе клуба — Гарри Кимович как представитель одного из самых молодежных видов спорта — и самого интеллектуального! — сумеет вести дело на высоком уровне.

Учитывая тему сегодняшней «странички», напомним, что в этом году состоится пятый чемпионат мира среди больших ЭВМ. Одна из партий последней чемпионки мира, программы «Крэйблитц», опубликована в «Кванте» № 4 за 1984 г. Приведем по одному примеру игры двух других призеров — программ «Биби» и «Эвит».

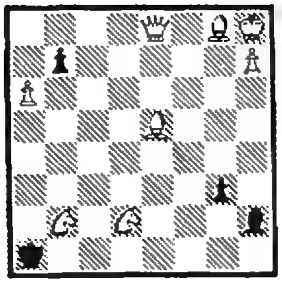
«Биби» — «Нучесс». Русская партия. **1.e4 e5 2.Kf3 Kf6 3.d4 К:e4 4.Cd3 d5 5.К:e5 Cd6 6.0—0 0—0 7. C:e4 de 8.Kc3 Фe7 9. Фh5.** Тонкий ход. Прежде чем произвести пешечный размен в центре, полезно вызывать ослабление черных полей (это и решит исход игры). **9...g6 10.Фe2 C:e5 11.de Ф:e5 12.Ф:e4 Ф:e4 13.К:4 Cf5 14.Лe1 Kpg7 15.Cf4 Ka6 16.Ce5+ Kph6 17.Лe2 Лae8 18.Kf6 Лe6 19.g4!** Заключительная атака по черным полям. **19...C:c2 20.g5+! Kpg7 (20...Kp:g5 21. f4+** и **22.Л:c2** с лишней фигурой) **21.Kd7+ Л:e5 22. К:e5 Cf5 23.Лae1,** и белые вскоре выиграли.

«Эвит» — «Пэцок». Английское начало. **1.c4 e5 2.Kc3 Kf6 3.g3 Cb4 4.Cg2 0—0 5.Kh3 Kc6 6.b3 d6 7.0—0 Cc5 8.Cb2 Cg4 9.Ka4 Kd4 10.Лe1 h6 11.К:c5 dc 12.f4 C:h3 13.C:h3 ef 14.gf Ke4 15.e3 Ke6 16.d3 Kf6 17.Cg2 c6 18.a3 Фe7 19. Фd2 Kh5 20.f5 Kg5 21.b4 Лae8 22. Лad1 a6 23.d4 Ke4 24.Фe2 Фg5 25. dc Ф:f5 26.a4 Фg5 25.dc Ф:f5 26.a4 Фg5 27.Лd7 a5 28.Л:b7 ab 29.a5 Ф:c5 30.a6 Kd6 31. Cd4.** Напряженное сражение протекало при некоторой инициативе белых, владеющих преимуществом двух слонов. Сейчас черные идут на разменную комбинацию, ошибочность которой видна, что называется, невооруженным взглядом. **31...Ф:d4 32.ed Л:e2 33.Л:e2 К:b7 34.ab c5 35.dc Лd8 36.Лe1 Kf4 37.c6,** и белые пешки неудержимы.

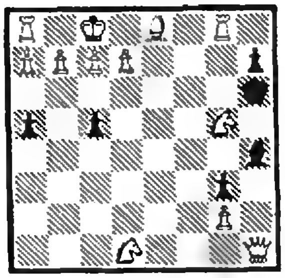
Эти партии подтверждают старую истину: в тактической борьбе, построенной на расчете вариантов, компьютер действует вполне достойно, а в позиционной игре, где работают общие принципы, он пока «плавает».

Конкурсные задания

В сегодняшних заданиях требуется поставить обратный мат: белые начинают и вынуждают черных объявить мат в заданное число ходов (в отличие от кооперативного мата, черные к этому не стремятся).

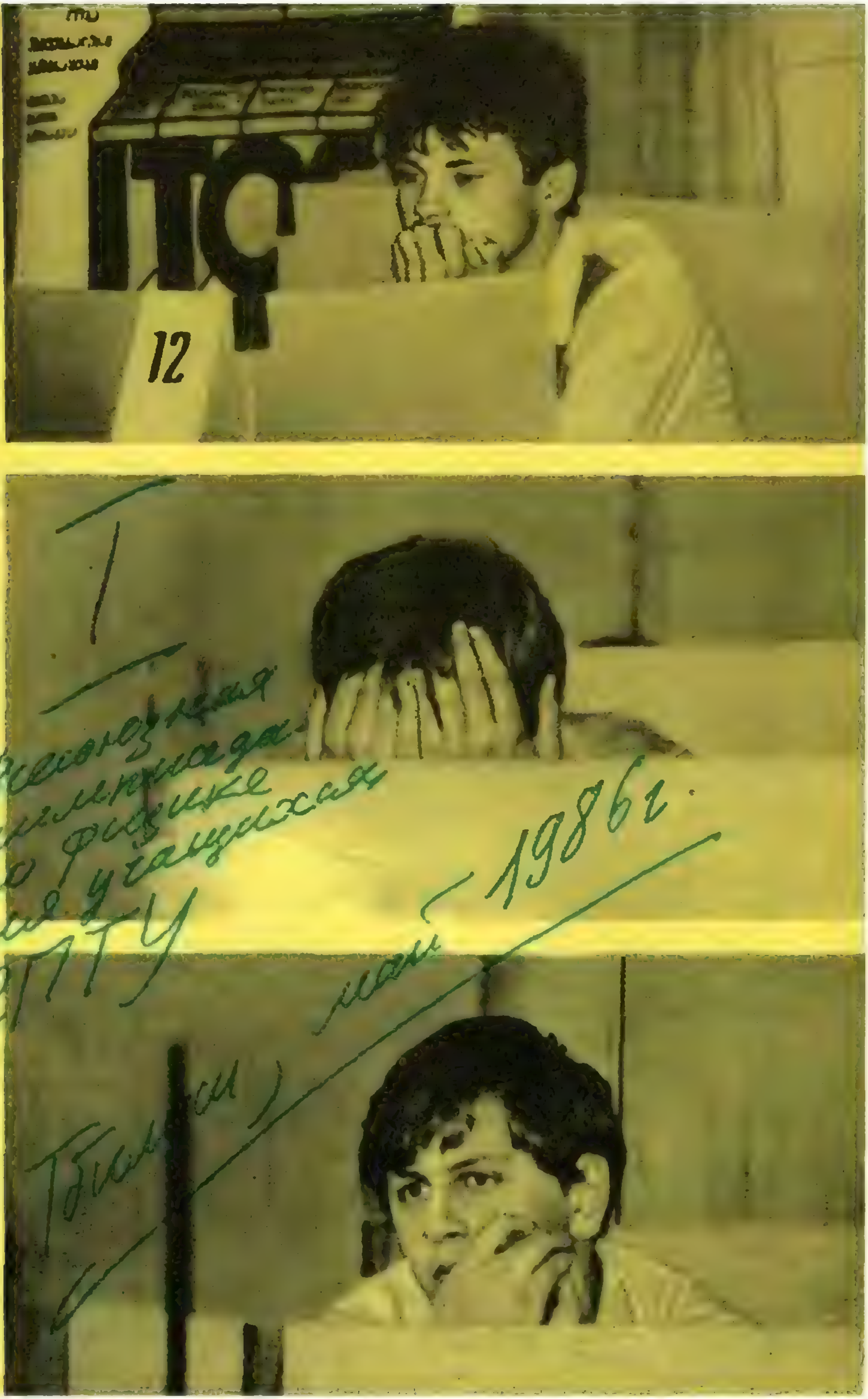


19. Обратный мат в 4 хода.



20. Обратный мат в 6 ходов.

Срок отправки решений — 20 декабря 1986 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 19, 20».



Всесоюзная
олимпиада
по физике
для учащихся
СПТУ

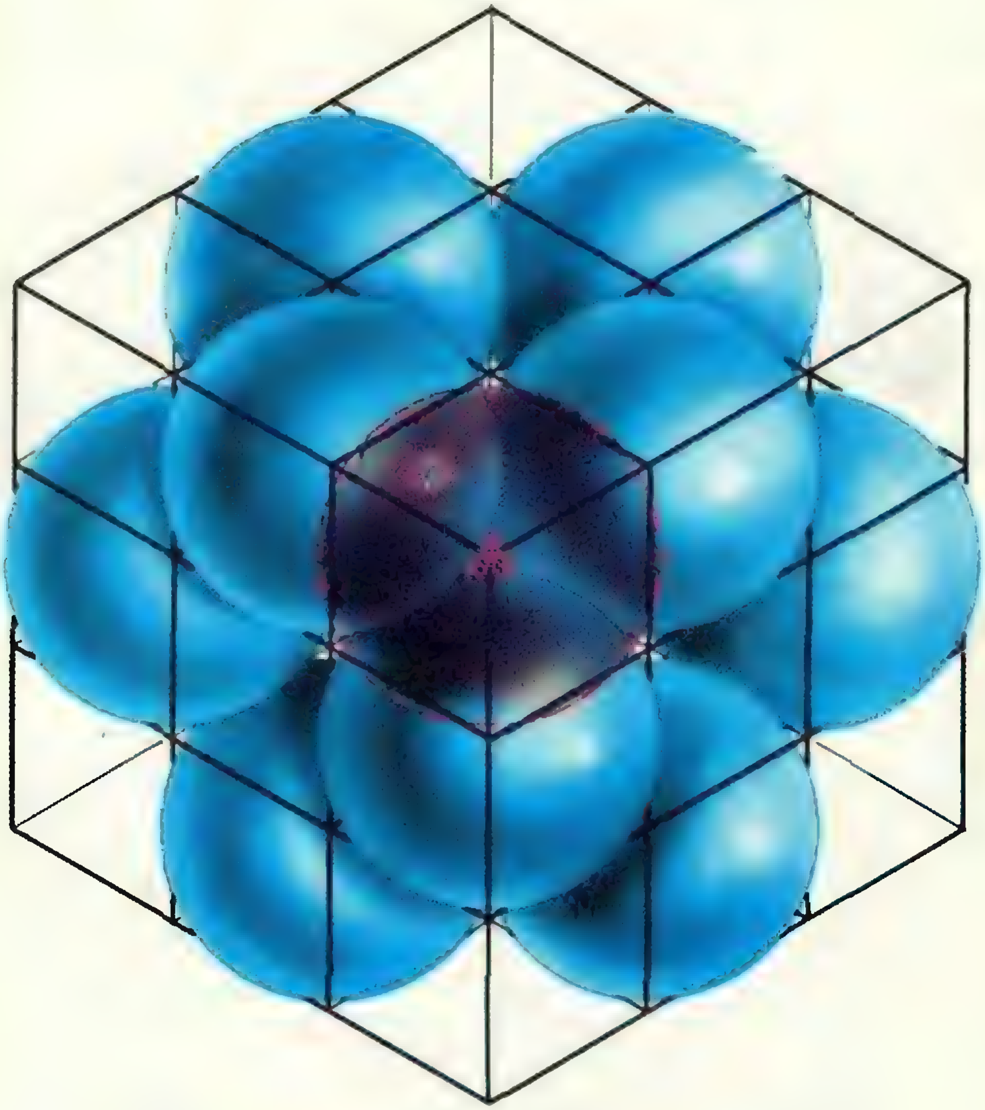
(Тбилиси) май 1986г.

Цена 40 коп.

Индекс 70465

На этой картинке показаны 12 одинаковых шаров (голубого цвета), приложенных к еще одному такому же шару (красному). Существование такого расположения становится совсем очевидным, если поместить шары в ячейки кубической решетки. Подробности читайте в заметке В. В. Произволова «Тринадцать шаров в одной клетке».

Эту конфигурацию шаров можно себе представить иначе. Один красный шар и шесть синих можно положить на плоскость так, чтобы все синие шары касались красного; затем можно сверху положить еще три синих шара в три из образовавшихся шести лунок вокруг красного шара; наконец, можно представить себе еще три шара, приклеенных таким же образом снизу. Повернув эту конструкцию (как?), мы получим показанное здесь расположение шаров.



НОМЕР
11

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант

11 1986

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

Московское математическое общество
Оргкомитет
Московской
математической
олимпиады

	В НОМЕРЕ:	IN THIS ISSUE:
2	Интервью с академиком О. М. Белоцерковским	Interview with academician O. M. Belotserkovski
5	К 275-летию со дня рождения М. В. Ломоносова	M. V. Lomonosov: 275th anniversary
12	*В. А. Олейников.* Неприводимость и иррациональность	*V. A. Oleinikov.* Irreducibility and irrationality
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
17	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
23	Задачи	Problems
24	*А. С. Штейнберг.* Знакомьтесь: металлическое стекло	*A. S. Shteinberg.* Meet metallic glass
32	**Калейдоскоп «Кванта»**	**Kvant's kaleidoscope**
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
27	Задачи М1011—М1015; Ф1023—Ф1027	Problems M1011—M1015; P1023—P1027
29	Решения задач М991—М995; Ф1003—Ф1007	Solutions M991—M995; P1003—P1007
	Искусство программирования	**The art of programming**
40	*В. А. Каймин.* Построение диалоговых алгоритмов	*V. A. Kaimin.* Constructing dialog algorithms
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
43	*А. А. Болибрух, В. М. Уроев, М. И. Шабунин.* Задачи на координатной плоскости	*A. A. Bolibrukh, V. M. Uroev, M. I. Shabunin.* Problems on the coordinate plane
	Олимпиады	**Olympiads**
49	*В. В. Вавилов, С. В. Резниченко, И. Н. Сергеев.* XX Всесоюзная олимпиада по математике	*V. V. Vavilov, S. V. Reznichenko, I. N. Sergeev.* 20th All-Union olympiad in mathematics
52	*А. Р. Зильберман, В. В. Кашкаров.* XX Всесоюзная олимпиада по физике	*A. R. Zilberman, V. V. Kashkarov.* 20 th All-Union olympiad in physics
56	Призеры XX Всесоюзной олимпиады школьников	Prizewinners of the 20th All-Union school olympiad
58	**Информация**	**Information**
	Научно-техническая конференция школьников в МФТИ	Science- technology conference for school children at MPTI
	Научная конференция школьников в ФМШ при МГУ	Scientific conference for schools at the Moscow university PMS
60	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	«Квант» улыбается *(59)*	**Kvant smiles***(59)*
	Смесь *(22, 56, 57)*	**Miscellaneous** *(22, 56, 57)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	На цилиндрической доске *(3-я с. обложки)*	On the cylindrical chessboard *(3rd cover page)*

Сюжет, изображенный художником на первой странице обложки, иллюстрирует одну из заметок раздела «Школа в «Кванте»

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1986

«Перейти к формированию специалистов широкого профиля, сочетающих глубокие фундаментальные знания и обстоятельную практическую подготовку, ориентированную на конкретную отрасль.» В этих строках из Проекта ЦК КПСС «Основные направления перестройки высшего и среднего специального образования в стране» суммирован опыт передовых вузов. Один из таких вузов — Московский физико-технический институт. Интерес к нему у школьников не ослабевает уже в течение четырех десятилетий. Истории, сегодняшнему дню и будущему физтеха посвящена беседа с его ректором — лауреатом Ленинской премии академиком О. М. Белоцерковским.

Интервью с академиком О. М. Белоцерковским

— Олег Михайлович, образование физтеха в 1946 году было обусловлено глубокими и сложными процессами, происходящими в науке и производстве. Как сегодня, с позиций, можно сказать, истории вы могли бы прокомментировать их?

— Каждый этап в развитии общества определяет свой уровень среднего и высшего образования. Надо сказать, что еще до войны разрыв между наукой, производством и образованием начал ощущаться все сильнее и сильнее. И идея физтеха как вуза, способного преодолеть этот разрыв, родилась именно в эти предвоенные годы. В 1938 году в «Правде» появилась статья за подписью крупнейших ученых страны, где обсуждался вопрос о создании вуза нового типа и где были названы, по существу, все основные черты системы физтеха.

Жизнь требовала рационального и оптимального внедрения научных достижений в производство. В свою очередь наука должна была оперативно откликаться на требования быстро развивающейся промышленности, особенно ее новых отраслей. Для осуществления всего этого нужны были специалисты особого склада: с фундаментальной общей подготовкой и хорошим знанием конкретных проблем.

Идея физтеха была реализована только после войны. Сначала — созданием физико-технического факультета МГУ, а в начале 50-х годов факультет был преобразован в Московский физико-технический институт. У истоков физтеха стояли академики П. Л. Капица, М. А. Лаврентьев. Академик С. А. Христианович был, по существу, первым ректором МФТИ. Принципиальную роль в развитии и становлении нашего института сыграл И. Ф. Петров, который в течение десяти лет был директором института. Я бы сравнил его с мощной ракетой-носителем, которая выводит спутник на орбиту. Считаю, что именно он вывел физтех на орбиту большой науки.

Я лично очень доволен, что пришел на физтех, который теперь стал по-настоящему техническим университетом.

— Вы перешли на физико-технический факультет МГУ с четвертого курса МВТУ имени Баумана. Что определило ваш выбор?

— Из Бауманского в МГУ нас перешло 16 или 17 человек. Мы были приняты на «двухсполовинный» курс. Мне тогда показалось возможным «потерять» два года с тем, чтобы приобрести фундаментальные знания и в то же время работать в прикладной науке. Ведь раньше в академической области работали только выпускники университетов, а выпускники технических вузов шли на производство.

— Расскажите, каким был физтех в годы вашей учебы. Ведь это были первые годы его существования.

— Как и сейчас, в программе было много физики. Очень сильным был преподавательский состав. Лабораторные работы ставили академики

А. И. Шальников и Г. С. Ландсберг. Объединенный курс общей и теоретической физики читали академики П. Л. Капица и Л. Д. Ландау. Читали они этот курс всего год. Их лекции неповторимы и уникальны. Ведь мы обычно тратим много времени на последовательное чтение курсов. А они попробовали совместить их. Очень заманчивая идея! Лекции эти сохранились, и мы попытаемся их издать.

Кафедру математики возглавлял академик М. А. Лаврентьев. Механику читали академик Л. И. Седов и член-корреспондент АН СССР В. В. Соколовский, физику — профессора С. Э. Хайкин и С. Г. Калашников.

Вполне естественно, что многие крупные ученые и академики тогда были еще не крупные ученые и не академики. Наш нынешний заведующий кафедрой высшей математики член-корреспондент Л. Д. Кудрявцев, к примеру, был еще кандидатом наук, а академик С. М. Никольский — доктором.

Лекции по физике великолепно читал член-корреспондент АН СССР С. М. Рытов. Я очень дорожил своими записями этих лекций. А на экзамене по физике получил у него четверку и ужасно огорчился.

— А были ли тогда такие элементы системы физтеха, как вопросы по выбору на экзаменах, базовые институты, шефы, госэкзамен?

— Госэкзамен по физике ввел Л. Д. Ландау. И принимал его очень жестко.

Вопросов по выбору не было, но были суровые письменные контрольные работы. Сложнее, чем сейчас. Если вы набирали 70—80 % от максимального количества очков, то вам практически обеспечивалась пятерка. Шли к лектору, и он не столько спрашивал, сколько беседовал с вами.

Базы и шефы существовали с самого начала. Основной упор делался на физику и инженерное обучение. Базовых институтов было немного: шесть — восемь.

— Какие изменения происходили в системе физтеха в последующие годы?

— Со временем система физтеха эволюционировала, это закономерно. Возникали новые факультеты. У нас появился факультет аэромеханики и летательной техники. За двадцать лет своего существования он прекрасно зарекомендовал себя.

Еще одним новым элементом стал прием абитуриентов во Владивостоке, в Киеве, Красноярске, Челябинске, Хабаровске. Набор наиболее сильных ребят на местах, их обучение в Долгопрудном по специальной программе и распределение после четвертого курса обратно по специальностям, остро необходимым данной республике или региону,— все это отвечает современным требованиям, отвечает, если хотите, мировому уровню подготовки кадров.

Вообще наш институт стал уделять больше внимания «своему» абитуриенту. Были созданы заочная и вечерняя физико-технические школы, проводятся выездные физико-математические олимпиады, выходят рекламные номера нашей институтской газеты «За науку». Чтобы отобрать 700—800 будущих студентов, институт «просматривает» 10—12 тысяч школьников.

— Если сравнить сегодняшних абитуриентов с абитуриентами вашего набора...

— Сейчас требуется более углубленная, интенсивная, даже изощренная подготовка. Молодым людям тяжелее. Иногда к этому обращаюсь и ловлю себя на мысли: смогли бы мы сегодня? И я не уверен.

Сейчас ребята приходят лучше подготовленными. Прием прошлого года, например, был у нас самым сильным среди технических вузов. Два победителя олимпиад на одно место! Это кое о чем говорит. Но, с другой стороны, теперешние студенты более ранимые, менее терпеливые. Мы были упорнее. В то трудное время — еще существовала карточная система — нас переполнял энтузиазм. Впрочем, мне кажется, что он в определенной мере сохранился и сейчас. Специфика нашей профессии такова, что нам нужны в основном энтузиасты.

— Олег Михайлович, каковы главные черты сегодняшнего облика МФТИ?

— Сейчас на физтехе сложился, видимо, довольно удачный союз «трех китов», трех образовательных циклов: общеинститутского, факультетского и базового. В рамках первого из них работают сильнейшие кафедры общей физики, высшей математики, теоретической физики. Факультетские и базовые циклы соответствуют основным направлениям подготовки кадров.

Вообще в институте существуют три крупных «куста» специальностей. Это радиотехника и электроника, физика (теоретическая и прикладная) и управление. В последние годы появились еще два «куста» — информатика и вычислительная физика (общее руководство здесь осуществляет академик Е. П. Велихов), а также новые специальности, связанные с созданием факультета физико-химической биологии (руководитель — академик Ю. А. Овчинников).

Если просмотреть весь путь развития МФТИ, то можно заметить, что в разное время существовали своеобразные приливы: были на подъеме какие-то отрасли науки, и они давали импульс развитию института в целом. В разные годы испытывали подъем ядерная физика, радиотехника, химическая физика, затем появились космические исследования, управление, прикладная математика. Следующий пик надо ожидать в биологии, особенно в физико-химической биологии. Новые специалисты здесь должны быть хорошими физиками, тонкими химиками и одновременно биологами. Иначе нельзя. И мы как раз начали готовить их на новом факультете.

Если раньше в системе физтеха работала цепочка из двух звеньев: вуз — НИИ, то сейчас складывается и крепнет новая цепочка: вуз — НИИ Академии наук — производство. Эта система, как показывает опыт, весьма эффективна. Приведу несколько цифр. На факультете аэромеханики и летательной техники из всех выпускников 45—50 % уже кандидаты наук, а 7—8 % — доктора наук. Примерно такие же цифры на других наших факультетах.

Из специалистов в области химической физики, физики горения и взрыва 328 человек защитили кандидатские диссертации, 52 — докторские, трое избраны членами-корреспондентами АН СССР, один — Ю. Н. Молин — академиком. Кстати, о крепких позициях физтеха говорят и последние выборы в Академию наук: академиками и членами-корреспондентами избраны 33 выпускника и сотрудника МФТИ.

Хорошо работает наша аспирантура. 80—85 % аспирантов защищаются в срок. Это связано с тем, что аспирантура на физтехе строго целевая. Темы диссертаций, как правило, продолжают студенческие курсовые и дипломные работы и входят в научные планы базовых институтов.

Большое место в физтеховском образовании занимают общественные науки, которые преподают сейчас как единый цикл.

«Гуманитаризации» студентов помогает изучение двух иностранных языков. У нас очень хорошая кафедра иностранных языков, она насчитывает около ста преподавателей, имеет прекрасное оборудование в лингафонных кабинетах, в аудиториях.

— Скажите, то, что физтех расположен не в Москве, а в Долгопрудном,— это минус или плюс?

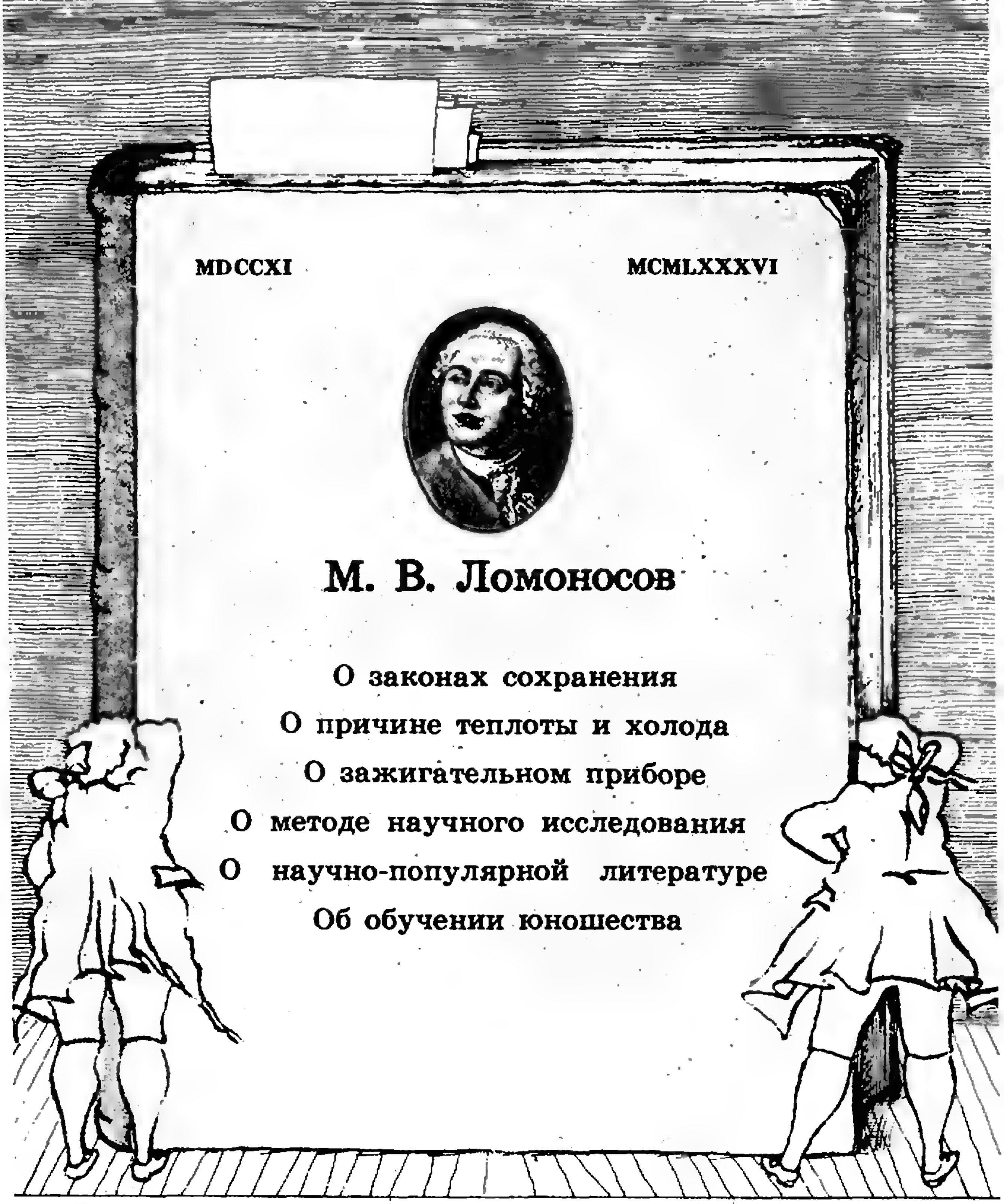
— Плюс, конечно, плюс! Именно это в свое время позволило нам сохранить свою самобытность, когда физико-технический факультет МГУ был организован за городом. Дети должны вовремя уходить от родителей, начинать жить самостоятельно. Ну, и, конечно, близость к природе — это тоже большой плюс.

— И последний вопрос. Будущее физтеха — каким оно видится?

— Могу говорить только о наших ближайших планах. В институте создается один из самых крупных вузовских вычислительных центров. Начнется активное внедрение вычислительной техники в подготовку специалистов всех направлений. В корпусе прикладной математики, который недавно у нас вступил в строй, разместятся несколько лабораторий, научно-учебные центры автоматизации, разработки элементной базы, математического обеспечения высокопроизводительных ЭВМ и САПР (систем автоматизированного проектирования).

Будет проводиться разработка общего и специального матобеспечения, математического моделирования задач большой размерности, автоматизации проектирования. Появятся новые машины от супер-ЭВМ до персональных. Все это станет базой для подготовки и переподготовки кадров, соответствующих нашему времени, времени ускорения научно-технического прогресса.

Интервью вел В. В. Фомин



MDCCXI MCMLXXXVI

М. В. Ломоносов

О законах сохранения
О причине теплоты и холода
О зажигательном приборе
О методе научного исследования
О научно-популярной литературе
Об обучении юношества

В этом году в нашей стране широко отмечается юбилей — 275-летие со дня рождения Михаила Васильевича Ломоносова. Часто случается так, что имя выдающегося ученого, посвятившего себя одной области науки, остается неизвестным представителям других специальностей и тем более широкой общественности. Ломоносова же считают одним из основателей своей науки и химики, и физики, и метеорологи, и географы... Он оставил яркий след в русской литературе и в искусстве.

Безнадежно пытаться охватить в одной журнальной статье все многообразие интересов и достижений Ломоносова — об этом написано множество книг. Представление о многогранности таланта Ломоносова дает «мозаика» отрывков из его работ и высказываний о нем выдающихся представителей отечественной науки и культуры, публикацией которой наш журнал отмечает юбилей великого российского энциклопедиста.

О законах сохранения

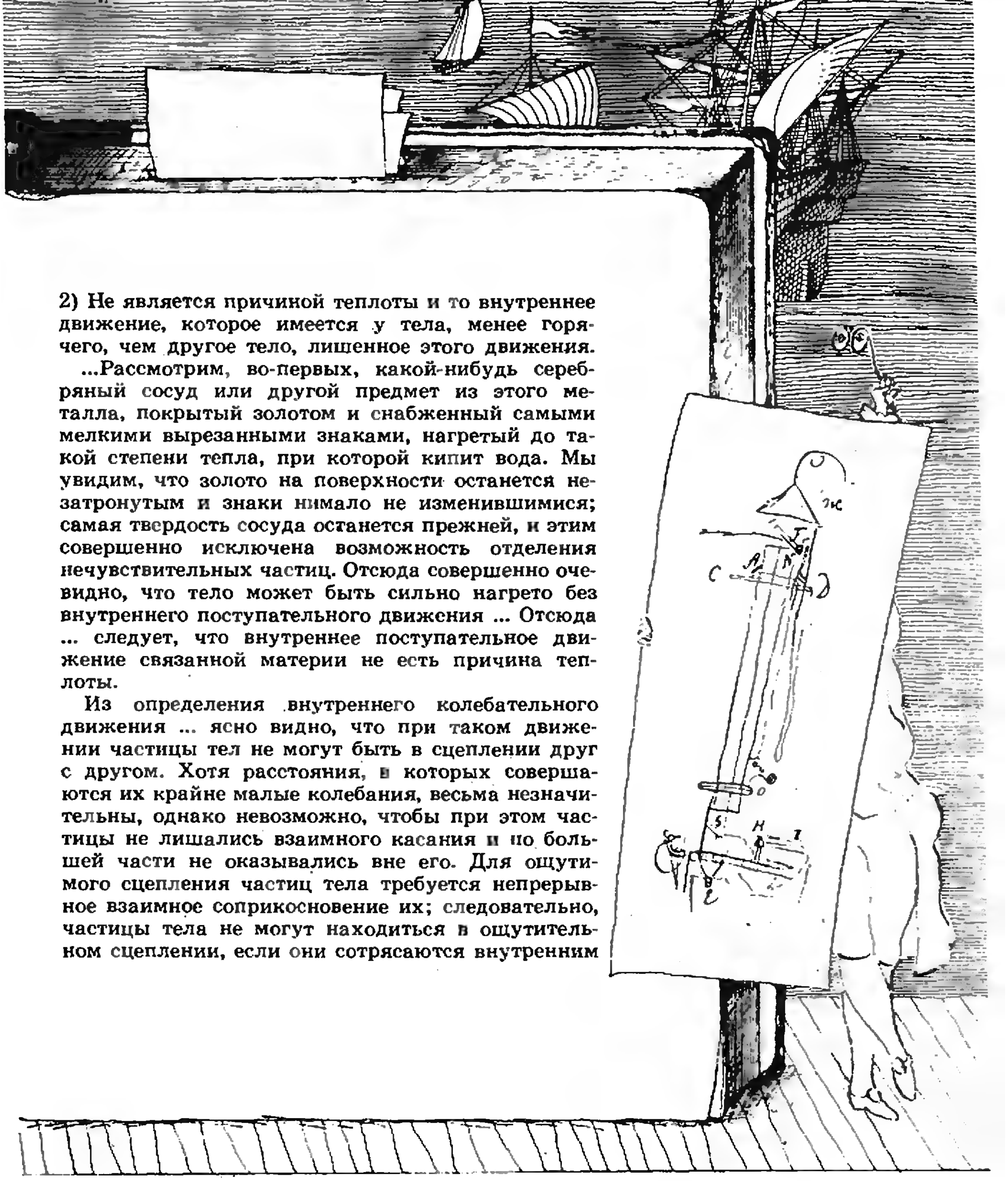
...все перемены, в Натуре случающиеся, такого суть состояния, что сколько чего у одного тела отнимется, столько присовокупится к другому. Так, ежели где убудет несколько материи, то умножится в другом месте; сколько часов положит кто на бдение, столько же сну отнимет. Сей всеобщий естественный закон простирается и в самые правила движения; ибо тело, движущее своим движением другое, столько же оныя у себя теряет, сколько сообщает другому, которое от него движение получает.

Из «Размышлений о причине теплоты и холода»

Внутреннее движение мы представляем себе происходящим трояким образом: 1) нечувствительные частицы непрерывно изменяют место или 2) вращаются, оставаясь на месте, или, наконец, 3) непрерывно колеблются взад и вперед на нечувствительном пространстве, в нечувствительные промежутки времени. Первое мы назовем поступательным, второе — вращательным, третье — колебательным внутренним движением. Теперь следует рассмотреть, какое же из этих движений производит теплоту. Чтобы это выяснить, мы примем за основу следующие положения. 1) То внутреннее движение не есть причина теплоты, отсутствие которого будет доказано в горячих телах.

Общее культурное влияние Ломоносова огромно. Наш литературный и научный язык, грамматика, поэзия, литература на века определились Ломоносовым. Наша Академия наук с ее неустанным изучением родной страны получила свое настоящее бытие и смысл только через Ломоносова... Современная громадная советская наука и техника стали возможными на почве, подготовленной Ломоносовым. Ломоносов с его широтою задач, простотой и реальностью решений и несокрушимой настойчивостью стал образцом передовых гениев русской науки в ее дальнейшем развитии — Менделеева, Лебедева, Павлова... Ломоносов явился как бы воплощением и символом русской культуры и науки с ее особенностями и своеобразием.

С. И. Вавилов (1891—1951)



2) Не является причиной теплоты и то внутреннее движение, которое имеется у тела, менее горячего, чем другое тело, лишенное этого движения.

...Рассмотрим, во-первых, какой-нибудь серебряный сосуд или другой предмет из этого металла, покрытый золотом и снабженный самыми мелкими вырезанными знаками, нагретый до такой степени тепла, при которой кипит вода. Мы увидим, что золото на поверхности останется незатронутым и знаки нимало не изменившимися; самая твердость сосуда останется прежней, и этим совершенно исключена возможность отделения нечувствительных частиц. Отсюда совершенно очевидно, что тело может быть сильно нагрето без внутреннего поступательного движения ... Отсюда ... следует, что внутреннее поступательное движение связанной материи не есть причина теплоты.

Из определения внутреннего колебательного движения ... ясно видно, что при таком движении частицы тел не могут быть в сцеплении друг с другом. Хотя расстояния, в которых совершаются их крайне малые колебания, весьма незначительны, однако невозможно, чтобы при этом частицы не лишались взаимного касания и по большей части не оказывались вне его. Для ощутимого сцепления частиц тела требуется непрерывное взаимное соприкосновение их; следовательно, частицы тела не могут находиться в ощутительном сцеплении, если они сотрясаются внутренним

Все современники, знавшие Ломоносова,... ожидали от этого самородка совершенно исключительных научных исследований; казалось, что все задатки для такой деятельности счастливо сочетались в его лице: огромный природный талант естествоиспытателя, ясный, независимый ум, широкий кругозор, большой запас знаний, несокрушимая воля, железное здоровье и желание всецело отдаться любимому делу,— но судьба поставила Ломоносова в те чисто русские условия деятельности, при которых никакой талант ученого не мог ему помочь...

П. Н. Лебедев (1866—1912)

Во главу изучения природы Ломоносов ставит опыт — это его характерная черта как ученого. Поэтому он много сил положил, чтобы создать лабораторию, и усердно работал там. Но тогдашнее окружение мало ценило Ломоносова как ученого, его ценили прежде всего как поэта. За одну из своих хвалебных од

колебательным движением. Но так как большинство тел при нагревании до огненного каления сохраняет очень сильное сцепление частиц, то очевидно, что теплота тел не происходит от внутреннего колебательного движения связанной материи.

Итак, после того, как мы отвергли поступательное и колебательное внутреннее движения, с необходимостью следует, что теплота состоит во внутреннем вращательном движении связанной материи — ведь ее необходимо приписать какому-нибудь из трех движений. ⟨...⟩

...невозможна высшая и последняя степень теплоты как движения. Наоборот, то же самое движение может настолько уменьшиться, что тело достигает, наконец, состояния совершенного покоя и никакое дальнейшее уменьшение движения невозможно. Следовательно, по необходимости должна существовать наибольшая и последняя степень холода, которая должна состоять в полном прекращении вращательного движения частиц.

О зажигательном приборе

Вознамерившись ввести в область химии приборы физиков, а также истины, ими открытые, чтобы до известной степени устранить или облегчить трудности, встречающиеся в этой науке, и осветить области темные и скрытые глубоким неведе-

Ломоносов получил от царицы 2000 рублей, что было больше, чем его трехлетнее жалование в Академии наук... Значение его научных занятий в лаборатории не было понятно чиновникам и двору. Чтобы оправдаться в своих лабораторных занятиях, Ломоносов писал в 1753 году графу Шувалову: «...полагаю, что мне позволено будет в день несколько часов времени, чтобы их, вместо бильярду, употребить на физические и химические опыты». ⟨...⟩ Приходится удивляться тому, как много сделал Ломоносов в области экспериментальной базисной науки, несмотря на эти неблагоприятные условия.

П. Л. Капица (1894—1984)

Теоретические и экспериментальные изыскания Ломоносов сочетал с большой работой по созданию самых различных приборов для нужд науки и практики: анемо-

нием, я счел за благо по мере моих сил уничтожить каким-либо способом упомянутые трудности и попытаться увеличить зажигательную силу этих приборов, которые прославлены столькими работниками, двинувшими вперед естествознание, и которые, я не сомневаюсь, придут на помощь в химических работах, требующих сильного огня. ⟨...⟩

И вот, наконец, явилась мысль, что солнечные лучи и после отражения от плоских зеркал все еще сохраняют свою теплотворную силу и, следовательно, должны, будучи собраны выпуклой линзой, увеличить жар. Тотчас же я, торжествуя, взял плоское зеркало и линзу диаметром в два дюйма и, так как день был как раз ясный, собрал линзой солнечные лучи, отраженные зеркалом. Когда, после этого, я подставил кусок дерева, на нем образовалось черное пятно и оттуда пошел дым. Я смотрел на это с восторгом и, с целью идти и далее, соединил фокус линзы, подставленной прямым лучам, с фокусом первой и поднес к ним весьма белую бумагу, которая отказывалась загораться от прямых солнечных лучей, собранных той или другой из названных линз; сразу же пошел дым, на бумаге образовалось черное пятно, бумага вспыхнула, и огонь, разгораясь, начал ее сжигать. Итак, повторив этот опыт несколько раз и устранив всякое сомнение в его правильности, я не колеблюсь заключить, что расставив так, как я упомянул выше, большие зеркала и линзы, можно получить жар большой.

метр, морской барометр, зажигательный оптический прибор, «горизонтоскоп», «ночезрительная труба», отражательный зеркальный телескоп, фотометрическая труба для сравнения силы света звезд и многие, многие другие оригинальные приборы и аппараты — плоды его неутомимой деятельности. Замечательная идея Ломоносова о рефрактометре получила признание и осуществлена только в конце XIX века.

М. В. Келдыш (1911—1978)

...я должен отдать справедливость господину Ломоносову, что он одарен самым счастливым остроумием для объяснения явлений физических и химических. Желать надобно, чтобы все прочие академики были в состоянии показать такие изобретения, которые показал господин Ломоносов...

Л. Эйлер (1707—1783)

О методе научного исследования

Химик требуется не такой, который только из одного чтения книг понял сию науку, но который собственным искусством в ней прилежно упражнялся... Не такой требуется математик, который только в трудных выкладках искусен, но который, в изобретениях и в доказательствах привыкнув к математической строгости, в натуре сокровенную правду точным и непоползновенным порядком вывести умеет... Химия руками, математика очами физическими по справедливости называться может.

О научно-популярной литературе

Всякий, кто берет на себя труд осведомлять публику о том, что содержится в новых сочинениях, должен прежде всего взвесить свои силы. Ведь он затевает трудную и очень сложную работу, при которой приходится докладывать не об обыкновенных вещах и не просто об общих местах, но схватывать то новое и существенное, что заключается в произведениях, создаваемых часто величайшими людьми...

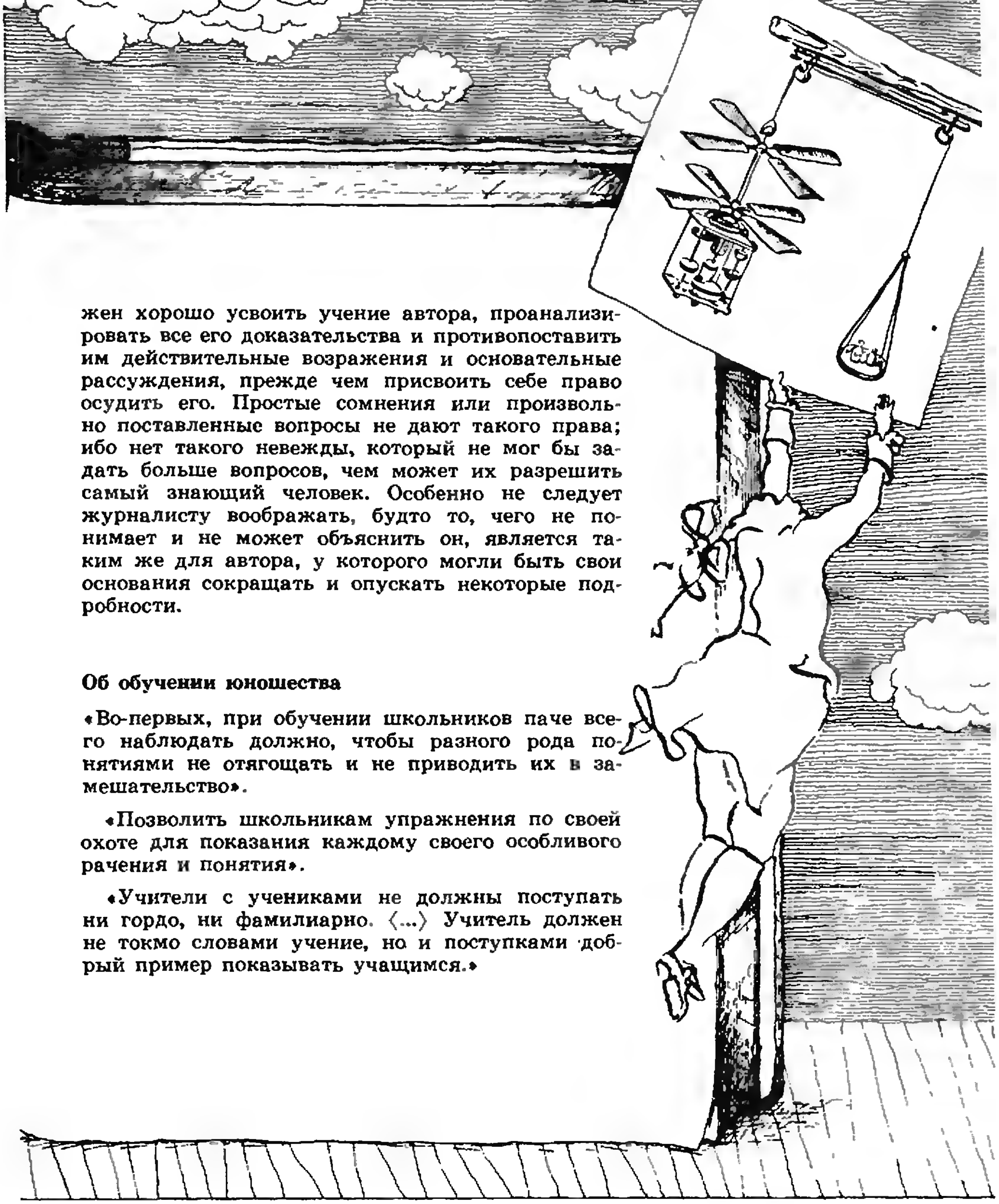
Журналисту позволительно опровергать в новых сочинениях то, что, по его мнению, заслуживает этого,— хотя не в этом заключается его прямая задача и его призвание в собственном смысле; но раз он уже занялся этим, он дол-

Ломоносов страстно любил науку, но думал и заботился исключительно о том, что нужно для блага его родины. Он хотел служить не чистой науке, а только человечеству.

Н. Г. Чернышевский
(1828—1889)

Всякое прикосновение любезной сердцу его России, на которую он глядит под углом ее сияющей будущности, исполняет его силой чудотворной... Всю русскую землю озирает он от края до края с какой-то светлой вышины, любуясь и не налюбуясь ее беспредельностью и действенною природою. В описаниях слышен взгляд ученого натуралиста, нежели поэта; но чистосердечная сила восторга превратила натуралиста в поэта.

Н. В. Гоголь (1809—1852)



жен хорошо усвоить учение автора, проанализировать все его доказательства и противопоставить им действительные возражения и основательные рассуждения, прежде чем присвоить себе право осудить его. Простые сомнения или произвольно поставленные вопросы не дают такого права; ибо нет такого невежды, который не мог бы задать больше вопросов, чем может их разрешить самый знающий человек. Особенно не следует журналисту воображать, будто то, чего не понимает и не может объяснить он, является таким же для автора, у которого могли быть свои основания сокращать и опускать некоторые подробности.

Об обучении юношества

«Во-первых, при обучении школьников паче всего наблюдать должно, чтобы разного рода понятиями не отягощать и не приводить их в замешательство».

«Позволить школьникам упражнения по своей охоте для показания каждому своего особливого рачения и понятия».

«Учители с учениками не должны поступать ни гордо, ни фамилиарно. ⟨...⟩ Учитель должен не токмо словами учение, но и поступками добрый пример показывать учащимся.»

Ломоносов был великий человек. Между Петром I и Екатериной II он один является самобытным сподвижником просвещения. Он создал первый университет, он, лучше сказать, сам был первым нашим университетом... Соединяя необыкновенную силу воли с необыкновенною силою понятия, Ломоносов обнял все отрасли просвещения. Жажда науки была сильнейшею страстью сей души, исполненной страстей. Историк, ритор, механик, химик, минералог, художник и стихотворец, он все испытал и все проник.

А. С. Пушкин (1799—1837)

В оформлении статьи использованы авторские рисунки из книг М. В. Ломоносова: морской барометр; крепостной перископ; зажигательный прибор; ночезрительная труба; регистратор грозового разряда; аэродромическая машина (прообраз вертолета).

x^5+3x^4+x+1
x^2-2
$P(x)$
$\sqrt{5}$
M
O
x

Неприводимость и иррациональность

В. А. ОЛЕЙНИКОВ

В прошлом номере автор рассказал о многовековой истории иррациональных радикалов и неприводимых многочленов, о признаке Эйзенштейна. Здесь же речь пойдет о достижениях XX века в этой области, но на более наглядном геометрическом языке.

Созданная на рубеже XIX и XX веков теория алгебраических чисел стала новым стимулом для изучения неприводимых многочленов. *Алгебраическое число* α — это просто корень многочлена с целыми коэффициентами:

$$P(\alpha)=a_0+a_1\alpha+\ldots+a_n\alpha^n=0.$$

Все радикалы, которые мы рассматривали в предыдущей статье,— алгебраические числа. Однако понятие алгебраического числа значительно шире: еще в начале прошлого века П. Руффини (1765—1822) и Н. Г. Абель (1802—1829) показали, что не всякое уравнение степени выше четвертой разрешимо в радикалах. Алгебраические числа, таким образом, не исчерпываются иррациональными радикалами и рациональными числами.

Но зато алгебраические числа тесно связаны с неприводимыми многочленами. Именно, *любое алгебраическое число является корнем единственного* (с точностью до числового множителя) *неприводимого многочлена*. Это следует из ТЕОРЕМЫ («Квант» № 10, с. 7).

Свойство неприводимости стало предметом пристального внимания многих выдающихся математиков. Наряду с поисками общих свойств (таких, как в ТЕОРЕМЕ) исследователям не давал покоя признак Эйзенштейна. Чувствовалось, что за этим признаком скрывается какой-то общий принцип, выявление которого позволит получать новые более общие признаки. Так и оказалось на самом деле. Дальнейшее продвижение здесь связано с возможностью перевода свойства неприводимости на язык геометрических образов. Основа этого языка была заложена великим Ньютоном за 200 лет до описываемых событий и носит его имя.

Диаграмма Ньютона

Для построения *диаграммы Ньютона многочлена $P(x)$ по заданному простому p* необходимы:

1) координатная плоскость OKM (OK — горизонтальная, а OM — вертикальная оси);

2) линейка, гвозди, молоток;

3) немного терпения.

Потому что сначала наносится *основа* — каждому одночлену $a_k x^k$ из $P(x)$ ставится в соответствие точка с координатами $(k; l)$; l — это наибольшая степень числа p, при которой a_k делится на p^l. Набор всех таких точек ($k=0, 1, \ldots, n$) и есть основа диаграммы.

На рисунке 1 — основа многочлена $P(x)=$
$$=12+2x+4x^2+x^4+x^5+2x^6+4x^7$$
при $p=2$. Свободный член a_0 делится на p^2, но уже не делится на p^3 — имеем точку (0; 2), a_1 делится на p — точка (1; 1), a_2 дает точку (2; 2).

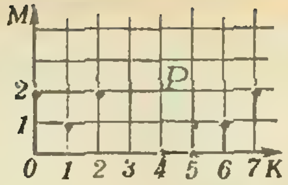


Рис. 1

Внимание! Если $a_k=0$, то точку основы вообще не наносим.

В нашем случае $a_3=0$ не дает точки основы.

Если a_k не делится на p, то $l=0$ и точка $(k; 0)$ попадает на ось OK.

В нашем случае a_4 и a_5 не делятся на p, a_6 делится на p, a_7 делится на p^2 (см. рис. 1).

Будем считать, что вместе со старшим коэффициентом a_n у многочлена $P(x)$ не равен нулю и свободный член a_0. Иначе $P(x)$ всегда приводим (докажите!) и поэтому нам не интересен. На плоскости OKM, таким образом, будут нанесены по крайней мере две точки:

начальная точка основы — у нас (0; 2) и ее *конечная* точка — (7; 2)

А теперь диаграмма (рис. 2). Берем молоток и вбиваем гвозди во все точки основы, затем приставляем линейку вертикально к гвоздю, вбитому в начальную точку. Вращаем ее против часовой стрелки, пока она не упрется в другой гвоздь основы (у нас (1; 1)). Соединяя эти точки отрезком, получаем первое *звено* диаграммы. Для получения следующего звена нужно вращать линейку вокруг второго гвоздя (1; 1) до встречи с новой точкой основы.

Вращаем линейку дальше и наносим остальные звенья, пока, наконец, не доберемся до конечной точки основы и не получим последнее звено.

Диаграмма Ньютона готова и изображена на рисунке 2. Она представляет собой вогнутую вверх ломаную и всегда имеет хотя бы одно звено.

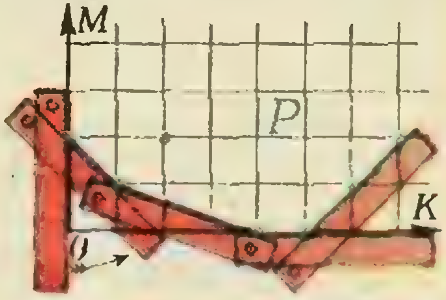


Рис. 2.

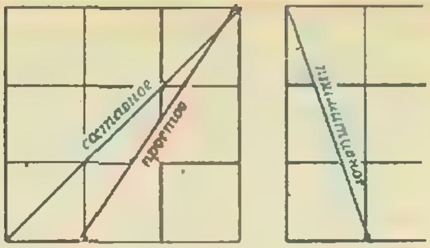


Рис. 3.

Постройте сами диаграмму Ньютона для многочлена

$$Q(x)=16+4x+8x^2+2x^3+8x^6$$

по простому $p=2$.

Лишние точки (у нас — (2; 2)) не должны смущать читателя — во всяком сто́ящем производстве не обойтись без отходов.

О звеньях. Они бывают трех сортов:

Составные, простые, примитивные

Звено диаграммы Ньютона назовем *простым*, если кроме концов на нем нет других точек с целочисленными координатами. В противном случае, если таковые имеются внутри звена, будем называть его *составным* (рис. 3). Далее, простое звено назовем *примитивным*, если длина его проекции на горизонтальную ось OK равна единице.

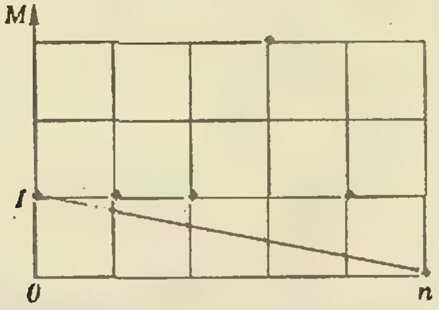
Вот и все. Знакомство с образным языком неприводимости закончено. Пора начать на нем разговаривать. За все труды по изготовлению диаграммы Ньютона нас вознаграждает

Признак Дюма

Если при некотором простом p диаграмма многочлена $P(x)$ состоит ровно из одного простого звена, то такой многочлен неприводим.

Гюстав Дюма жил в Швейцарии и активно занимался задачей о неприводимости в начале нашего столетия. Этот признак получен им в 1906 году.

Признак Дюма позволяет ... нарисовать признак Эйзенштейна, глубже понять его и запомнить.



По условию признака Эйзенштейна все коэффициенты многочлена $P(x)$, кроме старшего, делятся на p, а свободный член a_0 делится на p и не делится на p^2. Эту ситуацию и отражает рисунок.

XX век не терпит остановок *) и сожалений об упущенных возможностях.

Признаки, признаки, признаки...

На рисунке 4 еще один признак.

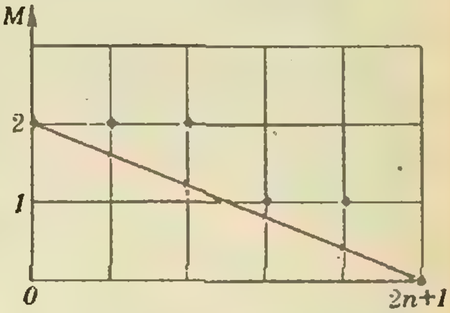


Рис. 4.

Заключенный в словесную форму, он приобретает «больший вес»:

Если для многочлена $P(x)$ нечетной степени $2n+1$ можно указать такое простое число p, что старший коэффициент a_{2n+1} не делится на p, а все остальные коэффициенты a_k делятся на p, $k=0, 1, ..., 2n$, но дополнительно коэффициенты a_k при *$k=0, 1, ..., n$ делятся и на p^2, а свободный член a_0, делясь на p^2, не делится на p^3, то такой многочлен $P(x)$ неприводим.*

Признак Дюма не исчерпан! Каждый желающий может стать обладателем собственного признака, поднимая все выше конец звена и следя за тем, чтобы оно оставалось простым.

Вывод очевиден: массовое производство признаков — перспективное и в то же время абсолютно безопасное дело**).

Снова иррациональность

Среди изобилия признаков неприводимости нашлось место и признаку иррациональности (доказательство в Приложении на с. 16).

Если при некотором простом p диаграмма многочлена $P(x)$ не содержит примитивных звеньев (составные разбиты на простые), то среди его корней не может быть рациональных.

---

*) Кое-что о доказательстве признака Дюма нетерпеливый читатель найдет в Приложении на с. 16.

**) Но вряд ли оно доставит нам лавры Эйзенштейна.

Рассмотрим пример

$$P(x)=16+8x+2x^2+2x^3+x^4.$$

Существует верный способ отыскать все рациональные корни любого многочлена $P(x)$. Нужно начать делить его на всевозможные двучлены b_0+b_1x. От целых чисел b_0, b_1 требуется, чтобы они были взаимно просты, и чтобы b_0 делил свободный, а b_1 — старший коэффициент многочлена $P(x)$ (докажите, у вас для этого все есть!).

В нашем случае делить придется на

$$1\pm x,\ 2\pm x,\ 4\pm x,\ 8\pm x,\ 16\pm x.$$

Если $P(x)$ разделится на b_0+b_1x без остатка, то $x=-b_0/b_1$ — его рациональный корень. Если же $P(x)$ не разделится ни на один из указанных двучленов, то рациональных корней нет.

Признак иррациональности и диаграмма Ньютона по простому $p=2$ (рис. 5) избавляет нас от этой утомительной процедуры *), сразу убедив в том, что рациональных корней у многочлена $P(x)$ нет, а значит и искать их не следует.

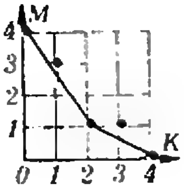


Рис. 5.

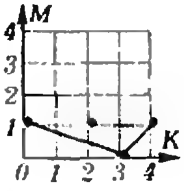


Рис. 6.

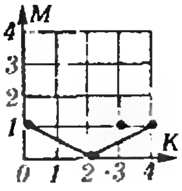


Рис. 7.

Еще пример:

$$P(x)=6+2x^2+3x^3+6x^4,$$

который сначала ни в чем не убеждает, ибо диаграмма $P(x)$ по простому $p=2$ (рис. 6) содержит примитивное звено. На отсутствие рациональных корней указывает другая диаграмма по простому $p=3$ (рис. 7), не содержащая примитивных звеньев.

Докажите сами, что многочлен

$$P(x)=10+5x+10x^2+2x^4,$$

несмотря на изломанную диаграмму при $p=2$, не только не имеет рациональных корней, но даже неприводим**).

Мы снова вернулись к иррациональным числам. Но не с пустыми руками. Теперь у нас есть арсенал средств (он и не снился древним грекам), позволяющий смело смотреть на уравнения высоких степеней.

Поиски новых признаков и новых примеров неприводимых многочленов велись еще долго после появления признака Дюма. Еще более общий признак получил О. Оре (1899—1968) — норвежский математик, известный читателям «Библиотечки «Квант» своим «Приглашением в теорию чисел», вып. 3, 1980 г.

Сильное впечатление (на знатоков) в свое время (в 1929 г.) произвел многочлен Шура*)

$$\frac{P(x)}{n!}=1+a_1\frac{x}{1!}+\ldots+a_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}.$$

Этот многочлен неприводим при любых целых $a_1, \ldots, a_{n-1}$ и требует для доказательства сразу нескольких диаграмм по различным простым $p_1, \ldots, p_k$.

Значение диаграмм Ньютона не ограничивается одними признаками.

Вместо заключения

Вернемся к началу нашего рассказа («Квант» № 10, с. 6) и вспомним о славном нашествии иррациональных величин по дороге, указанной диагональю единичного квадрата. Вслед за ними в математику пришли *вещественные числа* — фундамент современного математического анализа.

История повторилась в другом геометрическом образе (диаграмме Ньютона). На этот раз он вызвал к жизни новый математический объект, называемый *p-адическими числами*. На языке *p*-адического анализа, открытого немецким математиком К. Гензелем (1861—1941), и удалось сформулировать тот общий принцип, который лежит в основе всех признаков неприводимости. Скромные на первый взгляд завоевания геометрического образа (о них и был наш рассказ) помогли превратить теорию алгебраических чисел в могучую ветвь современной математики.

А что же неприводимость? Признаки не смогли исчерпать всего богатства неприводимых многочленов, и постепенно интерес к ним стал угасать. Но ненадолго.

В наше время — время ЭВМ и прогресса — интерес к свойству неприводимости разгорелся с новой силой и выразился в *алгоритмическом подходе*. Здесь главная цель — СКОРОСТЬ, с которой методом проб, используя арифметические операции, можно решить вопрос о неприводимости любого, но конкретного, многочлена.

---

*) Автор слегка преувеличил трудности — можно обойтись и подстановкой чисел ±1, ±2, ±4, ±8, ±16 в $P(x)$. Но это не меняет существа дела.

**) Подсказка: взять $p=$?

*) И. Шур (1885—1941) — немецкий математик.

Зародилось алгоритмическое направление во времена Л. Кронекера (1823—1891) — известного немецкого математика, когда был придуман самый верный (но не самый быстрый) способ узнать — приводим данный многочлен или нет (весьма похожий на тот, о котором шла речь в нашем первом примере: с. 15). Обогащенное идеями полузабытых признаков, это направление набирает темп. В самое последнее время (в 1982 г.) оно выразилось шедевром мастеров Голландской школы (А. Ленстра, Г. Ленстра, Л. Ловас) под названием «Алгоритм приведенного базиса», разрешившим скоростной вопрос в принципиальном плане.

События бурной эпохи гулким эхом отдались в кабинетной тиши и, в конце концов, заставили неприводимый многочлен служить человеку. Он трудится в *алгебраической теории кодирования*, и не исключено, что *коды исправления ошибок* помогали этим летом устранять срывы в изображении телепередач с Мексиканского футбольного чемпионата мира. А в теории и практике *случайных процессов* неприводимый многочлен твердо стоит на страже государственных секретов, превращая их в *псевдослучайные сигналы* и охраняя от чуткого постороннего уха.

В страну неприводимых многочленов сделан первый шаг — мы познакомились с ее признанными лидерами. Но другие ее представители — как известные, так и не исследованные — остались за кадром. Страна неприводимых многочленов полна загадок и каждый новый шаг в нее рождает новые вопросы.

Приложение

Здесь мы приводим обещанное пояснение доказательства признака Дюма. Но сначала

Разборка и сборка. Диаграмма Ньютона несет важную информацию о многочлене $P(x)$. Хранить ее удобно в разобранном виде.

Правило разборки. Разломаем диаграмму на звенья, в концах нарисуем стрелки и перенесем их параллельно себе (как векторы) в начальную точку (рис. 8). Так получается *связка* многочлена по простому p. Если точка основы лежит внутри звена (у нас — точка (6; 1) на последнем звене), то ломать звено в этой точке не следует.

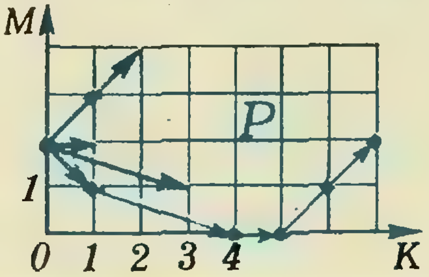


Рис. 8.

Правило сборки. Двигаясь снизу вверх (против часовой стрелки) выкладываем векторы связки друг за другом (см. рис. 8). Итак: *Заданной диаграмме Ньютона соответствует ровно одна связка, и по заданной связке диаграмма восстанавливается однозначно.*

Остается заметить, что местоположение на оси OM точки приложения связки не играет существенной роли. Умножая $P(x)$ на подходящую степень p^l (что не меняет свойства неприводимости), можно произвольно перемещать всю диаграмму, а вместе с ней и начальную точку, вдоль оси OM.

Теорема Дюма. *Связка произведения $P(x)Q(x)$ представляет собой объединение связок сомножителей $P(x)$ и $Q(x)$* (рис. 9).

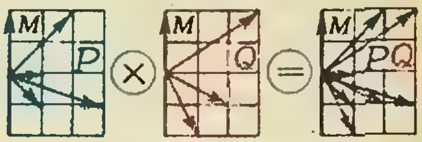


Рис. 9.

Здесь $Q(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m$ — это еще один, какой-нибудь, многочлен (подойдет и $Q(x)$ со страницы 14). Его основа, диаграмма и связка — красные.

Теорема Дюма показывает, как, зная диаграммы многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ по одному и тому же простому p, построить диаграмму их произведения. Для этого следует *наложить друг на друга связки сомножителей, совместив их начальные точки, а затем построить ломаную по правилам сборки* (рис. 10).

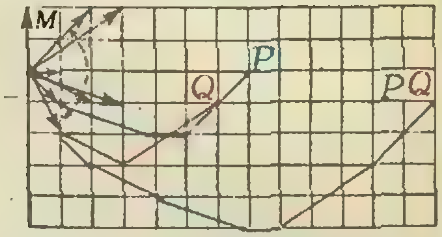


Рис. 10.

Добавление. Если в связке произведения $P(x)Q(x)$ два звена частично или полностью совпадут, то одно из них следует вытянуть из связки и поставить вслед за другим.

Секрет признака Дюма теперь прост — если $P(x)$ приводим, то по теореме Дюма его связка всегда состоит либо из нескольких звеньев, либо из одного, но тогда непременно составного (см. Добавление еще раз).

Для доказательства признака иррациональности необходимо опять вспомнить ТЕОРЕМУ («Квант» № 10, с. 7), нарисовать диаграмму линейного двучлена (она состоит ровно из одного примитивного звена) и вывести из теоремы Дюма утверждение:

Если все простые звенья связки имеют проекцию на ось OK длины $>k$, то все делители многочлена $P(x)$ имеют степень $>k$.

Доказательство теоремы Дюма основано на том, что умножению многочлена $P(x)$ на одночлен b_lx^k соответствует на плоскости OKM перенос основы $P(x)$ на вектор с координатами $(k; l)$, где $(k; l)$ — точка основы $Q(x)$, отвечающая одночлену b_kx^k. Дальнейшие рассуждения (вполне элементарные) не вошли в рамки этой статьи и мы их опускаем.

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Кинематика вращательного движения» предназначена восьмиклассникам, «Тепловой насос» — девятиклассникам, «Номограммы в геометрической оптике» — десятиклассникам.

Кинематика вращательного движения

Медленно проехав перекресток, троллейбус стал удаляться по улице, плавно увеличивая свою скорость...

Движение колеса троллейбуса — лишь один из многих примеров сложного механического движения в окружающем нас мире. Оказывается, любое сложное движение можно представить как сумму двух простых движений — поступательного и вращательного. Понимать это следует так: всегда можно подобрать такую поступательно движущуюся систему отсчета, относительно которой движение выглядит только как вращение вокруг некоторой неподвижной оси.

Какую же в нашем случае надо выбрать систему отсчета, чтобы в ней колесо троллейбуса совершало чистое вращение? Какими физическими величинами описывается это вращение, как эти величины связаны друг с другом и как зависят от времени? Такие вопросы могут возникнуть не только на пешеходном переходе, но и на уроке, экзамене, при решении конкретной задачи.

На первый вопрос ответить легко, догадавшись, что поступательно движущуюся систему отсчета можно связать с самим троллейбусом (его корпусом). Перед тем как ответить на остальные вопросы, заметим, что в нашем примере колесо вращается неравномерно — модуль скорости любой точки колеса меняется со временем.

Рассмотрим некоторую точку M колеса, находящуюся на расстоянии r от оси вращения и имеющую в некоторый момент времени скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ (рис. 1). Из физических соображений разумно ускорение $\vec{a}$ представить как сумму двух составляющих: одна из них $\vec{a}_ц$ направлена по радиусу к центру окружности — центростремительное ускорение, вторая $\vec{a}_к$ направлена по касательной к окружности — касательное ускорение. Оба эти ускорения имеют определенный физический смысл — касательное ускорение характеризует быстроту изменения модуля скорости, а центростремительное характеризует быстроту изменения направления скорости. Можно показать, что модуль центростремительного ускорения $a_ц = v^2/r$ («Физика 8», § 16), а модуль касательного ускорения $a_к = \Delta v/\Delta t$, где Δv — изменение модуля v скорости точки за сколь угодно малое время Δt.

Линейные и угловые величины. Как уже говорилось, нам надо ввести такие физические величины, которые характеризовали бы неравномерное вращение колеса (в системе отсчета, связанной с троллейбусом). Попробуем это сделать по аналогии с прямолинейным неравномерным движением.

Проследим за точкой M колеса в течение малого промежутка времени Δt. За это время точка пройдет по дуге окружности путь s и будет иметь скорость v и касательное ускорение $a_к$ (рис. 2). Три величины s, v и $a_к$, называемые линейными величинами, характеризуют движение точки M, но не могут служить для описания вра-

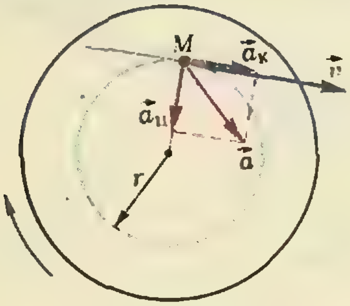


Рис. 1.

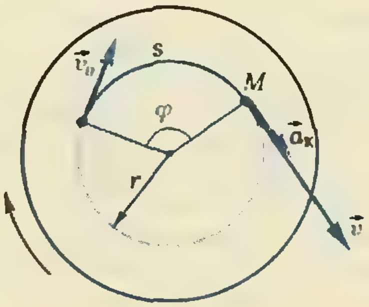


Рис. 2.

щения всего колеса, так как в один и тот же момент времени другие точки, расположенные на других расстояниях от оси вращения, имеют другие линейные скорости, и касательные ускорения и пройденные ими пути тоже не одинаковы. Поэтому кроме линейных вводятся так называемые угловые величины, которые одинаковы для всех точек вращающегося колеса: угол поворота φ радиуса, соединяющего точку M с центром окружности, угловая скорость $\omega = \Delta\varphi/\Delta t$ ($\Delta\varphi$ — изменение угла поворота за время Δt) и угловое ускорение $\varepsilon = \Delta\omega/\Delta t$ ($\Delta\omega$ — изменение угловой скорости).

Очевидно, что введенными здесь угловыми величинами можно описывать вращение не только троллейбусного колеса, но и любого другого тела. При этом с течением времени может изменяться не только угол поворота φ, но и угловая скорость ω и угловое ускорение ε. В частности, если угловое ускорение не зависит от времени, то угловая скорость изменяется равномерно и в таком случае говорят, что имеет место равноускоренное вращение. Когда же угловая скорость остается постоянной, то угловое ускорение оказывается равным нулю и говорят о равномерном вращении тела.

Связь линейных и угловых величин. Понятно, что линейные и соответствующие им угловые величины должны быть определенным образом связаны между собой. Найдем эти связи.

При повороте радиуса, проведенного в точку M (см. рис. 2), на угол φ точка пройдет по дуге окружности путь

$$s = r\varphi. \qquad (1)$$

За малое время Δt точка проходит расстояние $\Delta s = r\varphi_2 - r\varphi_1$, где φ_2 и φ_1 — углы поворота в конце и в начале интервала Δt. Разделив последнее равенство на Δt и учитывая, что $\Delta s/\Delta t = v$ и $(\varphi_2 - \varphi_1)/\Delta t = \Delta\varphi/\Delta t = \omega$, получим

$$v = r\omega. \qquad (2)$$

Заметим, что соотношение (2) связывает между собой линейную и угловую скорости не только при равномерном движении точки по окружности, но и при неравномерном движении тоже. Изменение модуля скорости точки за время Δt есть $\Delta v = r\omega_2 - r\omega_1$, где ω_2 и ω_1 — угловые скорости в конце и в начале промежутка Δt. Разделим последнее равенство на Δt и учтем, что $\Delta v/\Delta t = a_к$ и $(\omega_2 - \omega_1)/\Delta t = \Delta\omega/\Delta t = \varepsilon$, тогда касательное ускорение

$$a_к = r\varepsilon. \qquad (3)$$

Соотношения (1), (2) и (3) дают для движущейся по окружности точки простую связь между линейными и угловыми величинами: линейная величина равна произведению радиуса окружности на соответствующую угловую величину. Эти соотношения получены нами для конкретной точки M колеса троллейбуса, но они справедливы и для любой другой точки вращающегося (как равномерно, так и неравномерно) тела.

Формулы кинематики для равноускоренного вращательного движения. Найдем зависимость угловой скорости ω и угла поворота φ колеса троллейбуса от времени t для случая вращения колеса с постоянным угловым ускорением ε.

Пусть начальная угловая скорость равна ω_0. Тогда точка M, имея начальную скорость $v_0 = r\omega_0$, будет двигаться с постоянным по модулю касательным ускорением $a_к = r\varepsilon$. По аналогии с прямолинейным равноускоренным движением для линейной скорости v и пути s получим равенства

$$v = v_0 + a_к t, \qquad (4)$$

$$s = v_0 t + \frac{a_к t^2}{2}, \qquad (5)$$

из которых после исключения времени t следует полезное соотношение:

$$v^2 - v_0^2 = 2a_к s. \qquad (6)$$

Подставив в равенства (4)—(6) $s = r\varphi$, $v = r\omega$, $a_к = r\varepsilon$, $v_0 = r\omega_0$ и упростив, получим соотношения

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t,$$

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\varepsilon\varphi.$$

Это и есть формулы кинематики для вращательного движения любого тела (а не только колеса троллейбуса) с постоянным угловым ускорением.

В. И. Чивилёв

Тепловой насос

Все мы привыкли к электрическим нагревателям. Достаточно включить такой нагреватель в сеть, и через некоторое время в комнате становится теплее — энергия электрического тока в нем превращается в тепло. Электрический нагреватель очень прост в устройстве и по существу представляет собой нагревательную спираль — резистор. Превращение электрической энергии в тепло осуществляется практически полностью, за исключением той небольшой доли энергии, которая идет на световое излучение, если спираль достаточно раскалена и светится. Кстати, с этой точки зрения электрическая лампочка не такой хороший нагреватель, как скажем электрокамин, так как у нее несколько процентов мощности уходит в виде светового излучения. Но все-таки, как ни странно, она скорее нагреватель, чем источник света, то есть она в основном греет, а не светит.

Казалось бы, электрический нагреватель идеально справляется со своей задачей, преобразуя практически всю энергию тока в необходимое тепло. А нельзя ли нам, затратив некоторую энергию, получить тепла, скажем, в два раза больше и тем самым сэкономить расходы на нагревание? На первый взгляд, это абсолютно невозможно и противоречит закону сохранения энергии. Однако не будем торопиться и попробуем разобраться в этом вопросе подробнее. И начнем с ... холодильной машины, а попросту — холодильника.

Холодильник отбирает тепло от внутренней емкости, где поддерживается низкая температура, и отдает его в комнату. Сам по себе такой процесс идти не может. Тепло не может перейти само собой от холодного тела к горячему (это одна из формулировок второго начала термодинамики).

«Обратная» теплопередача требует постоянного подвода энергии — работы компрессора холодильника. Детали устройства холодильника нам не существенны, но заметим, что для его функционирования всегда необходима энергия.

Пусть в результате совершения работы A холодильник отобрал у морозильной камеры количество теплоты Q_2. Тогда, согласно закону сохранения энергии, в комнате выделилось количество теплоты $Q_1 = Q_2 + A$. Понятно поэтому, что при работе холодильника, даже с открытой дверцей, в комнате становится теплее.

Попробуем найти коэффициент полезного действия холодильника. Но прежде вспомним о тепловом двигателе, принцип устройства и работы которого точно такой же, как и у холодильной машины. По существу холодильная машина это тепловой двигатель, работающий по обратному циклу.

Как вы знаете, рабочее тело двигателя (рис. 1) получает от нагревателя количество теплоты Q_1, совершает работу A' и отдает холодильнику (не путайте с холодильной машиной!) количество теплоты $Q_2 < Q_1$. Максимальный коэффициент полезного действия идеального теплового двигателя равен

$$\eta_{\max} = \frac{A'}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 — температура нагревателя, а T_2 — температура холодильника.

КПД холодильника $\eta_х$ определяется отношением количества теплоты, отбираемого у морозильной камеры, к необходимой для этого работе. Для

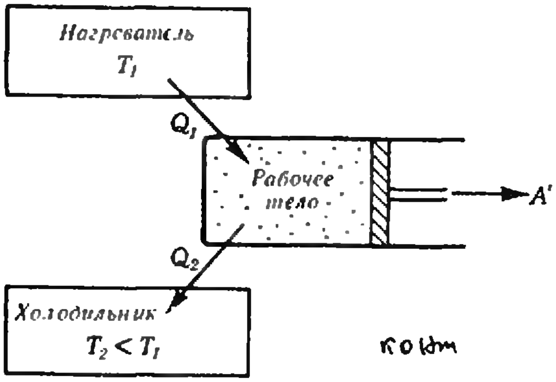


Рис. 1.

ко Ют

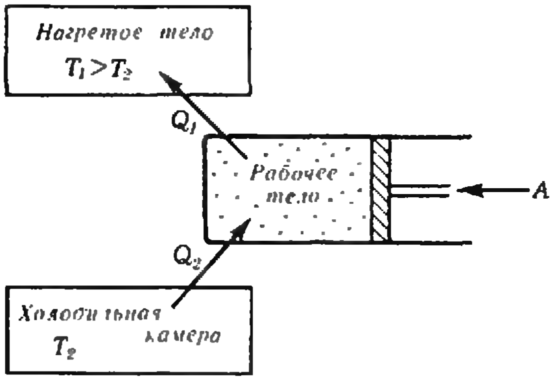


Рис. 2.

идеального холодильника он равен (рис. 2)

$$\eta_{\text{х max}} = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} = \frac{1 - \eta_{\max}}{\eta_{\max}}.$$

Заметим, что, как следует из этой формулы, холодильный коэффициент может быть больше единицы.

А теперь нетрудно догадаться, как можно использовать холодильник для отапливания помещения в холодное время года — для этого холодильную камеру нужно вынести на улицу (а все остальные части «агрегата» оставить в комнате)! Тогда, совершив работу A (отобрав энергию у электрической сети) и забрав с улицы количество теплоты Q_2, мы передаем в комнату количество теплоты $Q_1 = A + Q_2 > A$. Понятно, что никакого противоречия с законом сохранения энергии нет — дополнительная энергия в виде тепла отбирается от холодного наружного воздуха.

Холодильная машина, работающая таким образом, и называется «тепловым насосом», поскольку тепло «перекачивается» снаружи вовнутрь комнаты. В результате работы теплового насоса в помещении становится теплее, а на улице — еще холоднее (последний эффект, конечно же, совершенно ничтожен). КПД теплового насоса $\eta_{\text{н}}$ определяется отношением получаемого помещением количества теплоты к необходимой для этого внешней работе. В идеальном случае он равен

$$\eta_{\text{н max}} = \frac{Q_1}{A} = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{1}{\eta_{\max}}$$

и всегда больше единицы.

В качестве примера рассмотрим случай, когда температура наружного воздуха —20 °С ($T_2 = 253$ К), а внутри дома необходимо поддерживать температуру +20 °С ($T_1 = 293$ К). Тогда $\eta_{\text{н}} = \frac{293}{40} \approx 7{,}3$, то есть используя электрическую энергию для работы теплового насоса, мы можем получить в семь раз больше тепла, чем пользуясь электронагревательным прибором. Разумеется, реальный КПД всегда ниже, к тому же двигатель теплового насоса также превращает в работу не всю потребляемую энергию. Однако все равно использование теплового насоса оказывается в несколько раз более рентабельным, чем использование электронагревателя.

По сути дела тепловым насосом является обычный кондиционер: он «откачивает» тепло из комнаты. Если поменять его «вход» и «выход» местами, то в холодное время он может использоваться как экономичный обогреватель.

Почему же, несмотря на существенно бо́льшую рентабельность, тепловые насосы еще не заменили электронагревателей? Дело просто в том, что электронагреватель исключительно прост и дешев, а тепловой насос сравнительно сложное, громоздкое и дорогое устройство. Однако со временем тепловые насосы прочно войдут в наш быт и вытеснят расточительные электроотопительные приборы.

А. И. Буздин

Номограммы в геометрической оптике

Из школьного курса физики вы узнали о том, как можно графически решать различные задачи геометрической оптики. Например, чтобы найти положение изображения точечного источника света в тонкой линзе, достаточно построить ход двух произвольных лучей, вышедших из источника и прошедших через линзу.

В этой заметке будет рассказано еще об одном, несколько необычном графическом способе решения подобных задач. При этом на предлагаемых вам рисунках вы не увидите ни световых лучей, ни оптических осей линзы, ни даже самой линзы. О каких же тогда графиках пойдет речь?

В математике существует специальный раздел, называемый номографией (от греческих слов nómos — закон и gráphō — пишу), в котором изучаются методы построения особых чертежей — номограмм. С их помощью можно, например, не производя вычислений, получать приближенные

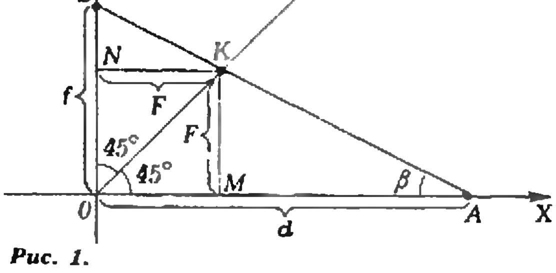


Рис. 1.

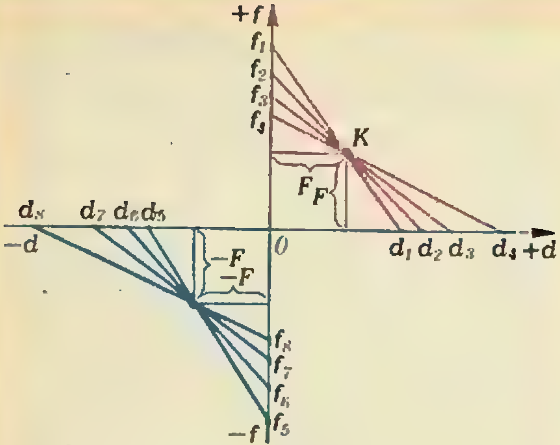


Рис. 2.

решения уравнений или находить приближенные значения интересующих нас функций. Воспользуемся и мы такой возможностью.

Пусть светящийся предмет находится на расстоянии d от линзы с фокусным расстоянием F, а его изображение — на расстоянии f. Можно показать (это сделано в § 60 «Физики 10»), что эти три величины связаны простым соотношением — формулой тонкой линзы:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}. \qquad (*)$$

Заметим, что каждое слагаемое, входящее в формулу, может быть как положительным, так и отрицательным. Если предмет, или его изображение, или фокус линзы действительные, величины d, или f, или F берутся со знаком «плюс», в случае же если предмет, или изображение, или фокус линзы мнимые, соответствующие величины считаются отрицательными.

Построим номограмму для формулы линзы и покажем, как с ее помощью можно решать конкретные задачи.

Изобразим на плоскости прямоугольную систему координат XOY (рис. 1). По оси X отложим отрезок OA длиной d, а по оси Y — отрезок OB длиной f. Пока для определенности d и f будем считать положительными. Соединим точки A и B отрезком прямой, проведем биссектрису прямого угла AOB и найдем точку K ее пересечения с AB. Из точки K опустим на оси координат перпендикуляры и обозначим длину полученных равных отрезков KM и KN через F. Из подобия треугольников AOB и AMK следует, что $\frac{OB}{OA}=\frac{KM}{MA}$, или $\frac{f}{d}=\frac{F}{d-F}$, откуда

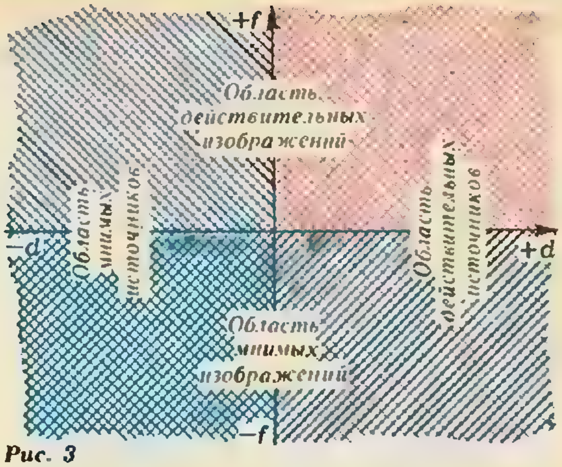

+f
Область действительных изображений
Область мнимых источников
−d
Область действительных источников
+d
Область мнимых изображений
−f

Рис. 3

легко получается знакомое нам уравнение (*).

Таким образом, мы получили, что длины d, f и F построенных на чертеже отрезков связаны между собой уравнением тонкой линзы (вот почему при построении мы использовали именно такие обозначения длин отрезков). А это, в свою очередь, означает, что мы умеем строить номограмму для формулы линзы. Действительно, если по горизонтальной оси прямоугольной системы координат откладывать расстояния d от предмета до линзы, а по вертикальной оси — расстояния f от линзы до изображения, то все прямые, соединяющие концы соответствующих отрезков, пересекаются в одной точке (рис. 2). Проекции этой точки на оси координат одинаковы и равны фокусному расстоянию F данной линзы.

Как вы знаете, для определения прямой на плоскости достаточно знать всего две принадлежащие ей точки. Поэтому с помощью построенной номограммы по известным двум из трех величин d, f и F всегда можно графически определить недостающую третью. Так, например, при построении, приведенном на рисунке 1, мы фактически определили фокусное расстояние линзы (F) по известным расстояниям от линзы до предмета (d) и от линзы до изображения (f).

Легко убедиться в том, что предложенный способ годится не только для собирающих линз, но и для рассеивающих, а также для любых расположений предмета и изображения относительно линзы. Если, например, предмет или изображение мнимые, то соответствующие значения d или f являются отрицательными и, следовательно, их надо откладывать в отрицательном направлении от начала координат (влево или вниз). Может случиться, что точка K пересечения всех отрезков, соответствующая фокусу линзы, будет иметь отрицательные проекции. Это будет означать, что фокус линзы — мнимый, то есть что линза — рассеивающая. Области расположения действительных и мнимых предметов и изображений показаны на рисунке 3.

Номограммы можно использовать и для определения линейного увеличения линзы — отношения линейного размера H изображения к линейному размеру h предмета: $\Gamma = H/h = f/d$ (см. § 60 «Физики 10»). Из рисунка 1 видно, что

$$\Gamma = \frac{f}{d} = \operatorname{tg} \beta.$$

Таким образом, изображение может быть увеличенным, уменьшенным или такого же размера, как и сам предмет.

Можно решить и обратную задачу — по заданному увеличению и известному фокусному расстоянию линзы определить расстояния d и f. Для этого достаточно построить знакомую нам точку K и провести через нее прямую, наклоненную к горизонтальной оси под углом β. Точки пересечения этой прямой с осями координат и дадут нам искомые значения d и f.

А. И. Шапиро

Число делений

(Задачи на исследование)

Обычная двадцатисантиметровая ученическая линейка (с 19-ю делениями) обладает таким свойством *универсальности:* с ее помощью одним измерением можно отложить любой отрезок длиной 1, 2, 3, ..., 20 см. Это свойство может сохраниться, если стереть часть делений. Какое минимальное число делений необходимо оставить (и как их расположить), чтобы свойство универсальности сохранилось? Этой задаче и ее обобщениям посвящена данная заметка.

Назовем линейку длиной n с k делениями *универсальной* (или (n, k)-*универсальной*), если с ее помощью можно одним измерением отложить любой из отрезков длиной 1, 2, ..., n. Так, обычная ученическая линейка (20, 19)-универсальна, но бывает и (20, 6)-универсальная линейка (см. ниже). Основная задача состоит в том, чтобы *найти минимальное число делений $k=k(n)$, для которого существует (n, k)-универсальная линейка.* Известны (см. «Квант» 1976, № 12, с. 7) следующие оценки для $k(n)$:

$$\frac{\sqrt{8n+1}-3}{2} \leqslant k(n) \leqslant \sqrt{4n+5}-3. \quad (*)$$

Для малых n минимальное число делений $k(n)$ можно найти перебором. При $1 \leqslant n \leqslant 13$ эти числа соответственно равны 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 и достигаются на следующих линейках (числа в квадратных скобках указывают длины отрезков между последовательными делениями): [1]; [1, 1], [1, 2], [1, 2, 1], [1, 1, 3], [1, 3, 2], [1, 1, 3, 2], [1, 1, 3, 3], [1, 1, 4, 3], [1, 1, 3, 3, 2], [1, 1, 3, 3, 3], [1, 1, 4, 3, 3], [1, 1, 4, 4, 3]. Легко доказать, что лишь у двух универсальных линеек с минимальным числом делений ([1, 2] и [1, 3, 2]) отрезки между делениями попарно различны.

Оказывается, оценку сверху (*) для $k(n)$ можно улучшить, воспользовавшись двумя соображениями. Во-первых, маленькие отрезки целесообразно группировать не только с одного конца линейки, но с обоих концов. Во-вторых, можно многократно повторять самый длиный отрезок, создавая тем самым серии линеек, например [1, 3, 2], [1, 3, 3, 2], [1, 3, 3, 3, 2], ... Такие серии мы будем обозначать, заключая повторяемый отрезок в скобки, например, приведенную выше серию мы запишем так: [1, (3), 2]. Комбинируя эти соображения, мы можем выписать следующий набор серий (для случая, когда максимальный отрезок кратен четырем):

[1, 2, 2, 5, (8), 3, 1, 2],
[1, 2, 2, 2, 7, 7, (12), 5, 5, 1, 2],
[1, 2, 2, 2, 2, 9, 9, 9, (16), 7, 7, 7, 1, 2, 2, 2], ...

Если k — число делений, а m — число повторов максимального отрезка, то длина этого отрезка равна $k-m+2$; такова же сумма длин двух смежных с ним отрезков, а число их повторов равно $(k-m-2)/4$; сумма единиц и двоек также равна $k-m+2$, и поэтому длина линейки равна

$$n=(k-m+2)\times \left(\frac{k-m+2}{4}+m\right).$$

Если это выражение проанализировать на максимум при фиксированном k (как это делать, описано в «Кванте» 1976 № 12, с. 8), получается следующая оценка:

$$k(n) \leqslant \sqrt{3n+1}-2. \quad (**)$$

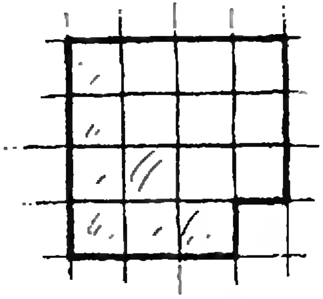
Можно указать несколько следующих значений для $k(n)$: при $14 \leqslant n \leqslant 23$ числа $k(n)$ равны соответственно 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6. Например, при $n=19$ число $k(19)=6$ даст линейка [2, 1, 5, 7, 2, 1, 1], при $n=20$ число $k(20)=6$ дается линейкой [1, 2, 4, 4, 4, 4, 1], число $k(21)=6$ — линейкой [1, 4, 7, 3, 3, 2, 1], $k(29)=7$.

Мы предлагаем вам исследовать такие задачи:

1. Можно ли улучшить оценку снизу (*)?
2. Можно ли улучшить оценку сверху (**)?
3. Является ли функция $k(n)$ монотонной?
4. При каких k окружность длины k^2-k+1 можно разбить k точками на k дуг так, чтобы для любого $m=1, 2, ..., k^2-k$ нашлась бы дуга длиной m (ср. «Квант», 1980, № 3, с. 29).

В. Г. Чванов

Квант для младших школьников



Задачи

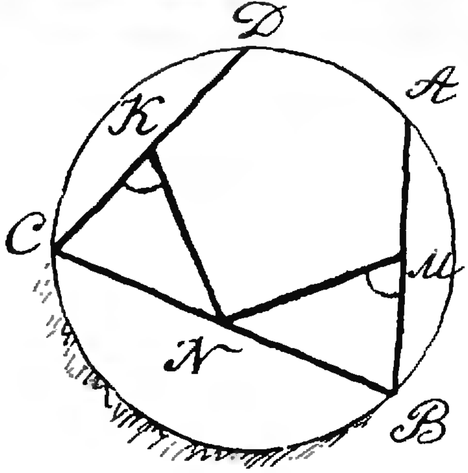
1. Как разрезать фигуру, изображенную на рисунке, на три одинаковые части?

2. Железнодорожные рельсы закрепляют на шпалах для того, чтобы рельсы не сдвигались в сторону. Какую еще важную роль играют шпалы?

★★★ + ★★ = ★★★

3. В записи ***+**=*** замените звездочки цифрами так, чтобы равенство имело смысл и было правильным после поворачивания листа бумаги (на котором оно записано) на 180°.

4. У продавца, который привез на базар продавать орехи, оказались неправильные рычажные весы и правильная килограммовая гиря. Чтобы отвесить покупателю 2 кг орехов, он один раз уравновесил гирю орехами, положив ее на правую чашку весов, а другой раз уравновесил эту гирю орехами, положив ее на левую чашку весов. Оказалось, что в результате он отвесил больше 2 кг орехов (покажите это). Как продавец должен поступить, чтобы отвесить ровно 2 кг орехов?



5. В круге провели три хорды AB, BC, CD и отметили их середины: M, N, K. Покажите, что углы BMN и NKC равны.

Эти задачи нам предложили *М. Бабиков, А. П. Савин, А. В. Швецов, Н. Х. Розов, Г. А. Гальперин.*

Д.Крылов
1986.

Знакомьтесь: металлическое стекло

Кандидат физико-математических наук
А. С. ШТЕЙНБЕРГ

Вы включаете магнитофон, но вместо музыки раздаются малопонятные хрипы. В мастерской слышите стандартный диагноз: износ магнитной головки. От длительного контакта с лентой она истерлась и не обеспечивает качество воспроизведения. Наверное, многим знакома эта ситуация.

А теперь представьте себе рекламу: «Покупайте магнитофоны с головками из металлического стекла!». Скорее всего, сочетание слов «металлическое стекло» покажется вам странным. Но можете смело довериться совету рекламы — в широком ассортименте полезных свойств металлических стекол (иногда их еще называют аморфными металлами) числится и повышенная сопротивляемость износу. Что же это такое — металлическое стекло?

Стекло (обычное, а не металлическое) известно человеку давно. В огне оказалась подходящая по составу песчаная смесь, расплавилась, затем застыла и... получилось стекло. Произошло это около шести тысячелетий назад, и с тех пор область применения стекла постоянно расширялась.

Но только в нашем веке стали раскрываться его секреты.

Хорошо известны два «плотных» состояния вещества: жидкое и кристаллическое. Их внешней непохожести соответствует не менее серьезное различие в атомном строении. В жидкости атомы расположены друг относительно друга более или менее случайно, а в кристалле их расположение строго упорядочено. Одинаковые атомы расположены наподобие узлов пространственной решетки, которая называется кристаллической. Разные вещества имеют свои характерные формы кристаллических решеток. На рисунке 1 изображен один из возможных вариантов.

Если кристалл нагреть выше точки плавления, он расплавится и превратится в жидкость. Если расплав охладить ниже точки плавления — он вновь закристаллизуется. При этом атомы как будто «чувствуют» приближение критического момента, когда надо перестроиться и из жидкостного беспорядка «организовать» строгий кристалл. Все происходит так, словно дана команда «становись!» и атомы-солдаты по одному занимают свои места, выстраиваясь в определенном порядке. И как бы «исполнительны» ни были атомы, на «построение» все-таки требуется какое-то время. Самый известный пример кристаллизации — образование льда из воды при 0 °С. Точно так же ведут себя при своих температурах плавления все металлы, их сплавы и тысячи других веществ. Но иногда события развиваются по необычному сценарию.

«Жизнь» атомов — это постоянное движение. Но их подвижность быстро падает с понижением температуры. Этим обстоятельством можно воспользоваться. Представим себе, что какой-то многорукий монстр схватил все атомы жидкости и удерживает их на месте, пока расплав не охладится до температуры ниже температуры плавления, и лишь после этого отпускает. Тогда перестроиться в кристалл атомам уже не удастся. Они так и останутся в беспорядке. Сама жидкость при этом загустеет и станет твердой. Такой материал и называется стеклом.*)

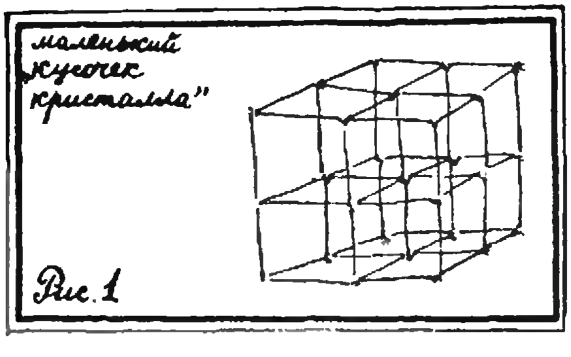


Рис. 1

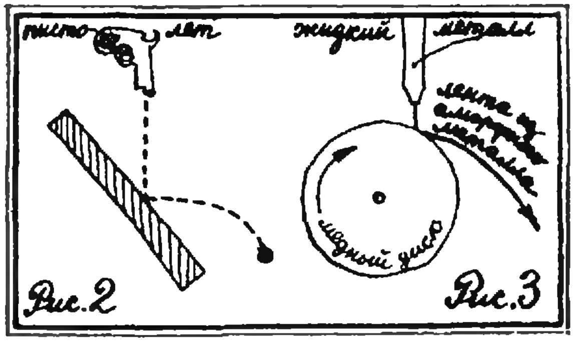
Держать атомы, конечно, нереально. Но зато можно быстро охладить жидкость. Тогда при высоких температурах (температурах плавления) атомы перестроиться не успеют, а при низких — будет уже поздно. Вспомните одну из детских игр. В ней все играющие должны остаться в положении, в котором их застала команда «замри». Иногда оно бывает мучительно неестественным. Резкое охлаждение — приказ «замереть» для атомов. В отличие от людей атомы могут находиться в «неудобных» положениях годами, веками, тысячелетиями. И если играющих оживляет команда «отомри», то атомы «пробуждаются к жизни» повторным нагревом.

Но что значит «быстро охладить»? Для каждого вещества ответ свой. Для смеси соды и песка «быстро» означает уменьшение температуры на доли градуса в секунду. Такая скорость охлаждения достигается при естественном остывании расплавленной массы. Именно поэтому и сумели наши далекие предки открыть обычное стекло. А вот для металлических сплавов «быстро» — это действительно быстро. Оценки показали: чтобы не дать жидкому металлическому расплаву закристаллизоваться, его надо охлаждать со скоростью миллион градусов в секунду! Разумеется, температура горячего расплава не миллион градусов. Такая скорость понижения температуры означает, что охладить расплав, скажем, от 2000 °С до 1000 °С надо за 10^{-3} с, то есть за одну миллисекунду. Такова цена «остановки» атомов.

Сама идея быстрого охлаждения отнюдь не нова. Под именем закалки она была известна с древности. Свидетельствует великий Гомер: «Как погружает кузнец раскаленный топор иль секиру в воду холодную, и зашипит с клокотаньем железо — крепче железо бывает, в огне и воде зака-

---

*) Стекла относятся к более общей группе аморфных веществ — так называются твердые тела, не имеющие кристаллической решетки.



ляясь». Однако традиционные способы закалки обеспечивают скорость охлаждения только 100—1000 градусов в секунду. Для наших целей этого слишком мало.

Оставим на время металл и зададимся вопросом: как побыстрее охладить горячий чай? Проще всего — налить его из чашки в блюдце. Тепло отдается в основном окружающему воздуху. Увеличивая поверхность соприкосновения с воздухом, мы увеличиваем скорость охлаждения. Чем более плоское блюдце мы выберем, тем быстрее остынет чай (конечно, при его неизменном объеме!). Наконец, можно просто вылить чай на стол. В результате растекания жидкости площадь ее поверхности еще больше возрастет. Правда, для чаепития этот прием мы рекомендовать не станем, зато в быстром остывании можете не сомневаться.

Итак, первый вывод: для увеличения скорости охлаждения следует максимально увеличить площадь поверхности контакта с теплоотводящей средой, в данном случае — с воздухом.

Но воздух отводит тепло сравнительно медленно. Хорошими проводниками тепла по справедливости считаются металлы, а из них в первую очередь — медь. В этом мы убеждаемся каждый раз, когда прикасаемся к металлическому покрытию,— оно всегда кажется холодным, так как быстро отводит тепло человеческого тела.

Отсюда следует еще одна рекомендация: чай следует разливать не на столе, а на широком металлическом (желательно медном) подносе. Тогда он остынет почти сразу же.

На этом закончим нашу не слишком изысканную «чайную церемонию». Она подсказала конкретный рецепт. Для быстрейшего охлаждения жидкого металла надо создать очень тонкий его слой на медной поверхности (обычно ее называют подложкой).

Первые удачные опыты по сверхбыстрому охлаждению металлической жидкости были произведены в 1960 году. Капля расплавленного металла выстреливалась на подложку из меди. (В ранних работах для этого применялась энергия пороховых газов обычного пистолета.) При ударе о медный экран капля расплющивается, моментально охлаждается (скорость охлаждения достигает 10^8—10^{10} град/с), и с медного «трамплина» в воздух взмывает крохотная лепешка твердого аморфного металла (рисунок 2). В самых тонких местах ее толщина оказывается равной 0,0001 мм.

Существует еще несколько разновидностей метода «расплющивания капли». Главный их недостаток — малая производительность. Да и аморфный металл получается в виде мелкого порошка, а это не всегда удобно для практического использования. Но применение тех же принципов охлаждения позволило создать способы производства непрерывной ленты из аморфного металла. Вот один из возможных вариантов. На вращающийся медный диск льется тонкая струя расплавленного металла. Соприкасаясь с диском, она охлаждается, и с диска сбрасывается уже застывшая аморфная лента (рисунок 3).

Внешне металлическое стекло не имеет ничего общего с обычным прозрачным стеклом и ничем не отличается от обычного (кристаллического) металла. Но это — только внешне. Необычному для комнатных температур беспорядочному расположению атомов соответствуют и необычные свойства. Аморфный металл чрезвычайно тверд и прочен. Изготовленные из него магнитные головки во много раз превосходят по сроку службы своих кристаллических «собратьев.» Да и по чисто магнитным характеристикам преимущество на их стороне. Уже сегодня в разных странах начат выпуск магнитных головок из металлического стекла для видео- и звуковых магнитофонов, памяти компьютеров.

Высокая твердость аморфных металлов подсказала и другую область их применения. Чрезвычайно практично изготовлять из них режущие инструменты.

(Окончание см. на с. 39.)

задачник кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 января 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11—86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1011, М1012» или «Ф1023». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию и имя просим писать печатными буквами.

Задачи

М1011—М1015; Ф1023—Ф1027

М1011. Докажите, что для n положительных чисел $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\ldots\geqslant a_n$ выполнены неравенства:

а) $a_1^2-a_2^2+a_3^2\geqslant(a_1-a_2+a_3)^2$;

б) $a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2\geqslant(a_1-a_2+a_3-a_4)^2$;

в) $a_1^2-a_2^2+\ldots-(-1)^n a_n^2\geqslant(a_1-a_2+\ldots-(-1)^n a_n)^2$.

Л. Д. Курляндчик

М1012. Докажите, что:

а) на плоскости можно расположить несколько непересекающихся кругов так, чтобы каждый касался ровно 5 других;

б) число 5 в пункте а) нельзя заменить на 6.

Д. В. Фомин

М1013. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты две точки M и N. Три параллельные прямые, проходящие через точки M, B и N, пересекают основание AC в точках K, D и L. Докажите, что площадь трапеции (или параллелограмма) $KMNL$ не больше площади одного из треугольников ABD и DBC (рис. 1).

В. В. Рождественский

М1014. Пусть a_1, a_2, ..., a_n — различные попарно взаимно простые натуральные числа. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных b, что числа $b+a_1$, $b+a_2$, ..., $b+a_n$ также попарно взаимно просты.

В. Ф. Лев

М1015. Можно ли разложить на множители с целыми коэффициентами многочлен $x^4+x^3+x^2+x+12=0$?

С. Л. Манукян

Ф1023. Лампочка висит на расстоянии l_1 от потолка на высоте l_2 от пола. При ее взрыве осколки разлетаются во все стороны с одной и той же по величине скоростью v. Найдите радиус круга на полу, в который попадут осколки. Считать, что удары осколков об потолок абсолютно упругие, а об пол — неупругие; до стен осколки не долетают.

Ф1024. Оценить изменение давления в парно́й после того как на раскаленные камни плеснули воду из ковша. Предполагается, что вы, хорошо представляя явление, можете сами задать необходимые величины, выбрать достаточно правильно их числовые значения и получить численный ответ.

Г. В. Меледин

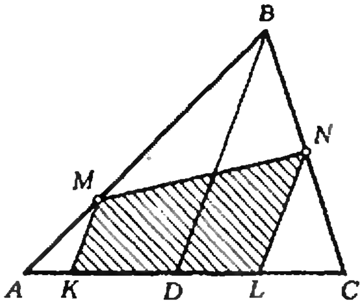


Рис. 1.

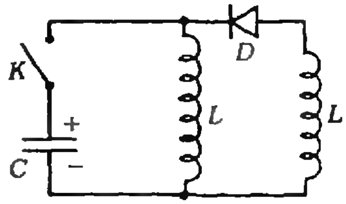


Рис. 2.

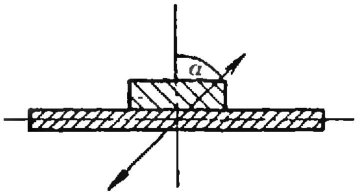


Рис. 3.

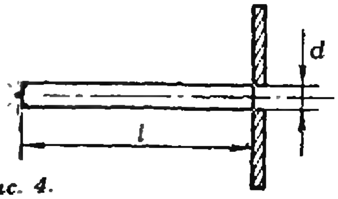


Рис. 4.

Ф1025. В схеме, приведенной на рисунке 2, сверхпроводящие катушки имеют одинаковые индуктивности L, диод D идеальный, начальный заряд конденсатора емкостью C равен Q_0. Постройте графики изменения заряда $Q(t)$ конденсатора и токов $I_1(t)$ и $I_2(t)$ через катушки после замыкания ключа K.

Е. И. Бутиков

Ф1026. Горизонтальная площадка, на которой лежит брусок, вибрирует по гармоническому закону с частотой $f=10$ Гц в направлении, составляющем угол $\alpha=45°$ с вертикалью (рис. 3). Коэффициент трения бруска о площадку $\mu=0{,}5$. При какой минимальной амплитуде вибраций брусок «поползет» по площадке?

Е. И. Бутиков

Ф1027. Источник света находится на расстоянии $l=1$ м от экрана. В экране напротив источника сделано отверстие диаметром $d=1$ см. Как изменится поток света через отверстие, если между экраном и источником поместить прозрачный цилиндр из материала с показателем преломления $n=1{,}5$ так, как показано на рисунке 4 (длина цилиндра $l=1$ м, диаметр $d=1$ см; источник находится на оси цилиндра)?

А. И. Бутов

Problems

M1011—M1015; P1023—P1027

M1011. Prove the following inequalities for any n positive numbers $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant\ldots\geqslant a_n$:

a) $a_1^2-a_2^2+a_3^2\geqslant(a_1-a_2+a_3)^2$;

b) $a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2\geqslant(a_1-a_2+a_3-a_4)^2$;

c) $a_1^2-a_2^2+\ldots-(-1)^n a_n^2\geqslant(a_1-a_2+\ldots-(-1)^n a_n)^2$.

L. D. Kurlyandchik

M1012. Prove that a) it is possible to choose several disks on the plane so that each touches exactly 5 others and no two disks have common inner points; b) the number 5 in a) cannot be replaced by 6.

D. V. Fomin

M1013. The points M and N are chosen on sides AB and BC of triangle ABC. Three parallel lines, passing through M, B and N intersect AC at points K, D and L. Prove that the area of the trapezoid (or parallelogram) $KMNL$ is larger than that of one of the triangles ABC and DBC (see figure Рис. 1).

V. V. Rojdestvenski

M1014. The natural numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are pairwise relatively prime. Prove that there exists an infinite set of natural numbers b such that the numbers $b+a_1$, $b+a_2$, ..., $b+a_n$ are also pairwise relatively prime.

V. F. Lev

M1015. Can the polynomial $x^4+x^3+x^2+x+12$ be factorized into polynomials with integer coefficients?

S. L. Manukian

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. In goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than January 15th 1987, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S

PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

P1023. A lamp hangs at the distance l_1 from the ceiling and l_2 from the floor. When it explodes, fragments fly in all directions with the same speed v. Find the radius of the circle on the floor within which they fall. You may assume that the collisions with the ceiling are absolutely elastic and those with the floor absolutely inelastic; no fragments reach the walls.

P1024. Estimate the variation of pressure in a sauna after water from a jar is splashed on very hot rocks placed inside the sauna. It is assumed that you are familiar with the phenomenon and can find the appropriate parameters, choose reasonable numerical values for them, so as to obtain a numerical answer.

G. V. Meledin

P1025. In the circuit shown on figure Рис. 2, the coils with the same inductivity L are superconducting, the diode D is ideal, the initial charge of the capacitor is Q_0. Plot the dependance of the charge $Q(t)$ of the capacitor, and the currents $I_1(t)$ and $I_2(t)$ flowing through the coils, after the switch K in turned on.

E. I. Butikov

P1026. A flat horizontal surface, on which a slab is placed, vibrates according to the harmonic law with frequency $f=10$ Herz in a direction constituting an angle of $\alpha=45°$ with the vertical (see figure Рис. 3). The friction coefficient of the slab against the surface is $\mu=0.5$. For what minimal amplitude of vibration will the slab start to "creep" along the surface?

E. I. Butikov

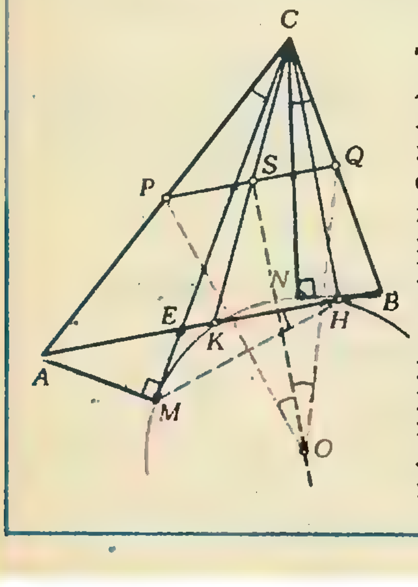
P1027. A light source is placed at the distance of $l=1$ m from a screen. An aperture of diameter $d=1$ cm is made in the screen opposite the source. How will the flow of light through the aperture change, if a smooth transparent cylinder made of material of refraction index $n=1.5$ is placed between the screen and the source as shown on figure Рис. 4 (the length of the cylinder is $l=1m$, its diameter is $d=1$cm; the source is on the cylinder's axis).

A. I. Butov

Решения задач

М991—М995; Ф1003—Ф1007

М991. *В треугольнике ABC проведены высота CH и медиана CK. На стороне AB выбраны точки E и F так, что $\angle ACE=\angle BCF$, и на лучи CE и CF опущены перпендикуляры AM и BN. Докажите, что точки M, H, K и N лежат на одной окружности.*



Пусть O — центр описанной окружности треугольника MNH. Докажем, что $OK=OH$, то есть что O лежит на серединном перпендикуляре l к отрезку KH. Прямая l проходит через точку S — общую середину медианы CK и средней линии PQ треугольника ABC (см. рисунок), следовательно, является серединным перпендикуляром и к PQ, поэтому достаточно доказать, что $OP=OQ$ или что

$$\angle OPQ=\angle OQP.$$

Точки M и H лежат на окружности ω с диаметром AC и центром P ($\angle AMC=\angle AHC=90°$), поэтому $PM=PH$; кроме того, $OM=OH$. Следовательно, прямая OP перпендикулярна отрезку MH (и делит его пополам), а значит, $\angle OPQ$ — угол между прямыми OP и PQ — равен $90°-\beta$, где β — угол между прямыми MH и PQ или MH и AB ($AB\parallel PQ$). Возможны два случая: $\beta=\angle AHM$, если $\angle AHM\leqslant 90°$, как на нашем рисунке, или $\beta=180°-\angle AHM$, если $\angle AHM>90°$. Поскольку углы AHM и ACM вписаны в окружность ω и опираются на одну и ту же хорду AM, они равны или дают в сумме $180°$, поэтому либо $\beta=\angle ACM$, либо $\beta=180°-\angle ACM$ — выбирается то из равенств, для которого $\beta\leqslant 90°$. При таком выборе всегда получается, что $\angle OPQ = 90° - \beta = \left|90° - \angle ACM\right|$. Аналогично, $\angle OQP = \left|90° - \angle BCN\right|$. Но $\angle ACM = \angle BCN$ по условию.

Заметим, что при $E = B$, $F = A$ из доказанного утверждения следует часть известной теоремы об «окружности 9 точек» (см. «Калейдоскоп «Кванта» в 11-м номере за 1985 год): основания высот и середины сторон треугольника лежат на одной окружности.

◆

М992. *Среди 90 выпускников одной математической гимназии у каждого не менее 10 друзей. Докажите, что любой выпускник может пригласить в гости трех других так, что среди четырех собравшихся у каждого будет не менее двух друзей.*

Пусть A — произвольный выпускник. Достаточно показать, что найдется такой выпускник B, который дружит одновременно с двумя друзьями A (тогда A может пригласить B и этих двух друзей).

Если такой выпускник B есть среди друзей A — все в порядке. В противном случае каждый из m $(m \geqslant 10)$ друзей A дружит не менее чем с 8 выпускниками (не считая A), которые сами с A не дружат. Если бы все эти выпускники были различны, то получилось бы, что имеется не менее чем $8m \geqslant 80$ выпускников, отличных от A и его друзей; но количество таких выпускников не превосходит $90 - m - 1 \leqslant 79$. Это означает, что какие-то двое друзей A имеют общего друга B, что и требовалось доказать.

◆

М993*. *а) Найдите 11 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых — квадрат натурального числа.*

б) Докажите, что при $2 < n < 11$ не существует n последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых — квадрат.*

а) Ответ: 18, 19, ..., 28 $(18^2 + 19^2 + \ldots + 28^2 = 77^2)$.

б) Мы должны показать, что уравнение $(x+1)^2 + (x+2)^2 + \ldots + (x+n)^2 = y^2$ или

$$nx^2 + n(n+1)x + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = y^2 \qquad (1)$$

не имеет решений в целых числах x и y, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 1$, при $3 \leqslant n \leqslant 10$. (Здесь использовано известное тождество $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, доказательство которого мы оставляем читателю; впрочем, достаточно проверить его вычислением для $n \leqslant 10$.)

Если равенство (1) выполнено, то остаток от деления y^2 на n равен остатку от деления $a = n(n+1)(2n+1)/6$ на n. Но при $n = 3, 4, 9$, когда соответствующие остатки равны 2, 2 и 6 ($a = 14$, 30 и $15 \cdot 19$), это невозможно ни при каком y (см. таблицу на полях).

При $n = 5$ и $n = 7$ число a делится на n, поэтому число y^2, а следовательно, и y должно делиться на n (n — простое). Полагая $y = nz$, $t = x + (n+1)/2$, мы можем переписать наше уравнение в виде $t^2 + (n^2 - 1)/12 = z^2$ или

$$z^2 - t^2 = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Но это уравнение при допустимых значениях n, t и z не имеет решений, поскольку

$$z^2 - t^2 \geqslant z + t \geqslant 2t \geqslant 6,$$

$$\frac{n^2 - 1}{12} \leqslant \frac{7^2 - 1}{12} = 4.$$

При $n = 6$, 8, 10 уравнение (1) удобно переписать в виде

N	*остаток от деления N^2 на:*			
	3	4	7	9
0	0	0	0	0
±1	1	1	1	1
±2	1	0	4	4
±3	0	1	2	0
±4	1	0	2	7
...	...	...	...	...

$$(n+1)x^2+(n+1)nx+(n+1)\frac{n(2n+1)}{6}=x^2+y^2. \quad (2)$$

Отсюда при $n=6$ получаем, что x^2+y^2 должно делиться на $n+1=7$. Таблица на полях показывает, что это возможно, лишь когда x и y одновременно делятся на 7. Но в этом случае все члены уравнения (2) кроме одного — $(n+1)\,n\,(2n+1)/6=7\cdot 13$ — должны делиться на $(n+1)^2=49$, чего не может быть. Точно так же доказывается, что и при $n=10$ наше уравнение не имеет решений. Наконец, при $n=8$ в левой части (2) стоит число, которое при делении на 9 дает остаток 6 и, как видно из нашей таблицы, не может быть представлено в виде x^2+y^2.

◆

M994*. *При каком наибольшем значении k неравенство*

$$a^4+b^4+c^4+abc\,(c+b+c)\geqslant k\,(ab+bc+ca)^2$$

выполнено при всех значениях a, b и c?

Ответ: $k=2/3$. При $a=b=c$ и $k=2/3$ данное неравенство обращается в равенство, поэтому искомое значение k не может быть больше 2/3. Но при $k=2/3$ можно с помощью тождественных преобразований привести неравенство к виду

$$\frac{1}{6}\Big(\frac{5}{2}\left((a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\right)+ \\ +(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2\Big)\geqslant 0,$$

следовательно, оно справедливо при всех a, b, c и искомое значение k в точности равно 2/3.

◆

M995. *Функция $y=f(x)$ при всех x определена, непрерывна и удовлетворяет условию*

$$f(f(x))=f(x)+x. \qquad (\bullet)$$

а) Найдите две такие функции f (не равные тождественно 0).
б) Докажите, что других таких функций нет.*

а) Ответ: $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$ и $y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x$. Найти эти функции можно, предположив, что $f(x)=\lambda x$, подставив эту функцию в условие

$$\lambda^2x=\lambda x+x$$

и решив квадратное уравнение $\lambda^2-\lambda-1=0$ (корни этого уравнения равны $(1\pm\sqrt{5})/2$).

б) Как видно из решения задачи а), достаточно показать, что любая функция f, удовлетворяющая условию задачи, имеет вид $f(x)=\lambda x$. Для этого установим сначала некоторые свойства функции f.

1) $f(0)=0$. (Пусть $f(0)=c$, тогда $f(c)=f(f(0))=f(0)+0=c$, следовательно, $f(c)=f(f(c))=f(c)+c$, то есть $c=0$.)

2) *В разных точках функция f принимает разные значения.* (Если $f(x_1)=f(x_2)$, то $f(f(x_1))=f(f(x_2))$, то есть $f(x_1)+x_1=f(x_2)+x_2$ и $x_1=x_2$.) В частности, f имеет единственный корень $x=0$.

Из этих свойств и непрерывности функции f следует, что:

3) *на каждой из полуосей $x>0$ и $x<0$ функция f сохраняет знак, причем при переходе через нуль ее знак меняется* (иначе близкие к нулю значения f будут приниматься по крайней мере дважды — справа и слева от точки $x=0$) и

4) *функция f имеет обратную функцию g* (определённую, конечно, на области значений f; ниже мы увидим, что f принимает все действительные значения).

Положим $f_0(x)=x$, $f_1(x)=f(x)$, $f_2(x)=f(f(x))$, ...

квант 11/86

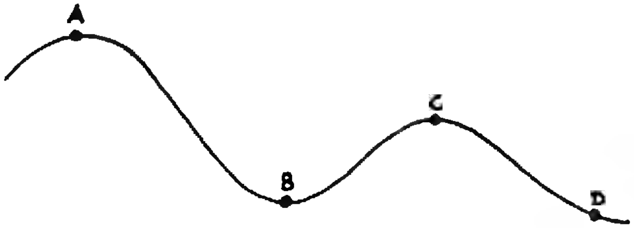
Вопросы и задачи

● 1. Можно ли найти равнодействующую сил тяжести, действующих на осколки разорвавшегося снаряда?

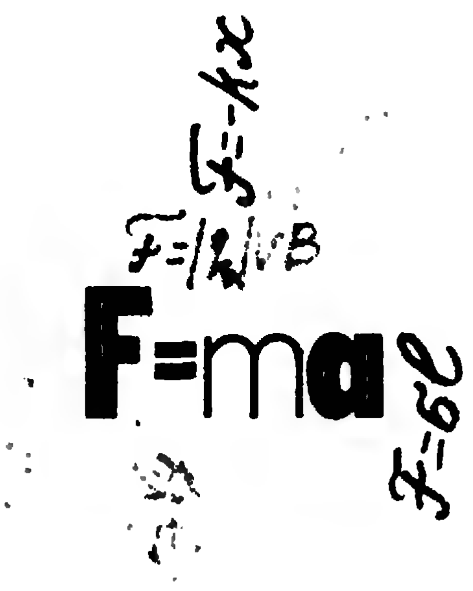
● 2. В опытах с магдебургскими полушариями с каждой стороны впрягали по 8 лошадей. Изменится ли сила тяги, если одно полушарие прикрепить к стене, а с другой стороны впрячь 16 лошадей?

● 3. Можно ли натянуть веревку строго горизонтально?

● 4. С искусственной горки, профиль которой изображен на рисунке, не подскакивая, съезжает тележка. В каком месте надо положить наиболее прочные доски?



● 5. Что легче: удержать санки на склоне горки или двигать их по нему равномерно вверх?



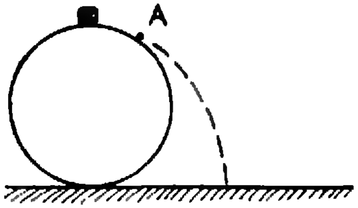
Вся трудность физики состоит, по-видимому, в том, чтобы по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам объяснить остальные явления...

И. Ньютон
«Математические начала натуральной философии»

квант 11/86

Вопросы и задачи

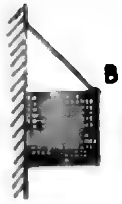
○ 8. Какие силы действуют на тело в точке отрыва А?



● 9. Каково направление равнодействующей сил, приложенных к грузу маятника, в моменты, когда он: а) находится в крайних положениях; б) проходит положение равновесия?

● 10. Почему не приближаются друг к другу предметы, находящиеся в комнате, хотя они взаимно притягиваются?

● 11. Может ли удержаться ящик, показанный на рисунке, при отсутствии сил трения?



6. Грузовик трогается с места. Какая сила действует на груз, поставленный в середину его кузова? Куда она направлена?

●

7. Две одинаковые пружины один раз соединили последовательно, другой — параллельно. Покажите на графике, чем отличаются зависимости силы упругости от абсолютного удлинения в этих случаях.

Любопытно, что...

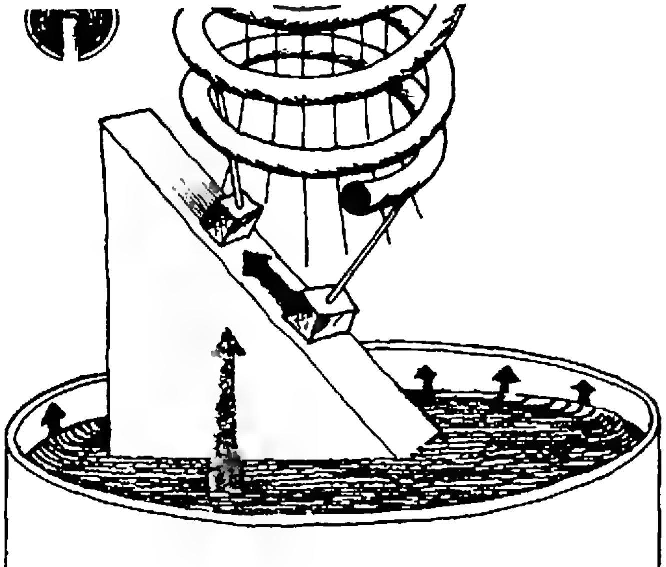
●

...выдающемуся немецкому физику Г. Герцу удалось построить механику, совершенно не используя понятие силы. Однако формулировка основных положений механики настолько усложнилась, что вся схема Герца в целом не получила признания.

●

...великий французский ученый Р. Декарт (1596—1650) предполагал, что существуют только такие силы, которые действуют при столкновениях частиц,— контактные силы.

калейдоскоп



А так ли хорошо знакомо вам понятие

СИЛА ?

В словах, приведенных в эпиграфе, заключена программа, увлекавшая и вдохновлявшая Ньютона и его последователей. Механика, созданная Ньютоном, была основой почти для всей физики вплоть до конца прошлого столетия, а для большинства областей техники эту роль она сохранила и до сих пор.

Ньютоновская механика базируется на трех знаменитых законах, включающих фундаментальное понятие силы — меры взаимодействия материальных тел. Предлагая сегодня поработать над этим понятием, подчеркнем, что законы Ньютона не раскрывают происхождение и свойства сил, но позволяют предсказать поведение тел под их действием.

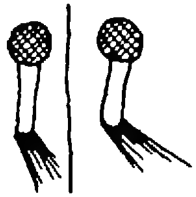
калейдоскоп

12. Двигаясь горизонтально с востока на запад, электрон попадает в область магнитного поля и отклоняется вниз. Найдите направление магнитного поля.

Микроопыт

●

Забейте два одинаковых гвоздя в сухую и в набухшую доски. Сравните усилия, которые необходимо приложить, чтобы выдернуть гвозди. Различаются ли они? Почему?



Что читать о силе в «Кванте» (публикации последних лет)

1. *«Сила и деформация», «О силах поверхностного натяжения» — 1983, № 12;*
2. *«Магнитное поле и магнитные силы» — 1984, № 3;*
3. *«Как вводятся физические величины» — 1984, № 3;*
4. *«Какой из трех законов Ньютона важнее?» — 1985, № 1;*
4. *«Конус трения» — 1986, № 1;*
6. *«Электрическое поле» — 1986, № 5.*

..., $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$; аналогично определим $f_{-1}(x)=g(x)$, ..., $f_{-m-1}(x)=f_{-1}(f_{-m}(x))$ при $m\geqslant 1$. Подставляя в условие $f_{n-1}(x)$ вместо x при любом целом n, получим равенство

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+f_{n-1}(x).$$

Эта формула позволяет выразить $f_n(x)$ при любом n через $x=f_0(x)$ и $y=f(x)=f_1(x)$; как показано на полях,

$$f_n(x)=a_n y+a_{n-1}x,$$

где последовательность a_n задается соотношением $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ и «начальными условиями» $a_0=0$, $a_1=1$ при всех целых n (мы снова обходим пока вопрос об области определения f_n при $n<0$). Последовательность a_n хорошо известна: при $n\geqslant 1$ это знаменитые числа Фибоначчи*); нам достаточно знать, что $|a_n|$ неограниченно возрастает при $n\to\pm\infty$ (при $n>0$ это очевидно; при $n<0$ достаточно заметить, что $a_n=(-1)^{n+1}a_{-n}$ и $|a_{-n}|=|a_n|$).

$$f_1(x)=y=1\cdot y+0\cdot x,$$
$$f_2(x)=y+x=1\cdot y+1\cdot x,$$
$$f_3(x)=(y+x)+y=2\cdot y+1\cdot x,$$
$$f_4(x)=(2y+x)+(y+x)=$$
$$=3\cdot y+2\cdot x.$$

По выведенному выше свойству 3 возможны два случая: знак $f(x)$ либо при всех x совпадает со знаком $-x$, либо — со знаком x.

В первом случае $f_n(x)$ и $f_{n-1}(x)$ имеют при любом $x\neq 0$ разные знаки, поэтому для $n\geqslant 2$

$$|f_{n+1}(x)|=|f_n(x)+f_{n-1}(x)|\leqslant$$
$$\leqslant|f_n(x)|\leqslant\ldots\leqslant|f_2(x)|=|f(x)+x|\leqslant|x|.$$

Следовательно, $|y+(a_{n-1}/a_n)x|\leqslant|x/a_n|$. Поскольку правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n\to\infty$, последовательность a_{n-1}/a_n должна иметь некоторый предел μ (равный $-y/x$); при этом $y=-\mu x$.

Во втором случае $f_n(x)$ при всех n имеет один и тот же знак (знак x). Поскольку f — непрерывная функция и $|f(f(x))|=|f(x)+x|\geqslant|x|$, область значений f или область определения обратной функции f_{-1} — это все действительные числа и наши формулы для f_n определены и справедливы при всех x и всех целых n. Теперь для любого $n<0$ имеем

$$|f_n(x)|=|f_{n+1}(x)-f_{n-1}(x)|\leqslant|f_{n+1}(x)|\leqslant\ldots$$
$$\ldots\leqslant|f_{-1}(x)|\leqslant|x|,$$

следовательно, $|y+(a_{n-1}/a_n)x|\leqslant|x/a_n|$. Переходя здесь к пределу при $n\to-\infty$, получим, как и в первом случае, что $y=\mu_1 x$, причем $\mu_1=-\lim\limits_{n\to-\infty}(a_{n-1}/a_n)$.

Заметим, что $\mu_1=\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n)=\mu^{-1}$; как следует из пункта а),

$$\mu=(\sqrt{5}-1)/2,\quad \mu^{-1}=(\sqrt{5}+1)/2.$$

Эти числа участвуют и в общей формуле Бинэ для чисел Фибоначчи, приведенной на полях.

Формула Бинэ

$$a_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

◆

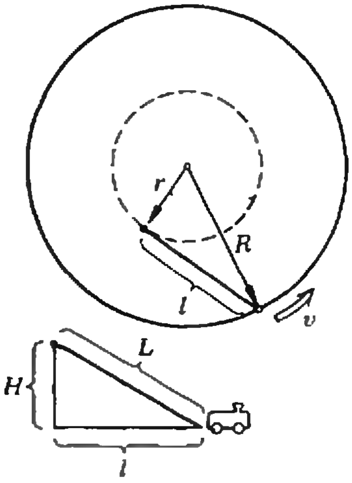
Ф1003. *Локомотив движется по круговому пути радиусом R со скоростью v. К нему на тросе длиной L прикреплен легкий воздушный шар, который движется с постоянной по*

Надутый воздухом шарик имеет очень небольшую массу, поэтому уже при скоростях движения порядка нескольких м/с его практически можно счи-

---

*) Им посвящена, например, книжка Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи». (М.: Наука, 1978).

величине скоростью на высоте H. Определите траекторию установившегося движения шара.



тать безмассовым, сильное трение о воздух подавляет влияние инерционности шарика (попробуйте, например, бросить его существенно дальше нескольких метров).

Следовательно, из второго закона Ньютона получаем, что сумма сил, действующих на шар, равна нулю. При установившемся движении вектор скорости шара направлен горизонтально и лежит в одной вертикальной плоскости с тросом, поскольку сила трения о воздух направлена противоположно скорости, и кроме нее горизонтальную проекцию имеет лишь сила натяжения троса. Наконец, из соображений симметрии ясно, что установившаяся траектория движения шара — окружность, радиус которой просто найти, если учесть, что горизонтальная проекция троса — касательная к ней (скорость шара направлена вдоль проекции троса). Дважды используя теорему Пифагора (см. рисунок), находим, что длина проекции троса равна $l=\sqrt{L^2-H^2}$ и радиус окружности, по которой движется шар,

$$r=\sqrt{R^2-l^2}=\sqrt{R^2-L^2+H^2}\,.$$

Д. Ю. Григорьев

◆

Ф1004. *Тонкий однородный стержень, который может свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец стержня, неподвижно висит над водой (рис. 1); длина стержня l, плотность материала ρ (ρ меньше плотности воды ρ_0). Медленно опуская ось, стержень погружают в воду. Найдите зависимость между углом отклонения стержня от вертикали и расстоянием от оси до поверхности воды; постройте график этой зависимости.*

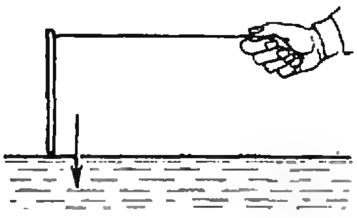


Рис. 1.

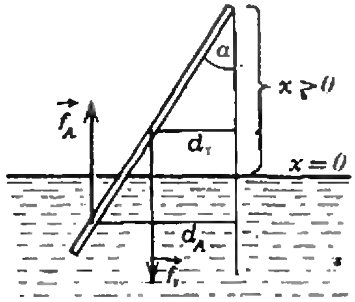


Рис. 2.

В процессе погружения на стержень действуют три силы: сила тяжести, сила Архимеда и сила реакции со стороны оси. При медленном погружении при любом значении расстояния x от оси до поверхности воды стержень будет находиться в положении равновесия.

В качестве условия равновесия воспользуемся равенством нулю суммарного момента сил относительно оси вращения. Поскольку момент M_A силы Архимеда до начала погружения оси ($x>0$) и после него ($x<0$) выражается разными формулами, следует рассмотреть эти стадии отдельно.

I. $x>0$ (см. рис. 2). Момент силы тяжести равен

$$M_т=f_т\cdot d_т=\rho Slg\cdot\frac{l}{2}\sin\alpha=\frac{1}{2}\rho Sl^2g\sin\alpha$$

(S — площадь поперечного сечения стержня); момент силы Архимеда —

$$M_A=f_A\cdot d_A=\rho_0S\left(l-\frac{x}{\cos\alpha}\right)g\cdot\frac{1}{2}\left(l+\frac{x}{\cos\alpha}\right)\sin\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\rho_0S\left(l^2-\frac{x^2}{\cos^2\alpha}\right)g\sin\alpha.$$

Будем считать момент силы тяжести положительным; тогда момент силы Архимеда отрицателен (поскольку он стремится повернуть стержень в противоположном направлении). Тогда условие равновесия запишется в виде

$$M=M_т+M_A=\frac{1}{2}\rho Sl^2g\sin\alpha-$$

$$-\frac{1}{2}\rho_0S\left(l^2-\frac{x^2}{\cos^2\alpha}\right)g\sin\alpha=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sin\alpha\left(\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)l^2\right)=0.$$

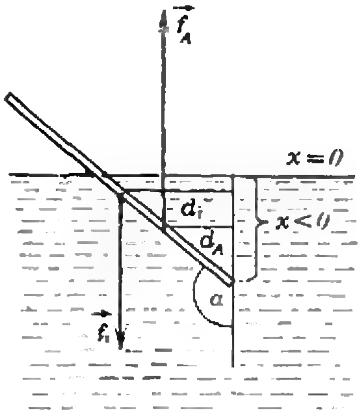


Рис. 3.

Это условие выполняется при

1) $\sin\alpha=0$,

2) $\cos\alpha=\frac{x}{l}\frac{1}{\sqrt{1-\rho/\rho_0}}$.

Физический смысл при заданных в задаче условиях имеют решения:

1) $\alpha=0$ — существует при любых $x\geqslant 0$,

2) $\alpha=\arccos\left(\frac{x}{l}\frac{1}{\sqrt{1-\rho/\rho_0}}\right)$ — существует при $l\sqrt{1-\rho/\rho_0}\geqslant x\geqslant 0$.

Исследуем на устойчивость первое положение равновесия $\alpha=0$, соответствующее вертикальному положению стержня. При малом отклонении от этого положения (угол α мал, так что $\sin\alpha\approx\alpha$ и $\cos\alpha\approx 1$) момент сил равен

$$M\approx\frac{1}{2}\rho Sl^2g\alpha-\frac{1}{2}\rho_0S(l^2-x^2)g\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\rho_0Sg\alpha\left(x^2-l^2\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right).$$

При $x>l\sqrt{1-\rho/\rho_0}$ этот момент положителен, то есть поворачивает стержень в том же направлении, что и момент силы тяжести, — силы возвращают стержень в положение равновесия. Следовательно, пока $x>l\sqrt{1-\rho/\rho_0}$, равновесие при $\alpha=0$ устойчиво. При $x<l\sqrt{1-\rho/\rho_0}$ момент $M<0$ — положение равновесия $\alpha=0$ становится неустойчивым. Ясно, что в этом случае будет устойчиво второе положение равновесия (2)), поскольку существование устойчивого равновесия очевидно, а иных положений равновесия, кроме 1) и 2), нет.

Таким образом, по мере погружения стержень сначала будет оставаться в вертикальном положении ($\alpha=0$) вплоть до $x=l\sqrt{1-\rho/\rho_0}$, после чего начнет отклоняться от вертикали $\left(\alpha=\arccos\frac{x}{l\sqrt{1-\rho/\rho_0}}\right)$ до горизонтального положения при $x=0$.

II. $x<0$ (рис. 3). После погружения оси суммарный момент сил равен

$$M=\rho Slg\cdot\frac{l}{2}\sin(\pi-\alpha)-\rho_0S\frac{x}{\cos(\pi-\alpha)}g\cdot\frac{x}{2}\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=$$

$$=\rho_0Sg\sin\alpha\left(\frac{\rho}{\rho_0}l^2-\frac{x^2}{\cos^2\alpha}\right),$$

и условие $M=0$ принимает вид

$$\sin\alpha\left(\frac{\rho}{\rho_0}l^2-\frac{x^2}{\cos^2\alpha}\right)=0.$$

Анализ, аналогичный проведенному выше (для $x>0$), показывает, что устойчивыми положениями равновесия будут:

3) $\alpha=\arccos\frac{x}{l}\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}$ при $-l\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}<x<0$,

4) $\alpha=\pi$ при $x<-l\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$.

Таким образом, после погружения оси стержень начнет приближаться к вертикали и при $x=-l\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$ вновь примет вертикальное положение ($\alpha=\pi$).

График зависимости $\alpha(x)$ представлен на рисунке 4.

Д. В. Белов

◆

Ф1005. *Имеется печь, в которой постоянно поддерживается температура T_1, и холодильник, температура в котором $T_0<T_1$. В холодильнике установлена катушка с намотанной на ней длинной проволокой. Конец проволоки выходит из холодильника, входит в печь и закреплен на катушке, установленной там. Катушки вращаются так, что проволока сматывается с холодной катушки на горячую, двигаясь со скоростью v. Сечение проволоки s, объемная теплоемкость c. Чтобы температуры T_1 и T_0 не изменились, пришлось увеличить на ΔE_x мощность печи и на столько же уменьшить холодопроизводительность холодильника. Найдите ΔE_x. Считать, что теплообмен проволоки с окружающей средой не зависит от скорости движения проволоки.*

Поскольку ни температура печи, ни температура холодильника не изменились, потери тепла из печи в окружающую среду и приток тепла в холодильник из окружающей среды (не по проволоке) остались прежними. После того как на участке проволоки между печью и холодильником установится некоторое новое распределение температуры, отличающееся от того, которое было в состоянии покоя, количество тепла, запасенное в каждый момент времени в этом участке, также будет постоянным. Полная же тепловая энергия всей проволоки за время Δt возрастает на

$$\Delta Q=csv\,(T_1-T_0)\,\Delta t$$

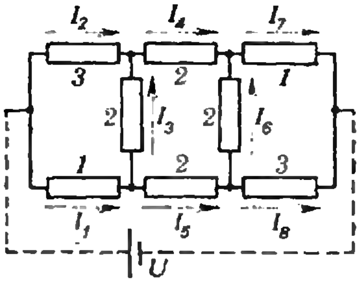
(такое количество тепла надо сообщить отрезку длиной $v\Delta t$, чтобы нагреть его от T_0 до T_1). Эта добавочная мощность берется, конечно, от печи, но $\Delta Q/\Delta t$ не совпадает с искомым ΔE_x. Отличие связано с тем, что вследствие изменения распределения температуры изменится и тепловой поток по проволоке. Тепло, уносимое неподвижной проволокой из печи, частично терялось в окружающую среду, частично поглощалось в холодильнике. Поскольку первая часть по условию не изменилась, полная тепловая мощность, уносимая проволокой, уменьшилась на ΔE_x, так как на эту величину снизили холодопроизводительность холодильника. Значит, мощность, поглощаемая проволокой из печи, увеличилась не на $\Delta Q/\Delta t$, а на $\Delta Q/\Delta t-\Delta E_x$. Но по условию увеличение мощности печи равно ΔE_x, откуда

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}-\Delta E_x=\Delta E_x,\ \text{или}\ \Delta E_x=\frac{1}{2}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{1}{2}csv\,(T_1-T_0).$$

Д. В. Павлов

◆

Ф1006. *Определите сопротивление схемы из резисторов, показанной на рисунке. Значения сопротивлений указаны в омах.*



Подадим на схему напряжение U. Обозначим токи, которые потекут по отдельным участкам цепи, I_1, I_2, ..., I_8 (см. рисунок). В силу симметрии схемы $I_1=I_7$, $I_2=I_8$, $I_3=I_6$, $I_4=I_5$. Действительно, если полярность поданного напряжения изменить на противоположную, то направления всех токов тоже изменятся, но по величине токи останутся прежними. Таким образом, число неизвестных токов уменьшилось до четырех.

Запишем теперь закон сохранения заряда —

$$I_1=I_3+I_4, \quad (1)$$

$$I_4=I_2+I_3 \quad (2)$$

и условие независимости напряжения от пути обхода —

$$I_2\cdot 3r=I_1\cdot 1r+I_3\cdot 2r, \quad (3)$$

$$U=I_1\cdot 1r+I_2\cdot 3r+I_4\cdot 2r, \qquad (4)$$

где r — сопротивление в 1 Ом. Из уравнений (1)—(3) получаем

$$I_2=\frac{1}{2}I_1,\ I_3=\frac{1}{4}I_1,\ I_4=\frac{3}{4}I_1.$$

Подставив в (4) токи I_2 и I_4, выраженные через I_1, получим

$$U=I_1\cdot 4r.$$

С другой стороны, сопротивление R всей схемы равно

$$R=\frac{U}{I_1+I_2}=\frac{U}{I_1+I_1/2}=\frac{2}{3}\frac{U}{I_1}.$$

Следовательно,

$$\frac{3}{2}I_1R=I_1\cdot 4r,\ \text{откуда}\ R=\frac{8}{3}r=\frac{8}{3}\ \text{Ом}.$$

С. С. Кротов

Ф1007. *На шар, составленный из двух полушарий, которые сделаны из стекол с показателями преломления n_1 и n_2 ($n_1>n_2$), падает луч света. Шар начинают вращать с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной направлению луча (рис. 1). Найдите максимальное отклонение светового пятна на экране, установленном непосредственно за шаром.*

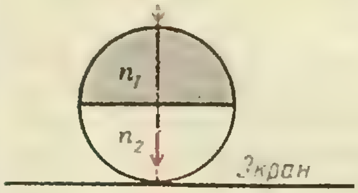


Рис. 1.

◆

Поскольку луч проходит через центр шара, на поверхности шара (на входе и на выходе) луч не преломляется.

В течение времени $0\leqslant t<\frac{\pi}{2\omega}$ падающий луч первую «половину» пути проходит в оптически более плотной среде. При этом, пока угол поворота Ω меньше угла α_0 полного внутреннего отражения от границы полусфер — $\alpha_0=\arcsin\frac{n_2}{n_1}$, — луч, преломляясь на границе, переходит в менее оптически плотную среду (рис. 2) и $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{n_2}{n_1}$. С ростом угла поворота при $\alpha\to\alpha_0$ преломленный луч «прижимается» к границе сред, то есть $\beta\to\frac{\pi}{2}$. С того момента, когда Ω проходит значение α_0, луч отражается от границы раздела и выходит из полусферы с показателем преломления n_1. Так что в момент $t=\frac{\alpha_0}{\omega}$ происходит скачок луча на экране (рис. 3, *а*). В дальнейшем $\left(\frac{\alpha_0}{\omega}<t<\frac{\pi}{2\omega}\right)$ $\alpha\to\frac{\pi}{2}$, то есть отраженный луч «прижимается» к границе сред (см. рисунок 3, *б*), которая приближается к вертикали.

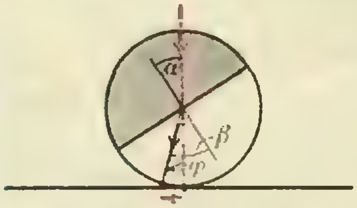


Рис. 2. $0<\Omega<\alpha_0$; $\psi=\beta-\alpha$.

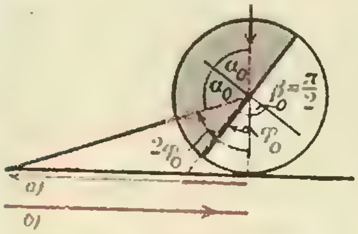


Рис. 3. а) $\Omega=\alpha_0$; $\varphi=2\varphi_0=\pi-2\alpha_0$; *б)* $\alpha_0<\Omega<\frac{\pi}{2}$; $\alpha(>\alpha_0)\to\frac{\pi}{2}$, $\varphi(<2\varphi_0)\to 0$.

С того момента, когда граница проходит вертикальное положение $\left(t=\frac{\pi}{2\omega}\right)$, луч падает в оптически менее плотную среду, преломляется на границе и выходит из более плотной среды. Угол падения δ и угол преломления γ связаны соотношением $\frac{\sin\delta}{\sin\gamma}=\frac{n_1}{n_2}$. При переходе границы сред через вертикаль $\left(\delta=\frac{\pi}{2}\right)$ $\gamma_0=\arcsin\frac{n_2}{n_1}=\alpha_0$ — происходит «скачок» луча на экране (рис. 4). В дальнейшем ($\delta\to 0$) луч «прижимается» к нормали к границе сред (рис. 5), и при $\delta=0$ проходит через сферу без преломления.

Из свойства обратимости световых лучей ясно, как будет меняться ход луча при дальнейшем повороте ($\pi < \Omega \leqslant 2\pi$; рис. 6).

Как видно из рисунков, максимальное отклонение луча на экране определяется углом

$$2\varphi_0 = \pi - 2\alpha_0 = \pi - 2\arcsin\frac{n_2}{n_1}.$$

При $\alpha_0 \leqslant \frac{\pi}{4} \left(\frac{n_2}{n_1} \leqslant \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $2\varphi_0 \geqslant \frac{\pi}{2}$ — луч на экране «уходит на бесконечность».

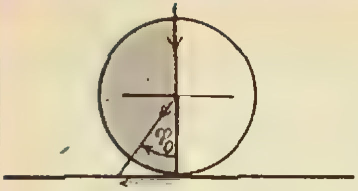


Рис. 4. $\Omega = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_0 = \alpha_0$.

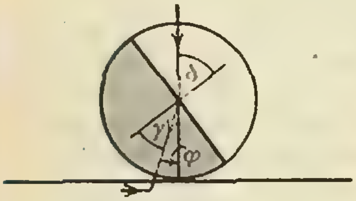


Рис. 5. $\frac{\pi}{2} < \Omega < \pi$;

$\delta\ (< \frac{\pi}{2}) \to 0$, $\varphi (< \varphi_0) \to 0$.

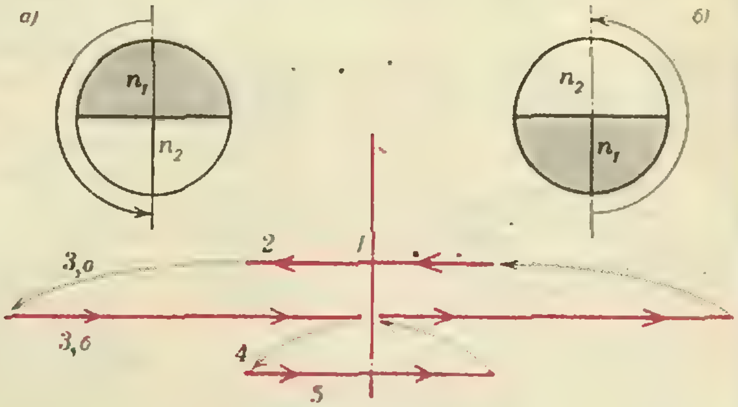


Рис. 6. а) $0 \leqslant \Omega < \pi$; *б)* $\pi < \Omega \leqslant 2\pi$. *(Цифры соответствуют номерам рисунков.)*

Знакомьтесь: металлическое стекло

(Начало см. на с. 24)

Нетупящиеся лезвия бритв или не знающие износа наконечники буров — таковы первые шаги на этом пути.

Не менее перспективным представляется и другое замечательное свойство аморфного металла — исключительно высокая коррозионная стойкость. У некоторых стекол она превосходит стойкость нержавеющей стали. Что такое ржавчина — знают, наверное, все. А вот как с ней эффективно бороться — куда более трудный вопрос. Им заняты десятки лабораторий многих стран мира. Один из возможных вариантов решения — создавать на металлической поверхности тонкие аморфные слои. Такая защита будет намного эффективней использующихся сегодня для этой цели лаков, красок и т. д. Правда, и создать такой слой намного труднее. В настоящее время это направление активно разрабатывается.

Вероятно, очень скоро изделия из аморфного металла в виде магнитных головок или лезвий появятся в наших домах. Пока их широкое распространение сдерживается тем, что аморфный металл производится в виде тонкой ленты, а не массивных образцов. Те просто не удается охладить с нужной скоростью. Но исследования продолжаются...

Построение диалоговых алгоритмов

Кандидат технических наук
В. А. КАЙМИН

Эта заметка предназначена в первую очередь десятиклассникам, изучающим курс «Основы информатики и вычислительной техники», но будет полезна и всем тем, кто имеет дело с персональными ЭВМ.

Диалог человека с ЭВМ во многом схож с диалогом между двумя лицами. Диалог двух лиц — это обмен сообщениями, фразами, жестами и восклицаниями. Диалог людей с ЭВМ больше похож на разговор между людьми по телефону или, более точно, по видеотелефону. Сообщения (информация) от ЭВМ обычно выводятся на экран телевизора, подсоединенного к вычислительной машине. В ответ на сообщения ЭВМ человек вводит команды, ответы или запросы через клавиатуру, схожую с клавиатурой пишущих машинок. В ответ на действия человека ЭВМ выводит на экран новые сообщения и ожидает ввода новых команд, данных или запросов.

Диалоговые программы в зависимости от назначения можно подразделить на *игровые, учебные, деловые* и *инструментальные*. Игровые программы служат для развлечения в свободное от работы или учебы время. Учебные программы применяются для обучения школьников или студентов. Деловые программы используются для решения производственных задач, накопления и обработки информации. Инструментальные программы используются для создания новых программ.

В основе любых диалоговых программ лежат определенные правила и алгоритмы ведения диалога. Обязательными правилами для ведения любого диалога являются *вежливость, понятность* и *логическая связность* сообщений.

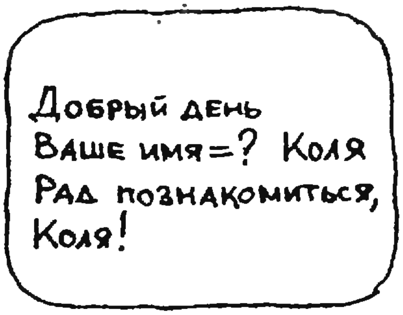
Для построения простейших диалоговых алгоритмов нам достаточно от исполнителя умения выполнять команды трех типов, которые проиллюстрированы примерами в скобках:

1. **сообщи** («Добрый день»)
2. **запрос** («Ваше имя», имя)
3. **вывод** («2 · 2=», x, «?»)

В команде «сообщи» указывается стандартная фраза, сообщаемая партнеру по диалогу; в приведенном примере — это фраза «Добрый день». В команде «запрос» содержатся два аргумента: первый аргумент — *фраза-запрос*, которая передается партнеру, а второй аргумента — это *имя переменной*, куда будет записан ответ (фраза или число, в зависимости от типа переменной). Команда типа «вывод» может содержать один или несколько аргументов — это либо фразы, либо имена переменных, из которых образуется *сообщение* — «вывод». Эти три команды мы прибавим к алгоритмическому языку из учебника. Приведем пример простейшего диалогового алгоритма. (Для экономии места здесь и ниже часть заголовка программ опущена.)

```
алг знакомство
нач
 сообщи («Добрый день»)
 запрос («Ваше имя =», имя)
 вывод («Рад познакомиться,» имя»!»)
кон
```

Пример диалога:



Добрый день
Ваше имя=? Коля
Рад познакомиться, Коля!

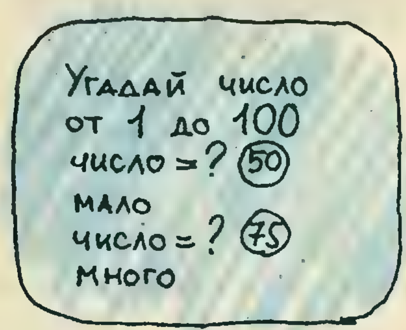
В качестве следующего примера рассмотрим простейший диалоговый алгоритм для игры «угадай-ка». В игре участвуют два лица: первое действующее лицо загадывает некоторое целое число x в интервале от 1 до 100, а второе пытается угадать его, указывая числа: p_1, p_2,... В ответ на предъявляемые числа первое лицо сообщает:

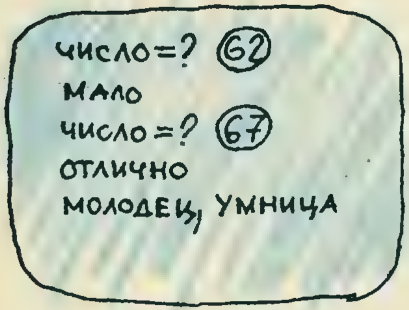
«отлично», «мало» или «много» в зависимости от соотношений между указанным и задуманными числами. Игры заканчиваются словами «молодец», «умница» сразу после отгадывания задуманного числа.

Алгоритм ведения диалога для первого лица (им будет ЭВМ) и пример диалога приводятся ниже. В алгоритме используется специальная функция «$x :=$ случайное (a, b)», которая дает некоторое случайное целое число между a и b.

```
алг игра: угадай-ка
нач
    x: = случайное (1, 100)
    сообщи («угадай число»)
    сообщи («от 1 до 100»)
    запрос («число =», p)
    пока p≠x
      нц
      если p<x,
      то сообщи («мало»)
      иначе сообщи («много»)
      все
      запрос («число =», p)
      кц
      сообщи («отлично»)
      сообщи («молодец, умница»)
кон
```

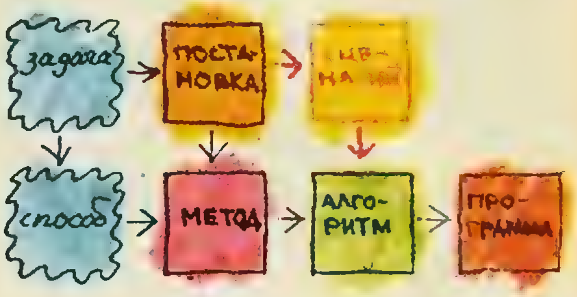
Пример диалога (загадано $x = 67$):





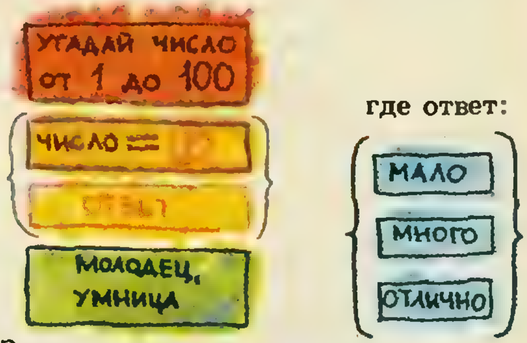
Второе лицо может подбирать числа-гипотезы многими способами. Лучший способ гарантирует угадывание чисел для данного диапазона от 1 до 100 за 7 шагов. В основе этого способа лежит принцип деления интервала пополам (см. «Квант» № 10, с. 49).

Составление алгоритмов ведения диалога и конструирование диалоговых программ для ЭВМ можно систематизировать (ср. «Квант» № 10, с. 47). Дополнительным этапом при систематическом конструировании диалоговых алгоритмов и программ является предварительное составление *сценария диалога*.



Сценарий ведения диалога — это описание совокупности всех сообщений, которые предоставляются партнеру по диалогу, и системы реакций в ответ на его сообщения. Для единого описания совокупности сообщений в информатике используется специальная, но несложная система обозначений. Рассмотрим ее на примере описания сценария «игра: угадай-ка».

Сценарий «игра: угадай-ка»



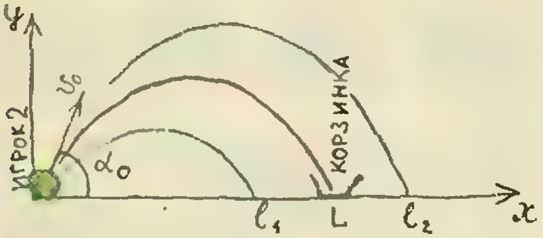
где ответ:

Здесь p — целое число

Здесь в красный кружок обведен переменный элемент текста (сообщения второго лица). В красную рамку помещена переменная часть текста, описывающая ответы первого лица на очередное число-гипотезу. В фигурных скобках справа указываются ответы, которые выбираются в зависимости от определенных условий (сравнения загаданного и указываемых чисел). В фигурных скобках слева указываются части текстов, которые повторяются (здесь — это повторения «запрос — ответ» при угадывании чисел).

Составление алгоритмов и программ с предварительным описанием сценария позволяет заранее продумать понятность, логическую связность и тактичность в ведении диалога, поскольку это свойство не столько алгоритма, а сценария. Более того, наличие полного описания сценария и описаний методов решения поставленных задач позволяет систематическим образом проверять наличие — отсутствие ошибок в алгоритмах.

В качестве иллюстрации приведем построение диалогового алгоритма решения задачи «бросание мяча в корзину», которая превращается в игру двух лиц.

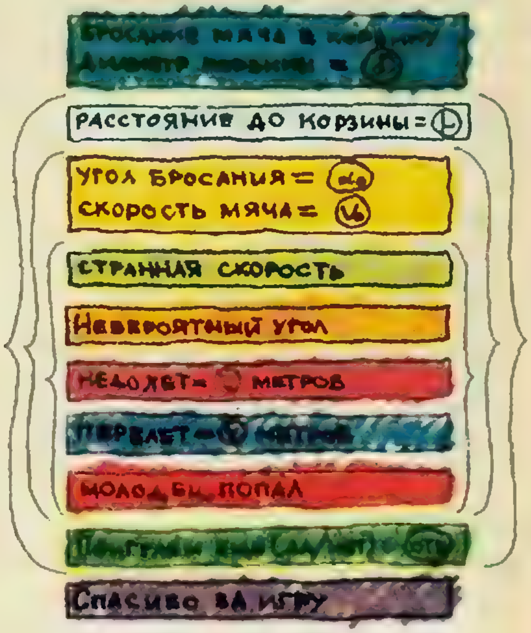


Первый игрок держит корзину и сообщает второму игроку расстояние до корзины. Второй игрок выбирает начальную скорость и угол бросания мяча и сообщает эти данные первому лицу. В ответ первый игрок сообщает «попал», либо «недолет» или «перелет» с величиной в метрах.

Задача: Бросание мяча в корзину
Дано:
L — расстояние до корзины (*м*)
V_0 — начальная скорость (*м/с*)
α_0 — угол бросания (*град*)
D — диаметр корзины (*м*)
Требуется: попал — признак попадания
r — остаток расстояния (*м*)
Связь:
$r=|L-l|$ (остаток расстояния)
попал$=|r<D/2|$ (условие попадания)
$l=V_{x_0}\cdot t$ (дальность полета)
$0=V_{y_0}\cdot t-gt^2/2$ (условие падения)
$V_{x_0}=V_0\cdot\cos(\alpha_0\cdot\pi/180)$ (горизонтальная скорость ($t=0$))
$V_{y_0}=V_0\cdot\sin(\alpha_0\cdot\pi/180)$ (вертикальная скорость ($t=0$))
$g=9{,}81$ (ускорение свободного падения)
При
$$\left\{\begin{array}{l} D>0 \text{ (положительность ширины корзины)} \\ V_0>0 \text{ (положительность скорости)} \\ 0^\circ<\alpha_0<90^\circ \text{ (допустимость угла)} \end{array}\right.$$
Метод
$$\left\{\begin{array}{l} \text{попал}=||L-l|<D/2| \text{ (условие попадания)} \\ r=|L-l| \text{ (остаток расстояния)} \\ l=v_0^2\cdot\sin(2\alpha_0\cdot\pi/180)/g \text{ (дальность полета)} \\ g=9{,}81 \text{ (ускорение свободного падения)} \end{array}\right.$$

В приводимом ниже сценарии игры может быть сыграно несколько партий. В каждой партии первое лицо задает расстояние до корзинки, запрашивает у второго лица данные о начальной скорости и угле бросания и сообщает результаты. Если данные физически бессмыслены — отрицательная или нулевая скорость, либо отрицательный или слишком большой угол, то первое лицо сообщает «странная скорость» либо «невероятный угол» и запрашивает данные еще раз.

Сценарий «Игра с мячом»

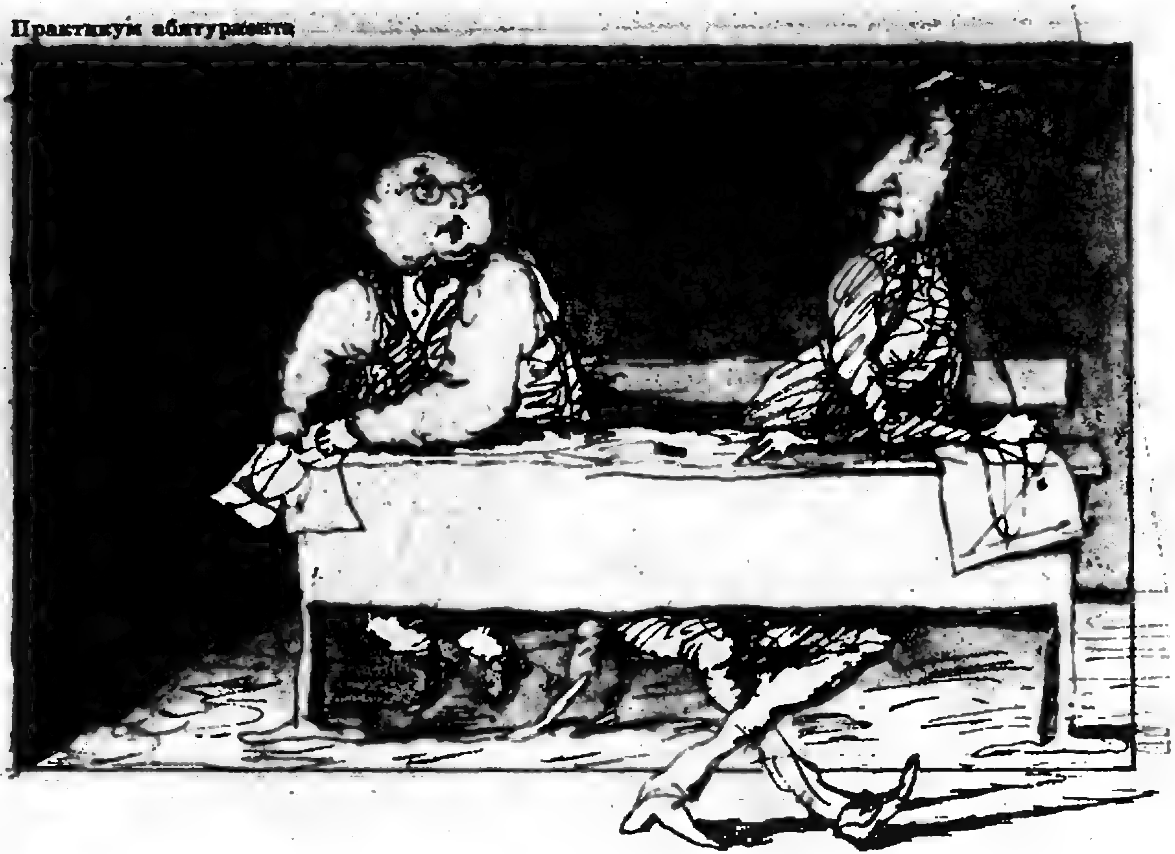


Ниже приводится алгоритм ведения диалога для первого игрока. Этот алгоритм состоит из трех частей: первая часть обеспечивает разыгрывание партий, вторая часть организует отдельную партию, третья часть организует проведение математических расчетов.

Стратегия второго игрока может строиться многими способами. Простейший из них — способ «проб и ошибок». Однако наилучшей стратегией является проведение математических расчетов, основанных на знании физических законов, позволяющих в данной задаче достигать победы с первой попытки.

```
алг «бросание мячей в корзину»
нач лит игра
вещ L, D
сообщи («бросание мячей в корзину»)
D: =случайное (0.1; 0.5)
  вывод (диаметр корзины=»; D)
  игра: =да
  пока игра=да
  нц
    L: =случайное (10; 250)
    вывод («расстояние до корзины=»; L)
    бросание мяча в корзину
    запрос («поиграем еще? [да/нет]», игра)
  кц
  сообщи («спасибо за игру»)
кон
```

(Окончание см. на с. 48.)



Задачи на координатной плоскости

Кандидат физико-математических наук
А. А. БОЛИБРУХ,
кандидат физико-математических наук
В. М. УРОЕВ,
профессор
М. И. ШАБУНИН

На вступительных экзаменах в МФТИ встречаются задачи, в которых требуется провести вычисления, построения, найти множества точек на координатной плоскости. В этой статье рассматривается несколько таких задач и приводятся их решения.

Треугольники и четырехугольники

1 (1983 г.). *На координатной плоскости дана точка M (2; 4). Рассматриваются треугольники, у которых две вершины симметричны относительно оси Oy и лежат на дуге параболы $y=3x^2$, выделяемой условием $-1\leqslant x\leqslant 1$, а точка M является серединой одной из его сторон. Среди этих треугольников выбран тот, который имеет наибольшую площадь. Найдите эту площадь.*

Решение. Эта задача естественным образом распадается на две: сначала нужно понять, о каком треугольнике говорится в условии, и записать его площадь как функцию от какого-нибудь аргумента, а затем найти наибольшее значение этой функции. Пусть у треугольника ABC вершины B и C симметричны относительно оси Oy и лежат на дуге параболы $y=3x^2$ (рис. 1). Очевидно, точка M не может быть серединой стороны BC, поскольку середина стороны BC должна лежать на оси Oy. Поэтому точка M является либо серединой стороны AC, либо серединой стороны AB (оба эти случая изображены на рисунке 1). В обоих случаях высота h соответствующего треугольника ABC, проведенная из вершины A, равна удвоенной разности ординат точек M и C, то есть $h=2(4-3x^2)$. Легко видеть, что абсциссы точек B и C отличаются только знаком, так что точки B и C имеют координаты $B(-x; 3x^2)$ и $C(x; 3x^2)$. Следовательно, площадь $S(x)$ треугольника ABC записывается

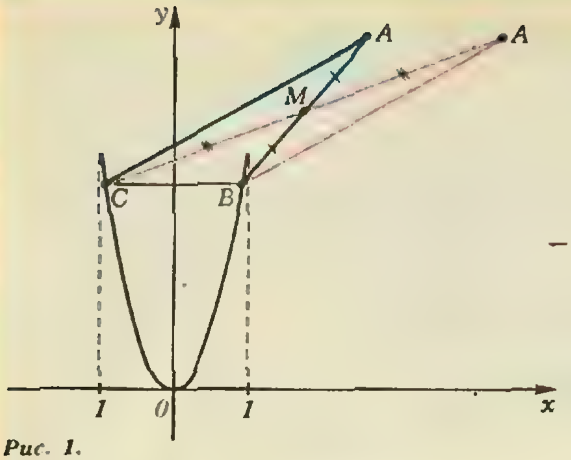


Рис. 1.

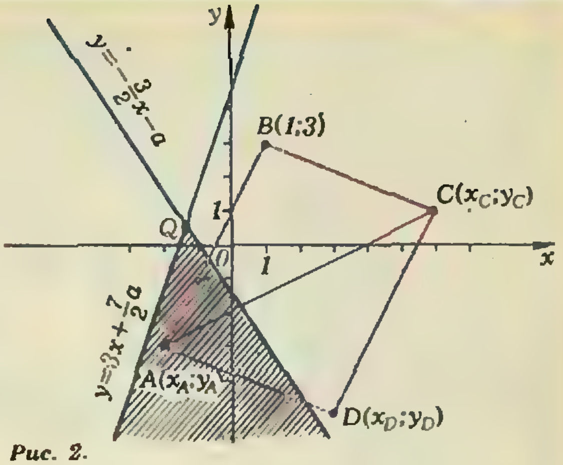


Рис. 2.

в виде

$$S(x)=2|x|(4-3x^2).$$

Нужно найти наибольшее значение функции $S(x)$ на отрезке $[-1;\ 1]$.

Функция $S(x)$ — четная, поэтому достаточно рассмотреть ее на отрезке $[0;\ 1]$. На этом отрезке $S'(x)=2(4-9x^2)$, $S'(x)=0$ при $x=2/3$. Следовательно, наша функция достигает на отрезке $[0;\ 1]$ максимума в одной из точек 0, 1, 2/3. Подсчет показывает, что $S(0)=0$, $S(1)=2$, $S(2/3)=32/9$, так что наибольшее значение $S(x)$ на отрезке $[0;\ 1]$ равно $S(2/3)=32/9$.

Ответ: 32/9.

2 (1978 г.). *Вершины A, B, C параллелограмма ABCD имеют соответственно координаты (—2; —3), (1; 3), (6; 1). Найдите:*

1) все значения a, для которых координаты вершины D являются решением системы неравенств

$$\begin{cases} 3x+2y+2a\leqslant 0, \\ 6x-2y+7a\geqslant 0; \end{cases}$$

2) все значения a, для которых координаты хотя бы одной точки отрезка AC являются решениями этой системы.

Решение. В задаче 1) нужно, по существу, знать только координаты вершины D, которые моментально находятся из условия $\vec{DC}=\vec{AB}$, где $\vec{AB}=(3;\ 6)$, $\vec{DC}=(6-x_D;\ 1-y_D)$ — см. рисунок 2. Отсюда $x_D=3$, $y_D=-5$, и, подставляя эти значения x и y в данную систему, получаем ответ: $a\in[-4;\ 1/2]$.

Перейдем к более серьезной задаче 2). Уравнение прямой AC записывается в виде $y+3=k(x+2)$, где k — угловой коэффициент прямой AC, равный тангенсу угла наклона вектора $\vec{AC}$ к оси Ox, то есть $k=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{1}{2}$. Таким образом, уравнение прямой AC имеет вид $y=\frac{1}{2}x-2$. Перепишем данную в условии систему в виде

$$\begin{cases} y\leqslant -\frac{3}{2}x-a, \\ y\leqslant 3x+\frac{7}{2}a, \end{cases}$$

и пусть l_1 и l_2 — прямые, задаваемые уравнениями $y=-\frac{3}{2}x-a$ и $y=3x+\frac{7}{2}a$ соответственно (см. рис. 2). Каждая из прямых l_1 и l_2 делит плоскость на две части, причем неравенствам данной системы удовлетворяют точки, лежащие в нижних полуплоскостях. Теперь ясен геометрический смысл задачи 2): *требуется найти все значения параметра a, при которых хотя бы одна точка диагонали AC принадлежит заштрихованной на рисунке 2 области.* Для этого необходимо и достаточно одновременно выполнение следующих трех условий:

а) точка Q пересечения прямых l_1 и l_2 лежит выше прямой AC;

б) точка A лежит ниже прямой l_1;

в) точка C лежит ниже прямой l_2.

Легко найти координаты $(x_Q;\ y_Q)$ точки Q: $x_Q=-a$, $y_Q=a/2$. Условие а) сводится к неравенству $y_Q\geqslant\frac{1}{2}x_Q-2$, откуда $a\geqslant-2$. Из условия б) получаем, что $a\leqslant 6$, а из условия в) — что $a\geqslant-\frac{34}{7}$. Таким образом, нужные нам значения параметра a находятся на отрезке $[-2;\ 6]$.

Ответ: 1) $-4\leqslant a\leqslant 1/2$; 2) $-2\leqslant a\leqslant 6$.

3 (1977 г.). *На координатной плоско-*

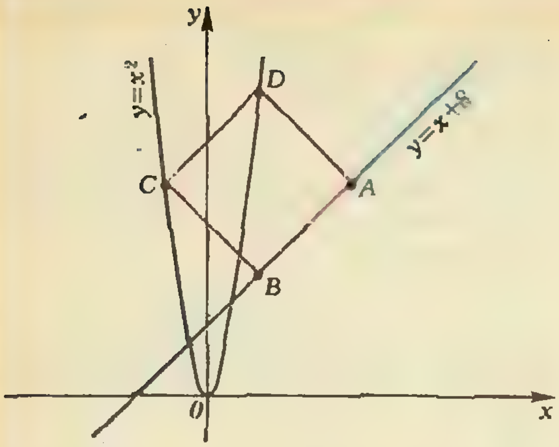


Рис. 3.

сти расположен квадрат ABCD. Сторона AB квадрата лежит на графике функции $y=x+8$, а вершины C и D — на графике функции $y=x^2$. Определите длину стороны квадрата.

Решение. Поскольку прямая $y=x+8$ пересекает ось под углом 45°, диагонали квадрата параллельны координатным осям. Будем считать для определенности, что диагональ AC параллельна оси Ox, а диагональ BD — оси Oy. Тогда $x_B=x_D$, $y_A=y_C$. Положим $x_B=x_D=x$ и выразим координаты всех вершин через x.

Из условий задачи следует, что $y_B=x+8$, $y_D=x^2$, $y_C=x_C^2$, $x_A=y_A-8=x_C^2-8$. Вектор DC наклонен к оси Ox под углом 45°, поэтому $y_C-y_D=x_C-x_D$, то есть $x_C^2-x^2=x_C-x$. Так как $x_C-x\neq 0$, получаем, что $x_C+x=1$. Поэтому $x_C=1-x$.

Диагональ AC делится диагональю BD пополам, поэтому $x_D=(x_A+x_C)/2$ и мы приходим к уравнению относительно x:

$$2x=(1-x)^2-8+(1-x),$$

или

$$x^2-5x-6=0.$$

Корни этого уравнения $x_1=6$, $x_2=-1$.

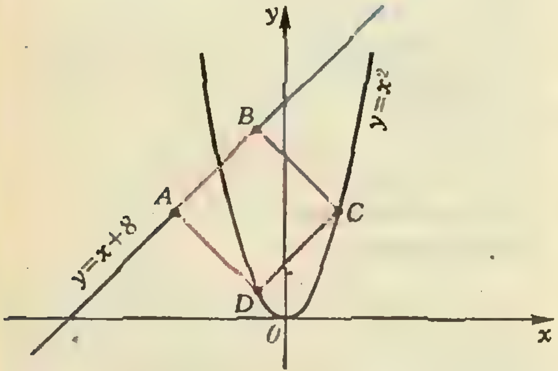


Рис. 4.

Если $x=6$, то $x_B=x_D=6$, $x_C=1-x=-5$, $x_A=x_C^2-8=17$, $y_B=x+8=14$, $y_C=x_C^2=25$, $y_A=y_C=25$, $y_D=x^2=36$. Квадрат расположен, как показано на рисунке 3. В этом случае $DB=y_D-y_B=22$, $AB=\frac{DB}{\sqrt{2}}=11\sqrt{2}$.

Если $x=-1$, то $x_B=x_D=-1$, $x_C=2$, $x_A=-4$, $y_B=7$, $y_C=4$, $y_A=4$, $y_D=1$. Квадрат расположен, как показано на рисунке 4. В этом случае $DB=y_B-y_D=6$, $AB=\frac{DB}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$.

Ответ: $11\sqrt{2}$ или $3\sqrt{2}$.

Множества точек на координатной плоскости

Пусть $Ax+By+C=0$ — уравнение прямой l. Тогда множества точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам $Ax+By+C>0$ и $Ax+By+C<0$, — это две полуплоскости, на которые прямая l делит координатную плоскость. *Две точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ лежат в одной полуплоскости тогда и только тогда, когда выражение $Ax+By+C$ принимает в них значения одного знака, то есть когда*

$$(Ax_1+By_1+C)(Ax_2+By_2+C)>0.$$

Рассмотрим две пересекающиеся прямые l_1 и l_2, заданные соответственно уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$.

Прямые l_1 и l_2 разбивают координатную плоскость на четыре части E_1, E_2, G_1, G_2 (рис. 5). Теперь нетрудно доказать, что *неравенству*

$$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)>0 \quad (*)$$

удовлетворяют точки, принадлежащие одному из множеств $E_1\cup E_2$ или $G_1\cup G_2$ (для ситуации, изображенной на рисунке 5, — множеству $E_1\cup E_2$).

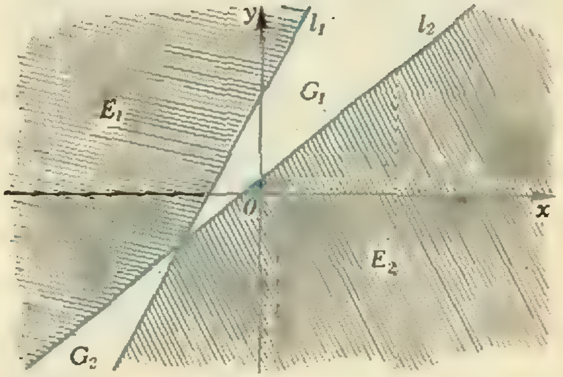


Рис. 5.

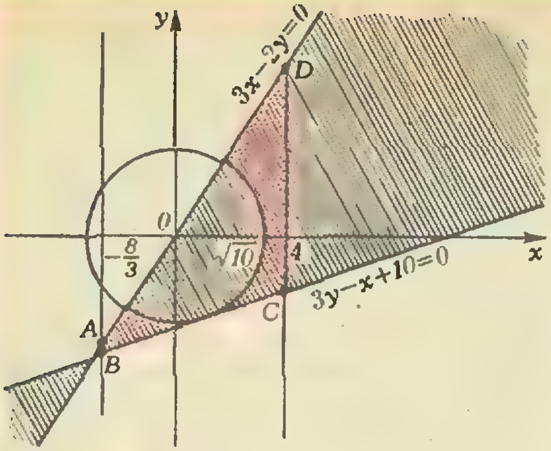


Рис. 6.

Эти два замечания оказываются полезными при решении многих задач.

4 (1982 г.). *Найдите площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости системой неравенств*

$$\begin{cases} x^2+y^2\geqslant 10, \\ 3x^2-4x-32\leqslant 0, \\ (3x-2y)(3y-x+10)\geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Прежде всего надо определить, какая фигура задается условиями задачи. Для этого рассмотрим каждое неравенство системы.

Первому неравенству удовлетворяют точки, лежащие вне (и на границе) круга радиусом $\sqrt{10}$ с центром в начале координат (рис. 6). Решая второе неравенство, получаем $x\in[-8/3;\,4]$. Следовательно, второе неравенство задает вертикальную полосу, лежащую между прямыми $x=-8/3$ и $x=4$ (включая и точки этих прямых). Третье неравенство системы имеет вид (*), и в данном случае ему удовлетворяют точки внутри двух вертикальных углов, образованных прямыми $3x-2y=0$ и $3y-x+10=0$ (включая и точки, лежащие на прямых). Это множество заштриховано на рисунке 6; граничные прямые будем обозначать l_1 и l_2 соответственно. Чтобы понять, как устроена интересующая нас фигура, найдем координаты точек A, B, C, D, в которых прямые l_1 и l_2 пересекают прямые $x=-8/3$ и $x=4$: $A(-8/3;\,-4)$, $B(-8/3;\,-38/9)$, $C(4;\,-2)$, $D(4;\,6)$. Мы видим, что точка B лежит ниже точки A, так что прямые l_1 и l_2 пересекаются вне полосы $-8/3\leqslant x\leqslant 4$. Далее, прямая l_2 касается окружности $x^2+y^2=10$, поскольку система

$$\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ 3y-x+10=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение ($x=1$, $y=-3$). Прямая же l_1 проходит через центр данного круга. Поэтому интересующая нас фигура — это трапеция $ABCD$, из которой удален полукруг радиусом $\sqrt{10}$ (граница этой фигуры выделена на рисунке 6 красным цветом), так что искомая площадь равна

$$\frac{(AB+CD)\,h}{2}-5\pi,$$

где $AB=2/9$, $CD=8$, $h=20/3$. Таким образом, мы получаем ответ: $\frac{740}{27}-5\pi$.

5 (1980 г.). *На координатной плоскости рассматривается множество M всех точек, координаты $(a;\,b)$ которых удовлетворяют условиям $-3<a<0$, $0<b<9$ и таковы, что уравнение*

$$(b+2a)\,x^4+(b+7a)\,x^2+b-a=0$$

имеет четыре различных корня. 1) Принадлежит ли точка $N\,(-2;\,3)$ множеству M? 2) Найдите площадь многоугольника, внутренней областью которого является множество M.

Решение. Алгебраически-геометрическая формулировка задачи говорит о том, что и решение должно быть алгебраически-геометрическим. Мы начнем с алгебраического анализа условий, после чего используем результаты этого анализа для определения геометрической природы множества M.

Данное биквадратное уравнение имеет четыре различных корня тогда и только тогда, когда уравнение

$$(b+2a)\,z^2+(b+7a)\,z+b-a=0 \quad (1)$$

имеет *два различных положительных* корня. Для этого необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий:

а) уравнение (1) — квадратное ($b+2a\neq 0$) и его дискриминант положителен:

$$(b+7a)^2-4\,(b+2a)(b-a)>0; \quad (2)$$

б) произведение и сумма корней уравнения (1) — положительные числа, то есть

$$\frac{b-a}{b+2a}>0, \quad -\frac{b+7a}{b+2a}>0$$

(мы использовали теорему Виета), что эквивалентно системе

$$\begin{cases} (b-a)(b+2a)>0, & (3) \\ -(b+7a)(b+2a)>0. & (4) \end{cases}$$

Левую часть неравенства (2) можно рассматривать как квадратный трех-

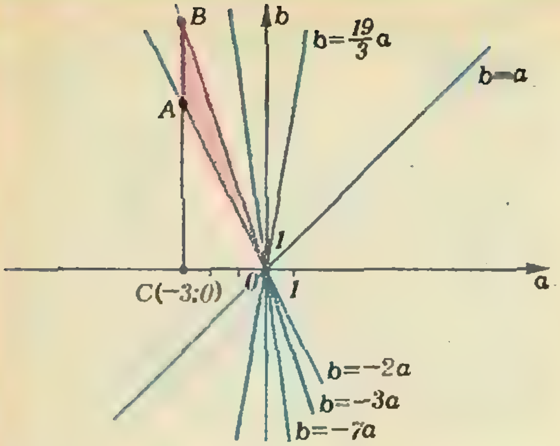


Рис. 7.

член относительно переменной a с коэффициентами, зависящими от параметра b. Корни этого трехчлена $a_1=-b/3$, $a_2=3b/19$, так что неравенство (2) можно переписать в виде

$$57(a+b/3)(a-3b/19)>0. \quad (2')$$

Переходя к координатной плоскости $(a;\,b)$, мы видим, что все полученные неравенства (2′), (3) и (4) имеют вид неравенства (∗). Рассмотрим на плоскости $(a;\,b)$ соответствующие прямые (рис. 7). Используя замечание, сделанное относительно множества точек, удовлетворяющих неравенству (∗), и учитывая ограничения $-3<a<0$, $0<b<9$, получим в пересечении множество M — треугольник ABO (см. рис. 7). Теперь легко видеть, что точка $N(-2;\,3)$ множеству M не принадлежит, поскольку она лежит ниже прямой $b=-2a$. Найдя координаты точек A и B: $A(-3;\,6)$, $B(-3;\,9)$, получим искомую площадь:

$$S=\frac{AB\cdot OC}{2}=\frac{9}{2}.$$

Ответ: 1) не принадлежит; 2) 9/2.

6 (1977 г.). ***Найдите площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости системой неравенств***

$$\begin{cases}\sqrt{3x^2+3y^2+3}\geqslant 2y+1, & (5)\\ y+4\geqslant 2\sqrt{3}\,|x|. & (6)\end{cases}$$

Решение. Область определения неравенства (5) и всей системы находится из условия $3x^2+3y^2-3\geqslant 0$, то есть $x^2+y^2\geqslant 1$. Это — внешность круга (вместе с границей) радиусом 1 с центром в начале координат. В полуплоскости $y<-\frac{1}{2}$ неравенство (5) выполняется для всех $(x;\,y)$ из области определения. В полуплоскости $y\geqslant-\frac{1}{2}$ неравенство (5) равносильно неравенству $3x^2-(y+2)^2\geqslant 0$, или

$$(\sqrt{3}\,x-y-2)(\sqrt{3}\,x+y+2)\geqslant 0. \quad (5')$$

Пусть L — окружность $x^2+y^2=1$, l_1 и l_2 — прямые, задаваемые уравнениями $y-\sqrt{3}x+2=0$ и $y+\sqrt{3}x+2=0$ соответственно (рис. 8). Прямые l_1 и l_2 касаются окружности L в точках $A(\sqrt{3}/2;\,-1/2)$ и $A_1(-\sqrt{3}/2;\,-1/2)$ (проверьте это, рассмотрев соответствующие системы уравнений). Учитывая то, что неравенство (5′) имеет вид неравенства (∗), а также предыдущие замечания, получаем, что неравенство (5) выполняется в области, заштрихованной на рисунке 8. Но мы еще не учли ограничений, задаваемых неравенством (6).

Два луча, задаваемые уравнением $y+4=2\sqrt{3}|x|$, выходят из точки $C(0;\,-4)$ и пересекаются с прямыми l_1 и l_2 в точках $B(2/\sqrt{3};\,0)$ и $B_1(-2/\sqrt{3};\,0)$, лежащих на оси абсцисс. Неравенству (6) удовлетворяют точки, находящиеся внутри угла B_1CB. Поэтому множеством точек, удовлетворяющих одновременно неравенствам (5) и (6), является фигура, граница которой выделена на рисунке 8 красным цветом (D — точка пересечения окружности L с осью Oy). Обозначая через S_1, S_2 и S_3 соответственно площади треугольников CB_1B, OAB и сектора ODA, получаем, что искомая площадь равна $S_1-2(S_2+S_3)$. Поскольку

$$S_1=OC\cdot OB=8/\sqrt{3},$$

$$S_2=\frac{1}{2}OB\cdot OA\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}/6$$

(угол DOA равен $\pi/3$, так как $\cos DOA=1/2$),

$$S_3=\frac{1}{2}(OA)^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6},$$

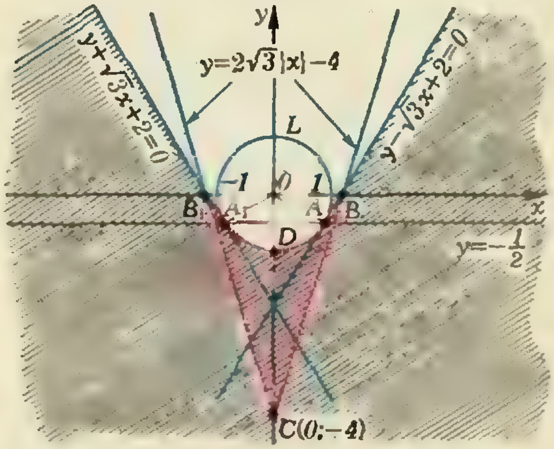


Рис. 8.

получаем ответ: искомая площадь равна $(7\sqrt{3}-\pi)/3$.

Конечно, приведенные шесть задач далеко не исчерпывают все типы задач на координатной плоскости, предлагавшихся (в последние 10 лет) на вступительных экзаменах в МФТИ. Мы постарались разобрать наиболее интересные и трудные из них. При этом мы совершенно не коснулись еще одного очень важного раздела — задач на касательные к графикам функций — по той причине, что совсем недавно в «Кванте» была опубликована большая статья, посвященная именно таким задачам (см. «Квант», 1986, № 3, с. 51). Чтобы у читателей составилось более полное представление, мы предлагаем им самостоятельно решить следующие упражнения:

1 (1984 г.). Через точку M (5; 6) проведена касательная к параболе $y=6x^2/25$, пересекающая ось абсцисс в точке N, а ось ординат в точке P. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник NOP (O — начало координат).

2 (1979 г.). К параболе $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$ в двух ее точках проведены касательные, пересекающиеся в точке A и пересекающие ось абсцисс в точках B и C. Треугольник ABC — равнобедренный, и его угол ABC равен $2\pi/3$. Найдите площадь этого треугольника.

3 (1978 г.). На координатной плоскости даны две прямые $y=-x$ и $y=5x-6$. Найдите: 1) значения a и b, при которых обе данные прямые касаются параболы $y=x^2+ax+b$; 2) координаты точек касания.

4 (1982 г.). В точках A и B параболы $y=x^2-3x+1$ проведены касательные, угловой коэффициент одной из касательных равен 1. Парабола $y=4x^2+ax+1$ $(a>0)$ также касается каждой из этих прямых. Найдите значение параметра a и расстояние между точками A и B.

5 (1983 г.). *На координатной плоскости* даны точки B (3; 1) и C (5; 1). Рассматриваются трапеции, для которых отрезок BC является одним из оснований, а вершины другого основания лежат на дуге параболы $y=(x-1)^2$, выделяемой условием $0\leqslant x\leqslant 2$. Среди этих трапеций выбрана та, которая имеет наибольшую площадь. Найдите эту площадь.

6 (1978 г.). Вершины A, B, C треугольника имеют соответственно координаты (—2; —1), (0; 9), (8; 1). Найдите: 1) все значения a, для которых координаты точки пересечения медиан треугольника ABC являются решением системы неравенств

$$\begin{cases} 2x-y+a\leqslant 0, \\ 6x+3y+5a\geqslant 0; \end{cases}$$

2) все значения a, для которых координаты хотя бы одной точки отрезка BC являются решением этой системы.

7 (1977 г.). Графики функций $y=\frac{1}{2x}$ и $y=\frac{17}{3}-2x$, рассматриваемые в первой координатной четверти $(x>0,\ y>0)$, пересекаются в точках A и B. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника перпендикулярна оси Ox, две его вершины лежат на первом графике, а третья — на отрезке AB. Найдите длины сторон треугольника.

8 (1985 г.). Найдите все значения параметра a, при которых вершины двух парабол $y=4x^2-8ax-a$ и $y=4ax^2-8x+a-2$ лежат по одну сторону от прямой $y=-5$ (но не лежат на этой прямой).

9 (1980 г.). На координатной плоскости рассматривается множество M всех точек, координаты $(a;\,b)$ которых удовлетворяют условиям $b>2a$, $|b|<5$, $|a|<5$ и таковы, что уравнение

$$x^4/(2a+b)+(2a-3b)\,x^2+8a^3+b^3=0$$

не имеет корней. 1) Принадлежит ли точка P (2; —3) множеству M? 2) Найдите площадь многоугольника, внутренней областью которого является множество M.

Построение диалоговых алгоритмов

(Начало см. на с. 40.)

```
алг «бросание мяча в корзину»
арг вещ $L$, $D$
нач лит попал
  вещ $v0$, $a0$, $l$
  попал:=нет
  пока попал=нет
  нц
    запрос («угол бросания=», $a0$)
    запрос («начальная скорость=», $v0$)
    выбор
      при $v0<0$
        попал:=нет
        вывод («странная скорость»)
      при $a0\leqslant 0$ или $a0\geqslant 90$
        попал:=нет
        вывод («страниый угол»)
      иначе
        расчет попаданий
        выбор
          при попал=да
            вывод («молодец, попал»)
          при $l<L$
            вывод («недолет», $r$, «метров»)
          при $l>L$
            вывод («перелет», $r$, «метров»)
        все
    все
  кц
кон
алг «расчет попаданий»
арг: вещ $D$, $L$, $v0$, $a0$
рез: лит попал
  вещ $r$
нач вещ $g$, $l$
  $g:=9{,}81$
  $l:=(v0)^2\cdot\sin(2\cdot a0\cdot\pi/180)/g$
  $r:=L-l$
  если $r<D/2$
    то попал:=да
    иначе попал:=нет
  все
кон
```

XX Всесоюзная олимпиада по математике

Кандидат физико-математических наук
В. В. ВАВИЛОВ,
кандидат физико-математических наук
С. В. РЕЗНИЧЕНКО,
кандидат физико-математических наук
И. Н. СЕРГЕЕВ

С 24 по 29 апреля на родине В. И. Ленина в г. Ульяновске проходил заключительный тур XX Всесоюзной математической олимпиады школьников, посвященной 275-летию со дня рождения М. В. Ломоносова. В 1982 году Ульяновск был организатором заключительного тура Всероссийской физико-математической и химической олимпиады школьников, и вот теперь город удостоен чести провести юбилейную Всесоюзную математическую олимпиаду. В заключительном туре XX олимпиады приняли участие команды 14 союзных республик, по одной команде от четырех зон РСФСР, команды Москвы и Ленинграда, школ Министерства путей сообщения, семи специализированных республиканских физико-математических школ, а также команда г. Ульяновска — организатора олимпиады. Всего в олимпиаде участвовало 163 школьника: 46 восьмиклассников, 58 девятиклассников и 59 десятиклассников, в том числе 27 призеров XIX Всесоюзной олимпиады.

С момента прибытия в Ульяновск члены и руководители команд были окружены заботой и вниманием хозяев олимпиады. На регистрации участников олимпиады тепло приветствовали члены оргкомитета, на память об олимпиаде каждому члену команды и руководителю были вручены юбилейная медаль, традиционный значок, программа олимпиады, сувениры. От Академии педагогических наук СССР каждому участнику вручалась библиотечка литературы по математике. На всех мероприятиях олимпиады команды сопровождали комиссары — ученики 9-х классов школ города, работники областного отдела народного образования, учителя школ и преподаватели вузов.

Торжественное открытие XX Всесоюзной математической олимпиады состоялось 24 апреля на территории Ленинского мемориала. Сначала у памятника В. И. Ленину была проведена торжественная линейка, участники олимпиады возложили цветы. С приветствием и пожеланиями успехов к юным математикам обратился зав. отделом науки и учебных заведений при Ульяновском обкоме КПСС А. Л. Кругликов. Затем под звуки оркестра колонна участников олимпиады направилась в Ленинский мемориал, где в Большом зале состоялась торжественная церемония открытия олимпиады. Перед участниками выступили секретарь Ульновского областного комитета партии В. Н. Сверкалов, зам. председателя Центрального оргкомитета Всесоюзной олимпиады М. Н. Тамбиева, зам. председателя жюри олимпиады, доктор физико-математических наук А. В. Штраус. С пожеланиями успехов к своим друзьям-соперникам обратились победители XVIII и XIX Всесоюзных олимпиад. Завершилось торжественное открытие концертом художественной самодеятельности, который в честь участников олимпиады, руководителей команд и членов жюри дали лучшие творческие коллективы школ города.

Следующие два дня — 25 и 26 апреля — были самыми трудными для участников олимпиады, ведь в каждый из этих дней они должны были решить по 4 конкурсные задачи. Приятно отметить, что участники олимпиады в целом успешно справились с предложенными задачами.

Нелегкими оказались дни олимпиады для членов жюри, работавшего под руководством академика АН УССР Б. В. Гнеденко. Ведь в сжатые сроки нужно было организовать проверку большого числа работ, провести анализ предложенных решений (многие из которых были весьма оригинальны и часто неизвестны жюри) и разбор задач с обсуждением типичных ошибок для участников олимпиады и руководителей команд. В каждом классе жюри провело конкурс на лучшую задачу. По мнению участников олимпиады лучшими, т. е. наиболее интересными и содержательными, были в 8-м классе — задача № 8, в 9-м и 10-м классах — задача № 7. Приятно отметить, что при определении лучшей задачи участники олимпиады исходили из соображений математической красоты и изящества, а вовсе не из коньюнктурных соображений типа «лучшая задача — это та, которая принесла мне больше зачетных очков».

На своем заключительном заседании жюри утвердило итоги олимпиады по классам. Торжественное закрытие олимпиады и награждение победителей состоялось 29 апреля в городском Дворце пионеров и школьников.

Особенно следует отметить выступление *Антона Лунина* (с. ш. № 57, г. Москва) — победителя трех последних всесоюзных олимпиад! Успешно выступили на олимпиаде самые юные участники: среди восьмиклассников — ученики 6-го класса *Роман Безрукавников* (с. ш. № 24, г. Калуга) и *Борис Дубров* (с. ш. № 107, г. Минск); среди девятиклассников — занявший III место *Савва Павлов* (с. ш. № 4, г. Черновцы, УССР).

Стал уже традиционным математический бой между командой жюри, составленной на этот раз из бывших участников Международных математических олимпиад, и школьниками, участниками олимпиады. Соревнования, как раньше, проводились по задачам раздела «Квант» для младших школьников». С минимальным преимуществом на этот раз победили школьники.

Интересно прошла встреча с редакцией журнала «Квант» в актовом зале школы, в которой учился Володя Ульянов. Членам редколлегии были заданы десятки вопросов о журнале и математике, было высказано много интересных предложений по содержанию и оформлению журнала.

Обширной была культурная программа олимпиады: обзорная экскурсия по ленинским местам Ульяновска, посещение музея Центра гражданской авиации стран — членов СЭВ, посещение Краеведческого и Художественного музеев, участие в митинге-концерте «Сердце матери», посвященном М. А. Ульяновой, встречи со школьниками города. Четко, оперативно работал пресс-центр олимпиады, ежедневно выпускались стенгазеты, были подготовлены 4 радиопередачи. Итоги и ход олимпиады освещали областное телевидение и радиовещание.

Надолго запомнятся участникам олимпиады напряженные, заполненные встречами, увлекательной борьбой, творческими дискуссиями дни, которые они провели в Ульяновске. Новых успехов вам, ребята!

Задачи

Первый день

8 класс

1. Корни уравнения $x^2+ax+1=b$ являются натуральными числами. Докажите, что a^2+b^2 — составное число.

В. Федотов

2. Два одинаковых квадрата в пересечении образуют восьмиугольник. Стороны одного квадрата синие, а другого — красные. Докажите, что сумма длин синих сторон восьмиугольника равна сумме длин его красных сторон.

В. Произволов

3. Точка M лежит на стороне AC остроугольного треугольника ABC. Вокруг треугольников ABM и CBM описываются окружности. При каком положении точки M площадь общей части ограничиваемых ими кругов будет наименьшей?

С. Долматов

4. В одном государстве король хочет построить n городов и $n-1$ дорог между ними так, чтобы из каждого города можно было проехать в любой другой. (Каждая дорога соединяет два города, дороги не пересекаются и не проходят через другие города.) Король хочет, чтобы кратчайшие расстояния по сети дорог между парами городов равнялись соответственно 1 км, 2 км, 3 км, ..., $\frac{n(n-1)}{2}$ км. Возможно ли это, если: а) $n=6$; б) $n=1986$?

А. Анджанс

9 класс

1. Докажите, что на координатной плоскости нельзя нарисовать выпуклый четырехугольник, у которого одна диагональ вдвое длиннее другой, угол между диагоналями равен 45°, а координаты каждой вершины являются целыми числами.

Л. Купцов

2. Докажите, что прямоугольную таблицу размером $n\times m$ можно заполнить квадратами различных натуральных чисел так, чтобы суммы чисел в каждой строке и каждом столбце были также квадратами натуральных чисел.

Н. Агаханов, О. Ляшко

3. Две окружности, расстояние между центрами которых равно l, пересекаются в точках M и N. Через точки M, N и точку A первой окружности (отличную от M и N) проведены прямые, пересекающие вторую окружность в точках B и C соответственно. а) Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен l. б) Какое множество

точек образуют центры окружностей, описанных около треугольника ABC, если точка A пробегает первую окружность?

Б. Чиник

4. На плоскости дан правильный шестиугольник. Каждая его сторона разделена на 1000 равных частей, и точки деления соединены отрезками, параллельными сторонам шестиугольника. Выберем какие-либо три узла получившейся сетки, являющиеся вершинами правильного треугольника, и окрасим их. Будем продолжать окрашивать таким способом тройки узлов до тех пор, пока это возможно. Докажите, что если неокрашенным останется один узел, то он не может быть вершиной исходного шестиугольника.

С. Дужин

10 класс

1. Найдите все натуральные числа, каждое из которых равно квадрату числа всех своих делителей.

Б. Ивлев

2. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\frac{3}{a_1+a_2+a_3}+\ldots+$$
$$+\frac{n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}<4\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

Л. Курляндчик

3. Через вершину A треугольника ABC, в котором $AB \neq AC$, проводятся различные прямые. Докажите, что любая из них может содержать не более одной точки M, отличной от вершин треугольника и удовлетворяющей условию $\angle ABM=\angle ACM$. Определите, какие из рассматриваемых прямых не содержат ни одной такой точки.

О. Мусин

4. Куб с ребром длиной n, $n \geqslant 3$, состоит из n^3 единичных кубиков. Докажите, что в каждом из этих кубиков можно записать по целому числу так, чтобы все n^3 чисел были различными, а суммы чисел в любом ряду, параллельном какому-либо ребру куба, равнялись нулю.

Ю. Нестеренко, И. Сергеев

Второй день

8 класс

5. Десятичная запись натурального числа a состоит из n одинаковых цифр x, числа b — из n одинаковых цифр y, а числа c — из $2n$ одинаковых цифр z. Для любого $n \geqslant 2$ найдите все такие цифры x, y, z, для которых $a^2+b=c$.

В. Вавилов

6. Внутри выпуклого двенадцатиугольника даны две точки, расположенные на расстоянии 10 см друг от друга. Для каждой из этих точек нашли сумму расстояний от нее до вершин двенадцатиугольника. Докажите, что полученные суммы различаются менее чем на 1 м.

Н. Нецветаев

7. Молоко разлито по 30 стаканам. Мальчик пытается добиться, чтобы во всех стаканах молока стало поровну. Для этого он берет любые два стакана и отливает молоко из одного в другой до тех пор, пока количество молока в них не уравняется. Можно ли разлить молоко по стаканам так, чтобы мальчик не смог добиться своей цели, сколь бы долго он ни занимался переливанием?

Ю. Нестеренко, И. Сергеев

8. Некоторый прямоугольник разделен прямыми, параллельными сторонам, на квадраты со стороной 1, которые раскрашены в шахматном порядке в белый и черный цвет. Диагональ прямоугольника разбилась на белые и черные отрезки. Найдите отношение суммы длин белых отрезков к сумме длин черных отрезков, если размер прямоугольника: а) 100×99; б) 101×99.

А. Берзиньш

9 класс

5. На плоскости дан правильный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$. а) Докажите, что если n — четное число, то для произвольной точки M плоскости в выражении $\pm\overrightarrow{MA_1}\pm\overrightarrow{MA_2}\pm\ldots\pm\overrightarrow{MA_n}$ можно так выбрать знаки «плюс» и «минус», что полученная сумма будет равна $\vec{0}$. б) Докажите, что если n — нечетное число, то указанное выражение с помощью выбора знаков «плюс» и «минус» можно обратить в $\vec{0}$ только для конечного числа точек M плоскости.

С. Рукшин

6. См. задачу № 8, пункт б) для 8 класса.

7. Клетки квадратной таблицы размером $n \times n$ заполняются числами ± 1 по следующим правилам:

1) во все граничные клетки таблицы помещаются числа -1;

2) число, помещаемое в очередную незаполненную клетку таблицы, равно произведению ближайших к этой клетке чисел, расположенных по разные стороны от нее и лежащих или в одной строке с ней, или в одном столбце с ней. Так делается до тех пор, пока все пустые клетки таблицы не будут заполнены.

а) Какое наибольшее количество $+1$ может получиться в таблице?

б) Какое наименьшее количество $+1$ может получиться в таблице?

Н. Агаханов

8. Докажите, что для каждого натурального n справедливо неравенство $|\sin 1|+|\sin 2|+\ldots+$ $+|\sin(3n-1)|+|\sin 3n|>\frac{8}{5}n$.

В. Берник

10 класс

5. Докажите, что сумма всех чисел вида $\frac{1}{mn}$, где m, n — натуральные числа и $1 \leqslant m<n \leqslant 1986$, не являются целым числом.

Д. Митькин

6. Около окружности радиусом 1 описаны квадрат и треугольник. Докажите, что площадь общей части квадрата и треугольника больше 3,4. Можно ли утверждать, что эта площадь больше 3,5?

К. Букин

7. Многочлен $p(x)$ назовем *допустимым*, если все его коэффициенты равны 0, 1, 2 или 3. Для данного натурального n найдите число всех допустимых многочленов, удовлетворяющих условию $p(2)=n$.

Д. Флаас

8. Рассмотрим все тетраэдры $AXBY$, описанные около данной сферы. Докажите, что при фиксированных точках A и B сумма углов пространственного четырехугольника $AXBY$, то есть величина

$$\angle AXB+\angle XBY+\angle BYA+\angle YAX,$$

не зависит от выбора точек X и Y.

И. Шарыгин

XX Всесоюзная олимпиада по физике

А. Р. ЗИЛЬБЕРМАН, В. В. КАШКАРОВ

В этом году состоялась XX Всесоюзная олимпиада школьников по физике, посвященная 275-летию со дня рождения М. В. Ломоносова. Заключительный этап олимпиады проходил с 16 по 22 апреля в столице Казахстана — городе Алма-Ате.

17 апреля участники олимпиады возложили цветы к памятнику В. И. Ленину и Мемориалу Славы, после чего состоялось торжественное открытие олимпиады. Собравшихся приветствовали члены оргкомитета и победители прошлогодней олимпиады. Был показан документальный фильм о Советском Казахстане. В заключение был дан большой концерт.

Утром следующего дня прошел теоретический тур олимпиады. Восьмиклассникам предлагалось решить 4 задачи (на решение отводилось 4 часа), а девятиклассникам и десятиклассникам — по 5 задач (в течение 5 часов). Одна из задач этого тура — задача 2 для девяти- и десятиклассников (см. ниже) — была не совсем обычной: участникам показали опыт и попросили объяснить наблюдаемое явление, а также провести необходимые расчеты. (Для тех, кто захочет повторить этот красивый опыт, подскажем — нужно как следует подсолить воду и подкрасить ее чернилами. После двух-трех циклов опыт лучше прервать и сказать, что дальше будет то же самое. Впрочем, если подобрать несмешивающиеся жидкости, то опыт можно и продолжить.)

Вот задачи, которые были предложены участникам олимпиады (как обычно, часть этих задач опубликована в Задачнике «Кванта» в двух предыдущих номерах журнала):

8 класс

1. Блок радиусом R плотно насажен на цилиндр радиусом r. Получившийся двойной блок укреплен на оси O (рис. 1). Нитка, привязанная к стене, переброшена через блок, а второй ее конец намотан на цилиндр. Диаметр нижнего свободного блока, к оси которого подвешен груз массой M, равен $R+r$, так что свешивающиеся части нити вертикальны. Вся система находится в равновесии. Чему равна сила натяжения нити в точке A? Трение в оси O пренебрежимо мало.

2. Собрана схема, содержащая 50 разных амперметров и 50 одинаковых вольтметров (рис. 2). Показания первого вольтметра $U_1=9{,}6$ В, первого амперметра $I_1=9{,}5$ мА, второго амперметра $I_2=9{,}2$ мА. Определите по этим данным сумму показаний всех вольтметров. Не задавайте никаких вопросов — больше ничего не задано.

3. Мощный транзистор, выделяющий тепло, закреплен на теплоотводящей пластине, обдуваемой ветром, температура которого равна 30 °С. На рисунке 3 показано распределение температур на пластине. Определите рассеиваемую мощность. Известно, что равномерно нагретая до +70 °С пластина рассеивает мощность $P=10$ Вт при температуре воздуха 20 °С. Теплоотдача пропорциональна разности температур пластины и воздуха.

4. Катер, привязанный у берега большого озера (береговая линия — прямая), неожиданно отвязался, и ветер погнал его с постоянной скоростью $v_0=2{,}5$ км/ч под углом $\alpha=15°$ к берегу. Ваша скорость на берегу $v_1=4$ км/ч, в воде $v_2=2$ км/ч. Сможете ли вы догнать катер? При какой скорости катера это вообще возможно?

9 класс

1. Два спортсмена держат натянутый шнур *АБ* (рис. 4). По сигналу спортсмен *А* начинает двигаться на восток со скоростью $v_0=1$ м/с, а спортсмен *Б* — на юг с постоянным ускорением. Найдите это ускорение, если известно, что узел *В*, завязанный на шнуре, при движении прошел через точку *Г*. Масштаб изображен на рисунке 4.

2. В большой сосуд с жидкостью плотностью ρ_1 опущен маленький цилиндрический сосуд площадью S, в дно которого вставлена трубочка длиной l (рис. 5). Стенки сосудов скреплены жестко между собой. В маленький сосуд нали-

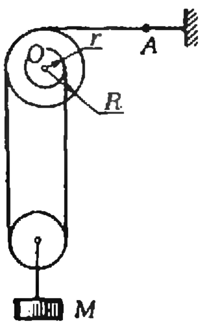


Рис. 1.

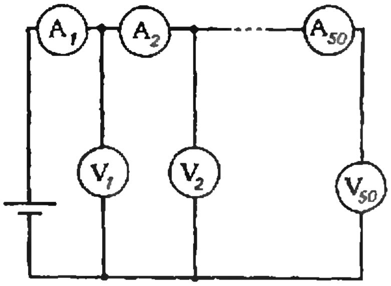


Рис. 2.

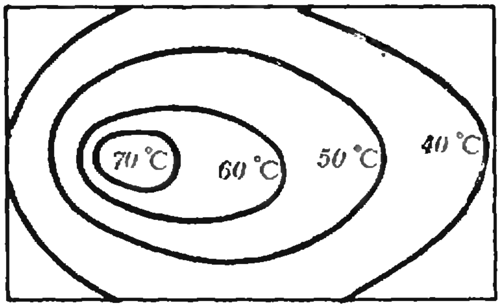


Рис. 3.

вают подкрашенную жидкость плотности ρ_2 $(\rho_2>\rho_1)$ до высоты H, так, что уровни жидкостей в большом и малом сосудах совпадают. В некоторый момент времени отверстие в трубочке открывают, и тяжелая жидкость начинает вытекать в большой сосуд. Затем через некоторое время легкая жидкость втекает в маленький сосуд, после чего процесс повторяется. Какая масса тяжелой жидкости вытечет из малого сосуда в первый раз? Найдите, какая масса легкой жидкости будет втекать в маленький сосуд и какая масса тяжелой жидкости будет из него вытекать за каждый цикл в дальнейшем. Считать, что жидкости не смешиваются, поверхностным натяжением пренебречь.

Примечание. В аудитории был показан соответствующий опыт.

3. Под поршнем в высоком цилиндрическом сосуде находится некоторое количество гелия. Газ нагревают, и поршень скользит вверх. При какой мощности нагревателя скорость поршня будет постоянна и равна $v=1$ м/с? Масса поршня $m=2$ кг, сила трения его о стенки сосуда $F_{тр}=10$ Н. Атмосферное давление отсутствует.

4. Ключ K периодически замыкают на время $\tau_1=1\cdot10^{-3}$ с и размыкают на $\tau_2=20\cdot10^{-3}$ с (рис. 6). При какой частоте переключений стрелка амперметра практически не дрожит? Какой ток показывает амперметр магнитоэлектрической системы? Внутренне сопротивление батареи и сопротивление амперметра пренебрежимо малы, $R=100$ Ом, $C=10$ мкФ, $U_0=10$ В.

5. Мощный транзистор, выделяющий тепло, закреплен на теплоотводящей пластине, обдуваемой воздухом. На рисунке 3 показано распределение температур на пластине. Определите температуру воздуха, если известно, что рассеиваемая мощность $P=7$ Вт. Известно также, что равномерно нагретая до +70 °C пластина рассеивает мощность $P_0=10$ Вт при температуре воздуха +85 °C. Теплоотдача пропорциональна разности температур пластины и воздуха.

10 класс

1. Крупнейший в мире советский телескоп имеет в качестве объектива зеркало диаметром $D=6$ м. Какое время потребуется, чтобы сравнивая полученные на этом телескопе фотоснимки, можно было заметить взаимное вращение нашей Галактики и туманности Андромеды вокруг общего центра масс? Расстояние до туманности Андромеды $R=1{,}42\cdot10^{11}\,R_0$, где R_0 — радиус орбиты Земли. Массы Галактики и туманности Андромеды равны соответственно $M_Г=2{,}5\cdot10^{11}\,M_0$ и $M_А=3{,}6\cdot10^{11}\,M_0$, где M_0 — масса Солнца. Фотографирование ведется в видимом свете на длине волны $\lambda=5\cdot10^{-7}$ м.

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. Подвижный поршень делит цилиндр на две одинаковые части объемом $V_0=10^{-3}$ м^3 (рис. 7). В одной части находится сухой воздух, а в другой — водяной пар и вода. Масса воды $m=4$ г. При медленном нагревании цилиндра поршень приходит в движение. После смещения поршня на 1/4 длины цилиндра движение прекратилось. Какая масса паров воды находилась в сосуде до нагревания? Определите массу воздуха в цилиндре и его начальную температуру. При какой температуре цилиндра поршень перестал двигаться? Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К). Зависимость

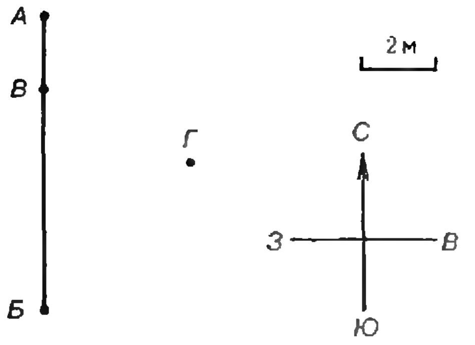


Рис. 4.

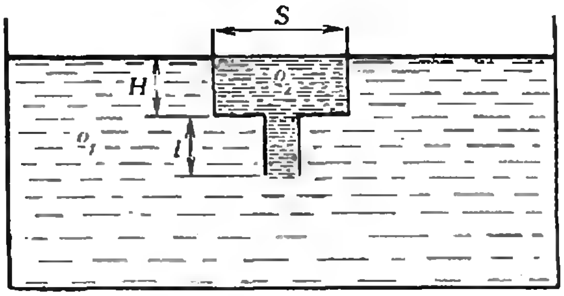


Рис. 5.

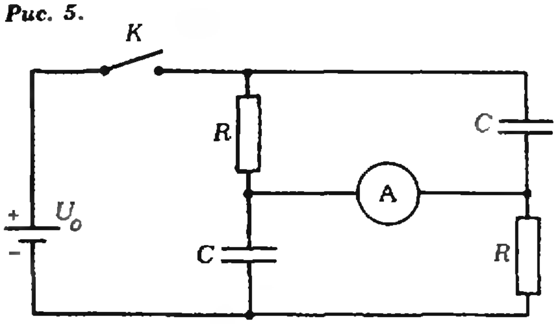


Рис. 6.

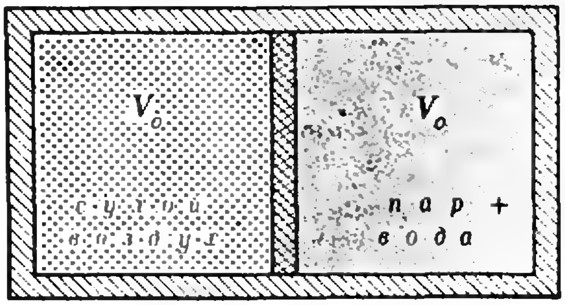


Рис. 7.

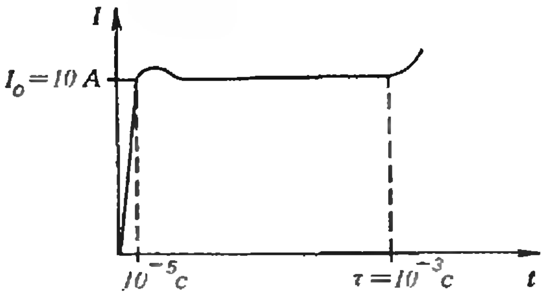
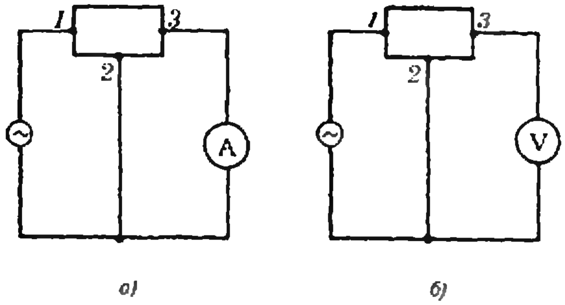


Рис. 8.



а) б)

Рис. 9.

давления насыщенных паров от температуры $p_н(t)$ приведена в таблице:

t, °C	100	120	133	152	180
$p_н \times 10^5$ Па	1	2	3	5	10

4. В катушку может свободно втягиваться ферромагнитный сердечник массой $M=0{,}01$ кг. Катушку подключили к источнику с напряжением $U=100$ В, и через катушку протек ток (показанный на графике на рисунке 8). Оцените начальную индуктивность катушки. Пренебрегая потерями, найдите скорость сердечника в момент времени $\tau=10^{-3}$ с.

5. «Черный ящик» содержит катушку, резистор и конденсатор и имеет три вывода. При его исследовании были получены следующие результаты. В схеме, изображенной на рисунке 9, *а*, амперметр показал $I_1=0{,}1$ А при частоте генератора $\nu_1=1000$ Гц, а ток через него отставал от входного напряжения на $\pi/6$. Частоту генератора уменьшили в 100 раз, при этом ток возрос менее чем в 2 рвза. Частоту генератора вернули к прожнему значению, а вместо амперметра подключили вольтметр, как показано на рисунке 9, *б*. Он показал $U_1=20$ В, а сдвиг фаз между напряжением на вольтметре и входным напряжением опять составил по величине $\pi/6$. Найдите по этим данным параметры элементов «черного ящика». Во сколько раз нужно изменить частоту генератора, чтобы в схеме на рисунке 9, *б* сдвиг фаз составил $\pi/2$? Измерительные приборы можно считать идеальными. Напряжение на выходе генератора неизменно, его внутреннее сопротивление пренебрежимо мало.

После того как участники закончили работу, жюри олимпиады приступило к проверке. В числе проверяющих были представители Москвы, Ленинграда, Новосибирска, Еревана, Куйбышева, Алма-Аты. Как обычно, проверка была организована так, что каждая работа внимательно просматривалась не менее двух раз. Вначале работы «проходили по конвейеру», на котором каждая задача проверялась двумя членами жюри (они проверяли данную задачу во всех работах). Затем обсуждались и утверждались председателем жюри критерии оценок каждой из задач, и после этого проводилась вторая проверка — в этот раз члены жюри просматривали всю работу участника. Возможные расхождения в оценках при первой и второй проверках обсуждались тут же. По установившейся традиции авторы работ «раскрывались» только после полного окончания проверки.

В то время, когда участники решали задачи, были проведены разбор задач и их обсуждение с руководителями команд. Еще раз разбор задач теоретического тура для участников с изложением критериев оценки проводился после экспериментального тура. Участники, недовольные своими результатами, могли прийти на апелляцию и обсудить свою работу с членами жюри.

19 апреля участники олимпиады и члены жюри приняли участие во Всесоюзном коммунистическом субботнике — работали в Ботаническом саду. После работы осмотрели большую коллекцию тропических растений — интереснейших экспонатов этого сада.

На следующий день проходил экспериментальный тур. Каждому участнику было предложено 2 задачи (на выполнение которых отводилось 4 часа).

В 8 классе первая задача относилась к цепям постоянного тока. Были даны две батарейки, в одну из которых (это сообщалось в условии) был последовательно впаян резистор с неизвестным сопротивлением. При помощи авометра нужно было определить напряжения батареек и величину неизвестного сопротивления. Тут достаточно было провести несколько измерений в различных схемах, например, соединяя батарейки последовательно и навстречу друг другу. Определить «препарированную» батарейку можно было таким способом: подключить вольтметр к одной из батареек, а затем вторую батарейку присоединить к первой параллельно, в противоположной полярности (подумайте — почему непременно в противоположной). Если показания вольтметра сильно не изменятся, значит, вначале мы подключились к обычной батарейке.

Во второй задаче для восьмиклвссников нужно было определить массу груза, пользуясь своеобразной пружиной — часть ее витков была охвачена тонкой ниткой, которая не мешала при небольших растяжениях, а при больших изменяла жесткость пружины, «отключая» часть витков. Еще были даны несколько грузов известной массы (50 г), штатив, сосуд с водой и линейка. При помощи грузов известной массы можно было проградуировать «нелинейную» пружину, но дело усложнялось тем, что неизвестный груз был слишком тяжелым для обычного взвешивания, так что приходилось прибегать к так называемому гидростатическому взвешиванию.

В первой задаче для 9 класса нужно было определить плотности двух веществ — оргстекла и пластилина при помощи двух сосудов с водой, миллиметровой бумаги и линейки. Если бы один из материалов был легче воды, все было бы очень просто, однако и оргстекло, и пластилин тонут в воде. Нужно было догадаться сделать из пластилина лодочку (или что-то вроде нее), чтобы она могла плавать в воде.

Вторая задача для девятиклассников была посложнее. Участникам давалась кнопка — переключатель с тремя выводами. При нажатии на кнопку в ней происходит размыкание одной цепи и почти одновременное замыкание другой. Требовалось измерить «мертвое» время — время, в течение которого одна цепь уже разомкнута, а вторая еще не замкнута. Для этого можно было использовать батарейку, набор резисторов с известными сопротивлениями (0,1 кОм, 1 кОм, 10 кОм и 100 кОм), конденсатор большой емкости (500 мкф), полупроводниковый диод (типа Д9Е), авометр («Школьный») и провода. Идея измерения состояла в том, чтобы конденсатор заряжался от батарейки через резистор только тогда, когда одна из цепей переключателя уже разомкнута, а вторая еще не замкнута, то есть в продолжении «мертвого» времени, — именно для этого и нужен диод (рис. 10). Для калибровки прибора конденсатор следовало зарядить до некоторого известного напряжения (для этого можно было сделать делитель напряжения батарейки с помощью резисторов) и измерить его заряд гальванометром. Таким способом можно довольно точно измерять небольшие отрезки времени.

В первой задаче для 10 класса нужно было с помощью простых приборов (пробирка, стеклянная трубочка с тонким отверстием известного диаметра, мерная мензурка, миллиметровая бумага, линейка, пластилин, лед с водой в стакане, кусок жесткой проволоки и марлевый тампон для протирания оборудования от влаги) измерить температуру и давление в комнате. Для этого было достаточно из пробирки, стеклянной трубочки и пластилина сделать «газовый термометр», отделив объем внутри системы от наружного при помощи капли воды, пущенной в трубочку. Заметим, что получившийся прибор — это не только термометр, но и барометр. Положив его набок, а затем поставив вертикально и рассчитав изменение объема, можно найти давление в комнате. При этом очень важно, чтобы пробирка изнутри была сухой, а опыт проводился довольно быстро — пока незаметно испарение капли. Температуру можно найти, отградуировав «термометр» при 0 °С в стакане с водой и льдом, а потом рассчитав изменение объема при нагревании до комнатной температуры.

Интересно отметить, что точность полученных таким способом результатов оказалась довольно хорошей — результаты практически совпадали с показаниями «настоящих» термометра и барометра.

Вторая задача для десятиклассников была вполне традиционной — определение электрической схемы «черного ящика» с тремя выводами и измерение величин сопротивлений резисторов, помещенных внутри. Все оборудование состояло из этого «ящика» и авометра. Трудность заключалась в том, что кроме обычных в таких случаях диодов и резисторов внутри был еще и конденсатор большой емкости (500 мкФ), из-за чего показания омметра в процессе зарядки конденсатора изменялись. Разряжался этот конденсатор тоже не сразу, так что методику измерений нужно было тщательно продумать.

Участники олимпиады не только решали различные задачи, но и активно отдыхали. Они побывали в научно-исследовательских лабораториях, где встретились с учеными Казахского государственного университета, для них была проведена встреча с преподавателями и сотрудниками Московского государственного университета. Гостеприимные хозяева организовали для участников олимпиады вечера отдыха, походы в театр, цирк, поездку в горы — на знаменитый спортивный комплекс Медео. В республиканской физико-математической школе (РФМШ), где проходила олимпиада, был устроен вечер занимательной физики. Во время физбоя были продемонстрированы интересные опыты, а члены жюри этого вечера, одетые в средневековые мантии, благосклонно выслушали объяснения, данные соревнующимися командами, и с некоторыми из них согласились. Остальные объяснения были даны устроителями вечера, и теперь с некоторыми из них согласились участники физбоя. Вечер прошел весело и интересно.

В спортивном зале школы можно было хорошо отдохнуть физически. Там была даже проведена встреча по баскетболу между командами жюри и участников. Несмотря на то, что к моменту встречи итоги олимпиады уже были подведены, победила команда жюри, правда с небольшим перевесом.

На олимпиаде была прекрасно организована служба информации. По свежим следам событий буквально сразу появлялись фотогазеты. Вдоль коридоров школы были развешаны стенные газеты, мимо которых нельзя было пройти равнодушно. Рядом с участниками всегда были люди, готовые ответить на любой вопрос, например — куда пойти учиться после окончания школы.

Во время торжественного закрытия олимпиады состоялось награждение победителей дипломами и различными призами. В целом олимпиада прошла успешно, на ней были победители, но не было побежденных.

Мы желаем всем участникам XX Всесоюзной физической олимпиады больших творческих успехов.

Призеры XX Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Анисов С. (Харьков, с. ш. № 142),
Вологодский В. (Омск, с. ш. № 91),
Иванов С. (Ленинград, с. ш. № 533),
Туляков Д. (Жданов, с. ш. № 7);

по 9 классам —
Борисов Л. (Минск, с. ш. № 19),
Борисов А. (Минск, с. ш. № 19),
Стыркас К. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82);

по 10 классам —
Глущенко Г. (Запорожье, с. ш. № 91),
Крикис М. (Рига, с. ш. № 1),
Лунин А. (Москва, с. ш. № 57),
Порошин В. (Ленинград, с. ш. № 239),
Радько Т. (Корсунь-Шевченковский, с. ш. № 4),
Роганов В. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Баран А. (Минск, с. ш. № 6),
Безрукавников Р. (Калуга, с. ш. № 24),
Берлов С. (Ленинград, с. ш. № 536),
Гороховский А. (Киев, с. ш. № 79),
Процак В. (Киев, с. ш. № 90),
Сарканс У. (Алуксне, с. ш. № 1);

по 9 классам —
Апситис К. (Рига, с. ш. № 1),
Баран А. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Биндер И. (Ленинград, с. ш. № 239),
Дынников И. (Жуковский, с. ш. № 1),
Зайцев Д. (Киев, с. ш. № 145),
Зудилин В. (Бельцы, с. ш. № 16),
Озолс Д. (Рига, с. ш. № 1),
Пухов И. (Москва, с. ш. № 57),
Смирнов С. (Ленинград, с. ш. № 239),
Тульбович А. (Харьков, с. ш. № 27),
Черных А. (Краснодар, с. ш. № 4);

по 10 классам —
Бендорфа К. (Рига, с. ш. № 1),
Гиль А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Кярас С. (Молетай, с. ш. № 2),
Петрунин А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Судаков В. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Дубров Б. (Минск, с. ш. № 107),
Жарков И. (Свердловск, с. ш. № 130),
Макогон А. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Петровский Р. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Румынин Д. (Красноярск, с. ш. № 10);

по 9 классам —
Енукидзе Н. (Тбилиси, с. ш. № 42),
Каринский А. (Невинномысск, с. ш. № 6),
Меркулов Б. (Куйбышев, с. ш. № 11),
Павлов С. (Черновцы, с. ш. № 4),
Уусталу Т. (Таллин, с. ш. № 44),
Чувелев М. (Горький, с. ш. № 4),
Шанько Ю. (Красноярск, с. ш. № 10);

по 10 классам —
Асташкевич А. (Томск, с. ш. № 24),
Вайсбурд М. (Томск, с. ш. № 6),
Газарян Т. (Ереван, ФМШ при Ер. ГУ),
Калинин Г. (Ленинград, с. ш. № 239),
Капович В. (Хабаровск, с. ш. № 2),
Раскина И. (Витебск, с. ш. № 31),
Селяво Л. (Рига, с. ш. № 1).

Как проверить ЭВМ?

Действительно, как, если ЭВМ выдала в качестве ответа лист бумаги, заполненный строками цифр? Оказывается, проверить можно, если учитывать следующее обстоятельство: если уж ЭВМ врет, то, как говорится, «капитально» — она не может ошибиться лишь в одном знаке из 20, зато способна «недопечатать» последнюю сотню цифр или сделать еще что-нибудь подобное. (Виноват в таких вещах, конечно, программист, который пропустил какой-то «подводный камень», о который ЭВМ и спотыкается). Поэтому результат, выданный ЭВМ, обычно проверяют «на правдоподобие» — по порядку числа, согласованности его с другими числами и т. п. И если результат правдоподобен, то он обычно верен. А такую проверку нередко можно сделать и на микрокалькуляторе, что и проделал наш читатель десятиклассник Артур Рощин из Тамбова с числом 1985^{1986}, напечатанным в «Кванте» № 5 за 1986 год на с. 58. И обнаружил, что распечатка неверна: первые цифры должны быть 22 509 698, а не 6 060 536... К тому моменту у нас уже была исправленная распечатка (опоздавшая к подписанию номера в печать). Оказывается, в первый раз ЭВМ пропустила первые 10 цифр: 2 250 997 656, лишь за ними идет 6 060 536... (У Рощина последние цифры неточны из-за погрешностей округления, но первые 5 верны — отличный результат). Читателям приносим извинения, Рощина награждаем дипломом.

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Мазуренко А. (Минск, с. ш. № 50),
Медведев М. (Горький, с. ш. № 40),
Пушкин А. (Москва, с. ш. № 57),
Сагайдак Р. (Черкасская обл., Матусовская с. ш. № 1);

по 9 классам —
Белиц А. (Гомель, с. ш. № 24),
Бобылев С. (Березники, с. ш. № 9),
Будько Д. (Белгород, с. ш. № 3),
Карклин П. (Москва, с. ш. № 47);

по 10 классам —
Волков О. (Горький, с. ш. № 23),
Гущин А. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Княшко К. (Коммунарск, с. ш. № 6),
Леготин В. (Курган, с. ш. № 48),
Маякин А. (Ленинград, с. ш. № 30),
Михайловский Н. (Красноярск, с. ш. № 20),
Сибиряков А. (Томск, с. ш. № 3),
Степанов С. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Тодощенко И. (Пермь, с. ш. № 16);

по 9 классам —
Анисимов А. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Бибиков А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Винкялис Г. (Вильнюс, с. ш. № 45),
Глущенков Д. (Ленинград, с. ш. № 239),
Гольдин А. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Карасев Д. (п. Тучково Московской обл., с. ш. № 1),
Третьяков Г. (Новгород, с. ш. № 21),
Штепа В. (Чугуев, с. ш. № 1),
Янович А. (Челябинск, с. ш. № 32);

по 10 классам —
Белопольский А. (Киев, с. ш. № 145),
Боровский Ю. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Булатов О. (Ставрополь, с. ш. № 1),
Гегжна Г. (Вильнюс, с. ш. № 7),
Карповец Э. (Рига, с. ш. № 9),
Лебедев Д. (Гатчина, с. ш. № 3),
Матыцин А. (Москва, с. ш. № 91),
Мягчилов С. (Одесса, с. ш. № 16),
Николаишвили Г. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Свердлов М. (Минск, с. ш. № 50),
Тотров М. (Ленинград, с. ш. № 30),
Эрд Ю. (Таллин, с. ш. № 1).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Белоусов С. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Билибин А. (Боровичи, с. ш. № 1),
Головин Д. (Тамбов, с. ш. № 29),
Езерский А. (Минск, с. ш. № 50),
Журков В. (Магадан, с. ш. № 1),
Кяэрамеэс М. (Пярну, с. ш. № 1),
Сазонов С. (Климовск, с. ш. № 5);

по 9 классам —
Васильев Ю. (Ангарск, с. ш. № 10),
Ефремов Д. (Баку, с. ш. № 6),
Ивашкевич Е. (Прокопьевск, с. ш. № 72),
Комаров О. (Алма-Ата, РФМШ),
Курзенков А. (Ковров, с. ш. № 1),
Наяков Ю. (Саратов, с. ш. № 13),
Пигарев А. (Улан-Уде, с. ш. № 9),
Розенберг А. (Уфа, с. ш. № 91),
Сизоненко Ю. (Львов, с. ш. № 4),
Степурин В. (Винница, с. ш. № 17),
Терпугов В. (Томск, с. ш. № 150),
Щербаков А. (Обнинск, с. ш. № 10);

по 10 классам —
Бакарян Т. (Ереван, ФМШ № 1 при Ер. ГУ),
Бедов К. (Челябинск, с. ш. № 138),
Жариков А. (Киев, с. ш. № 157),
Зингерман Б. (Самарканд, с. ш. № 51),
Иртегов Д. (Иркутск, с. ш. № 19),
Калацкий В. (Солигорск, с. ш. № 2),
Кларк П. (Тула, с. ш. № 36),
Курачев А. (Новосибирск, с. ш. № 9),
Никитин И. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Сенаторов П. (Москва, с. ш. № 52),
Чернышев А. (Кимры, с. ш. № 1).

Геометрический вывод формулы косинуса суммы

Чтобы найти выражение для косинуса суммы углов α и β, где $\alpha+\beta<180°$, поступим следующим образом. Рассмотрим треугольник ABC, где $\widehat{A}=\alpha$, $\widehat{B}=\beta$, $\widehat{C}=\gamma=180°-(\alpha+\beta)$. По теореме косинусов

$$c^2+a^2+b^2-2ab\cos\gamma. \qquad (1)$$

По теореме синусов

$$c=2R\sin\gamma,\ a=2R\sin\alpha,\ b=2R\sin\beta,$$

где R — радиус окружности, описанной вокруг треугольника.

Подставляя эти выражения в (1) и деля на $4R^2$, получим

$$\sin^2\gamma=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

Заменив $\sin^2\gamma$ на $1-\cos^2\gamma$, получим квадратное уравнение относительно $\cos\gamma$. Решая его, находим

$$\cos\gamma=\sin\alpha\sin\beta\pm$$
$$\pm\sqrt{\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha+1-\sin^2\beta}=$$
$$=\sin\alpha\sin\beta\pm\sqrt{\cos^2\beta-\cos^2\beta\sin^2\beta}=$$
$$=\sin\alpha\sin\beta\pm\cos\alpha\cos\beta.$$

Вспоминая, что $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$, то есть $\cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta)$, мы получаем

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta.$$

Второй корень (знак +) — посторонний (подумайте, почему), и мы получили формулу косинусв суммы.

Г. Г. Самедов

Научно-техническая конференция школьников в МФТИ

Знаете ли вы, как сконструировать космический аппарат многоразового использования или доказать теорему Эйлера? Если хотите узнать, то вам непременно надо побывать на научно-технической конференции школьников, которую проводит МФТИ.

В год сорокалетия МФТИ по инициативе комитета ВЛКСМ под председательством проректора МФТИ профессора Д. А. Кузьмичева была проведена I Научно-техническая конференция школьников, задача которой — стимулировать у учащихся, интересующихся физикой и математикой, желание выйти за рамки школьной программы, глубже вникнуть в изучаемую проблему, самостоятельно провести научный поиск и решить интересную задвчу.

В одно из воскресений апреля Большая физическая аудитория МФТИ вместе с демонстрационным кабинетом была предоставлена в распоряжение школьников. К услугам докладчиков помимо доски и мела были проекционный аппарат и диапроектор, всевозможное оборудование для проведения физических экспериментов. Так, например, для иллюстрации доклада киевлянина Ю. Кротова (шк. № 145) «Пластинка зон Френеля» потребовался лазер, а москвички М. Аксенова (шк. № 780) и Н. Сергеенок (шк. № 2 г. Троицка), воспроизводя опыт Плато по уравновешиванию капли анилина в растворе соли для исследования сил поверхностного натяжения, проявили незаурядное экспериментаторское мастерство.

В другой аудитории внимание школьников было поглощено математикой. Все с удовольствием ознакомились с беспроигрышной стратегией в известной математической игре, в которой играющие по очереди берут камешки из трех кучек, и узнали, что делать, если кучек не три, а n. Решение этой задачи представили М. Тарасюк (шк. № 789) и Д. Столяров (шк. № 80). Живо школьники откликнулись и на введение в школе основ информатики и вычислительной техники. В ряде докладов для решения задач и создания математических игр ребята активно использовали программирование на ЭВМ. Так, А. Шишов и К. Сафонов (шк. № 179) разработали алгоритм нахождения всех вещественных корней многочлена с помощью ЭВМ.

Вторая научно-техническая конференция школьников состоится в МФТИ в апреле 1987 года. Участником ее может стать любой школьник. Для этого надо написать реферат, в котором самостоятельно разобран интересный вопрос по физике, технике, математике или программированию; описан интересный эксперимент или технический аппарат. Один экземпляр реферата надо до 1 мврта 1987 года отправить по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской области, МФТИ, оргкомитет II Научно-технической конференции школьников. Все вопросы по темам рефератов и организации конференции можно выяснить по телефону ЗФТШ: 408-51-45. Ждем вас, молодые физики и математики!

А. В. Сапожников, студент МФТИ, член оргкомитета конференции.

Научная конференция школьников в ФМШ при МГУ

С 27 по 29 марта 1986 года в ФМШ № 18 при МГУ проходила Вторая физико-математическая конференция школьников. Если в первой конференции принимали участие лишь московские школьники, то в этот раз в Москву приехали школьники из шести городов: Еревана, Киева, Ленинграда, Новосибирска, Свердловскв и Ставрополя.

Открывая конференцию, директор ФМШ при МГУ кандидат физико-математических наук В. Л. Натяганов пожелал участникам конференции успехов в их первых творческих шагах. О перспективах развития математики и физики говорили известный советский математик академик АН УССР Б. В. Гнеденко и профессор физического факультета МГУ, выпускник ФМШ при МГУ Н. И. Коротеев. От журнала «Квант» участников конференции приветствовал зам. главного редактора Ю. П. Соловьев.

Работа конференции проходила в восьми секциях, где были заслушаны более 50 докладов. Хотя доклады были различны по своему уровню, практически все они были интересными и свидетельствовали о большой работе, проделанной докладчиками.

В результате работы двух математических секций лучшими были признаны доклады учеников ФМШ № 18 при МГУ *В. Парьева, С. Пяршили, В. Роганова, В. Кулиманова* и ленинградской школьницы *Н. Карегиной* (ФМШ при ЛГУ).

Треть всех докладов была заслушана на двух секциях информатики. Лучшими были признаны доклады ученика ФМШ при КГУ *В. Мобарского*, ленинградца *А. Каныгина* (с. ш. 470) и московских школьников *Д. Крюнова* (с. ш. 179), *А. Согомоняна* (с. ш. 179), *Н. Зимпинова* (с. ш. 444).

На 4-х физических секциях лучшими были признаны доклады *К. Ильинского* (ФМШ при ЛГУ), *В. Любарского* (ФМШ при КГУ), *москвичей С. Колиниченко* и *Н. Копысова* (с. ш. 542), а также учеников ФМШ при МГУ *А. Иванова, Ю. Прохорова, В. Саханенко, И. Никитина.*

Доклады всех участников были отмечены почетными грамотами, а лучшие из докладчиков были награждены дипломами журнала «Квант».

Большой интерес вызвали заседание «круглого стола», встреча с редколлегией журнала «Квант».

Как всегда, весело и интересно прошел математический КВН, в котором «сражались» команды гостей и хозяев конференции.

Конференция в целом была очень хорошо и четко организована, прошла на высоком научном уровне.

А. А. Егоров

[illegible] улыбается

Почитатель — посетитель библиотеки.
Арифмометр — измеритель нескладных стихов.
Нагоняй — выдача водительских прав.

Объявления

Всем! Всем! Всем срочно постричься!

Кто забыл на столе в Большой физической тетрадь по теоретической физике? У тебя там две ошибки.

Задачник

1. В бассейн втекает вода из трубы A со скоростью C_1 и вытекает из трубы B со скоростью C_2. С вышки высотой H в этот бассейн прыгает студент. Рассмотреть все случаи.

2. При уборке комнаты студент уронил на ногу кирпич. Оценить массу кирпича, если у соседей заложило уши.

Давайте жить по солнечным часам.
Часовая мастерская

Не стой под стрелой!
Робин Гуд

Без спецобуви не работай!
Кот в сапогах

Информация

В нашей картинной галерее сегодня проходит выставка следующих картин:

— Федотов, «Завтрак аристократа». Масло, хлеб. 32×64 см.

— Репин, «Турецкий султан читает письмо запорожских казаков».

— Пикассо, «Девочка на горе».

— Репин, «Иван Грозный объявляет строгий выговор своему сыну».

— Петров-Кефиров, «Купание красного коня».

— Суриков, «Вечер стрелецкой казни».

— Перов-Решетников, «Опять тройка».

— Серов, «Персики без девушки».

Новости

Группе французских физиков - экспериментаторов во главе с доктором де Магитом удалось измерить число «пи» с точностью до одной миллионной процента. Они измерили постоянные Планка «аш» и «аш с чертой», определив таким образом два «пи». Остальное было делом техники.

Однажды физик долго сидел на скучнейшем заседании. Наконец он не выдержал и вышел в холл отдохнуть. И тут, где ему никто не мешал, он открыл новый эффект. И от радости назвал его эффектом Холла.

Крупицы

Котомка — измеритель сопротивления кота.
Истина — лягушка.
Изгородь — студенческий сельхозотряд.
Назад — ярлык.
Параметр — рост баскетболиста.
Ступень — студент-двоечник.

Как известно, бозоны подчиняются распределению Бозе, фермионы — распределению Ферми. Недавно открыты новые частицы, которые подчиняются распределению Гиббса,— гиббоны.

По страницам газеты МФТИ «За науку»

Задачи на координатной плоскости

1. 1.

2. $3\sqrt{3}$.

3. 1) $a=0$, $b=1/4$. 2) $(-1/2; 1/2)$, $(5/2; 13/2)$.

4. $a=9$, $AB=40\sqrt{2}$.

5. 32/27.

6. 1) $-21/5 \leqslant a \leqslant -1$; 2) $-9 \leqslant a \leqslant 9$.

7. Катеты равны по $7/(3\sqrt{2})$; гипотенуза равна 7/3.

8. $a \in]-\infty; -4[\cup]-5/4; 0[$.

9. 1) принадлежит; 2) 75/2.

10. $(24+6\sqrt{3}-12\sqrt{2}-\pi)/12$.

XX Всесоюзная олимпиада по математике

8 класс

1. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. По теореме Виета $x_1+x_2=-a$, $x_1x_2=1-b$, и поэтому $a^2+b^2=(x_1+x_2)^2+(1-x_1x_2)^2=x_1^2+x_2^2+1+x_1^2x_2^2=(x_1^2+1)(x_2^2+1)$, где числа x_1^2+1 и x_2^2+1, очевидно, больше 1.

2. См. решение задачи М996 («Квант», 1986, № 12).

3. Пусть O и O_1 — центры окружностей, описанных около треугольников ABM и CBM соответственно. Общей частью кругов, ограниченных этими окружностями, является объединение двух сегментов с общей хордой BM. Так как величины углов $\angle BOM=2\angle BAC$ и $\angle BO_1M=2\angle BCA$ постоянны, то площадь каждого из сегментов тем меньше, чем меньше хорда BM. Следовательно, площадь общей части кругов минимальна, когда BM — высота в треугольнике ABC.

4. а) Ответ. Можно. Пример приведен на рисунке 1.

б) Ответ. Нельзя. Решение. Докажем, что, если в стране n городов, то требуемую сеть дорог можно построить лишь тогда, когда одно из чисел n или $n-2$ является квадратом целого числа. Из условия (n городов и $n-1$ дорог) следует, что из любого города в любой другой город ведет единственный путь. Выберем какой-нибудь город A и назовем его «хорошим». Назовем город B «хорошим», если длина пути от A до B — четное число, и «плохим», если длина этого пути нечетна. Нетрудно убедиться в том, что длина пути между двумя городами четна тогда и только тогда, когда эти города либо оба «хорошие», либо оба «плохие».
Обозначим число «хороших» городов через x, число «плохих» — через y. Тогда $x+y=n$. Всего имеется xy пар городов, в которых один город «хороший», а другой «плохой». Следовательно, среди чисел $1, 2, 3, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}$ имеется xy нечетных чисел. Если $\frac{n(n-1)}{2}$ — четное число, то $xy=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}$ и поэтому $n=n^2-4xy=(x-y)^2$. Если $\frac{n(n-1)}{2}$ — нечетное число, то $xy=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)$ и, следовательно, $n=(x-y)^2+2$.
Так как ни 1986, ни 1984 не являются квадратами целых чисел, то при $n=1986$ требования короля не могут быть выполнены.

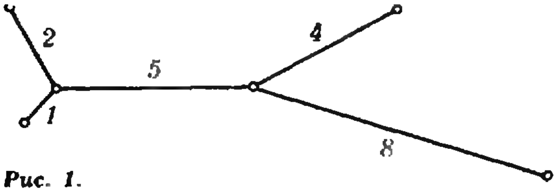


Рис. 1.

5. Ответ: $x=3$, $y=2$, $z=1$, $n \geqslant 2$; $x=6$, $y=8$, $z=4$, $n \geqslant 2$; $x=8$, $y=3$, $z=7$, $n=2$. Указание. Задача сводится к нахождению цифр x, y, z, для которых $x^2 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{n}+y=z\cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{n-2}1$. Положив здесь $x^2=\overline{uv}$, где u и v — цифры, получим, сравнивая число десятков, что $u+v=9$ либо $u+v=10$.

6. Заметим сначала, что для любой точки D, лежащей внутри или на сторонах треугольника ABC и отличной от вершины C, справедливо неравенство $AD+DB<AC+CB$.
Пусть $A_1A_2\ldots A_{12}$ — данный 12-угольник, O и O' — данные точки и (для определенности) точка O' лежит внутри или на сторонах треугольника OA_1A_2. Тогда в силу замечания и неравенства треугольника имеем

$$O'A_1+O'A_2<OA_1+OA_2,$$
$$O'A_i-OA_i \leqslant 10 \text{ для } i=3, 4, \ldots, 12$$

и поэтому

$$(O'A_1+\ldots+O'A_{12})-(OA_1+\ldots+OA_{12})=$$
$$=(O'A_1+O'A_2-OA_1-OA_2)+$$
$$+(O'A_3-OA_3)+\ldots+(O'A_{12}-OA_{12})<$$
$$<10\cdot 10 \text{ см}=1 \text{ м}.$$

Поменяв ролями точки O и O', получим, что

$$|(OA_1+\ldots+OA_{12})-(O'A_1+\ldots+O'A_{12})|<1 \text{ м}.$$

7. Ответ: можно. Решение. Нальем во все стаканы, кроме одного, по 100 г молока, а в оставшийся — 200 г. Общее количество молока равно 3100 г, и при разделе поровну в каждом стакане должно содержаться по $\frac{310}{3}$ г. После n-го переливания количество молока в каждом стакане, умноженное на 2^n, будет выражаться целым числом граммов. Поэтому число $2^n\cdot\frac{310}{3}$ должно быть целым, что невозможно ни при каком n.

8. а) Ответ: 1. Указание. При повороте прямоугольника относительно его центра на 180° диагональ переходит в себя, а раскраска меняется на противоположную.

б) Ответ: 5000/4999. Решение. Расположим данный прямоугольник $ABCD$ на координатной плоскости так, чтобы точка A совпала с началом координат, B имела координаты $(0; 101)$, C — $(99; 101)$, D — $(99; 0)$. Пусть, для определенности, угловой квадрат при вершине A — белый. Так как числа 99 и 101 взаимно просты, то диагональ AC не проходит через узлы сетки в точках, отличных от A и C. Поэтому при каждом пересечении AC с линиями сетки происходит перемена цвета. Отношение длин отрезков равно отношению длин проекций этих отрезков на ось Ox. Проекцией AC на ось Ox является отрезок AD, проекциями точек пересечения AC с горизонтальными линиями сетки являются точки вида $\left(\frac{99}{101}m; 0\right)$, $m=0, 1, \ldots, 101$, с вертикальными линиями — точки вида $(n; 0)$, $n=0, 1, \ldots, 99$. Из неравенств

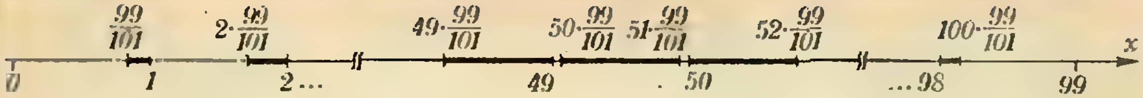


Рис. 2.

$m-1<\frac{99}{101}m<m$ при $1\leqslant m\leqslant 50$ и $m-2<\frac{99}{101}m<m-1$ при $51\leqslant m\leqslant 100$ следует, что точки $\left(\frac{99}{101}m;0\right)$ и $(m;0)$ при $m=1, 2, \ldots, 49$ будут чередоваться, затем встретится точка $\left(\frac{99}{101}\cdot 50;0\right)$, после чего снова поочередно пойдут точки $\left(\frac{99}{101}m;0\right)$ и $(m-1;0)$ при $m=51, 52, \ldots, 100$ (рис. 2). Сумма длин проекций белых отрезков равна

$$\frac{99}{101}+\left(2\cdot\frac{99}{101}-1\right)+\ldots+\left(50\cdot\frac{99}{101}-49\right)+$$
$$+\left(50-51\cdot\frac{99}{101}\right)+\ldots+\left(99-100\cdot\frac{99}{101}\right)=$$
$$=-\frac{99}{101}\cdot 50^2+50^2=\frac{5000}{101},$$

сумма длин проекций черных отрезков равна $99-\frac{5000}{101}=\frac{4999}{101}$. Искомое отношение, следовательно, равно $\frac{5000}{4999}$.

9 класс

1. **Указание.** Из условия следует, что $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=2|AC|\cdot|BD|\cos\frac{\pi}{4}=|BD|^2\sqrt{2}$. Числа $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ и $|BD|^2$ — целые, $\sqrt{2}$ — иррациональное число. Противоречие.

2. Любое нечетное натуральное число, бо́льшее 1, можно представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел: $2k+1=(k+1)^2-k^2$. Запишем произвольную возрастающую последовательность натуральных чисел: $a_1<a_2<\ldots<a_{n-1}$, где $a_1\geqslant 3$ — нечетное число, а остальные числа — четные. Сумма квадратов этих чисел $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{n-1}^2=2k+1$ — нечетное число, причем $k>\frac{a_{n-1}^2}{2}>a_{n-1}$. Положим $a_n=k$, тогда $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=(a_n+1)^2$. Аналогично построим последовательность $b_1<b_2<\ldots<b_m$, где $b_1>2a_n$ — нечетное число, $b_2, \ldots, b_{m-1}$ — четные, причем $\frac{b_{i+1}}{b_i}>a_n$, $i=1, 2, \ldots, m-1$, и $b_1^2+b_2^2+\ldots+b_m^2=(b_m+1)^2$. Заполним таблицу, вписав в клетку, стоящую в i-й строке и j-м столбце, число $b_i^2a_j^2=(b_ia_j)^2$.

Полученная таблица удовлетворяет условию задачи.

3. а) Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей и пусть точка O_3 такова, что $AO_1O_2O_3$ — параллелограмм. Тогда O_3 — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Действительно, обозначим через P, L, Q проекции на прямую AB точек O_1, O_2, O_3 соответственно. Пусть, для определенности, Q лежит между P и L (см. рис. 3). Тогда $AQ=AM+MQ$, $BQ=BM-MQ$. Так как $AO_1=O_2O_3$, то $AP=QL$ и поэтому $BM=2ML=2MQ+2QL=2MQ+2AP=2MQ+AM$. Следовательно, $BQ=MQ+AM=AQ$, т. е. O_3 лежит на срединном перпендикуляре к отрезку AB. Аналогично доказывается, что O_3 лежит на срединном перпендикуляре к отрезку AC. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $AO_3=O_1O_2=l$.

б) Так как $O_3O_2=AO_1$, то при любом выборе точки A точка O_3 лежит на окружности, центром которой является центр O_2 второй окружности, а радиус равен радиусу первой окружности. Все точки указанной окружности, кроме точек M^* и N^*, получающихся из точек M и N параллельным переносом, при котором точка O_1 переходит в O_2, принадлежат искомому множеству точек.

4. Расставим в узлах сетки, описанной в условии задачи, числа 0, 1, 2 следующим образом: у левого нижнего угла шестиугольника — как на рисунке 4, далее во все стороны чи́сла периодически повторяются.

Поскольку 1000 при делении на 3 даст в остатке 1, в остальных вершинах шестиугольника и в его центре числа расположатся так, как показано на рисунке 5. Если вершины правильного треугольника расположены в узлах сетки, то сумма стоящих в них чисел делится на 3.

Для доказательства этого удобно «продолжить» полученную сетку до разбиения всей плоскости (см. рис. 4) и заметить, что при повороте на 60° (по или против часовой стрелки) вокруг любого из узлов решетки множество узлов, занумерованных той же цифрой, что и центр поворота, переходит в себя, а множество узлов, занумерованных двумя остальными цифрами

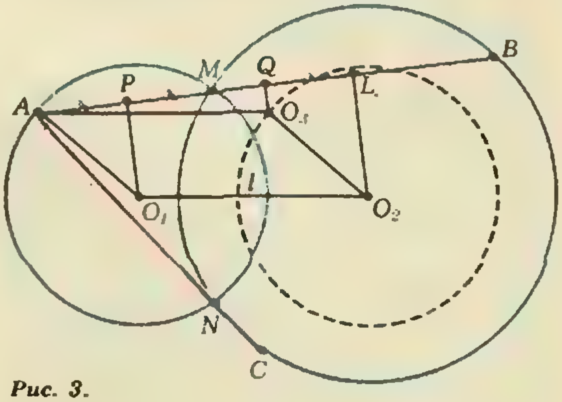


Рис. 3.

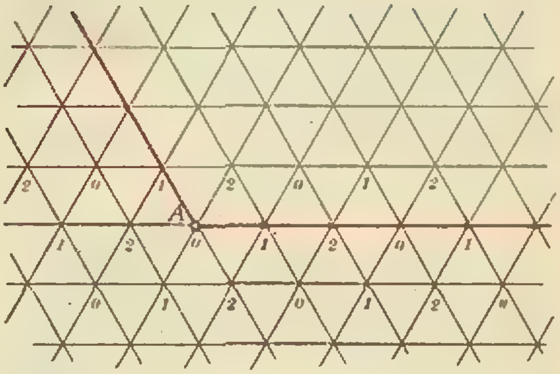


Рис. 4.

«меняются местами»: например, при повороте на угол 60° с центром в точке A, занумерованной цифрой 0, любой узел с номером 0 переходит в узел с номером 0, любой узел с номером 1 переходит в узел с номером 2, узел с номером 2 — в узел с номером 1.

Возьмем теперь произвольный правильный треугольник PQR с вершинами в узлах решетки. Если его вершины P и Q занумерованы одинаковыми цифрами, то и вершина R будет занумерована той же цифрой (она получается из точки Q поворотом на угол 60° вокруг точки P). Аналогично, если в вершинах P и Q — две разные цифры, то в вершине R стоит третья цифра.

Таким образом, всегда сумма чисел, стоящих в вершинах произвольного правильного треугольника, делится на 3.

Легко проверить, что сумма всех чисел, стоящих в узлах сетки, при делении на 3 дает в остатке 2. Поэтому у последнего неокрашенного узла должно стоять число 2. Согласно рисунку 5 этот узел не может совпадать с вершиной шестиугольника.

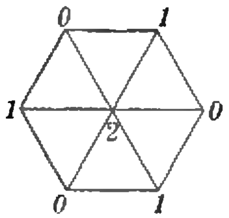


Рис. 5.

5. а) Пусть O — центр описанной около n-угольника $A_1A_2 \ldots A_n$ окружности. Так как $\overrightarrow{MA_k} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то рассматриваемое выражение принимает вид $(\pm\overrightarrow{MO} \pm \overrightarrow{MO} \pm \ldots \pm \overrightarrow{MO}) + (\pm\overrightarrow{OA}_1 \pm \overrightarrow{OA}_2 \pm \ldots \pm \pm\overrightarrow{OA}_n)$. Достаточно взять знак плюс у векторов $\overrightarrow{MA_k}$ с нечетными номерами k и знак минус — у остальных.

б) Пусть векторы $\overrightarrow{OA}_{i_1}, \overrightarrow{OA}_{i_2}, \ldots, \overrightarrow{OA}_{i_k}$ входят в рассматриваемое выражение со знаком плюс, а векторы $\overrightarrow{AO}_{j_1}, \overrightarrow{AO}_{j_2}, \ldots, \overrightarrow{OA}_{j_{n-k}}$ — со знаком минус. Тогда выражение принимает вид $k\overrightarrow{MO} - (n-k)\overrightarrow{MO} + (\overrightarrow{OA}_{i_1} + \overrightarrow{OA}_{i_2} + \ldots + \overrightarrow{OA}_{i_k}) - (\overrightarrow{OA}_{j_1} + \ldots + \overrightarrow{OA}_{j_{n-k}})$ и будет равно $\overrightarrow{0}$, если

$$\overrightarrow{MO} = \frac{1}{n-2k}\left((\overrightarrow{OA}_{i_1} + \overrightarrow{OA}_{i_2} + \ldots + \overrightarrow{OA}_{i_k}) - (\overrightarrow{OA}_{j_1} + \overrightarrow{OA}_{j_2} + \ldots + \overrightarrow{OA}_{j_{n-k}})\right).$$

Этим равенством точка M определяется однозначно, если заданы наборы номеров: $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и $j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}$. Число таких наборов конечно, поэтому при нечетном n конечным будет и число точек M.

7. **Ответ:** а) $(n-1)^2-1$; б) $n-2$. См. решение задачи M1005 («Квант», 1987, № 1).

8. Достаточно доказать, что для всех действительных чисел выполняется неравенство $|\sin x| + |\sin(x+1)| + |\sin(x+2)| > \frac{8}{5}$. Так как функция $f(x) = |\sin x| + |\sin(x+1)| + |\sin(x+2)|$ — периодическая с периодом π, то достаточно доказать неравенство для $x \in [0; \pi]$. Сначала докажем, что при $x \in [0; \pi]$ выполняется неравенство $f(x) > 2\sin 1$. Пусть $0 \leqslant x < \pi - 2$. Тогда $f(x) = \sin x + \sin(x+1) + \sin(x+2) = 2\cos 1 \cdot \sin(x+1) + \sin(x+1)$. Так как $1 \leqslant x+1 < \pi - 1$, то $\sin(x+1) \geqslant \sin 1$, $\sin 2 > \sin 1$, поэтому $f(x) \geqslant \sin 2 + \sin 1 > 2\sin 1$. Случаи $\pi - 2 \leqslant x < \pi - 1$ и $\pi - 1 \leqslant x \leqslant \pi$ рассматриваются аналогично. Остается доказать, что $2\sin 1 > \frac{8}{5}$. Имеем $\left|\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin 1\right| = 2\left|\sin\frac{\frac{\pi}{3}-1}{2}\right| \cdot \left|\cos\frac{\frac{\pi}{8}+1}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{\frac{\pi}{3}-1}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{3} - 1 < 0{,}05$. Отсюда $2\sin 1 \geqslant 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}05\right) = \sqrt{8} - 0{,}1 > \frac{8}{5}$.

10 класс

1. **Ответ:** 1 и 9. Проверка показывает, что числа 1 и 9 удовлетворяют условию задачи. Докажем, что других таких чисел нет. Пусть число $n = m^2$ имеет $m > 1$ различных делителей. Все отличные от m делители числа n можно разбить на пары так, чтобы произведение чисел в каждой паре равнялось n. Пусть количество таких пар равно k. Тогда $m = 2k+1$, а число n нечетно и имеет ровно k делителей, меньших m. Поэтому n делится на все нечетные числа меньше $2k+1$. Число $2k-1$ является делителем числа $n = (2k+1)^2$, а значит, и числа

$$4 = (2k+1)^2 - (2k-1)(2k+3), \text{ откуда } k = 1.$$

2. См. решение задачи M999 («Квант», 1986, № 12).

3. См. решение задачи M1004 («Квант», 1987, № 1).

4. **Указание.** Назовем расстановку целых чисел во всех единичных кубиках пригодной, если их суммы в любом ряду равны нулю. Например, пригодной является расстановка одних нулей. Докажите, что с помощью следующих двух операций:

а) перестановка местами двух слоев единичных кубиков, параллельных какой-либо грани куба,
б) прибавление к числам, стоящим у красных вершин исходного куба (см. рис. 6), и одновременное вычитание из чисел, стоящих у синих вершин, одного и того же числа, можно добиться того, что количество различных чисел увеличится. Повторяя несколько раз описанные операции, добьемся того, что все числа будут различны.

5. См. решение задачи M997 («Квант», 1986, № 12).

6. Заметим (рис. 7), что любая касательная, не параллельная стороне квадрата, отсекает от него прямоугольный треугольник с периметром 2, острым углом φ и площадью

$$S_\varphi = 1 - \frac{2}{\sin\varphi + \cos\varphi + 1} \leqslant 1 - \frac{2}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2$$

(равенство достигается при $\varphi = 45°$). Тогда площадь S общей части квадрата и треугольника удовлетворяет неравенству

$$S \geqslant 4 - 3(\sqrt{2}-1)^2 = 6\sqrt{2} - 5 > 3{,}4.$$

Неравенство же $S > 3{,}5$, вообще говоря, не выполнено. Действительно (рис. 8), пусть две стороны описанного треугольника пересекают стороны квадрата под углом 45°, а третья сторона проведена с таким расчетом, чтобы площадь S_φ отсекаемого ею треугольника удовлетворяла неравенствам

$$0{,}5 - 2(\sqrt{2}-1)^2 < S_\varphi < (\sqrt{2}-1)^2.$$

Тогда для площади S общей части имеем

$$S = 4 - 2(\sqrt{2}-1)^2 - S_\varphi < 4 - 2(\sqrt{2}-1)^2 - 0{,}5 + 2(\sqrt{2}-1)^2 = 3{,}5.$$

7. **Ответ:** $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$. **Решение.** Поставим в соответствие каждому значению $m =$

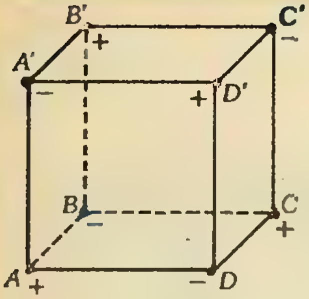


Рис. 6.

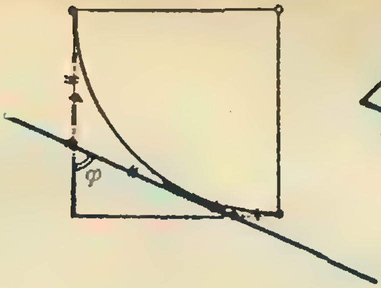


Рис. 7.

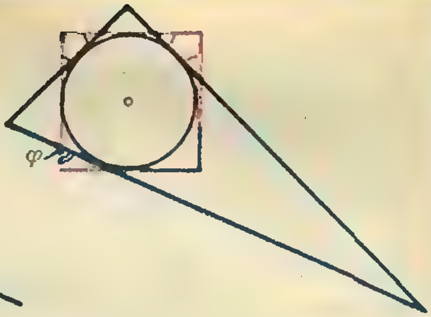


Рис. 8.

$=0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ многочлен

$$P_m(x)=\sum(a_i+2b_i)\,x^i,$$

где коэффициенты a_i, $b_i\in\{0;1\}$ суть «цифры» двоичной записи чисел $n-2m$, m соответственно, т. е. определяются из разложений

$$\begin{aligned} n-2m&=a_0\cdot2^0+a_1\cdot2^1+a_2\cdot2^2+\ldots,\\ m&=b_0\cdot2^0+b_1\cdot2^1+b_2\cdot2^2+\ldots \end{aligned}\qquad(*)$$

(индекс суммирования i здесь и ниже пробегает некоторое конечное множество целых неотрицательных значений). Проверка показывает, что многочлен $P_m(x)$ допусти́м и

$$P_m(2)=\sum(a_i+2b_i)\cdot2^i=(n-2m)+2m=n.$$

Любой многочлен

$$P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots,$$

удовлетворяющий условию задачи, совпадает ровно с одним многочленом из списка $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_{\left[\frac{n}{2}\right]}(x)$. Действительно, каждый из его коэффициентов c_i представляет собой двузначное (ибо $c_i\leqslant3$) число в двоичной записи, т. е. имеют место разложения

$$c_i=a_i\cdot2^0+b_i\cdot2^1,$$

в которых коэффициенты a_i, $b_i\in\{0;1\}$ определяются однозначно. Поэтому справедливо тождество $P(x)\equiv P_m(x)$, где число m задается равенством (*) и не превосходит $\left[\frac{n}{2}\right]$, так как

$$n=P(2)=\sum(a_i+2b_i)\cdot2^i\geqslant2\sum b_i\cdot2^i=2m.$$

8. См. решение задачи М998 («Квант», 1986, № 12).

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. В данном случае, как следует из определения равнодействующей силы, ее просто не существует.
2. *Сила тяги стала бы вдвое больше.*
3. Реальную (обладающую массой) веревку строго горизонтально натянуть нельзя.
4. В точке B, так как здесь вогнутая поверхность дороги и сила давления наибольшая.
5. Тело на наклонной плоскости легче удержать, чем двигать вверх (учтите действие силы трения).
6. На груз действует сила трения, направленная по скорости движения автомобиля.
7. См. рис. 9. I — пружины соединены последовательно, II — параллельно.
8. Сила тяжести.
9. В крайних положениях груза равнодействующая сила направлена по касательной к траектории, в нижнем положении — к точке подвеса маятника.

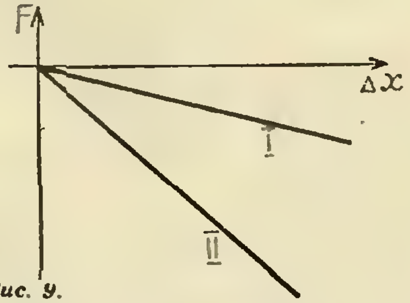


Рис. 9.

10. Силам взаимного притяжения препятствуют силы трения.
11. Нет, ящик станет поворачиваться относительно ребра B.
12. Линии индукции магнитного поля направлены с севера на юг.

Микроопыт

Сила трения зависит от прижимающей силы, которая в случае набухшей доски значительно больше, чем в случае сухой.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 10)

1. Точку D следует поставить так, чтобы отрезок CD был равен $1/5$ отрезка AC (рис. 10); тогда площадь треугольника DBC будет равна $1/5$ площади треугольника ABC. Аналогично точка E ставится так, чтобы $BE=AB/4$, точка F так, чтобы $FD=AD/3$, и точка G так, чтобы $EG=AE/2$.
2. Ответ: 1 999 999 999. Решение. Если среди данных чисел есть два числа a и b, большие единицы, то, заменив одно из них на ab, а второе на 1, получим, что произведение всех чисел не изменится, а сумма увеличится, так как из очевидного неравенства $(a-1)(b-1)>0$ следует, что $ab+1>a+b$. Таким образом, сумма будет максимальной, если одно из чисел равно миллиарду, а остальные — единицам.
3. *Нет, так как всякое такое число меньше, чем* $(10\,000)^2$, но больше, чем $(9999)^2=99\,980\,001$.
4. Из рисунка к условию задачи видно, что во втором чайнике большая часть пара выходит

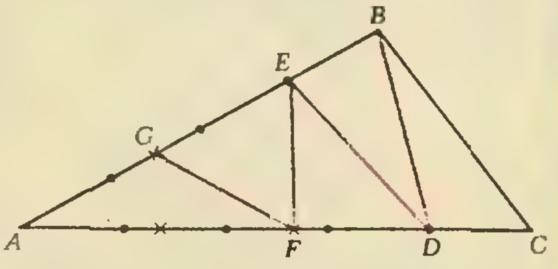


Рис. 10.

через носик, а в первом чайнике пар в основном выходит через крышку. Из этого можно сделать вывод, что во втором чайнике уровень воды ниже нижнего отверстия носика, а в первом чайнике нижнее отверстие носика перекрыто водой. Значит, во втором чайнике воды было меньше, и поэтому она закипела раньше.

5. Обозначим расстояния, пройденные Винни-Пухом и Пятачком до встречи, через a и b, а время в пути до встречи — через x. Тогда скорость Винни-Пуха можно выразить двумя способами: $\frac{a}{x}=\frac{b}{1}$. Отсюда $x=\frac{a}{b}$. Скорость Пятачка также можно выразить двумя способами: $\frac{b}{x}=\frac{a}{4}$, откуда $\frac{a}{b}=\frac{4}{x}$. Сравнивая полученные выражения для $\frac{a}{b}$, находим $x=\frac{4}{x}$, откуда $x=2$. Следовательно, Пятачок шел 6 минут, а Винни-Пух шел 3 минуты.

Шахматная страничка

(См. «Квант» № 8)

Задание 15 (А. Кузовков, 1982 г.). **1. Фс3** с угрозой 2. Кb3, 3. Фd3+ К:d3 4. cd×, 2... Фf4 3. Фе5+ Ф:е5 4. Кd2×, 2... Сf4 3. Кd2+ С:d2 4. Фе5×; **1... Сb8! 2. Ке2! Фf4 3. Кg3+** Ф:g3 4. Фе3×, 2... Сf4 3. **Фе3+** С:е3 4. **Кg3×; 1... Фс1! 2. К:е6! Фf4 3. Фе5+ Ф:е5 4. Кg5×,** 2... Сf4 3. **Кg5+** С:g5 4. **Фе5×; 1... Сf4 2. Кb5!** с угрозой 3. Фе3+ С:е3 4. Кd6×, 2... Ф:h5 3. Кd6+ С:d6 4. Фс3×. Одни фигуры перекрывают линии другим — сплошная геометрия!

Задание 16 (Я. Владимиров, 1982 г.). **1. Фg8!** с угрозой 2. Ф:h7+ Кр:е5 3. Кh5+ Лf4 4. С:f4×. **1... Лаа4 2. Фg4!** d4 3. **Ф:е6!** Ла6 4. Кс6×. **1... Фа4 2. Ф:е6!** Кd4 3. Фg4 **Фd7** 4. Ке6×.

Эти две задачи были признаны лучшими на последнем чемпионате СССР по шахматной композиции по разделу многоходовых задач.

Отметим, что читатели журнала опровергли этюды, предложенные в качестве конкурсных заданий в «Кванте» № 6 за 1986 г. В задании № 11 после 1. Крf3 К:b2 2. Кре2 Крg3 3. Крd2 Крf4 4. Крс2 черные спасаются этюдным способом: 4... Ка4! 5. bа Кре5 6. Крс3 Крd6 7. Крс4 Крс7 8. Крс5 Крb8. В задании № 12 после 1. Кg1 Лс4! 2. Ке2+ Крf3 (но не 2... Крf2? 3. Кd4!) 3. Кg1 Крg2 на доске позиционная ничья.

Участники конкурса, указавшие опровержения, получают дополнительные очки.

Автор этюдов Э. Погосянц предлагает следующие переработки. Вместо № 11 такой этюд. **Белые: Кра8, Са6, Ка4; черные: Кра5, Се8, пп. g6, g7. Ничья. 1. Кс5 Крb6 2. Ке6! Кр:а6** (2... Сс6+ 3. Крb8 Кр:а6 4. Крс7 и т. д.) **3. Кс7+ Крb6 4. К:е8 Крс6 5. К:g7 Крd7 6. Крb7 Крс7 7. Крс6 Крf7 8. Кh5! gh 9. Крd5**, и король в квадрате.

№ 12 исправляется, как говорят, снятием первого хода. Белого коня надо переставить с h3 на g1, а черного короля с g3 на g2. Задание — то же самое, белые начинают и выигрывают. Данный этюд получается из № 12 после 1. Кg1 Крg2. В переработанном виде авторский замысел уже не опровергается: **1. Ке2 Ле4 2. Кс3! Лс4 3. Кd5! Л:с6+ 5. Крb7,** и черная ладья в капкане.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян
Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев
Редакционная коллегия: А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, А. А. Варламов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант
Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, В. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский,
А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов,
Т. Н. Кольченко, Д. А. Крымов, Э. В. Назаров,
И. Е. Смирнова, В. Б. Юдин
Фото представили:
А. М. Горнинский, В. В. Рыжиков

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Л. С. Сомова

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

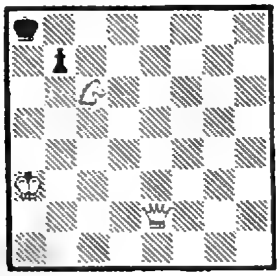
Сдано в набор 17.09.86. Подписано к печати 23.09.86
Т-19637 Бумага 70×108/16
Печать офсетная. Усл. кр.-от. 23,8
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,36
Тираж 195 674 экз.
Цена 40 коп. Заказ 2538

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ДОСКЕ

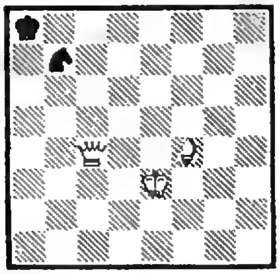
После того как в «Кванте» № 7 за 1985 год появилась «Шахматная страничка» под названием «Цилиндрические шахматы», в редакцию пришло немало писем — необычный шахматно-геометрический сюжет вызвал у читателей живой интерес. Особого внимания заслуживают материалы читателя из Донецка В. Попова. Поводом послужила следующая задача.



Ф. Бондаренко. Мат в 1 ход: а) на обычной доске; б) на вертикальном цилиндре (приклеены друг к другу линии «а» и «h»); в) на горизонтальном цилиндре (склеены линии «1» и «8»).

На обычной доске решает **1.Фе2—е8**×; на вертикальном цилиндре этот ход не матует из-за ответа 1...Кра8—h7!, а к цели ведет только **1.Фе2—g8**× (белый ферзь проходит по маршруту е2—а6—h7—g8); на горизонтальном цилиндре решает лишь **1.Фе2—а2**×!

В. Попов задался целью улучшить внешнее оформление задачи. Взглянем еще раз на позицию-первоисточник. Черный король стеснен несколько грубоватым способом, у него нет ни малейшей свободы. Поиск более тонкого исходного построения привел сначала к такой позиции.



Мат в 1 ход: а) на обычной доске; б) на вертикальном цилиндре; в) на горизонтальном цилиндре.

Достоинства задачи по сравнению с оригиналом очевидны — король черных чувствует себя вольготнее, а пешку b7 заменил более динамичный конь.

Дальнейшие «цилиндрические» размышления позволили обнаружить, что конь b7 вообще лишний.

В. Попов, 1986 г. Белые: Кре3, Фс4, Сf4; черные: Кра8. Мат в 1 ход: а) на обычной доске; б) на вертикальном цилиндре; в) на горизонтальном цилиндре.

Вот позиция, которая представляется нам идеальным воплощением темы Бондаренко. Действительно, на доске всего четыре фигуры, причем построение очень легкое, изящное — белые фигуры удалены от короля, и поначалу кажется, что об одноходовом мате не может быть и речи.

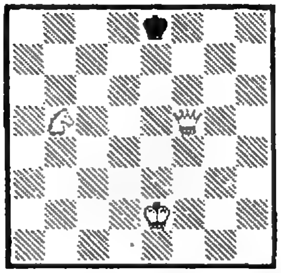
а) На обычной доске к цели ведет единственное **1.Фа6**×.

б) На вертикальном цилиндре линии «а» и «h» приклеены друг к другу и матует **1.Фс4—а2—h1**×! (1.Фа6(с4)+ Кра8—h8!, 1.Фс8(h7)+ Кра8—h7(:h7)). Ферзь взял под контроль сразу четыре поля в районе черного короля (включая занятое им) — b7, а8 по диагонали h1—а8 и h7, h8 по вертикали «h». Любопытно, что с более близкого расстояния отнять столько полей у короля, не становясь ферзем под бой, невозможно — ни на цилиндрической, ни тем более на обычной доске. Поля а7, b8 держит слон по диагонали с1—h6—а7—b8.

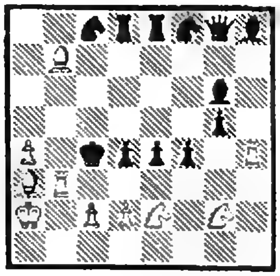
в) На горизонтальном цилиндре друг к другу приклеены первая и восьмая линии и решает только **1.Фс4—f1—g8—h7**×! (1.Фа6+ Кра8—b1!). Вновь ферзь отнял у короля четыре поля: а8, b1 по диагонали h7—b1—а8 и а7, b7 по седьмой горизонтали. Поля b8, а1 держит слон по диагонали h2—b8—а1. И здесь другие шахи ферзем не матуют,— король уходит на а7 или b7. Если белого короля убрать с дороги слона, то шахи 1.Фс8(е4, h1)+ становятся матами, поскольку поле а7 оказывается недоступным для короля. Странно, но белый король, будучи в тылу своих фигур, мешает белым матовать! В этом же специфика цилиндра — то, что белый король бесполезен, ясно было сразу, но то, что он вреден, неожиданно...

Конкурсные задания

Если (мысленно) склеить одновременно и вертикали «а» и «h», и горизонтали «1» и «8», то получается тороидальная доска. Первая четырехходовка — на тороидальной доске, вторая — на обычной.

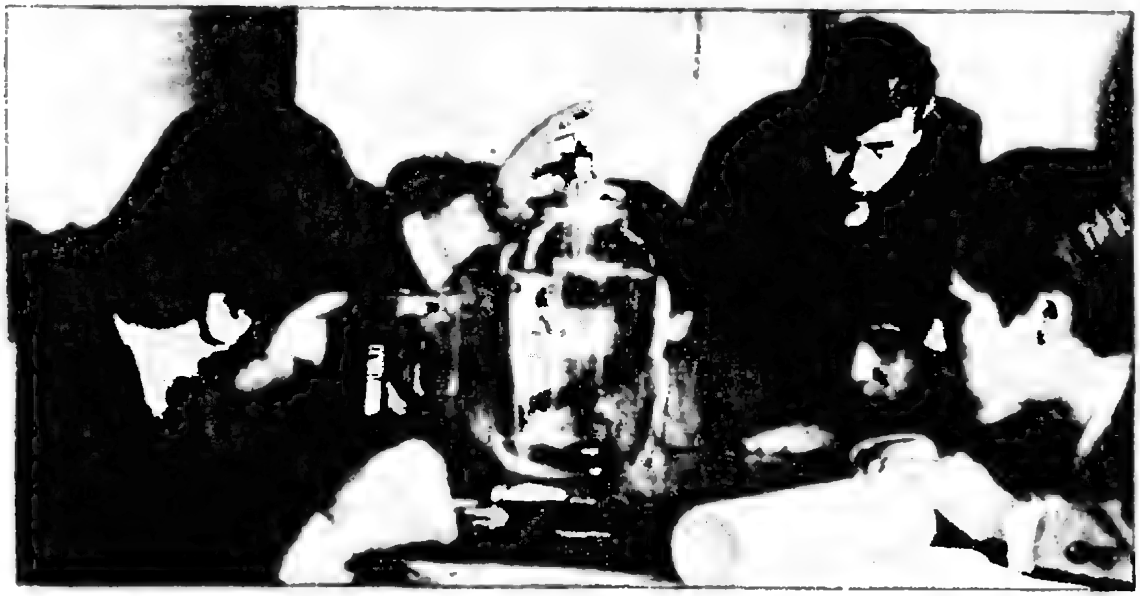


21. Мат в 4 хода на тороидальной доске.



22. Мат в 4 хода.

Срок отправки решений — 20 января 1987 г. с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 21, 22».



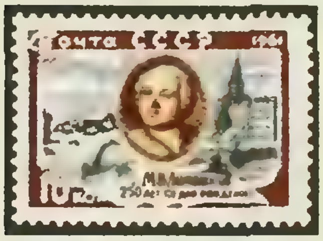
XX ВСЕСОЮЗНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО ФИЗИКЕ
Алма-Ата, апрель 1986 г.

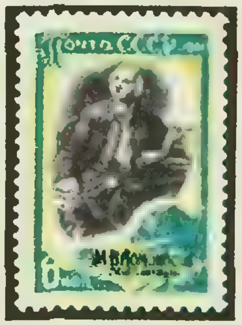
М. В. ЛОМОНОСОВ
В ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ФИЛАТЕЛИИ

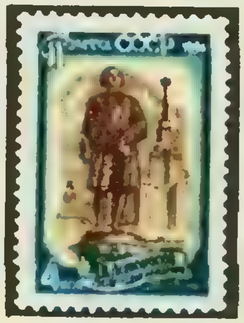
Цена 40 коп.
Индекс 70465

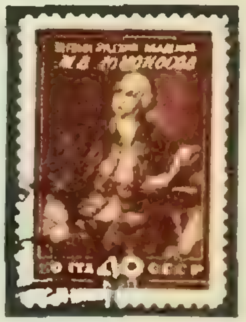
Первые советские почтовые марки, посвященные отечественной науке, были выпущены в 1925 году, к 200-летию Академии наук. На них изображен портрет М. В. Ломоносова на фоне здания Академии наук в Ленинграде. Аналогичная композиция воспроизведена на марке, посвященной 220-летию Академии наук. 5 января 1949 года в Ленинграде открылся музей М. В. Ломоносова. Это событие было отмечено выпуском марок с его портретом. Портрет М. В. Ломоносова воспроизведен также на марке и почтовом блоке, посвященном 200-летию МГУ. В 1956 году вышла серия марок с портретами писателей нашей Родины. Одна из них посвящена М. В. Ломоносову. В 1961 году, к 250-летию со дня рождения М. В. Ломоносова, была выпущена серия из трех марок — две с его портретами и одна с изображением памятника М. В. Ломоносову на фоне нового здания МГУ.

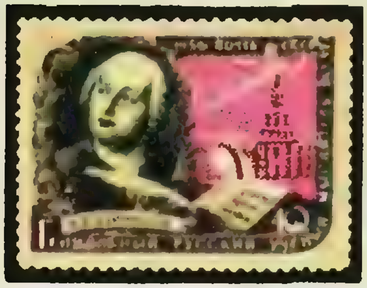
В. Рудов

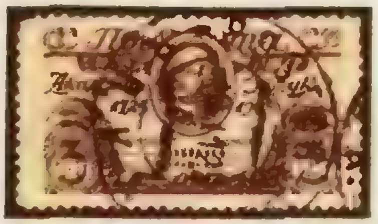


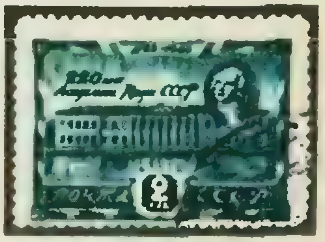


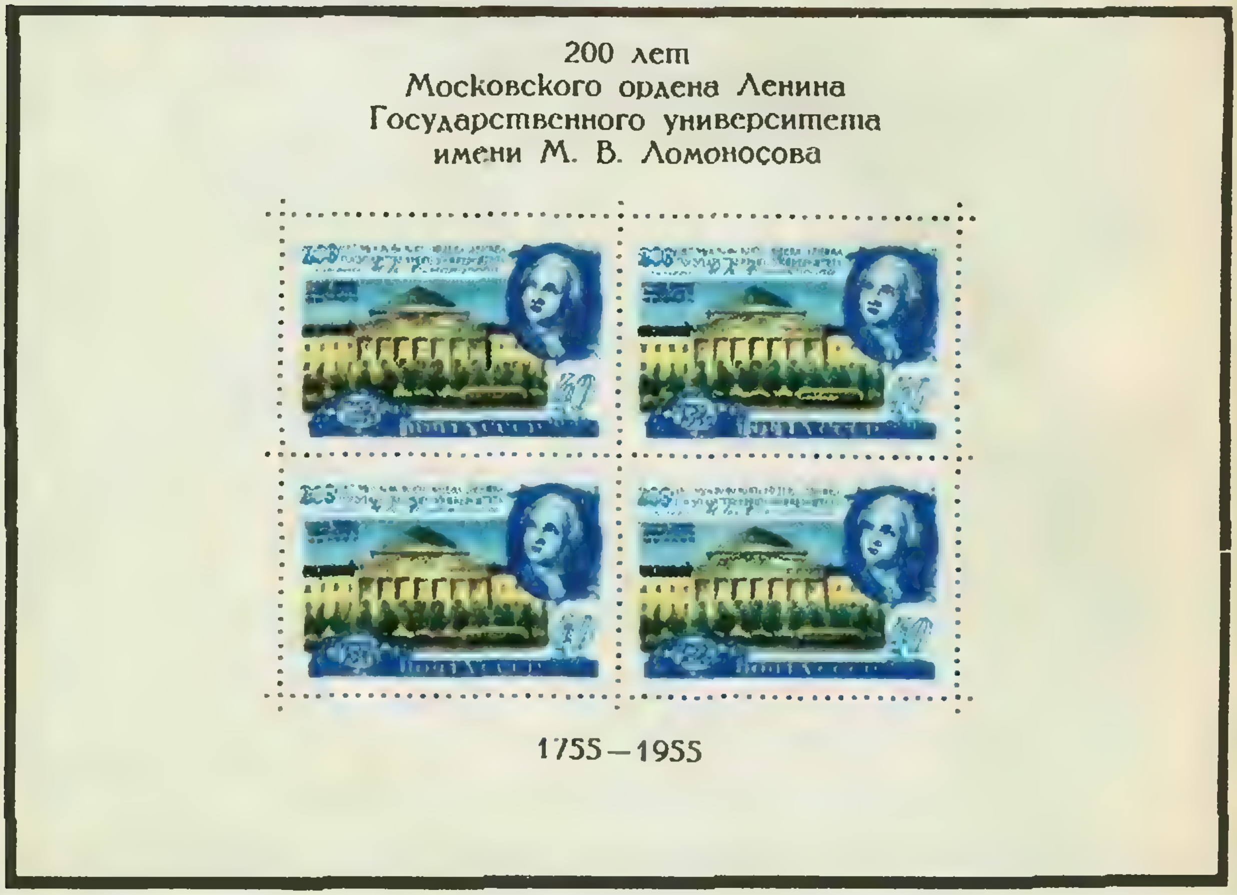



М. В. ЛОМОНОСОВ
40






220 лет Академии Наук СССР
Почта СССР


200 лет
Московского ордена Ленина
Государственного университета
имени М. В. Ломоносова
1755—1955

НОМЕР
12

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант **12** **1986**

Основан в 1970 году

Издательство „Наука“. Главная редакция физико-математической литературы

Московское математическое общество
Оргкомитет
Московской
математической
олимпиады

В НОМЕРЕ: **IN THIS ISSUE:**

2	*Ю. П. Соловьев.* Эварист Галуа	*Yu. P. Soloviev.* Evariste Galois
9	*Д. Л. Тарасов, Л. В. Тарасов.* А что будет, если...?	*D. L. Tarasov, L. V. Tarasov.* What will happen, if...?
	Новости науки	**Science news**
8	«Тяжелые» электроны в металлах	"Heavy" electrons in metals
	Наш календарь	**Our calendar**
12	К 175-летию закона Авогадро	175th anniversary of Avogadro's law
	Лаборатория «Кванта»	**Kvant's lab**
13	*А. А. Боровой.* Наблюдения над туманом	*A. A. Borovoy.* Observing fog
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
16	Математика 8	Mathematics 8
20	Избранные школьные задачи	Selected school problems
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
21	Задачи	Problems
22	Алиса дает показания	Alice's evidence
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
26	Задачи М1016 — М1020; Ф1028 — Ф1032	Problems M1016—M1020; P1028—P1032
29	Решения задач М996—М1000; Ф1008—Ф1012	Solutions M996—M1000; P1008—P1012
38	Список читателей, приславших правильные решения	List of readers who have sent correct solutions
	Искусство программирования	**The art of programming**
40	*Г. А. Гальперин, А. В. Корлюков.* Бинарный алгоритм	*G. A. Galperin, A. V. Korlyukov.* The binary algorithm
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
43	*Ю. А. Самарский.* Атомная физика в задачах	*Yu. A. Samarski.* Atomic physics in problems
	Олимпиады	**Olympiads**
48	*А. П. Савин, Т. А. Сарычева, А. А. Фомин.* XXVII Международная математическая олимпиада	*A. P. Savin, T. A. Sarycheva, A. A. Fomin.* 27th International mathematics olympiad
51	*О. Ф. Кабардин, В. А. Орлов.* XVII Международная физическая олимпиада	*O. F. Kabardin, V. A. Orlov.* 17th International physics olympiad
	Информация	**Information**
55	Заочная физико-техническая школа при МФТИ	Moscow physico-technical institute's correspondence school
58	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	«Квант» улыбается *(39)*	**Kvant smiles** *(39)*
	Смесь *(50, 57)*	**Miscellaneous** *(50, 57)*
	Шахматная страничка *(3-я с. обложки)*	**The chess page** *(3rd cover page)*
	Наша анкета *(64)*	**Our questionnaire** *(64)*
	Напечатано в 1986 году *(61)*	**Printed in 1986** *(61)*

Симпатичная елочка на первой странице обложки — наш новогодний шахматный привет читателям журнала. Две хлопушки (белые пешки) сначала летят вверх: 1. h7 b2 2. b8Л! h2 3. h8Л! *(угрозы пата ликвидированы), а затем осыпаются вниз:* 3... b1Ф+ 4. Л:b1 h1Ф+ 5. Л:h1 *(автор задачи — М. Зинар, 1985 г. Выигрыш.) О других симметричных этюдах рассказано на сегодняшней шахматной страничке.*

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1986

Эварист Галуа

Кандидат физико-математических наук
Ю. П. СОЛОВЬЕВ

«Весною 1832 года Париж кипел и был готов к революционному взрыву, хотя три месяца без перерыва холера леденила умы и набросила на их волнение мрачный покров спокойствия. Великий город в это время походил на заряженную пушку, для которой бывает достаточно одной искры, чтобы она выстрелила». Это строки из романа Виктора Гюго «Отверженные», бывшего очевидцем тех грозных событий. Во вторник 5 июня в Париже вспыхнуло грандиозное восстание, на баррикадах которого погиб Гаврош — «маленький человек с великой душой». По-видимому, лишь немногие обратили внимание в эти тревожные дни на коротенькую заметку в парижских газетах. В ней сообщалось, что утром 30 мая на дуэли в возрасте 20 лет погиб Эварист Галуа, известный своими политическими выступлениями выпускник коллежа Луи-ле-Гран. В субботу 2 июня он был похоронен в общей могиле на кладбище Монпарнас. Ныне от этого погребения не сохранилось и следа.

После смерти Галуа остались шестьдесят страниц его неоконченного математического сочинения. Эта рукопись попала к Огюсту Шевалье, другу Галуа, но тот не мог найти никого, кто согласился бы ее издать; она увидела свет лишь в 1846 году. В этой рукописи содержалась теория, которая вот уже 140 лет оказывает влияние не только на математику, но и на все точное естествознание...

Жизнь и смерть

Nitens lux, horrenda procella,
*tenebris aeternis involuta.**)

Эварист Галуа родился 26 октября 1811 года в старинном городке Бур-ля-Рен, расположенном в десяти километрах от Парижа. Его отец, Никола Габриэль, руководил там учебным заведением для юношей. В 1815 году он был избран мэром городка и оставался на этом посту до самой своей кончины. Первые двенадцать лет своей жизни Эварист получал воспитание и образование под руководством матери. Мальчик изучал греческий и латинский языки, проводил время за Плутархом и Титом Ливием.

В октябре 1823 года Эварист был принят в Королевский коллеж Луи-ле-Гран в Париже (ныне лицей Луи-ле-Гран), знаменитое учебное заведение, воспитанниками которого были Мольер, Гюго, Робеспьер, Делакруа. В коллеже Галуа получал стипендию и жил на полном пансионе. Первые три года он считался одним из лучших учеников и с удовольствием занимался языками, литературой, историей. В октябре 1826 года Галуа начал заниматься в старшем классе коллежа — классе риторики, однако у него появились признаки утомления, и по рекомендации директора в январе 1827 года он вернулся на повторный курс. Там он вновь без малейшего усилия стал одним из первых учеников, получил награду за перевод с греческого и похвальные листы по четырем другим предметам. В это же время в жизни Эвариста произошло важное событие: он открыл для себя мир математики.

Дело в том, что до класса риторики все учащиеся коллежа занимались по общей программе, включавшей в себя гуманитарные дисциплины и лишь начатки точных наук. Однако учащиеся, питавшие интерес к точным наукам, могли в последние два года обучения заниматься математикой в подготовительном математическом классе. Те, кто хотел посвятить себя математике, должны были после подготовительного пройти годичный основной и годичный специальный математические классы.

Галуа воспользовался возвращением на повторный курс, чтобы одновременно поступить в подготовительный математический класс. Почти сразу же обнаружились его необыкновенные математические способности: он без труда одолел непростую книгу Лежандра «Основы геометрии» и принялся изучать сочинения Лагранжа «Решение численных уравнений», «Теория аналитических функций», «Лекции по теории функций».

Осенью 1827 года Эварист возвращается в класс риторики и продолжает занятия в подготовительном математическом классе. Школьная рутина тяготит его; он целиком поглощен математикой. По словам одного из учителей Галуа: «Страсть к математике владеет им; я думаю, что для него было бы лучше, если бы его родители согласились, чтобы он занимался только этой наукой: в классе риторики он теряет время и только изводит своих учителей и навлекает на себя наказания».

---

*) «Ослепляющий свет, ужасная буря, окруженная вечным мраком» (лат.). Этими словами оканчивается одно из писем, написанных Э. Галуа в ночь перед дуэлью.

В это время Эварист знакомится с работами Гаусса и Абеля и чувствует, что способен сделать не меньше. Будучи всего лишь учеником подготовительного класса, он без посторонней помощи готовится к экзаменам в Политехническую школу — лучшее по тем временам высшее учебное заведение Франции. Эварист верит, что в ней найдут применение все силы и энергия его ума и сердца.

Попытка поступить в Политехническую школу кончилась неудачей. Провал очень огорчил Галуа и, по словам историка математики Дююи, «явился первой из несправедливостей, которые в конце концов отравили ему жизнь». Эварист возвращается в порядком надоевший ему коллеж и, перескочив основной, поступает в специальный математический класс. Работал в нем тогда Луи-Поль Ришар, замечательный преподаватель, горячо любивший свою науку. Среди тех, кто в разные годы занимался у него, были, кроме Галуа, знаменитый астроном Леверье и выдающийся математик Эрмит.

Ришар с большим вниманием отнесся к юному ученику, которого он считал самым одаренным из своих воспитанников. Отзывы Ришара о Галуа лаконичны: «Галуа работает только в высших областях математики», «Он значительно выше всех своих товарищей». Под руководством Ришара Эварист выполнил свою первую научную работу «Доказательство одной теоремы о периодических непрерывных дробях», опубликованную в марте 1829 года в «Ле анналь де математик». В это же время под влиянием работ Лагранжа Галуа начинает интенсивно заниматься одной из самых трудных математических проблем того времени — проблемой разрешимости алгебраических уравнений в радикалах.

Проблема эта имеет долгую историю. Еще вавилоняне открыли способ решения уравнения второй степени $ax^2+bx+c=0$. Корни его в современной символике задаются формулой

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

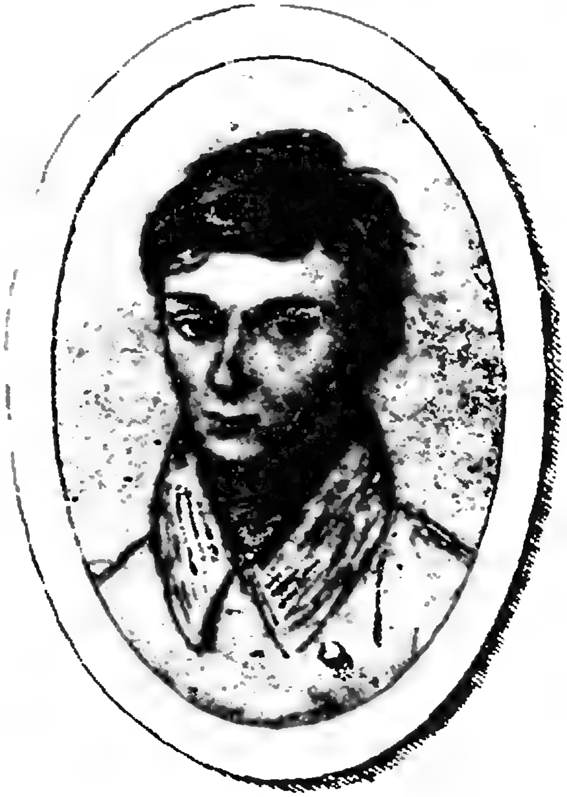
в которую входят четыре арифметических действия над коэффициентами, а также квадратный радикал. В начале шестнадцатого века Сципионе дель Ферро и Никколо Фонтана, более известный под именем Тарталья, получили формулу для корней кубического уравнения, в которую входят четыре арифметических действия и квадратичный и кубический радикалы. Несколько позже Лодовико Феррари открыл формулу для корней уравнения четвертой степени, в которую входят радикалы самое большее четвертой степени. Естественно было ожидать, что корни алгебраического уравнения степени n

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0 \quad (a_0\neq 0)$$

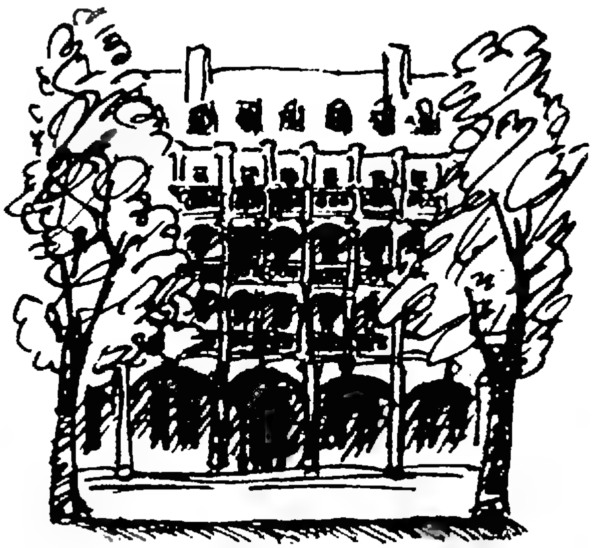
должны выражаться через радикалы самое большее n-ой степени. Но, несмотря на титанические усилия самых выдающихся математиков на протяжении почти трех веков, такую формулу не удалось получить даже для уравнения пятой степени. В конце восемнадцатого века математики начали подозревать, что формул в радикалах для уравнений степени $n\geq 5$ просто не существует, потому-то их и не удается найти.

Важный шаг в исследовании алгебраических уравнений был сделан Жозефом Луи Лагранжем (см., например, «Квант», 1986, № 9, с. 3), открывшим, что решение уравнений в радикалах тесно связано с перестановками их корней. Эта идея Лагранжа, названная им «истинной философией решения уравнений», была существенно развита гениальным норвежским математиком Нильсом Генриком Абелем. В 1824 году в возрасте двадцати двух лет Абель доказал, что не существует формул, которые бы решали в радикалах алгебраическое уравнение степени $n\geq 5$ общего вида.

После появления теоремы Абеля сразу же встал вопрос о нахождении необходимого и достаточного условия, которое



Единственный портрет Эвариста, сделанный с натуры, когда ему было пятнадцать — шестнадцать лет.



Внутренний двор Лицея Луи-ле-Гран (Париж, улица Сен-Жак, 123). В этом лицее (в те времена — Королевском коллеже) Галуа провел шесть лет — с октября 1823 года по декабрь 1829 года.

по коэффициентам $a_0, a_1, \ldots, a_n$ любого уравнения позволяло бы судить, решается оно в радикалах или нет.

В течение 1829—1831 гг. Эварист полностью решил эту труднейшую проблему. Первые результаты по теории уравнений появились у него еще весной 1829 года. Галуа направил их в Академию наук. Рассмотреть его работу взялся один из крупнейших французских математиков Коши, но... где-то ее затерял.

По окончании учебного года в специальном математическом классе Галуа вновь сделал попытку поступить в Политехническую школу и вновь провалился. Что произошло на экзамене, доподлинно неизвестно. Позже Галуа упомянул о нем, написав, что на экзамене его сопровождал «сумасшедший хохот экзаменаторов». Экзаменаторами Галуа были Бине и Лефебюр де Фурси. Мы не знаем, какие оценки они поставили Галуа; так или иначе, в Политехническую школу он не попал.

В то время, когда Эварист готовился к вступительным экзаменам, на него свалилась непоправимая беда: 2 июля 1829 года его отец, затравленный местным кюре и иезуитами, покончил с собой. Эти тяжелые дни, почти совпавшие по времени с его провалом, Эварист провел дома, вместе с матерью и младшим братом Альфредом.

По совету Ришара Эварист решил поступить в Приготовительную школу, жалкий остаток знаменитой Нормальной школы, созданной в годы Великой французской революции. В 1822 году Бурбоны закрыли Нормальную школу, а в 1826 году она была восстановлена под названием Приготовительной школы, как продолжение коллежа Луи-ле-Гран. Трехгодичная Приготовительная школа готовила учителей и государственных чиновников. 20 февраля 1830 года Эварист Галуа стал ее студентом.

Первый год обучения в Приготовительной школе оказался самым успешным в жизни Галуа. Здесь он познакомился с Огюстом Шевалье, и это знакомство вскоре переросло в крепкую дружбу. Галуа увлеченно занимался математикой. Он написал три работы и представил их на конкурс в Академию.

Неожиданно на него обрушивается новый удар. Рукопись Галуа попала в руки секретаря Академии Фурье, который вскоре после этого ... умер. В его бумагах рукописи Галуа не оказалось — она исчезла, как и первая, а вместе с ней надежда получить Большую математическую премию. Правда, у Эвариста сохранились копии посланных работ, и он опубликовал их в апрельском и июньском номерах «Бюллетеня математических наук», но это было слабым утешением. В своих повторяющихся несчастиях он увидел не волю случая, а результат плохой социальной организации, которая обрекала талант на вечные лишения к выгоде посредственности. И со всем пылом юности Эварист включается в борьбу за политическое переустройство общества.

В июле 1830 года давно собиравшиеся над режимом Бурбонов тучи разразились революционной грозой, лишившей власти короля Карла X. Симпатии Галуа целиком на стороне республиканцев. Он активно участвует в работе революционных кружков, вступает в Общество друзей народа. Но чаяниям республиканцев не удалось сбыться: к власти пришел ставленник крупного капитала «король-буржуа» Луи-Филипп. Возбуждение в Париже не утихает.

Осенью 1830 года Эварист выступает в печати с резкой критикой двурушнического поведения в июльские дни директора Приготовительной школы Гиньо. В результате 9 декабря его исключают из Школы. Надежда на математическую карьеру рухнула. Эварист вступает в артиллерию национальной гвардии, в большинстве своем состоявшую из членов Общества друзей народа. Это была вооруженная сила революции, и правительство Луи-Филиппа вскоре распускает национальную гвардию. Эварист остается без средств к существованию; лишь частные уроки позволяют ему свести концы с концами.

Все помыслы его в это время отданы революции — математика отходит на второй план. И все же он находит время и силы, чтобы еще раз послать в Академию ту самую работу, которая была потеряна в прошлом году. Работа попала на отзыв двум академикам — Лакруа и Пуассону. После длительных проволочек они сообщают, что не могут оценить рукопись положительно.

В июне 1831 года Галуа предстает перед судом по обвинению «в попытке спровоцировать покушение на жизнь и особу короля Французов путем заявления, сделанного в общественном месте во время публичного собрания». Суд присяжных оправдывает Галуа, но он попадает под тайный надзор политической полиции.

14 июля 1831 года Галуа принимает участие в демонстрации. Ее участники протестуют против запрещения правительством Луи-Филиппа свободы манифестаций. Многие участники этой демонстрации были арестованы, и Эварист оказался в тюрьме Сент-Пелажи. Здесь он встретил свое двадцатилетие, и здесь же им было отредактировано его основное математическое сочинение. 16 марта 1832 года Галуа переводят в тюремную больницу с подозрением на холеру. Есть сведения, что Галуа оставался в ней еще некоторое время после того, как 29 апреля кончился срок его заключения. О его жизни в течение мая 1832 года не сохранилось никаких следов. Утром 30 мая какой-то прохожий нашел его тяжело раненным после дуэли на пистолетах на берегу пруда Гласьер в парижском пригороде Жантийи. На следующий день в 10 часов утра Галуа скончался. Причина его дуэли и его противник достоверно неизвестны. Перед смертью он написал письмо своему другу Огюсту Шевалье с просьбой показать его рукопись немецким математикам Якоби и Гауссу. Однако рукопись увидела свет лишь в 1846 году и осталась практически незамеченной. Идеи Галуа по-настоящему были поняты лишь в 70-х годах, после выхода в свет книги К. Жордана «Алгебраические уравнения и теория подстановок».

Бессмертие

В теории уравнений я исследовал, в каких случаях уравнения разрешаются в радикалах, что дало мне повод углубить эту теорию и описать все возможные преобразования уравнения, допустимые даже тогда, когда оно не решается в радикалах.

Рукопись, оставшаяся после Галуа, из которой взята эта цитата, называлась «Мемуар об условиях разрешимости уравнений в радикалах». Содержащиеся в этом мемуаре идеи были не поняты современниками Галуа и считаются нелегкими для изучения даже сейчас. В то же время, формулировка теоремы Галуа не сложна. Правда, вначале нужно усвоить несколько новых понятий.

Пусть имеется n предметов, которые мы будем обозначать натуральными числами 1, 2, ..., n. Их *подстановкой* называется преобразование множества этих предметов, задаваемое таблицей

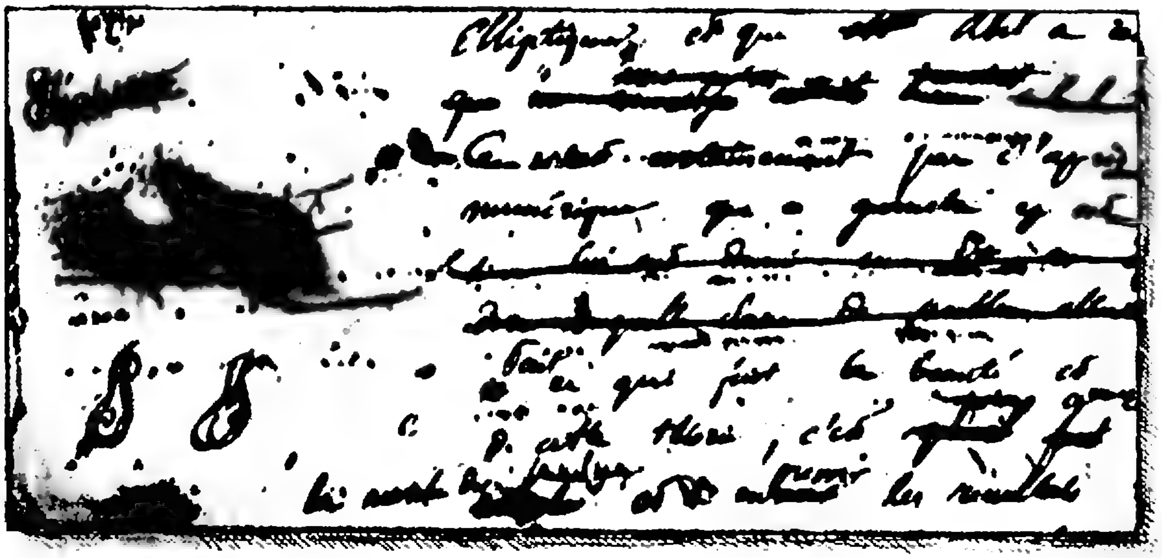
$$\begin{pmatrix} 1\ 2 \dots n \\ i_1\ i_2 \dots i_n \end{pmatrix},$$

где $i_1, i_2, \dots, i_n$ — это те же числа 1, 2, ..., n, но записанные в другом порядке. Каждая подстановка заключается в том, что на месте числа, стоящего в верхней строчке, ставится подписанное под ним число в нижней строчке.

Из n чисел можно сделать $n!$ различных подстановок. Например, из трех чисел 1, 2, 3 можно сделать следующие подстановки:

$$p_0=\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix},\ p_1=\begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix},$$
$$p_3=\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix},\ p_4=\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix},\ p_5=\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}.$$

Множество подстановок из n предметов обычно обозначается через S_n.



Фрагмент чернового варианта математической рукописи Галуа.

Современники знали Галуа лишь как пламенного революционера — республиканца. Публично «хорошим математиком» он был впервые назван уже после своей гибели. 7 июня 1832 года газета «Газетт де опито» поместила сообщение полиции: «Юный Эварист Галуа, двадцати одного года, хороший математик, кроме того, известный своим пылким воображением, умер в 12 часов от острого перитонита, вызванного пулей, выпущенной с 25 шагов».

С подстановками из одного и того же числа предметов можно совершать различные алгебраические операции. Прежде всего, их можно перемножать. *Перемножить* две подстановки — это значит последовательно произвести их одну за другой. В результате получится опять подстановка, называемая *произведением* двух данных подстановок. Перемножим, например, подстановки из трех предметов

$$\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}.$$

В силу первой подстановки единица заменится двойкой, а в силу второй подстановки эта двойка останется на месте. Таким образом, в результате последовательного совершения обеих подстановок единица перейдет в двойку. Точно так же можно убедиться, что двойка перейдет в тройку, а тройка перейдет в единицу:

$$\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}.$$

Аналогично перемножаются и любые две другие подстановки из трех предметов. В результате получается следующая таблица умножения:

	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	p_3	p_4	p_5
p_1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	p_4	p_3	p_5
p_2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	p_5	p_3	p_4
p_3	p_3	p_5	p_4	p_0	p_2	p_1
p_4	p_4	p_3	p_5	p_1	p_0	p_2
p_5	p_5	p_4	p_3	p_2	p_1	p_0

Таблица 1

Непосредственной проверкой можно убедиться, что умножение подстановок удовлетворяет правилу раскрытия скобок: $(ab)c=a(bc)$ для любых трех подстановок a, b, c из S_n.

Тождественная подстановка

$$e=\begin{pmatrix}1\ 2\ \dots n\\1\ 2\ \dots n\end{pmatrix}$$

есть единственная подстановка, удовлетворяющая условию

$$\begin{pmatrix}1\ 2\ \dots n\\1\ 2\ \dots n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\ 2\ \dots n\\i_1 i_2\dots i_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\ 2\ \dots n\\i_1 i_2\dots i_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\ 2\ \dots n\\1\ 2\ \dots n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\ 2\ \dots n\\i_1 i_2\dots i_n\end{pmatrix}$$

для произвольной подстановки

$$\begin{pmatrix}1\ 2\ \dots n\\i_1 i_2\dots i_n\end{pmatrix}$$

из S_n.

У каждой подстановки имеется *обратная* к ней, дающая в произведении с данной тождественную подстановку: обратная подстановка к данной ставит все числа, смещенные подстановкой, на их прежние места. Например, для подстановок из трех предметов имеем

$$p_0^{-1}=p_0,\ p_1^{-1}=p_2,\ p_2^{-1}=p_1,\ p_3^{-1}=p_3,$$
$$p_4^{-1}=p_4,\ p_5^{-1}=p_5.$$

Введем теперь следующее определение. *Группой**)(более точно, *конечной группой*) называется любое множество G из S_n, которое вместе с каждыми двумя своими элементами a и b содержит элемент $a\cdot b$ и вместе с каждым элементом a — элемент a^{-1}. В частности, само множество S_n также является группой.

Уже на примере группы S_3 видно, что для умножения подстановок не выполняется переместительный закон: не всегда $a\cdot b=b\cdot a$. Если же для всех пар a, b элементов некоторой группы выполняется последнее равенство, то G называется *коммутативной* или *абелевой* группой. Проверьте, что из всех групп S_n, $n>1$, коммутативна лишь группа S_2.

Может случиться, что часть H группы G сама образует группу. Тогда H называется *подгруппой* группы G. Например, каждая группа содержит подгруппу, состоящую из тождественной подстановки e. С другой стороны, каждая (конечная) группа является подгруппой некоторой группы S_n. Тот факт, что H — подгруппа в G, обозначается так: $H\leqslant G$.

Для иллюстрации введенных понятий опишем все подгруппы в группе S_3. Из таблицы умножения (табл. 1) видно, что в S_3 содержится одна подгруппа, состоящая из одного элемента p_0, три подгруппы из двух элементов $(p_0,\ p_3)$, $(p_0,\ p_4)$, $(p_0,\ p_5)$ и одна подгруппа из трех элементов $(p_0,\ p_1,\ p_2)$. В таблице 1 эта подгруппа выделена синим цветом. Поскольку она еще встретится нам в дальнейшем, мы введем для нее специальное обозначение Z_3. Все эти подгруппы коммутативны. Предлагаем читателю самому убедиться, что других подгрупп в S_3 нет.

---

*) Понятие группы впервые появилось в работах Лагранжа и Руффини. Термин «группа» введен Галуа.

Пусть G — какая-нибудь группа и a, b — ее элементы. Выражение $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$, называется *коммутатором* элементов a и b: оно служит корректирующим членом для того, чтобы поменять местами a и b:

$$ab=[a,b]ba.$$

Если $ab=ba$, то $[a,b]=e$. Понятно, что чем больше в группе G коммутаторов, отличных от e, тем значительнее отклонение группы G от коммутативной. Назовем *производной группой* группы G ее подгруппу G', состоящую из всевозможных произведений вида

$$[a_1, b_1]\cdot[a_2, b_2]\cdot\ldots\cdot[a_k, b_k]$$

с $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ из G. Ясно, что если группа G коммутативна, то G' состоит всего лишь из тождественной подстановки e. В качестве несложного упражнения предлагаем читателю проверить, что коммутаторы группы S_3 задаются следующей таблицей:

$[p_i,p_j]$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
p_0	p_0	p_0	p_0	p_0	p_0	p_0
p_1	p_0	p_0	p_0	p_2	p_2	p_2
p_2	p_0	p_0	p_0	p_1	p_1	p_1
p_3	p_0	p_1	p_2	p_0	p_1	p_2
p_4	p_0	p_1	p_2	p_2	p_0	p_1
p_5	p_0	p_1	p_2	p_1	p_2	p_0

Таблица 2

Для G' также можно рассмотреть производную группу $(G')'=G''$, называемую *второй производной группой* группы G. Продолжая этот процесс, мы получим *k-ю производную группу* $G^{(k)}=(G^{(k-1)})'$. Ясно, что $G^{(k)}\leqslant G^{(k-1)}$. Тем самым возникает цепочка вложенных друг в друга подгрупп:

$$\ldots\leqslant G^{(k)}\leqslant G^{(k-1)}\leqslant\ldots\leqslant G''\leqslant G'\leqslant G.$$

Если эта цепочка обрывается на подгруппе, состоящей лишь из тождественной подстановки, то есть если $G^{(m)}=e$ для некоторого числа m, то группа G называется *разрешимой*.

Ясно, что *любая коммутативная группа разрешима*. В частности, разрешима группа S_2. Покажем, что *группа S_3 также разрешима*. Из таблицы 2 следует, что все коммутаторы из S_3 лежат в $\underline{\mathbf{Z}}_3$, поэтому $S_3'=\underline{\mathbf{Z}}_3$. Из таблицы 1 видно, что группа $\underline{\mathbf{Z}}_3$ коммутативна, поэтому $S_3''=\underline{\mathbf{Z}}_3'=e$.

Далеко не все группы разрешимы. Например, *группы S_n разрешимы лишь для* $n=2$, 3, 4 (это весьма непростое утверждение впервые появилось в мемуаре Галуа).

Теперь мы в состоянии объяснить основную идею теории Галуа. Пусть

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0 —$$

произвольное уравнение n-й степени, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — заданные числа. Еще в конце XVIII века Карл Фридрих Гаусс доказал, что при любых $a_0, a_1, \ldots, a_n$ данное уравнение имеет n комплексных корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Мы хотим выяснить, существуют ли формулы, выражающие корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ через коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ с помощью четырех арифметических действий и извлечения корней. Для простоты условимся считать, что a_0, $a_1, \ldots, a_n$ — это рациональные числа и все корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ различны. Свяжем с $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ множество $Q(f)$, состоящее из всех чисел вида

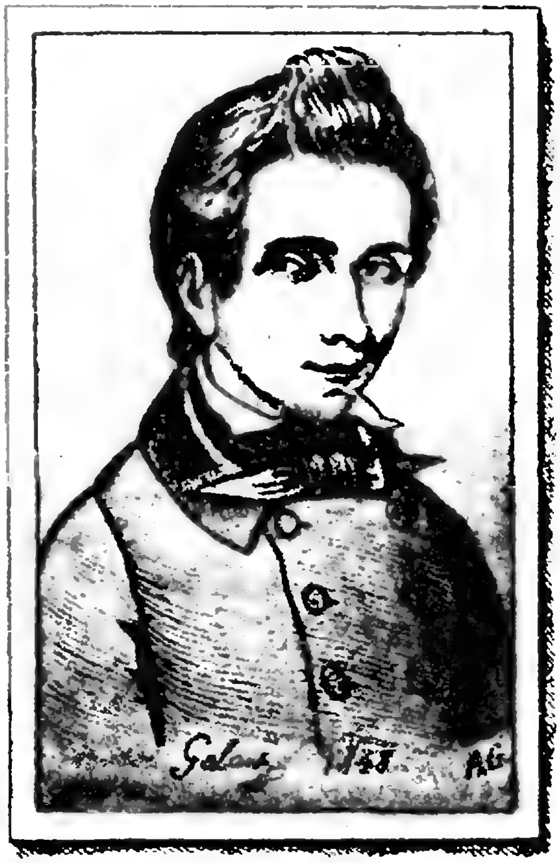
$$P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

где P — многочлен от n переменных с рациональными коэффициентами. Рассмотрим преобразования множества $Q(f)$, переводящие сумму чисел в сумму, произведение в произведение и оставляющие на месте рациональные числа. Если β — корень нашего уравнения, то есть

$$a_0\beta^n+a_1\beta^{n-1}+\ldots+a_n=0,$$

а φ — такое преобразование, то

$$\varphi(a_0\beta^n+a_1\beta^{n-1}+\ldots+a_n)=$$
$$=a_0\varphi(\beta)^n+a_1\varphi(\beta)^{n-1}+\ldots+a_n=0.$$



Портрет Галуа, сделанный по памяти его братом Альфредом и опубликованный в 1848 году в журнале «Магазэн питтореск». «Этот портрет,— говорится в заметке «Магазэн питтореск»,— воспроизводит насколько возможно точно выражение лица Эвариста Галуа. Рисунок сделан Альфредом Галуа, который вот уже 16 лет создал настоящий культ памяти своего несчастного брата».

Значит, $\varphi(\beta)$ — корень того же уравнения, то есть φ *просто переставляет корни* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *между собой*, задавая тем самым некоторую подстановку

$$\begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n \\ \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_n} \end{pmatrix}$$

Все такие подстановки образуют некоторую группу, содержащуюся в S_n. Эта группа называется *группой Галуа уравнения* $f(x)=0$ и обозначается $G(f)$.

Основная теорема теории Галуа

Уравнение $f=0$ *разрешимо в радикалах тогда и только тогда, когда разрешима его группа Галуа* $G(f)$.

В теореме Галуа ценно то, что группу $G(f)$ как правило можно вычислять, не зная корней уравнения $f=0$, только по его коэффициентам. Рассмотрим, например, уравнение $x^3+bx+c=0$ с рациональными коэффициентами, не имеющие рациональных корней. Пусть $\triangle = -4b^3-27c^2$. Если $\triangle$ не является полным квадратом, то $G(f)=S_3$, в противном случае $G(f)=Z_3$. Когда коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ выбраны более-менее произвольно, то группой Галуа уравнения $f=0$ будет S_n. Поскольку группа S_n не является разрешимой для $n \geqslant 5$, то *общее уравнение степени* $n \geqslant 5$ *не разрешимо в радикалах*.

Главное значение работы Галуа состоит даже не в том, что он дал исчерпывающий ответ на вопрос, три века бывший вызовом всем математикам мира, а в созданном им методе, центральное место в котором занимают понятия группы и симметрии. Идеи Галуа оказались плодотворными во всех без исключения областях математики и теоретической физики. От абстрактной алгебры до теории элементарных частиц — таков спектр применения общей идеи симметрии. За всю многовековую историю математики не было иного примера, чтобы столь малая по объему работа оказала такое огромное влияние.

* * *

...Уже светало, когда Эварист Галуа окончил последнее в своей жизни письмо. «Дорогие друзья! Меня вызвали... Я не мог отказаться... Не забывайте меня! Ведь судьба не дала мне прожить столько, чтобы мое имя узнала родина».

Новости науки

«Тяжелые» электроны в металлах

Способность металлов проводить электрический ток связана с наличием в них свободных электронов (электронов проводимости), которые могут перемещаться по кристаллу. Кроме электропроводности, эти электроны определяют многие другие важные свойства металла, такие, например, как теплопроводность, поведение в магнитном поле и т. п.

Входящие в состав металла электроны, конечно же, не являются в полном смысле свободными. Обладая электрическим зарядом, они взаимодействуют с ионами кристаллической решетки и друг с другом. Это взаимодействие сильно влияет на характеристики металлов, где электроны в большой степени теряют свои индивидуальные свойства. Оказывается, тем не менее, что в ряде случаев движение электронов проводимости может быть описано как движение по-настоящему свободных электронов. Для этого электрону в металле приписывают так называемую эффективную массу, которая является важной характеристикой, учитывающей взаимодействия электронов с решеткой и друг с другом.

Физики уже давно описывают свойства металлов, используя понятие эффективной массы, и хорошо к нему привыкли. Отметим, например, что именно эффективная масса определяет ускорение электрона проводимости в электрическом поле.

Обычно — например, в щелочных металлах, олове, меди — эффективная масса электронов близка по величине к массе свободного электрона ($m_e=9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг), отличаясь от нее самое большее в несколько раз. Однако недавно было обнаружено, что в некоторых соединениях — $CeAl_3$, $CeCu_2Si_2$, UBe_{13} и UPt_3 — эффективная масса электронов почти в тысячу раз больше m_e. Этот факт и позволяет говорить о «тяжелых» электронах.

Естественно, свойства упомянутых соединений очень сильно отличаются от свойств обычных металлов. Например, удельная теплоемкость $CeCu_2Si_2$ и UBe_{13} в несколько сот раз больше величины, ожидаемой для обычного металла. Аналогичная особенность наблюдается и для такой важной характеристики металла, как магнитная восприимчивость, которая отражает способность вещества, помещенного в магнитное поле, намагничиваться. Любопытно, что наблюдается связь между величиной эффективной массы электрона и способностью металла выступать в роли катализатора — чем больше эффективная масса, тем активнее проявляет себя металл. Можно надеяться, что это окажется полезным на практике. Однако на этом сюрпризы со стороны металлов с «тяжелыми» электронами не кончаются. Оказалось, что при низких температурах некоторые из них переходят в сверхпроводящее состояние, природа которого, как полагают, может отличаться от обычной сверхпроводимости.

Необычные свойства металлов, связанные с «тяжелыми» электронами, вызвали очень большой интерес у физиков, и в этом направлении сейчас ведутся интенсивные исследования. Пока природа большой эффективной массы электронов в металлах до конца не выяснена, но многие исследователи считают, что она связана с квантовым характером магнитного взаимодействия электронов и тяжелых атомов Ce, U и Pt.

Пока в физике металлов с «тяжелыми» электронами вопросов намного больше, чем ответов. Исследования продолжаются.

А. Б.

А что будет, если...?

Д. Л. ТАРАСОВ,
кандидат физико-математических наук
Л. В. ТАРАСОВ

«А что будет, если ...?» Вопросы такого типа могут быть самыми различными, за словом «если» могут стоять самые разные предположения, в том числе — и относительно каких-то физических процессов, явлений. Всякий раз такие вопросы побуждают нас рассматривать какую-нибудь физическую ситуацию и тем самым помогают лучше понять сущность тех или иных явлений, роль и область действия тех или иных физических закономерностей.

Что будет, если скорость света во всех прозрачных средах вдруг станет равной скорости света в вакууме? Может быть, сегодня этот вопрос и покажется надуманным. Но, как мы увидим, отвечая на него, нам придется разобраться во многих знакомых и, казалось бы, очевидных вещах. А кроме того, лет двести назад этот вопрос мог возникнуть, и притом вполне серьезно.

Вспомним: в XVII—XVIII веках господствовал чисто механический подход к оптическим явлениям. Одни ученые придерживались выдвинутой Ньютоном «теории истечения», согласно которой свет рассматривался как поток быстро летящих мелких «частичек». Другие, следуя Гюйгенсу, рассматривали свет как распространение упругих волн в особой среде — эфире,— заполняющей все мировое пространство, включая и прозрачные тела. Для объяснения наблюдаемых явлений приходилось наделять эфир свойствами удивительными и порой необъяснимыми. Так, пришлось предположить, что скорость «упругих» световых волн в эфире зависит от того, какие именно тела «заполняет» эфир. Это было не вполне понятно; на первый взгляд казалось, что скорость распространения упругих возмущений в вездесущем эфире должна быть везде одной и той же. Вот тогда-то и мог возникнуть вопрос: а не является ли скорость света и в самом деле одной и той же во всех телах и в вакууме?

Предположим, что это действительно так, и посмотрим, к каким «последствиям» приведет это предположение. Разумеется, мы будем пользоваться нашими знаниями о действительной природе оптических явлений, теорией, согласующейся с повседневным опытом. Мы знаем, что скорость v света в какой-либо среде всегда меньше скорости света c в вакууме. Всегда $c>v$. Отношение c/v есть показатель преломления света n для данной среды.

Предположим, что скорость света во всех прозрачных средах сделалась равной скорости света в вакууме: $v=c$. Следовательно, для всех сред теперь $n=1$. Это означает, в частности, что исчезло преломление световых лучей на границе сред. Проходя, например, из воздуха в воду, световой луч не будет теперь изменять своего направления. Ложка в стакане с водой не будет казаться нам «сломанной», а расстояние до монетки на дне бассейна не будет представ-

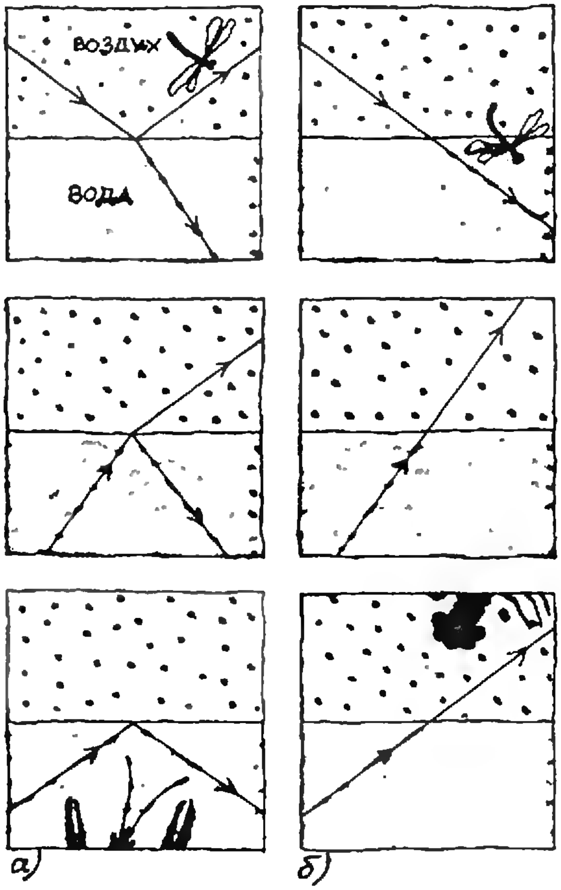


Рис. 1. Световой луч на границе двух сред в обычной ситуации (а) и в новой ситуации (б).

ляться нам меньшим, чем оно есть в действительности. Исчезнет и явление полного внутреннего отражения. Все это хорошо видно на рисунке 1, где сопоставляются две ситуации — обычная и новая. В новой ситуации световой луч попросту «не замечает» границы между средами; в оптическом смысле эта граница не существует.

Такая «метаморфоза» неизбежно приведет ко многим потерям. Окажутся бесполезными все оптические линзовые приборы, от обычных очков до сложнейших микроскопов,— ведь линзы потеряют способность фокусировать или дефокусировать световые лучи. Перестанут действовать волоконно-оптические линии связи, поскольку свет «удерживался» внутри прозрачного волокна за счет полного внутреннего отражения лучей от боковой поверхности волокна.

Произойдут изменения и в явлениях, наблюдаемых в природе, прежде всего в оптических явлениях, происходящих в земной атмосфере. Как известно, атмосфера является оптически неоднородной средой: ее показатель преломления изменяется с высотой и, кроме того, зависит от температуры, влажности, наличия примесей, перемещений слоев воздуха; в частности, показатель преломления воздуха тем меньше, чем меньше плотность воздуха. Поэтому световые лучи распространяются в земной атмосфере не по прямым, а по плавно изогнутым линиям (это называют рефракцией света в атмосфере). Нетрудно показать, что световой луч изгибается таким образом, что его траектория оказывается всегда обращенной выпуклостью в ту сторону, где показатель преломления меньше. Этим объясняется возникновение миражей (рисунок 2). С рефракцией света в земной атмосфере связаны такие явления, наблюдаемые при заходе Солнца, как небольшая сплюснутость солнечного диска, появление в отдельных случаях горизонтальной «слепой полосы», перерезающей солнечный диск (рисунок 3); мерцание звезд — тоже результат рефракции.

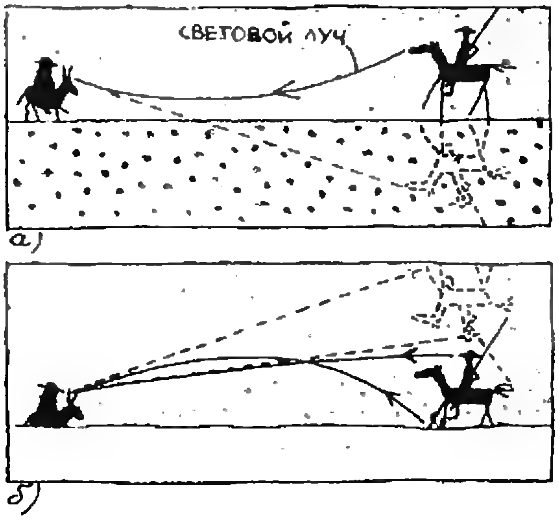


Рис. 2. Возникновение миража. а) У самой поверхности земли воздух достаточно нагрет, так что его плотность, а значит и показатель преломления, меньше, чем в более высоких слоях,— луч изогнут выпуклостью вниз. б) В более высоких слоях воздух теплее, показатель преломления меньше — луч изгибается выпуклостью вверх.

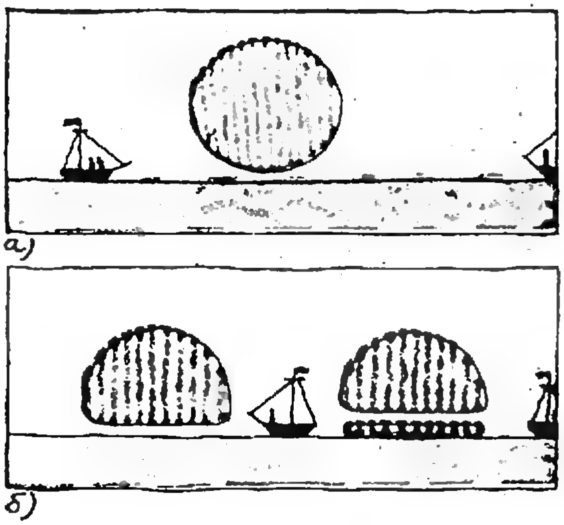


Рис. 3. «Сплюснутое» Солнце на закате (а), «слепая полоса» на диске заходящего Солнца (б) — следствие рефракции света в земной атмосфере.

В новой ситуации, рассматриваемой нами, атмосфера станет оптически однородной средой — ведь независимо от изменений плотности воздуха показатель преломления для него будет одним и тем же во всех точках пространства: он будет равен единице. Поэтому исчезнет рефракция света в атмосфере, а вместе с ней исчезнут миражи, мерцание звезд, своеобразие солнечных закатов.

Мы знаем, что проходя сквозь обычную трехгранную призму, солнечный луч разлагается на цвета радуги. Это связано с тем, что показатель преломления света зависит не только от выбора среды, но и от длины волны света (это называют дисперсией). Наибольшим показателем преломления характеризуются фиолетовые лучи, а наименьшим — красные.

Так как теперь показатель преломления всегда один и тот же — а это означает, что он не зависит ни от выбора среды, ни от длины волны света, ни от каких-либо иных факторов,— исчезнет дисперсия, никакого разложения на цвета в призме мы теперь наблюдать не будем (рисунок 4). Значит, перестанут работать почти все спектрометры и спектрографы. Мы не сможем никогда любоваться радугой на небе...

Итак, в новой ситуации мир стал заметно беднее: исчезло преломление лучей на границе сред, исчезла рефракция света в атмосфере, исчезла дисперсия. А что будет с отражением? С обычным отражением света от поверхности прозрачной среды? Оно тоже исчезнет! (Это можно было усмотреть уже из рисунка 1, *б*). Картина получается впечатляющей. Находясь на берегу озера, мы теперь не увидим в воде отражений деревьев, кустов, облаков, не увидим ночью лунной дорожки на воде. Мы вообще не увидим ни лужи, ни реки, ни моря — мы будем видеть только дно! Согласитесь, это будет очень существенным изменением в пейзаже. Но это еще не все, произойдут еще более впечатляющие изменения.

Почему небо голубое? Все дело в рассеянии света в земной атмосфере. Интенсивность рассеянного света обратно пропорциональна λ^4, где λ — длина волны света. Значит, в рассеянном свете большей интенсивностью обладает часть спектра, близкая к его фиолетовому концу. В результате спектр рассеянного света оказывается как бы сдвинутым в сторону более коротких волн — вместо белого света получается голубой. Глядя на небо, мы видим рассеянный атмосферой свет, и небо — голубое. Когда же мы глядим на заходящее Солнце или просто в направлении Солнца, то воспринимаем в основном не рассеянный свет, а прямые солнечные лучи, прошедшие через толстый слой атмосферы без рассеяния. Спектр такого света смещен в сторону более длинных волн. Поэтому заходящее Солнце красное, а небо вблизи него «окрашено» в оранжевые и красные тона.

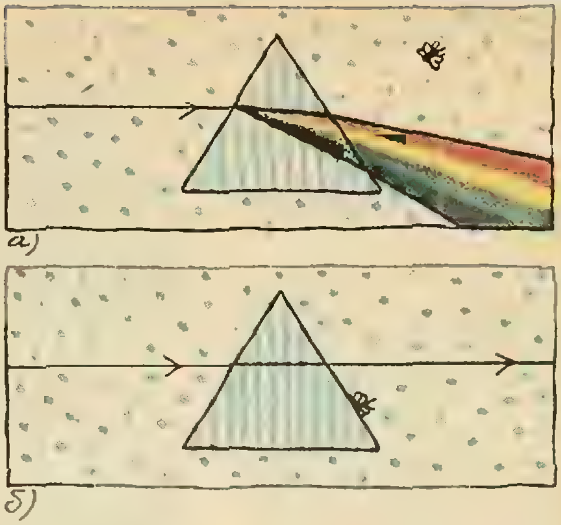


Рис. 4. «Радуга», появляющаяся после прохождения солнечного луча сквозь призму (а),— результат дисперсии. В новой ситуации (б) дисперсия отсутствует.

А теперь подумаем, что будет со всем этим в той новой ситуации, какую мы обсуждаем. На чем именно рассеивается свет? На изменениях плотности воздуха, обусловленных беспорядочными движениями молекул. Эти изменения случайны: плотность хаотически меняется от точки к точке и от одного момента времени к другому. Рассеяние света обусловлено случайными изменениями показателя преломления воздуха, которые связаны с изменениями его плотности. Иными словами, свет рассеивается на оптических неоднородностях атмосферы, обусловленных тепловым движением ее молекул. В нашей новой ситуации изменения плотности воздуха не приводят к появлению оптических неоднородностей. Значит, исчезнет рассеяние света в атмосфере — мы будем видеть черное звездное небо, а на нем яркий белый диск Солнца.

А собственно говоря, будем ли мы вообще что-нибудь видеть? Ведь как только скорость света в среде станет равной скорости света в вакууме, хрусталик нашего глаза — эта созданная самой природой линза — перестанет выполнять свои функции. Глаз превратится в подобие простой камеры-обскуры. Сможет ли он видеть? Не будет ли возникшая при этом «дальнозоркость» чрезмерно огромной?

Вот к каким неочевидным ситуациям привел нас всего один вопрос — что будет, если скорость света станет всюду равной скорости света в вакууме.

К 175-летию закона Авогадро

Итальянский физик Амедео Авогадро*) (1776—1856) происходил из семьи, все мужчины которой, начиная с XII века, неизменно становились адвокатами. Полагают даже, что сама фамилия Авогадро возникла из avvocato (по-итальянски — адвокат). Но будущий ученый, в двадцать лет получивший диплом доктора права, не слишком долго сохранял верность семейной традиции. Еще в юношеские годы у него пробудился живой интерес к точным наукам, а с 1800 года все свободное время он стал отдавать изучению физики и математики.

Через несколько лет Авогадро уже автор двух научных работ и член-корреспондент Туринской академии наук; в 1806 году он, наконец, оставляет адвокатскую практику и становится преподавателем физики и математики. Бывший юрист продолжает упорно штудировать специальную литературу, растет число его собственных научных работ. В ученых кругах Италии имя Авогадро получает широкую известность. В 1819 году его избирают действительным членом Туринской академии, а годом позже королевским указом назначают профессором первой в Италии кафедры высшей (по-современному — теоретической) физики в Туринском университете.

Человек проницательного ума, энциклопедических знаний и редкой скромности, Авогадро у себя на родине пользовался высоким научным авторитетом. Но за пределами Италии его исследования никакого отклика не находили. Широкое признание пришло лишь спустя четыре года после смерти ученого, когда в 1860 году на первом международном химическом конгрессе в Германии его соотечественник химик С. Канниццаро сумел донести до собравшихся содержание одной из статей Авогадро, написанной еще в 1811 году. В этой статье был сформулирован знаменитый закон Авогадро:

В равных объемах различных газов при одинаковых температуре и давлении содержится равное число атомов или молекул.

К этому важнейшему выводу Авогадро пришел, анализируя опубликованные в 1808 году экспериментальные результаты французского физика Ж. Л. Гей-Люссака (1778—1850), изучавшего объемные соотношения в реакциях между газами и установившего, что объемы вступающих в реакцию газов и газообразных продуктов реакции относятся как небольшие целые числа.

За десять лет до Авогадро гипотезу равенства числа частиц в равных объемах всех газов рассматривал основоположник химической атомистики англичанин Дж. Дальтон (1766—1844). Однако он вынужден был отвергнуть эту, по его словам, «туманную» идею как противоречившую разработанным им схемам ряда химических реакций.

Задачу, в которой запутались Дальтон и Гей-Люссак, а вместе с ними и множество других крупных ученых, красиво и просто решил тогда еще никому неизвестный Авогадро. Рассуждал он следующим образом. Дальтон, несомненно, прав, утверждая, что элементарный акт химической реакции состоит в перегруппировке атомов, этих реально существующих дискретных порций материи, из которых состоят все вещества. А коль скоро это так, то из открытия Гей-Люссака с необходимостью следует, что между объемами газов и числом образующих их частиц должно существовать какое-то очень нехитрое соотношение. Самое простое — предположить, что равные объемы всех газов при одинаковых внешних условиях содержат равное число частиц. Но в таком случае возникает противоречие между общепринятыми схемами газовых реакций и данными измерений. Действительно, реакцию образования водяного пара из водорода и кислорода представляли тогда так: $2H+O=H_2O$, то есть из двух атомов водорода и одного атома кислорода образуется одна молекула воды. Значит, если считать, что равные числа частиц занимают равные объемы, отношение соответствующих объемов в этой реакции должно быть 2:1:1, а не 2:1:2, как установил Гей-Люссак.

Размышления над этой и несколькими аналогичными неувязками привели Авогадро к выводу, что представления химиков о газовых реакциях неточны. Так, в реакции образования водяного пара соединяются не атомы, а двухатомные молекулы водорода и кислорода, то есть реакция должна идти по схеме: $2H_2+O_2=2H_2O$, в точности отвечающей найденному отношению объемов 2:1:2. Подобным же образом ученый легко привел в строгое соответствие с экспериментальными данными и ряд других схем газовых реакций.

Казалось бы, «простейшее» предположение Авогадро, как полностью оправдавшееся, должно было быстро получить признание в качестве нового фундаментального закона природы, тем более, что ученый опубликовал свою статью в известном французском научном журнале. Но, как уже говорилось, это произошло лишь полвека спустя. В чем причина столь длительной задержки? Вероятно, частично она объясняется тем, что Авогадро как человек, лишенный честолюбия, почти ничего не сделал для пропаганды своего открытия, устранился от борьбы за его признание зарубежными коллегами. Но главное все-таки в другом: тогда научный мир еще не был готов для восприятия выводов Авогадро, поскольку в отношении исходных понятий атомно-молекулярной теории царила полная неразбериха. Отсутствовало элементарное взаимопонимание: то, что один называл атомом, другой называл молекулой, а третий — частицей. Физики представляли себе атомы и молекулы совсем не так, как химики. Многие вообще не верили в их реальное существование и считали их лишь условными символами. Собственно

(Окончание см. на с. 20)

---

*) Его полное имя Лоренцо Романо Амедео Карло Авогадро ди Куарегуа э ди Каррето.

Наблюдения над туманом

Доктор физико-математических наук
А. А. БОРОВОЙ

Присматривались ли вы к тому, как появляется над рекой вечерний туман? Он возникает не сразу, а сначала сгущается над водоворотами и перекатами. Отдельные легкие облачка в лунном свете напоминают женские фигуры в белых одеждах. И начинаешь понимать наших предков, создавших так много легенд о русалках.

С описанием этого иногда удивительно красивого, а чаще тревожного и загадочного природного явления мы встречаемся и на страницах произведений художественной литературы. На полях этой и следующих страниц приведено несколько прозаических и стихотворных цитат, в которых описывается туман. Постарайтесь догадаться, кто их авторы.

Как часто удается любоваться туманом, зависит от особенностей местности. Например, для жителей Ньюфаундленда, острова, расположенного у берегов Канады в месте, где теплое течение Гольфстрим сталкивается с холодным Лабрадорским течением, туманы — постоянные гости. Третью часть года, включая практически все летние дни, остров покрыт густой дымкой. Наверное, даже самое красивое описание тумана вряд ли вызовет восхищение у жителей Ньюфаундленда. Настоящая «страна туманов» — Англия, «туманный Альбион». У нас в стране особенно богаты туманными днями побережья северных морей — Балтийского, Охотского, Кольский полуостров.

Если там, где вы живете, природные туманы — редкость, не забудьте, что у себя дома их можно видеть буквально на каждом шагу. Белое облачко, появляющееся из носика кипящего чайника,— это туман. В обиходе мы называем его паром, но это неверно, поскольку пар воды представляет собой бесцветный газ. Если быстро открыть бутылку с газированной водой, то над горлышком в первый момент появится дымок — это тоже туман. На улице в морозный день туман клубится над открытой водной поверхностью, над прорубями или полыньями, врывается в комнату через открытую форточку, возникает при дыхании (опять-таки мы привыкли говорить — «пар от дыхания»).

Образование тумана связано с тем, что при понижении температуры воздуха водяные пары,

Откуда эти строки?

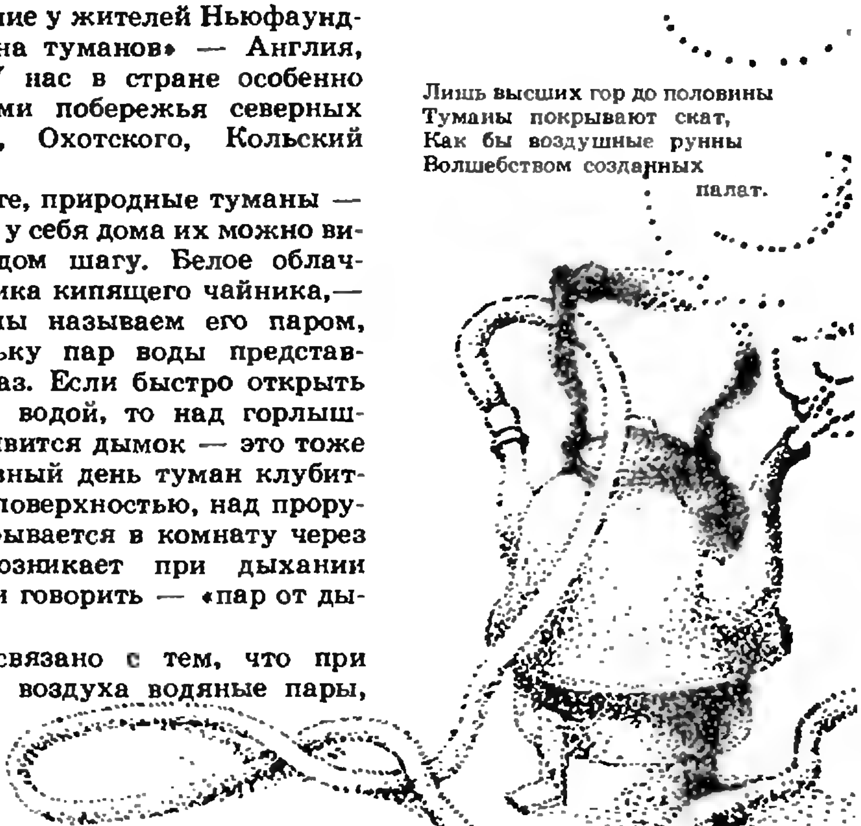
ТУМАНЪ м. (тьма, тéмень) густой паръ, водяные пары въ низшихъ слояхъ воздуха, на поверхности земли́; омраченный пара́ми воздухъ.

«Дитя, что ко мне ты так
робко прильнул?» —
«Родимый, лесной царь
в глаза мне сверкнул.
Он в темной короне, с густой
бородой». —
«О нет, то белеет туман над
водой».

Белая волокнистая пелена, затянувшая почти все болото, с каждой минутой приближалась к дому ...

Вот белесые кольца показались с обеих сторон дома и медленно слились в плотный вал, и верхний этаж с крышей всплыл над ним точно волшебный корабль на волнах призрачного моря.

Лишь высших гор до половины
Туманы покрывают скат,
Как бы воздушные руины
Волшебством созданных
палат.



содержащиеся в нем, в какой-то момент становятся насыщенными и при дальнейшем охлаждении начинают конденсироваться. И выделяют избыток влаги в виде мельчайших капель на центрах конденсации — пылинках, частицах дыма, ионах газа и т. п. Когда капли появляются в воздухе, мы говорим о тумане. А капли на поверхности земли, на листьях и траве называем росой.

Чтобы представить себе, насколько изменяется содержание водяного пара в воздухе при изменении температуры, приведем такие цифры:

масса насыщенного водяного пара в 1 $м^3$ воздуха при 30 °С составляет 30 г;

при охлаждении воздуха до 10 °С масса насыщенного пара уменьшается до 10 $г/м^3$;

значит, в каждом кубометре воздуха 20 г воды должны выделиться в виде капель тумана или росы.

Размер капель, составляющих туман, вы можете определить следующим образом. Подержите в тумане стеклышко, смазанное вазелином, а потом рассмотрите под микроскопом оставшиеся на нем капли влаги. Микроскоп необходим, поскольку даже самые крупные капли достигают размеров всего лишь в десятки микрон, их диаметр почти в сто раз меньше толщины спички.

Обычно туманы не долговечны. Мелкие капли сливаются в более крупные и опускаются вниз — туман дождем выпадает на землю. Но может случиться и так, что в теплом потоке воздуха капли тумана испарятся и туман рассеется.

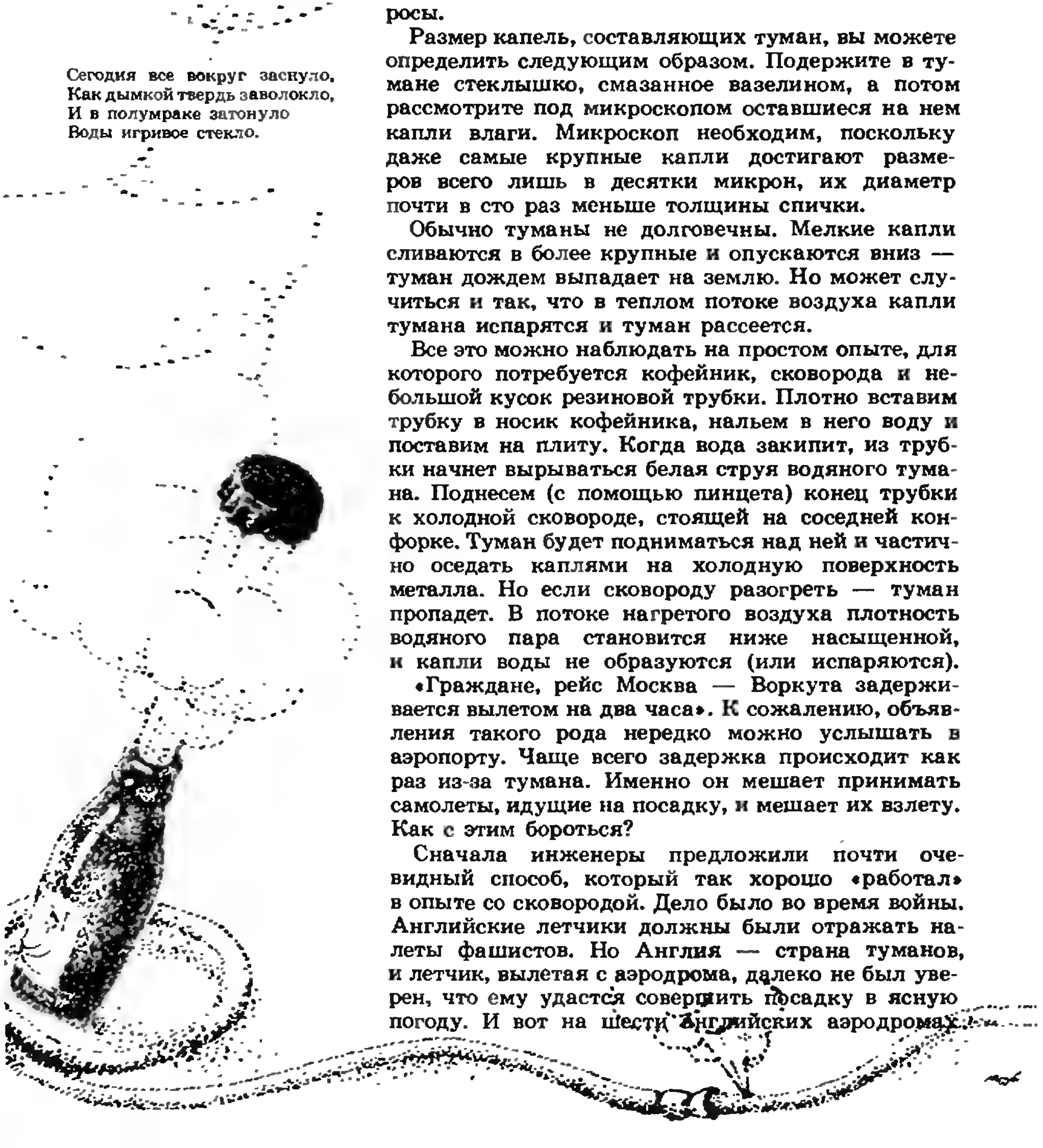
Все это можно наблюдать на простом опыте, для которого потребуется кофейник, сковорода и небольшой кусок резиновой трубки. Плотно вставим трубку в носик кофейника, нальем в него воду и поставим на плиту. Когда вода закипит, из трубки начнет вырываться белая струя водяного тумана. Поднесем (с помощью пинцета) конец трубки к холодной сковороде, стоящей на соседней конфорке. Туман будет подниматься над ней и частично оседать каплями на холодную поверхность металла. Но если сковороду разогреть — туман пропадет. В потоке нагретого воздуха плотность водяного пара становится ниже насыщенной, и капли воды не образуются (или испаряются).

«Граждане, рейс Москва — Воркута задерживается вылетом на два часа». К сожалению, объявления такого рода нередко можно услышать в аэропорту. Чаще всего задержка происходит как раз из-за тумана. Именно он мешает принимать самолеты, идущие на посадку, и мешает их взлету. Как с этим бороться?

Сначала инженеры предложили почти очевидный способ, который так хорошо «работал» в опыте со сковородой. Дело было во время войны. Английские летчики должны были отражать налеты фашистов. Но Англия — страна туманов, и летчик, вылетая с аэродрома, далеко не был уверен, что ему удастся совершить посадку в ясную погоду. И вот на шести Английских аэродромах

Внешность перемены была поразительна. Секунду назад мы мчались в ярких солнечных лучах, над нами было ясное небо, и далеко-далеко до самого горизонта море шумело и катило свои волны, а за нами бешено гнался корабль, изрыгая дым, пламя и чугунные ядра. И вдруг, во мгновение ока, солнце точно загасили, небо исчезло, даже верхушки мачт пропали из виду, и на глаза наши, словно их заволокло слезами, опустилась серая пелена. Сырая мгла стояла вокруг нас, как стена дождя. Волосы, одежда — все покрылось алмазными блестками.

Сегодня все вокруг заснуло,
Как дымкой твердь заволокло,
И в полумраке затонуло
Воды игривое стекло.



вдоль всей посадочной полосы запылали огромные факелы. Они подогревали воздух, капли тумана испарялись, и видимость повышалась во много раз — вплоть до километра.

Но способ этот оказался дорогим и неэффективным. Дело в том, что при сгорании нефть сама образует много водяных паров, они непрерывно пополняют «резервы» тумана, и факелам в основном приходилось бороться самим с собой. В результате на каждом аэродроме за секунду сгорала целая бочка нефти. Если для небольших аэродромов это было уже достаточно накладно, то для современных взлетных полос потребовалась бы целая река нефти. От подогрева воздуха пришлось отказаться.

Более перспективным оказалось рассеяние над аэродромом веществ, поглощающих влагу, например тончайшего порошка хлористого кальция. Его частицы собирают капли тумана в более крупные и выпадают на землю дождем. Влажность воздуха падает, и туман рассеивается.

Раз речь зашла о туманах и самолетах, мы хотели бы упомянуть еще о двух связывающих их фактах.

Каждый из вас, наверное, не раз замечал в небе белый след от летящего самолета. Это — туман, образующийся из паров воды, поставщиком которых служит сгорающее топливо. Горячий выхлопной газ, насыщенный водяными парами, попадает в холодную атмосферу и образует туман.

Куда более страшный «туманный след» может тянуться за самолетом, потерпевшим аварию. Это — след из горючего, которое выброшено в воздушный поток и распылено им в мельчайшие капли. Возникший огонь может распространяться по такому следу со скоростью в десятки метров в секунду, так что никакие пожарные средства не сумеют подоспеть на помощь. В связи с этим возникла проблема введения в топливо веществ, существенно уменьшающих горючесть такого тумана. И такие работы ведутся.

Какое-то странное, упоительное сияние примешалось к блеску месяца. Никогда еще не случалось ему видеть подобного. Серебряный туман пал на окрестность. Запах от цветущих яблонь и ночных цветов лился по всей земле.

Сентябрь холодный бушевал,
С деревьев ржавый лист валился,
День потухающий дымился,
Сходила ночь, туман вставал.

Туча кружево в роще связала,
Закурился пахучий туман.

Как грустна вечерняя земля!
Как таинственны туманы над болотами.

Ее глаза — как два тумана,
Полуулыбка, полуплач...

Математика 8

Публикуемая заметка адресована восьмиклассникам, но может быть полезна также учащимся девятых и десятых классов.

Геометрические преобразования в планиметрических задачах

Поворот, осевая и центральная симметрии, параллельный перенос, гомотетия — все эти преобразования плоскости часто помогают устанавливать многие интересные и важные свойства геометрических фигур, более полно раскрывать содержание предмета.

В этой статье мы рассмотрим несколько задач планиметрии, решение которых с помощью преобразований плоскости существенно проще других традиционных методов, и немного коснемся вопроса о композиции преобразований.

Задача 1. *Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, M — точка пересечения его медиан, H — точка пересечения его высот. Покажите, что точки O, M, H лежат на одной прямой.*

Решение. На рисунке 1 точки B_1 и C_1 — середины сторон AC и AB треугольника ABC, BB_2 и CC_2 — его высоты.

Рассмотрим гомотетию с центром M и коэффициентом $k=-2$. При этой гомотетии точки B_1 и C_1 отобразятся соответственно в точки B и C. Поскольку при гомотетии сохраняются величины углов, отрезок B_1O перейдет в отрезок, лежащий на прямой BB_2, а отрезок C_1O перейдет в отрезок, лежащий на прямой CC_2, так что точка O пересечения прямых B_1O и C_1O перейдет в точку H пересечения высот BB_2 и CC_2. Отсюда следует, что точки O, M, H лежат на одной прямой.

Задача 2. *Даны две окружности разных радиусов, пересекающиеся в точке A.* а) *Покажите, что существуют ровно две различные точки M и N такие, что данные окружности гомотетичны с центром M и гомотетичны с центром N.* б) *Покажите, что $\angle MAN=90°$.*

Решение. а) Пусть O_1 и O_2 — центры наших окружностей и PQ и RS — их диаметры, перпендикулярные прямой O_1O_2. Гомотетия должна переводить PQ в RS; значит, она либо переводит P в R и Q в S, либо переводит P в S и Q в R. В первом случае центр гомотетии есть точка пересечения прямых PR и QS; во втором случае — точка пересечения прямых PS и QR. б) При гомотетии двух окружностей с центром M точка O_1 есть образ точки O_2 (рис. 2); она же есть образ точки O_2 и при гомотетии с центром N. Точка A при гомотетии с центром M переходит в точку A_1, а при гомотетии с центром N она переходит в точку A_2. По свойству гомотетии прямые O_1A_1 и O_2A, а также O_1A_2 и O_2A параллельны. Из этого следует, что точка O_1 лежит на прямой A_1A_2. Поэтому $\angle A_1AA_2=90°$, откуда и $\angle MAN=90°$.

Задача 3. *На окружности даны три точки: M, N и K. Впишите в эту окружность треугольник ABC так, чтобы прямые AM, BN и CK были биссектрисами углов A, B и C соответственно.*

Решение. Пусть ABC — искомый треугольник. Проведем через точки M, N, K касательные к данной окружности (рис. 3) и рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$, получающийся в их пересечении.

Поскольку равны дуги AK и KB, BM и MC, AN и NC, попарно параллельны прямые A_1B_1 и AB, B_1C_1 и

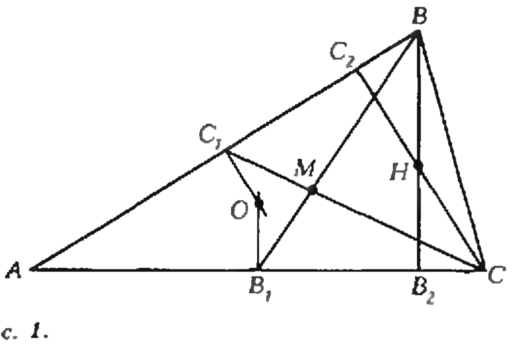


Рис. 1.

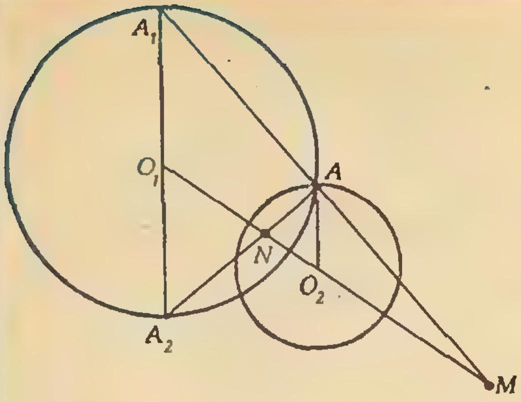


Рис. 2.

BC, A_1C_1 и AC. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны, и по свойству гомотетии биссектрисы одного из них параллельны биссектрисам другого.

Отсюда вытекает нужное построение.

Через точки M, N, K проводим касательные к окружности. При их пересечении образуется треугольник $A_1B_1C_1$. Проводим в нем биссектрисы — прямые A_1M_1, B_1N_1, C_1K_1 на рисунке 3. Через точки M, N, K проводим прямые, параллельные A_1M_1, B_1N_1 и C_1K_1 соответственно. Эти прямые пересекут окружность в трех нужных точках A, B, C.

Задача 4. *В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Докажите, что прямые, проведенные через середины его сторон перпендикулярно соответствующим противоположным сторонам, пересекаются в одной точке.*

Решение. Пусть точки M, N, F, K — середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно (рис. 4). Прямые, проведенные через точки M, N, F, K перпендикулярно соответственно сторонам AB, BC, CD и AD, пересекаются в центре данной окружности — точке O. Ясно, что четырехугольник $MNFK$ — параллелограмм. Пусть P — его центр симметрии.

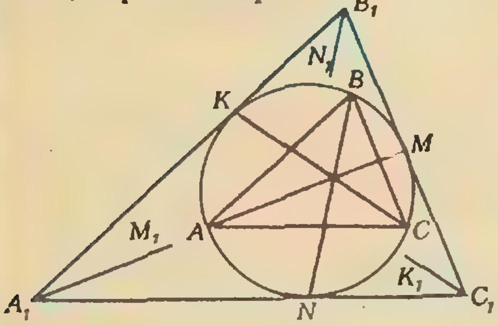


Рис. 3.

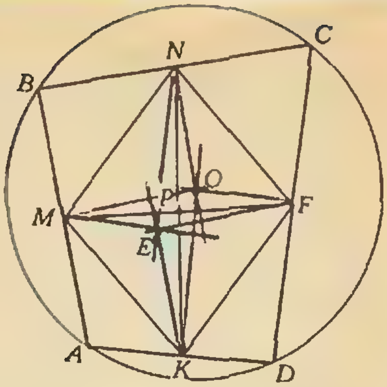


Рис. 4.

При центральной симметрии с центром в точке P точки F, M, K, N симметричны соответственно точкам M, F, N, K. Пусть a, b, c, d — прямые, проходящие через точки M, N, F, K соответственно, перпендикулярные сторонам CD, AD, AB, BC. Очевидно, что при центральной симметрии с центром P прямые a, b, c, d являются образами прямых OF, OK, OM, ON соответственно (при центральной симметрии прямая переходит в параллельную ей прямую). Отсюда следует утверждение задачи: прямые a, b, c, d пересекаются в одной точке E — образе точки O при центральной симметрии с центром в P.

Задача 5. *Продолжения боковых сторон AD и BC равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке L. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ACL и BDL, пересекаются в центре окружности, описанной около данной трапеции.*

Решение. Треугольник ABL — равнобедренный. Его высота LM является его осью симметрии (рис. 5). Красная окружность, проходящая через точки A, C, L, есть отображение синей окружности, проходящей через точки B, D L при симметрии относительно оси LM. При этом

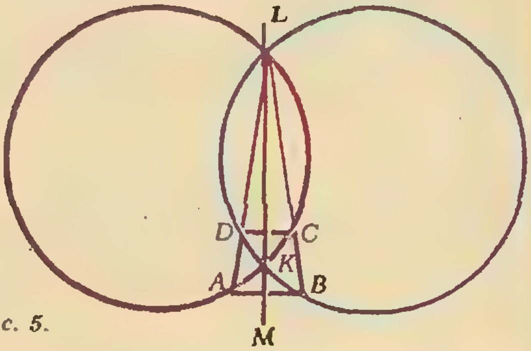


Рис. 5.

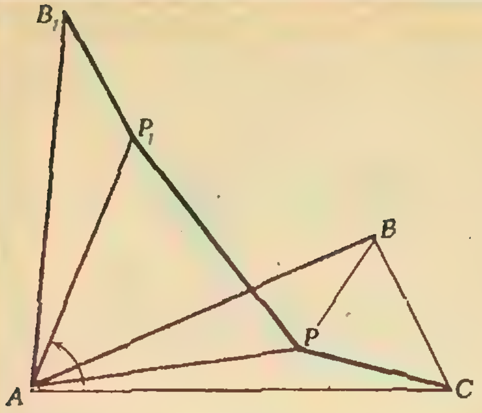


Рис. 6.

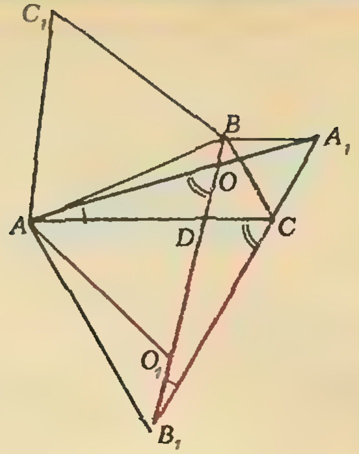


Рис. 7.

точка K пересечения синей окружности с осью симметрии LM отображается на себя — точку пересечения красной окружности с осью симметрии.

Поэтому при данной симметрии дуга KC симметрична дуге KD, а дуга AK симметрична дуге KB. Кроме того, дуга AK равна дуге KC, откуда следует равенство этих четырех дуг. Поэтому равны и хорды, стягивающие эти дуги, так что точка K является центром окружности, описанной около трапеции $ABCD$.

Задача 6. *Найдите точку, сумма расстояний которой от вершин данного треугольника была бы минимальной.*

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, P — произвольная точка плоскости. Повернем треугольник ABC вокруг точки A на 60° (рис. 6). Пусть точки B_1 и P_1 — образы точек B и P при этом повороте. Тогда $B_1P_1=BP$, $AP_1=AP$, и следовательно,

$$l=AP+BP+CP=AP_1+B_1P_1+CP=$$
$$=B_1P_1+P_1P+CP.$$

Ясно, что l будет минимальным, если точки P_1 и P будут лежать на прямой B_1C. Легко подсчитать, что в этом случае $\angle APC=\angle APB=\angle BPC=120^\circ$.

Таким образом, искомая точка — это точка, из которой стороны данного треугольника видны под углом 120°.

Задача 7. *На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1 и ACB_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.*

Решение. Пусть O — точка пересечения прямых AA_1 и BB_1. Повернем плоскость треугольника ABC вокруг точки C на 60° против часовой стрелки. При этом повороте (рис. 7) треугольник CBB_1 есть образ треугольника CAA_1. Поэтому углы A_1AC и BB_1C равны, откуда и углы AOB_1 и ACB_1 равны, то есть $\angle AOB_1=60^\circ$.

Отложим теперь на прямой BB_1 от точки O отрезок $OO_1=AO$ и повернем плоскость вокруг точки A на 60° так, что точки B, B_1, O_1 перейдут в точки C_1, C, O соответственно. Мы получили, что при этом повороте прямая BB_1 переходит в прямую CC_1, содержащую точку O.

Замечание. Точка O лежит на окружности, описанной около треугольника AB_1C, так что $\angle AOC=120^\circ$. Аналогично $\angle AOB=\angle BOC=120^\circ$. Итак, все стороны треугольника ABC видны из точки O под углом 120° (сравните этот результат с решением задачи 6).

Докажем теперь три небольшие, но очень важные теоремы о *композициях* различных преобразований.

Теорема 1. *Последовательная симметрия относительно двух пересекающихся осей есть поворот вокруг точки O пересечения этих осей на угол, вдвое больший угла между ними.*

Доказательство. Пусть M — произвольная точка, отличная от точки O, M_1 — точка, симметричная M относительно оси l, M_2 — точка, симметричная M_1 относительно оси k, α — угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и осью l, φ — угол между осями k и l. Предположим, что точка M_1 лежит внутри угла, равного φ (другие слу-

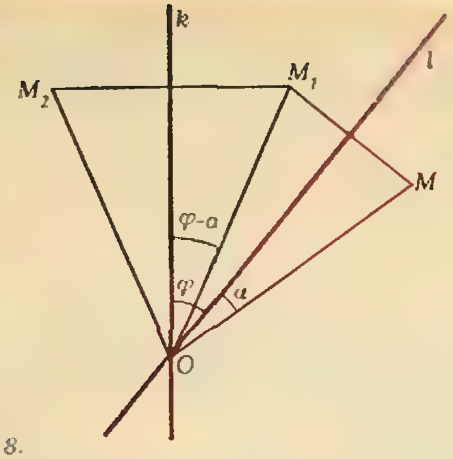


Рис. 8.

чаи аналогичны). Тогда (см. рисунок 8) угол между векторами $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM_1}$ равен 2α, угол между вектором $\overrightarrow{OM_1}$ и осью k равен $\varphi-\alpha$, угол между векторами $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ равен $2(\varphi-\alpha)$ и угол между векторами $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM_2}$ равен $2\alpha+2(\varphi-\alpha)=2\varphi$. Так как, очевидно, $|\overrightarrow{OM}|=|\overrightarrow{OM_1}|=|\overrightarrow{OM_2}|$, наше преобразование действительно есть поворот на угол 2φ.

Теорема 2. *Последовательная симметрия относительно двух различных центров симметрии есть параллельный перенос.*

Доказательство. Пусть O_1 и O_2 — центры симметрии и M — произвольная точка плоскости. Пусть, далее, точка M_1 симметрична точке M относительно центра O_1 и точка M_2 симметрична точке M_1 относительно центра O_2. Тогда O_1O_2 есть средняя линия треугольника MM_1M_2 (рис. 9), и потому $\overrightarrow{MM_2}=2\overrightarrow{O_1O_2}$. Мы видим, что наше преобразование смещает произвольную точку на один и тот же вектор $2\overrightarrow{O_1O_2}$; значит, оно является параллельным переносом.

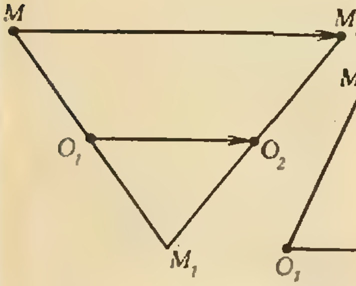


Рис. 9.

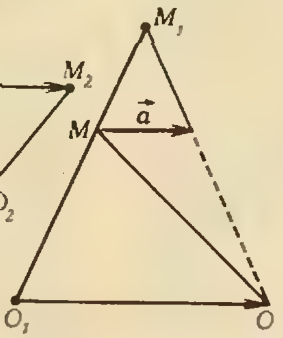


Рис. 10.

Теорема 3. *Последовательное выполнение параллельного переноса и гомотетии есть гомотетия с тем же коэффициентом.*

Доказательство. Пусть вектор $\vec a$ задает параллельный перенос, O — центр гомотетии, k — коэффициент гомотетии. Произвольная точка M при составном преобразовании переходит в точку M_1 такую, что (см. рисунок 10)

$$\overrightarrow{MM_1}=\vec a+(k-1)(\overrightarrow{OM}+\vec a)=\\=(k-1)\overrightarrow{OM}+k\vec a.$$

Обозначим через O_1 такую точку, что

$$\overrightarrow{O_1O}=\frac{k\vec a}{k-1}$$

(у нас $k\neq1$). Тогда

$$\overrightarrow{MM_1}=(k-1)\overrightarrow{OM}+(k-1)\frac{k\vec a}{k-1}=\\=(k-1)\overrightarrow{OM}+(k-1)\overrightarrow{O_1O}=(k-1)\overrightarrow{O_1M},$$

$$\overrightarrow{O_1M_1}=\overrightarrow{O_1M}+\overrightarrow{MM_1}=k\overrightarrow{O_1M}.$$

То есть наше преобразование есть гомотетия с центром O_1 и коэффициентом k.

Следствие 1. *Последовательное применение параллельного переноса и центральной симметрии есть центральная симметрия.*

Следствие 2. *Нечетное число последовательных центральных симметрий есть центральная симметрия.*

Мы предлагаем читателям, используя доказанные утверждения, решить самостоятельно две задачи на композиции преобразований.

Задача 8. *Найдите угол между осями симметрии a и b, если результат последовательных симметрий относительно осей a, b, a совпадает с результатом последовательных симметрий относительно осей b, a, b.*

Задача 9. *Докажите, что если произвольную точку последовательно шесть раз симметрично отразить относительно центров симметрии A, B, C, A, B, C, то она вернется в исходное положение.*

В. И. Стомахин

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Найдите $x^2+y^2+z^2$, если

$$x+y+z=1,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0.$$

2. Точки E и F — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Докажите, что середины отрезков AF, BF, CE и DE являются вершинами параллелограмма.

3. По дорожке бассейна плавают с постоянными неодинаковыми скоростями два спортсмена. Они в разное время выплывают из разных концов дорожки навстречу друг другу и первый раз встречаются в точке C. Встретившись, они разворачиваются, доплывают каждый до своего конца дорожки и снова плывут навстречу друг другу, пока не встретятся в точке D, и так далее. Где произойдет их 20-я встреча?

4. Решите уравнение

$$\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x-2}{x-1}\right)^2-\frac{5}{2}\,\frac{x^2-4}{x^2-1}=0.$$

5. В треугольнике ABC угол A равен 75°, высота CH равна половине стороны AB. Найдите угол CBA.

Девятый класс

6. Решите уравнение

$$\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x-2-\sqrt{2x-5}}=2\sqrt{2}.$$

7. На сторонах AB, AC и BC треугольника ABC даны точки M, L и K такие, что четырехугольник $KLMB$ — параллелограмм. Найдите площадь этого параллелограмма, если известно, что площади треугольников AML и KLC соответственно равны S_1 и S_2.

8. Числа α, β, γ таковы, что $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$ и $\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta+\mathrm{tg}\,\beta\quad\mathrm{tg}\,\gamma+\mathrm{tg}\,\alpha\quad\mathrm{tg}\,\gamma<1$. Докажите, что $\alpha+\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}$.

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-\sqrt{y}=1, \\ y-\sqrt{z}=1, \\ z-\sqrt{x}=1. \end{cases}$$

10. На сторонах AB и CB треугольника ABC откладываются отрезки AM и CN такие, что $AM=CN$. Найдите геометрическое место середин отрезков MN.

Десятый класс

11. Решите уравнение

$$(1+x)^4=2(1+x^4).$$

12. В треугольнике ABC дано: $BC=a$, $AC=b$, $\angle C=\gamma$.

а) Найдите длину l_c биссектрисы угла C.

б) Докажите, что если в треугольнике две биссектрисы равны, то этот треугольник — равнобедренный.

13. Из каких точек плоскости Oxy парабола $y=x^2$ видна под прямым углом?

14. Найдите целую часть числа $\lg 3+\lg_3 10$.

15. Докажите, что

а) внутри любой треугольной пирамиды $ABCD$ существует единственная точка O такая, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{0}$;

б) точка O является точкой пересечения четырех отрезков, соединяющих вершины пирамиды с точками пересечения медиан противоположных граней;

в) для любых точек A_1, A_2, ..., A_n существует единственная точка O такая, что $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{0}$.

Публикацию подготовил *А. А. Егоров*

Наш календарь

К 175-летию закона Авогадро

(Начало см. на с. 12)

говоря, различие между атомами и молекулами было по-настоящему осознанно именно благодаря извлеченной из забвения работе Авогадро.

А между тем уже сам Авогадро отчетливо представлял, сколь широкие возможности открывает найденный им закон для определения химических формул различных газообразных веществ, для определения их относительных атомных и молекулярных масс. Но какова физическая основа его закона, так сказать, откуда он берется, Авогадро не знал. Исчерпывающее объяснение дала возникшая в конце 50-х годов прошлого века кинетическая теория газов.

Хотя Авогадро, конечно, понимал, что число молекул, скажем, в одном литре газообразного вещества (согласно открытому им закону, универсальное для всех газов) огромно, о каких конкретно величинах может тут идти речь, узнать ему не довелось. Эта задача была надежно решена лишь в начале нашего столетия, и только после этого отпали последние сомнения в реальности атомов, представления о которых зародились около двух с половиной тысячелетий тому назад. Измерения, проведенные несколькими совершенно различными способами, привели к одному и тому же результату, который обычно записывают в виде

$$N_A=6{,}02\cdot10^{23}\ \text{моль}^{-1},$$

где N_A — число частиц в одном моле вещества, одна из важнейших универсальных постоянных физики и химии, получившая название числа Авогадро.

Б. Е. Явелов

Квант для младших школьников

Задачи

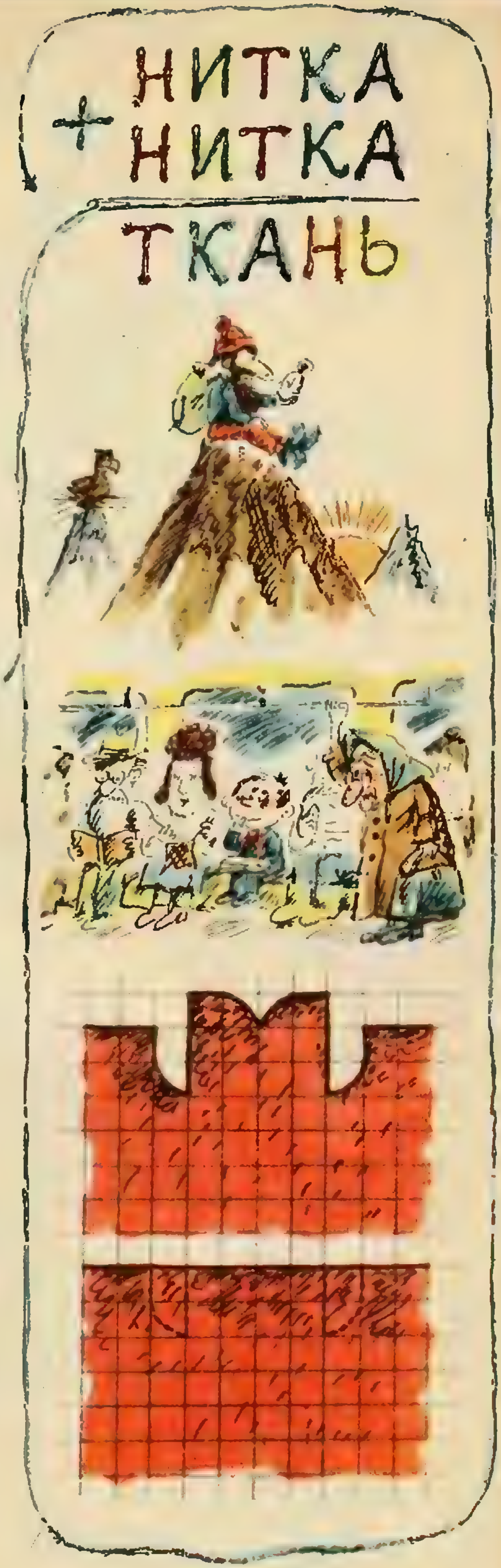
1. Проверьте, что $(3^2+5^2)^2=16^2+30^2$, и попробуйте доказать, что квадрат суммы двух квадратов различных чисел всегда является суммой двух квадратов.

2. Решите арифметический ребус: НИТКА+НИТКА=ТКАНЬ. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

3. Заядлый альпинист дядя Сережа рассказывал нам, что сумерки в горах заметно короче, чем на равнине. Как вы думаете, с чем это связано?

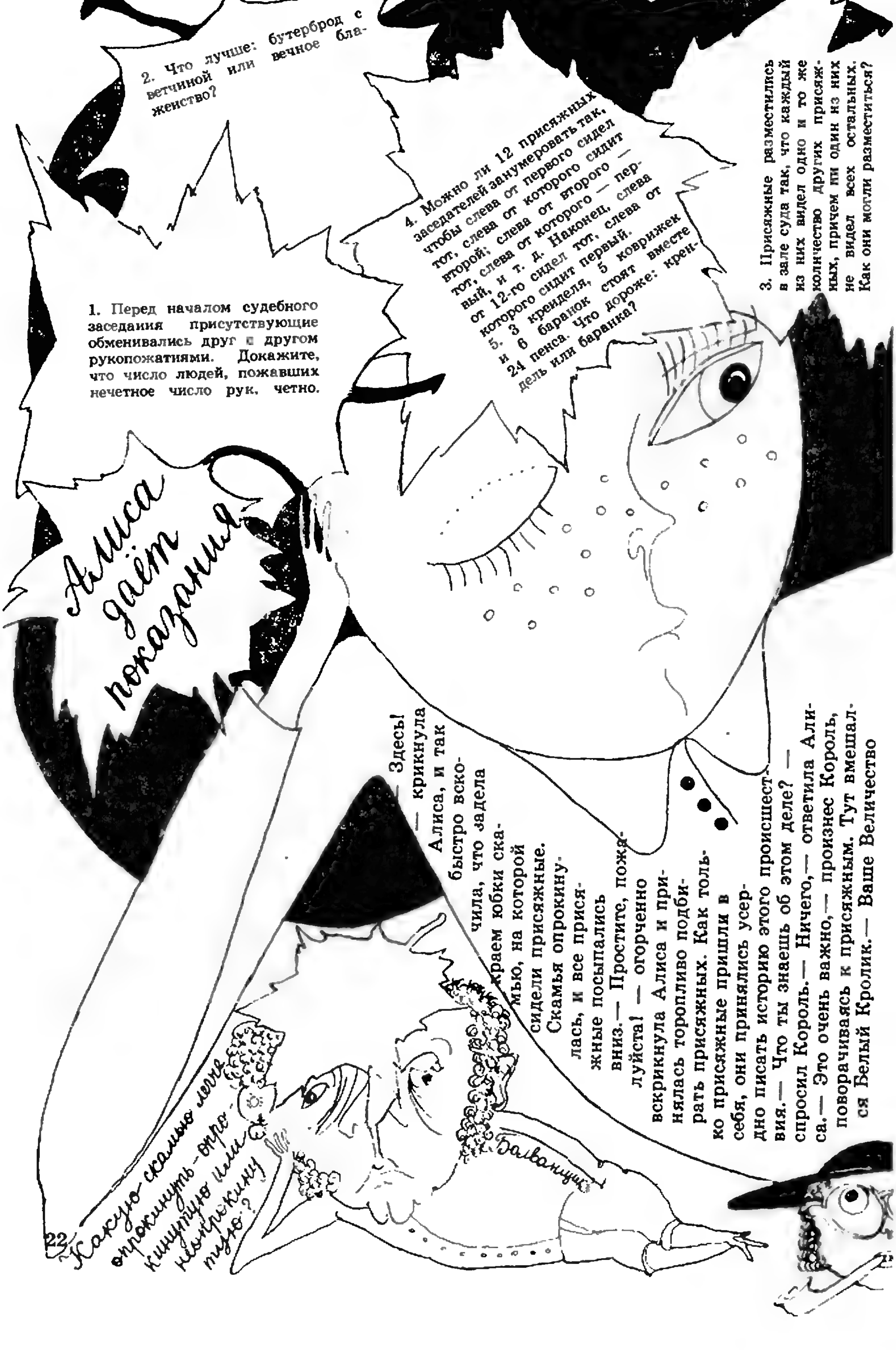
4. Чтобы попасть домой из Дворца пионеров, я могу выйти либо на станции метро Математическая, либо на следующей — станции Физическая. От станции Математическая я иду втрое дольше до дома, чем от станции Физическая, причем пока поезд подходит к станции Физическая, я успеваю пройти треть пути от станции Математическая до дома. В каком случае я быстрее попаду домой?

5. На рисунке изображена часть крепостной стены. Один из камней стены имеет столь причудливую форму, что если вытащить его из стены и положить иначе, то стена станет ровной (см. рисунок; на рисунке переложены два камня). Изобразите этот камень.



Эти задачи нам предложили: ученик 8 класса из Ворошиловграда *Миша Кравченко*, *В. А. Гончарук*, *А. И. Буздин*, *В. Д. Вьюн*, *А. М. Домашенко*.

Алиса даёт показания



1. Перед началом судебного заседания присутствующие обменивались друг с другом рукопожатиями. Докажите, что число людей, пожавших нечетное число рук, четно.

2. Что лучше: бутерброд с ветчиной или вечное блаженство?

4. Можно ли 12 присяжных заседателей занумеровать так, чтобы слева от первого сидел тот, слева от которого сидит второй; слева от второго — тот, слева от которого — первый, и т. д. Наконец, слева от 12-го сидел тот, слева от которого сидит первый.

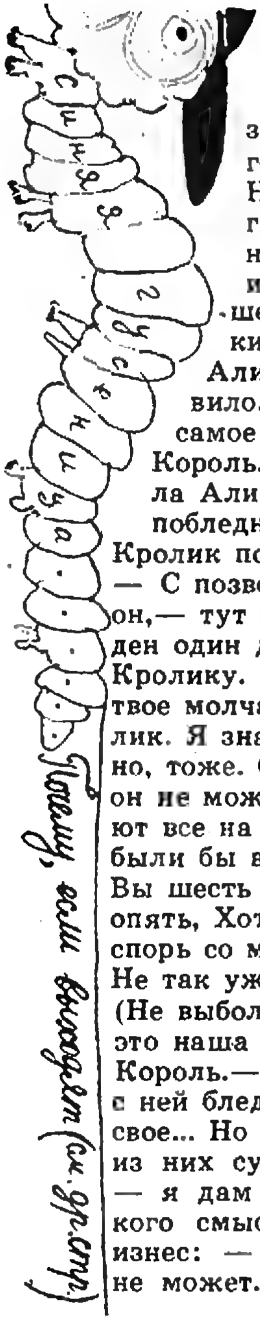
5. 3 крейделя, 5 коврижек и 6 баранок стоят вместе 24 пенса. Что дороже: крендель или баранка?

3. Присяжные разместились в зале суда так, что каждый из них видел одно и то же количество других присяжных, причем ни один из них не видел всех остальных. Как они могли разместиться?

— Здесь! — крикнула Алиса, и так быстро вскочила, что задела краем юбки скамью, на которой сидели присяжные.

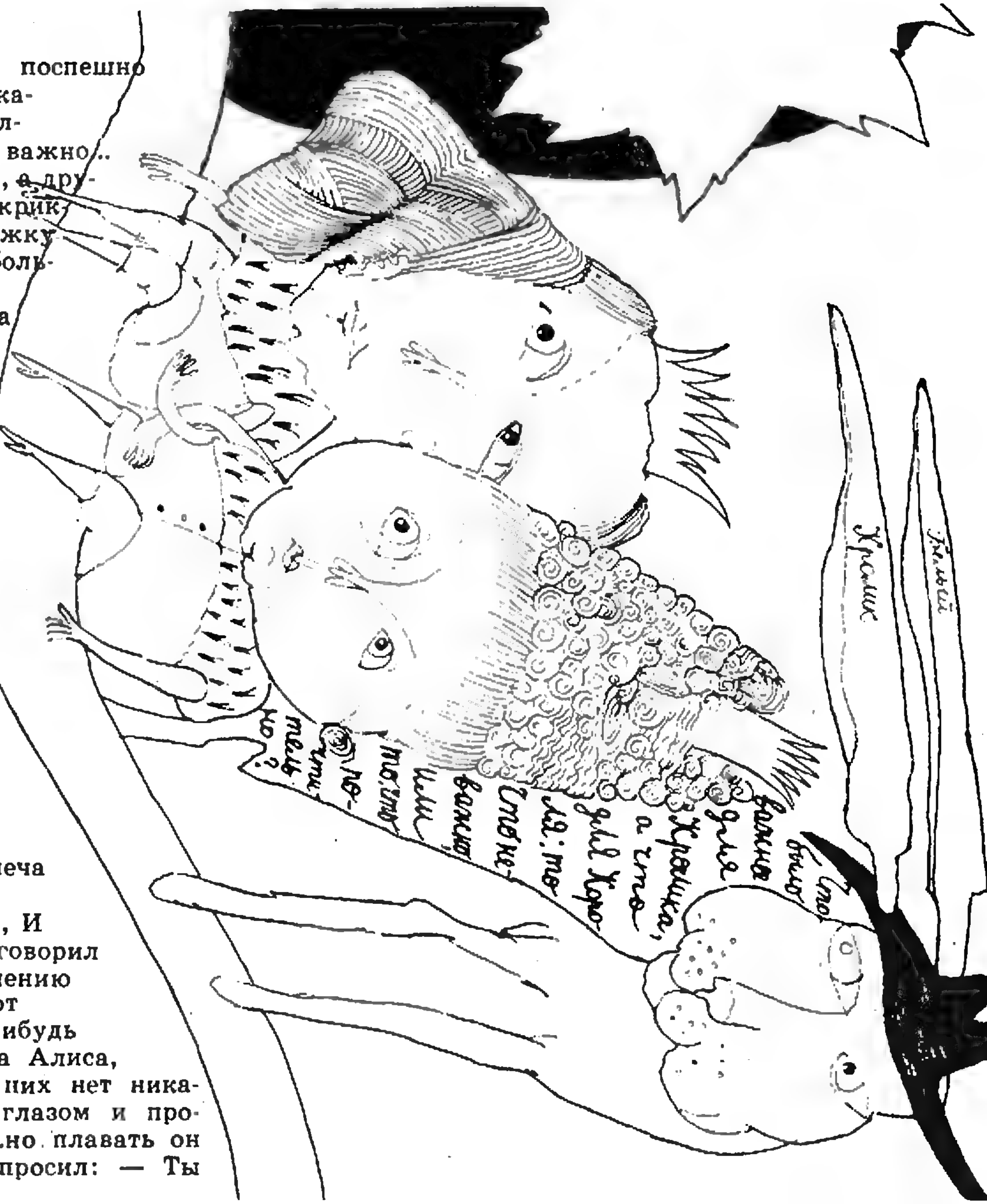
Скамья опрокинулась, и все присяжные посыпались вниз.— Простите, пожалуйста! — огорченно вскрикнула Алиса и принялась торопливо подбирать присяжных. Как только присяжные пришли в себя, они принялись усердно писать историю этого происшествия.— Что ты знаешь об этом деле? — спросил Король.— Ничего,— ответила Алиса.— Это очень важно,— произнес Король, поворачиваясь к присяжным. Тут вмешался Белый Кролик.— Ваше Величество

Какую скамью легче опрокинуть — опрокинутую или неопрокинутую?

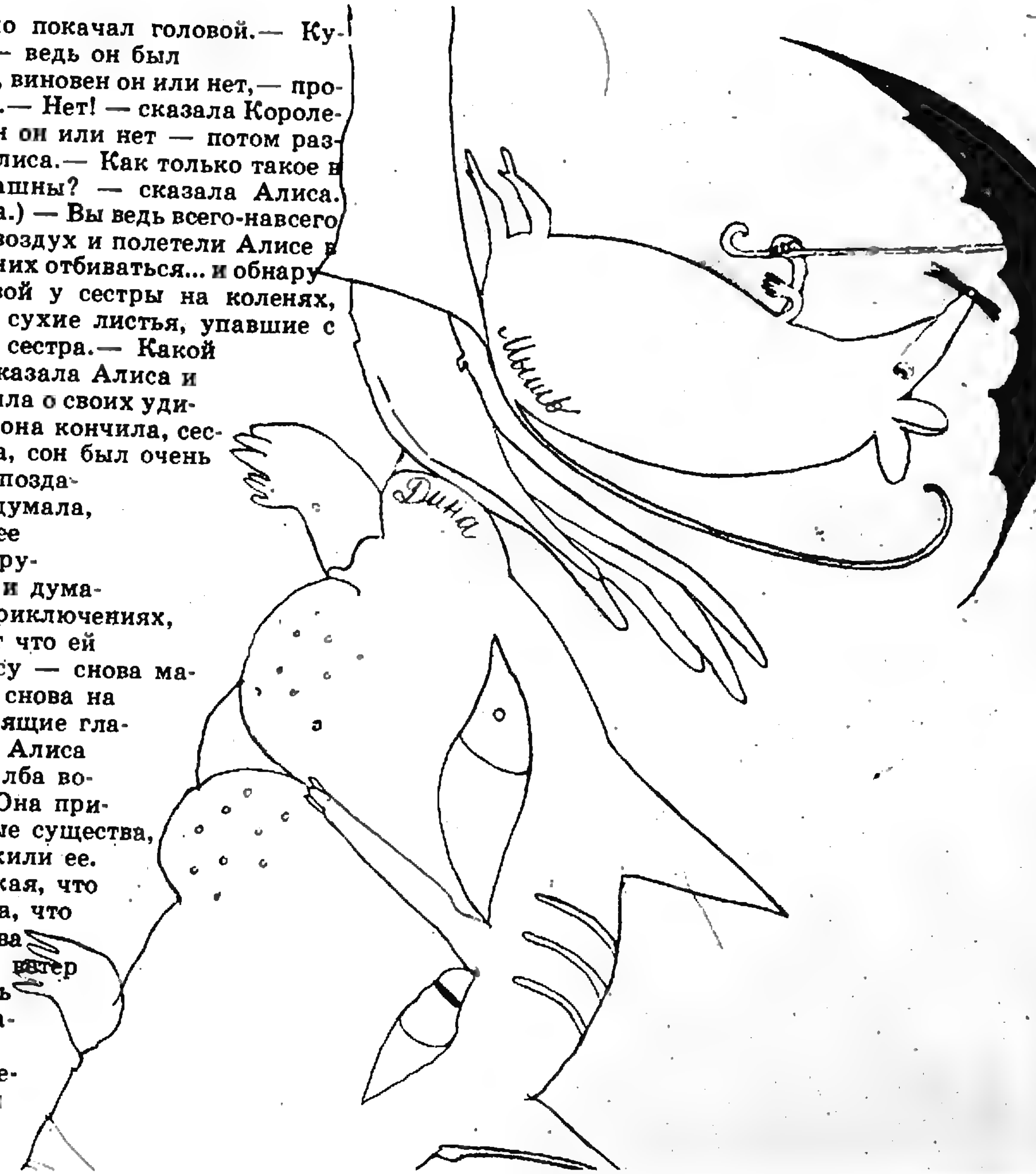

Синяя гусеница
Почему, если выходят (см. др. стр.)

хочет, конечно, сказать: неважно,— произнес он почтительно.— Ну да,— поспешно сказал Король.— Я именно это и хотел сказать. Конечно, неважно! И забормотал вполголоса: — Важно — неважно... неважно — важно... Некоторые присяжные записали: «Важно!», а другие — «Неважно!». В эту минуту Король крикнул: — Тихо! Посмотрел в записную книжку и прочитал: «Правило 42. Всем, в ком больше мили росту, следует немедленно покинуть зал».— Никуда я не уйду,— сказала Алиса.— И вообще, это не настоящее правило. Вы его только что выдумали.— Это самое старое правило в книжке! — возразил Король.— Почему же оно тогда 42-е? — спросила Алиса.— Оно должно быть первым! Король побледнел и торопливо закрыл книжку. Белый Кролик поспешно вскочил со своего места.

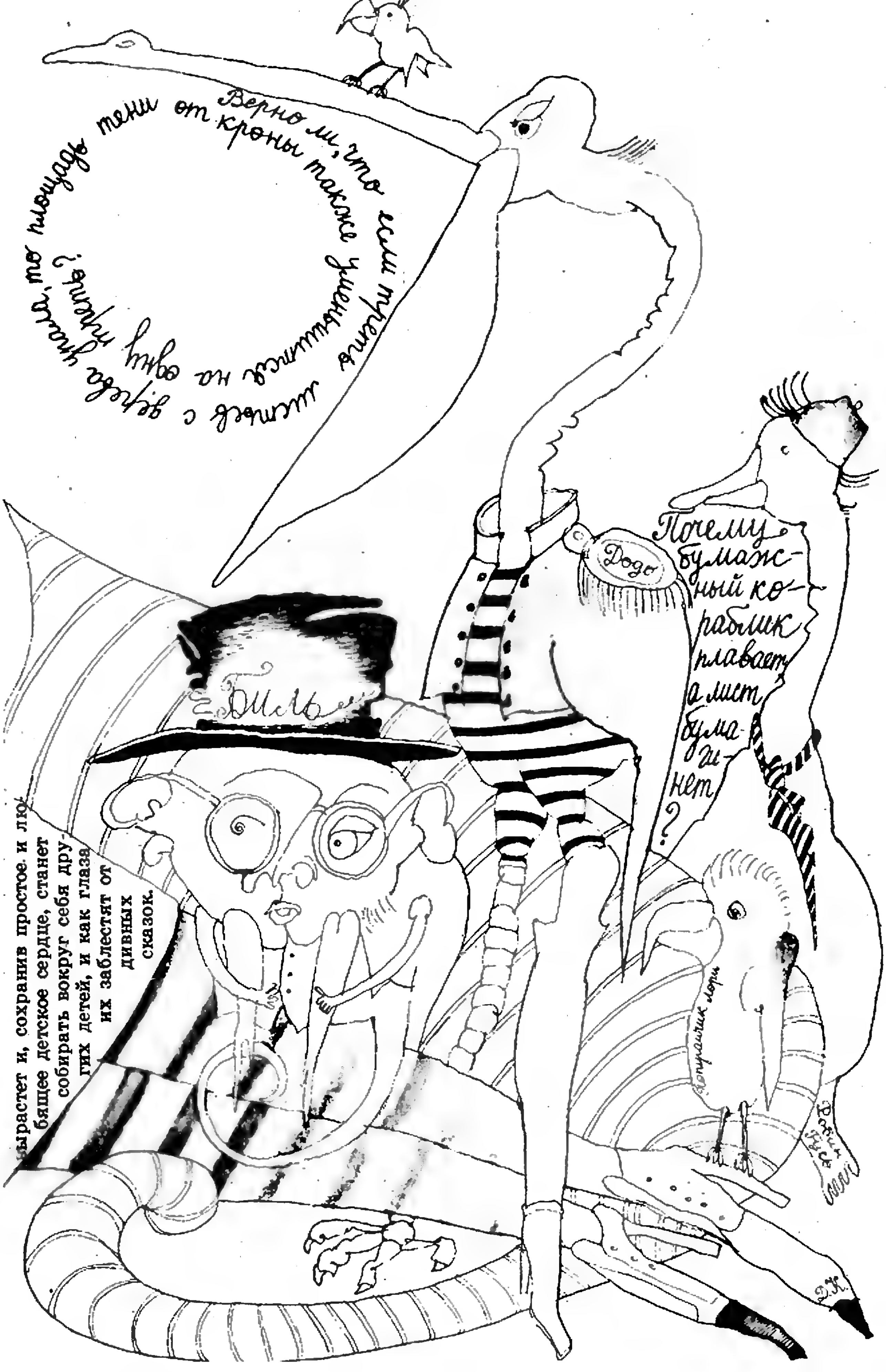
— С позволения Вашего Величества,— сказал он,— тут есть еще улики. Только что был найден один документ.— Читай! — сказал Король Кролику. Кролик надел очки. Воцарилось мертвое молчание. Вот что прочитал Белый Кролик. Я знаю, с ней ты говорил И с ним, конечно, тоже. Она сказала: «Очень мил, Но плавать он не может». Там побывали та и тот (Что знают все на свете), Но если б делу дали ход, Вы были бы в ответе. Я дал им три, они нам — пять, Вы шесть им посулили. Но все вернулись к вам опять, Хотя моими были. Она, конечно, горяча, Не спорь со мной напрасно. Да, видишь ли, рубить сплеча Не так уж безопасно. Но он не должен знать о том (Не выболтай случайно), Все остальные ни при чем, И это наша тайна.— Это очень важная улика,— проговорил Король.— Все, что мы сегодня слышали, по сравнению с ней бледнеет. А теперь пусть присяжные обдумают свое... Но Алиса не дала ему кончить.— Если кто-нибудь из них сумеет объяснить мне эти стихи,— сказала Алиса, — я дам ему шесть пенсов.— Я уверена, что в них нет никакого смысла! Король взглянул на стихи одним глазом и произнес: — Кое-что я, кажется, объяснить могу, «...но плавать он не может...» И, повернувшись к Валету, Король спросил: — Ты


Белый
Кролик
Что было важно для Кролика, а что для Короля: то что неважно или то, что почтительно?

ведь не можешь плавать? Валет грустно покачал головой.— Куда мне! — сказал он. (Это было верно — ведь он был бумажный.) — Пусть присяжные решают, виновен он или нет,— произнес Король в двадцатый раз за этот день.— Нет! — сказала Королева.— Пусть выносят приговор! А виновен он или нет — потом разберемся! — Чепуха! — сказала громко Алиса.— Как только такое в голову может прийти! — Кому вы страшны? — сказала Алиса. (Она уже выросла до своего обычного роста.) — Вы ведь всего-навсего колода карт! Тут все карты поднялись в воздух и полетели Алисе в лицо. Она вскрикнула, принялась от них отбиваться... и обнаружила, что лежит на берегу, головой у сестры на коленях, а та тихо смахивает у нее с лица сухие листья, упавшие с дерева.— Алиса, проснись сказала сестра.— Какой мне странный сон приснился! — сказала Алиса и рассказала сестре все, что запомнила о своих удивительных приключениях. А когда она кончила, сестра поцеловала ее и сказала: — Правда, сон был очень странный! А теперь беги домой, не то опоздаешь к чаю. Алиса бежала и все время думала, что это был за чудесный сон. А сестра ее осталась сидеть на берегу. Подпершись рукой, смотрела она на заходящее солнце и думала о маленькой Алисе и ее чудесных Приключениях, пока не погрузилась в полудрему. И вот что ей привиделось. Сначала она увидела Алису — снова маленькие руки обвились вокруг ее колен, снова на нее смотрели снизу вверх большие блестящие глаза. Она слышала ее голос и видела, как Алиса встряхивает головой, чтобы откинуть со лба волосы, которые вечно лезут ей на глаза. Она прислушалась: все вокруг ожило, и странные существа, которые снились Алисе, казалось, окружили ее. Так она и сидела, закрыв глаза, воображая, что и она попала в Страну Чудес, хотя знала, что стоит ей открыть их, как все вокруг снова станет привычным и обыденным; только ветер зашуршит травой, погонит по пруду рябь и зашатает камыши; звон посуды превратится в треньканье колокольчика на шее у овцы, пронзительный голос Королевы — в окрик пастуха, плач младенца и крик Грифона — в шум скотного двора. И она представила себе, как ее сестра



·из себя, то, как правило, сразу много, а приходит в себя понемногу?


Верно ли, что если треть листьев с дерева упала, то площадь тени от кроны также уменьшится на одну треть?
Биль
Dodo
Почему бумажный кораблик плавает, а лист бумаги тонет?
Попугайчик Лори
Робин Гусь
Д.К.

ырастет и, сохранив простое и любящее детское сердце, станет собирать вокруг себя других детей, и как глаза их заблестят от дивных сказок.

задачник кванта

Задачи

М1016—М1020; Ф1028—Ф1032

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 февраля 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12—86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1016, М1017» или «Ф1028». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию и имя просим писать печатными буквами. Задачи М1017 — М1019 предлагались на XXVII Международной математической олимпиаде.

М1016. Многоугольник описан около окружности с центром O. Пусть P — центр масс многоугольника, K — центр масс его контура. Докажите, что точки P, O и K лежат на одной прямой, причем $PO=2PK$. (При определении центра P мы рассматриваем многоугольник как однородную пластину, центра K — как контур из однородной проволоки.).

И. З. Вайнштейн

М1017*. Каждой вершине правильного пятиугольника приписано некоторое целое число так, что сумма всех пяти чисел положительна. Разрешается проделать следующую операцию: если трем последовательным вершинам приписаны числа x, y, z и $y<0$, то эти числа заменяются соответственно на $x+y$, $-y$ и $z+y$. Такие операции выполняются, пока хотя бы одно из пяти чисел отрицательно. Обязательно ли этот процесс закончится через конечное число шагов?

М1018. Пусть A и B — соседние вершины правильного n-угольника с центром O. Треугольник XYZ, равный треугольнику OAB, вначале совпадает с ним, а потом движется в плоскости n-угольника так, что точки Y и Z остаются на контуре, а X — внутри n-угольника. Какую фигуру опишет точка X, когда Y и Z совершат полный оборот по границе n-угольника?

М1019. На листе клетчатой бумаги отмечено некоторое конечное множество M узлов (точек пересечения линий сетки). Докажите, что всегда можно окрасить некоторые точки множества M в белый цвет, а остальные — в красный так, чтобы на каждой линии сетки разность между числом белых и красных узлов по модулю не превосходила 1.

М1020*. На сфере радиуса 1 проведена

а) кривая, длина которой меньше π;

б) замкнутая кривая, длина которой меньше 2π.

Докажите, что найдется плоскость, проходящая через центр сферы, не пересекающая проведенной кривой. (Можно считать, что кривая на сфере — это «ломаная», состоящая из дуг больших кругов.)

В. В. Прасолов, Г. А. Гальперин

Ф1028. Легкий стержень с массивным шариком на верхнем конце начинает падать из вертикального положения без начальной скорости. Нижний

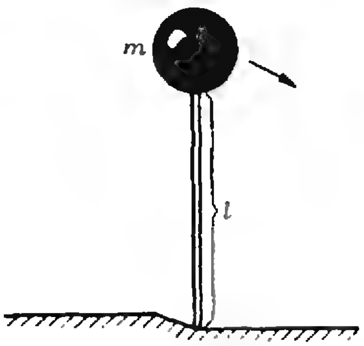


Рис. 1.

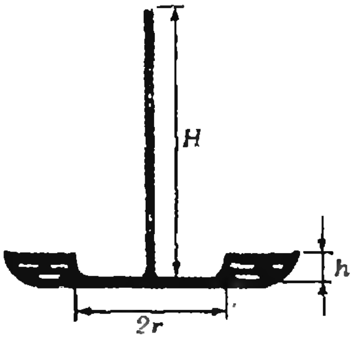


Рис. 2.

конец стержня упирается в уступ на горизонтальной плоскости (рис. 1). Какой угол с вертикалью будет составлять скорость шарика в момент удара о плоскость?

Е. И. Бутиков

Ф1029. При стационарном падении струи воды на плоское блюдце можно наблюдать такую картину: в некотором радиусе r от места падения струи уровень воды очень низок, а на расстоянии r уровень испытывает скачок (рис. 2). Оцените радиус r, если расход воды q, высота падения H, высота водяной ступени h. Считать, что начальная скорость истечения воды из крана $v_0 \ll \sqrt{2gH}$.

А. А. Алабугин, А. В. Уманский

Ф1030. На невесомой нити жесткостью k висит тело массой m. Максимальное натяжение, которое выдерживает нить, равно T. Тело приподнимают на высоту x от положения равновесия и отпускают. При каком минимальном x нить порвется?

В. Г. Харитонов

Ф1031. Проводящая сфера разбилась на несколько осколков, разлетевшихся на большие расстояния друг от друга. Осколки в произвольном порядке соединяют тонкими проводами. Что больше: электроемкость получившейся системы осколков или электроемкость сферы? Емкостью проводов пренебречь.

И. М. Луценко, ученик 10 класса

Ф1032. На автомобилях для обзора происходящего сзади используется зеркало заднего вида. Это зеркало может быть плоским или выпуклым. Распространено мнение, что одним из недостатков выпуклого зеркала является неравномерность прироста изображения равномерно приближающихся к нему предметов, из-за чего водитель автомобиля с таким зеркалом обращает внимание на нагоняющий автомобиль в потоке транспорта, лишь когда тот выходит из ряда для обгона. Верно ли это представление?

Найдите связь скорости равномерно движущегося вдоль главной оптической оси сферического зеркала предмета со скоростью изменения размеров его изображения в зеркале. Сравните выпуклое зеркало заднего вида с плоским. Каковы его преимущества и недостатки?

В. А. Котов

Problems

M1016 — M1020; P1028 — P1032

M1016. Let P be the centre of mass of a polygon inscribed in a circle of centre O, K — the centre of mass of its boundary. Prove that the points P, O and K are on one straight line and $PO = 2 \cdot PK$. (In determining the point P, we view the polygon as a uniform plate; for the point K — as a uniform wire contour.)

I. Z. Vainshtein

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no

information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than February 15th 1987, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send in to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

M1017*. To each vertex of a regular pentagon an integer is assigned in such a way that the sum of all the five numbers is positive. If three consecutive vertices are assigned the numbers x, y, z respectively and $y<0$, then the following operation is allowed: the numbers x, y, z are replaced by $x+y$, $-y$, $z+y$ respectively. Such an operation is performed repeatedly as long as at least one of the five numbers is negative. Determine whether this procedure necessarily comes to an end after a finite number of steps.

M1018. Let A, B be adjacent vertices of a regular n-gon ($n \geqslant 5$) in the plane having center at O. A triangle XYZ, which is congruent to and initially coincides with OAB, moves in the plane in such a way that Y and Z each trace out the whole boundary of the polygon, X remaining inside the polygon. Find the locus of X.

M1019. One is given a finite set of points in the plane, each point having integer coordinates. Is it always possible to color some of the points in the set red and the remaining points white in such a way that for any strainght line L parallel to either one of the coordinate axes the difference (in absolute value) between the numbers of white points and red points on L is not greater than 1? Justify your answer.

M1020*. Two lines are drawn on the surface of a sphere of radius 1:

a) a curve of length less than π;

b) a closed curve of length less than 2π.

Prove, for each of the cases a) and b), that there exists a plane passing through the centre of the sphere which does not intersect the given curve. (It may be assumed that a curve on the sphere is a «polygonal line» consisting of arcs of great circles.)

V. V. Prasolov, G. A. Galperin

P1028. A weightless rod with a small massive ball at the upper extremity begins to fall from vertical position without initial velocity. The lower extremity is blocked from the side as shown on figure Рис. 1 (p. 27). What angle with the vertical will the velocity of the ball form at the moment of contact with the horizontal plane?

E. I. Butikov

P1029. In the stationary fall of a stream of water on a flat saucer, the following picture may be observed: at some distance r from the place where the stream falls, the water level is very low and then jumps sharply upward (see figure Рис. 2). Estimate the distance r if the rate of water flow is q, it falls from height H and the height of the "step" of water is h. You may assume that the initial velocity of water flowing out of the tap is $v_0 \ll \sqrt{2gH}$.

A. A. Alabugin, A. V. Umanski

P1030. A weightless string of elasticity k supports a body of mass m. The maximal tension which the string can withhold is T. The body is lifted to the height x above its initial position and then dropped. For what minimal x will the string break?

V. G. Kharitonov

P1031. A conducting sphere broke into several pieces which fell in different directions far from each other. The pieces are joined in arbitrary order by thin wires. What is greater — the electric capacity of the system thus obtained of that of the whole sphere? The capacity of the wires is negligible.

I. M. Lutsenko, 10th form pupil

P1032. Rear view mirrors in automobiles can be convex or plane. The general opinion is that one of the defects of convex rear view mirrors is the non-uniform size increase of images of objects uniformly approaching the mirror, as the result of which the driver looking into such a mirror will notice a car catching up with him only if it changes lanes to pass him. Is this correct? Find the relationship between the speed of an object moving uniformly along a spherical mirror's optical axis and the rate of change of its mirror image's size. Compare a convex mirror with a plane one. What are its advantages and disadvantages?

V. A. Kotov

Решения задач

М996—М1000; Ф1008—Ф1012

М996. *Два одинаковых квадрата в пересечении образуют восьмиугольник. Стороны одного квадрата синие, другого — красные. Докажите, что сумма длин синих сторон восьмиугольника равна сумме длин его красных сторон.*

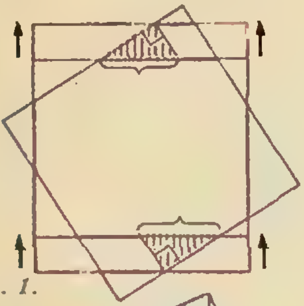


Рис. 1.

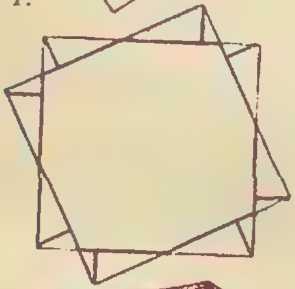
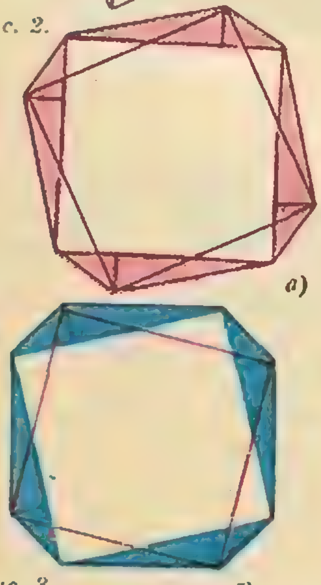


Рис. 2.


а)

б)

Рис. 3.

Если центры квадратов совпадают, утверждение задачи очевидно. Это расположение всегда можно получить, сдвинув параллельно один из квадратов, поэтому достаточно доказать, что при параллельном переносе, скажем, красного квадрата сумма красных сторон восьмиугольника-пересечения не меняется. При этом можно ограничиться сдвигом вдоль одной из сторон этого квадрата, так как любой параллельный перенос можно заменить двумя такими сдвигами (вдоль перпендикулярных сторон).

Итак, сдвинем красный квадрат вдоль одной из его сторон (рис. 1). Тогда две стороны восьмиугольника (параллельные направлению сдвига) не изменятся; третья сторона уменьшится на величину, равную гипотенузе прямоугольного треугольника, показанного на рисунке 1 штриховкой, а четвертая сторона увеличится на такую же величину (заштрихованные треугольники, очевидно, имеют одинаковые углы и одинаковые высоты, опущенные на гипотенузу, и следовательно, равны). Таким образом, сумма всех 4 красных сторон не меняется, что и требовалось доказать.

Приведем еще одно решение. Рассмотрим прямоугольные треугольники, отсекаемые от каждого из квадратов сторонами другого квадрата, и проведем в них высоты из вершин прямых углов. Все эти треугольники подобны между собой, поэтому достаточно доказать, что сумма красных высот (см. рис. 2) равна сумме синих высот. Для доказательства надо только заметить, что сумма площадей 4 красных треугольников (рис. 3, *а*) равна сумме площадей синих треугольников (рис. 3, *б*), поскольку каждая из этих сумм равна разности площади выпуклого восьмиугольника, вершинами которого являются вершины данных квадратов, и площади квадрата, и что эти суммы равны произведениям полупериметра квадрата на суммы красных и синих высот.

Аналогичное рассуждение о площадях упомянутых выше прямоугольных треугольников, отсекаемых квадратами друг от друга, показывает, что и сумма квадратов длин красных сторон восьмиугольника равна сумме квадратов длин синих сторон.

В. В. Произволов

◆

М997. *Докажите, что сумма всех чисел вида $1/mn$, где m и n — натуральные числа, $1 \leqslant m < n \leqslant 1986$, не является целым числом.*

Среди чисел от 1 до 1986 имеются ровно два — $729 = 3^6$ и $1458 = 2 \cdot 3^6$, — делящиеся на 3^6; наибольшая степень 3, на которую могут делиться остальные числа,— 3^5. Таким образом, всевозможные произведения mn $(1 \leqslant m < n \leqslant 1986)$, за исключением $729 \cdot 1458 = 2 \cdot 3^{12}$, содержат множителем число 3 самое большее в степени 11. Приведя сумму всех дробей $1/mn$ (кроме $1/729 \cdot 1458$) к наименьшему общему знаменателю, мы получим дробь вида $a/(3^{11}\cdot b)$, где a и b — натуральные числа, причем b не делится на 3. Пусть s — сумма, рассматриваемая в задаче, тогда

$$s-\frac{a}{3^{11}b}=\frac{1}{2\cdot 3^{12}},$$

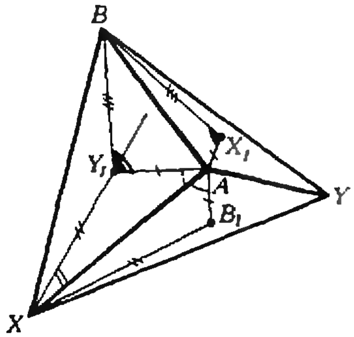
или $2\cdot 3^{12}sb-6a=b$. При целом s левая часть здесь делится на 3, а правая — нет. Поэтому s не может быть целым.

Д. А. Митькин

М998*. *Рассмотрим все тетраэдры $AXBY$, описанные около данной сферы. Докажите, что при фиксированных точках A и B сумма углов четырехугольника $AXBY$, то есть сумма*

$$\angle AXB+\angle XBY+\\+\angle BYA+\angle YAX,$$

не зависит от выбора точек X и Y.



◆

Обозначим через A_1, B_1, X_1, Y_1 точки касания сферы с гранями BXY, XYA, YAB, ABX соответственно (см. рисунок). Треугольники AXB_1 и AXY_1 равны (сторона AX у них общая, а $AB_1=AY_1$ и $XB_1=XY_1$ как касательные, проведенные к сфере из общей точки), поэтому $\angle B_1AX=\angle Y_1AX$. Следовательно, сумма $\angle B_1AX+\angle AXY_1$ равна $\angle Y_1AX+\angle AXY_1$, то есть внешнему углу треугольника AY_1X при вершине Y_1 (на рисунке отмечен красной дужкой). Аналогично сумма $\angle A_1BX+\angle BXY_1$ равна внешнему углу треугольника BY_1X при Y_1 (отмечен синей дужкой), поэтому $\angle B_1AX+\angle AXB+\angle A_1BX=\angle AY_1B$. Точно так же

$$\angle B_1AX+\angle AYB+\angle A_1BY=\angle AX_1B.$$

Складывая эти равенства, получим в левой части рассматриваемую в задаче сумму углов, а в правой — величину, не зависящую от X и Y (точки X_1 и Y_1 определяются прямой AB и сферой однозначно).

И. Ф. Шарыгин

М999*. *а) Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполнено неравенство*

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\ldots+\frac{n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}<4\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

Докажите, что константу 4 в правой части неравенства

б) можно заменить на 2;

в) нельзя заменить числом, меньшим 2.

◆

а) Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — это последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, расположенных в порядке возрастания. Поскольку при любом i от 1 до n

$$\frac{i}{a_1+a_2+\ldots+a_i}\leqslant\frac{i}{b_1+b_2+\ldots+b_i}$$

и

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n},$$

достаточно доказать неравенство для чисел b_i:

$$\frac{1}{b_1}+\frac{2}{b_1+b_2}+\ldots+\frac{n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}\leqslant 4\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_n}\right).$$

Оценим слагаемые в левой части так:

$$\frac{2}{b_1+b_2}\leqslant\frac{2}{b_1+b_1}=\frac{1}{b_1},$$

и при любом k, $2\leqslant k\leqslant(n+1)/2$,

$$\frac{2k-1}{b_1+b_2+\ldots+b_{2k-1}}\leqslant\frac{2k-1}{b_k+\ldots+b_{2k-1}}\leqslant\frac{2k-1}{kb_{k-1}}<\frac{2}{b_{k-1}},$$

$$\frac{2k}{b_1+b_2+\ldots+b_{2k}}\leqslant\frac{2k}{b_{k+1}+\ldots+b_{2k}}\leqslant\frac{2k}{kb_k}=\frac{2}{b_k}.$$

Отсюда следует нужное неравенство:

$$\frac{1}{b_1}+\frac{2}{b_1+b_2}+\frac{3}{b_1+b_2+b_3}+\frac{1}{b_1+b_2+b_3+b_4}+\ldots<$$

$$<\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_1}+\frac{2}{b_1}+\frac{2}{b_2}+\frac{2}{b_2}+\frac{2}{b_3}+\frac{2}{b_3}+\ldots=$$

$$=4\left(\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\ldots\right).$$

б) Пример, приведенный в пункте в), подсказывает, что неравенство с константой 2 в правой части близко к равенству, когда числа a_i/i примерно равны. Положим $t_i=a_i/i$, $1\leqslant i\leqslant n$. Тогда для любого $m\leqslant n$ верна такая оценка:

$$(p_1+\ldots p_N)\left(\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_N}\right)\geqslant$$

$$\geqslant N+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant N}\left(\frac{p_i}{p_j}+\frac{p_j}{p_i}\right)\geqslant$$

$$\geqslant N+\frac{N(N-1)}{2}\cdot 2=N^2$$

$$\frac{m}{a_1+a_2+\ldots+a_m}=\frac{m}{t_1+2t_2+\ldots+mt_m}=\frac{m}{t_1+\underbrace{t_2+t_2}_{2}+\ldots+\underbrace{t_m+\ldots+t_m}_{m}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{m}{(m(m+1)/2)^2}\left(\frac{1}{t_1}+\underbrace{\frac{1}{t_2}+\frac{1}{t_2}}_{2}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{t_m}+\ldots+\frac{1}{t_m}}_{m}\right)=$$

$$=\frac{4}{m(m+1)^2}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{2}{t_2}+\ldots+\frac{m}{t_m}\right)=\frac{4}{m(m+1)^2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{2^2}{a_2}+\ldots+\frac{m^2}{a_m}\right)$$

(мы применили неравенство, указанное на полях, для $N=\frac{m(m+1)}{2}=1+2+\ldots+m$ чисел, среди которых t_j берется j раз; ту же оценку можно получить, используя неравенство Коши-Буняковского для наборов $x_i=\sqrt{a_i}$ и $y_i=i/\sqrt{a_i}$, $1\leqslant i\leqslant m$).

Неравенство Коши-Буняковского:
$$(x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2)\geqslant$$
$$\geqslant(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2$$

Сложим все такие оценки при m от 1 до n; коэффициент при $1/a_i$ будет равен

$$\beta_i=4i^2\left(\frac{1}{i(i+1)^2}+\frac{1}{(i+1)(i+1)^2}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)^2}\right).$$

А поскольку

$$\frac{1}{j(j+1)^2}<\frac{1}{2}\,\frac{2j+1}{j^2(j+1)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{j^2}-\frac{1}{(j+1)^2}\right),$$

справедлива оценка

$$\beta_i<4i^2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)<2.$$

в) Положим $a_i=i$. Тогда левая часть неравенства равна $2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{1+n}\right)$, а правая $c\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)$, где c — константа, на которую мы и хотим заменить 4. Если $c\leqslant 2$, то их разность

$$2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)-c\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=(2-c)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n+1}-c$$

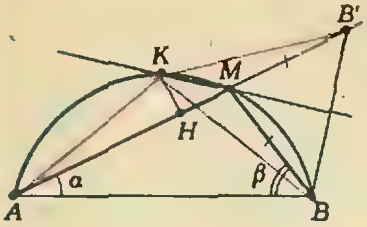
при достаточно большом n будет положительна, поскольку с ростом n сумма $\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}$ неограниченно растет.

Это следует, например, из такой оценки: при $n=2^k$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^k}>\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}}_{2^1}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{2^k}+\ldots+\frac{1}{2^k}}_{2^{k-1}}=\frac{k}{2}$$

Л. Д. Курляндчик, Л. С. Меркурьев

М1000. *В дугу AB вписана ломаная AMB из двух отрезков ($AM > MB$). Докажите, что основание перпендикуляра KH, опущенного из середины K дуги AB на отрезок AM, делит ломаную пополам: $AH = HM + MB$.*



На продолжении отрезка AM отложим точку B' такую, что $MB' = MB$ (см. рисунок). Угол $B'MB$ как внешний угол треугольника AMB равен сумме углов MAB и MBA. В то же время угол KMA как вписанный измеряется половиной дуги AK и, следовательно, равен полусумме углов MAB и MBA. Поэтому MK — биссектриса угла $B'MB$. Это значит, что $MK \perp B'B$ и $KB' = KB$. Отсюда следует, что $KA = KB = KB'$. Опуская из точки K перпендикуляр KH на AM, получим $AH = HB' = HM + MB$, что и требовалось.

Эту задачу можно решить и с помощью тригонометрии: положив $\angle MAB = \alpha$, $\angle MBA = \beta$, получим: $AM = 2R \sin \beta$, $MB = 2R \sin \alpha$. Поэтому Поэтому

$$AM + MB = 2R(\sin \beta + \sin \alpha) = 4R \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

С другой стороны,

$$AK = 2R \sin \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \angle KAM = \frac{\beta-\alpha}{2},$$

и потому

$$AH = 2R \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{1}{2}(AM + MB).$$

Архимед — автор этой задачи — опубликовал ее в трактате «Измерение круга» в такой формулировке: *«Если вписанный в дугу окружности сломанный на две неравные части отрезок прямой принимает опущенный на него из середины дуги перпендикуляр, то этот перпендикуляр разделит всю ломаную линию пополам»*. Это утверждение позволяло вычислять длины хорд суммы и разности двух данных дуг.

А. А. Егоров

◆

Ф1008. *Стержень AB помещен внутрь цилиндра. В точке A стержень закреплен шарнирно, в точке C он опирается на верхнюю кромку цилиндра, точки A и C лежат в вертикальной плоскости, проходящей через ось цилиндра (рис. 1); угол, который составляет стержень с горизонтом, равен α. Стержень смещают по верхней кромке так, что он касается ее в точке C' и угол $C'OC$ равен φ. При каком минимальном коэффициенте трения стержень будет находиться в этом положении в равновесии?*

Пусть стержень находится в равновесии в новом положении, когда он касается цилиндра в точке C'. На стержень действуют сила тяжести, сила реакции шарнира в точке A, сила $\vec{N}$ нормальной реакции цилиндра в точке C' и сила трения $\vec{f}$. Условие равновесия стержня — равенство нулю геометрической суммы этих сил и равенство нулю суммы моментов сил.

Из всех уравнений равновесия стержня рассмотрим одно — равенство нулю суммы моментов сил относительно вертикальной оси, проходящей через точку A (относительно этой оси момент силы реакции шарнира и момент силы тяжести равны нулю). Нетрудно понять, что это условие сводится к тому, что суммарный вектор сил $\vec{N}$ и $\vec{f}$ лежит в вертикальной плоскости, проходящей через стержень (нас впоследствии будет интересовать только горизонтальная составляющая этой суммарной силы). Определим теперь направления векторов $\vec{N}$ и $\vec{f}$ и значения проекций этих векторов на горизонтальную плоскость — N_x, N_y, f_x и f_y. Оси координат X, Y и Z направим из точки C' соответственно в центр окружности O, по касательной к окружности и вертикально вверх (рис. 2).

Введем три единичных вектора $\vec{n}_l$, $\vec{n}_N$ и $\vec{n}_f$, которые направлены соответственно вдоль стержня, вдоль силы $\vec{N}$ и вдоль силы $\vec{f}$. Пусть угол, который образует вектор $\vec{n}_l$ с горизонтом, равен α'. Так как в результате поворота стержня вертикальная плоскость, в которой он лежит, поворачивается на угол $\varphi/2$, то нетрудно показать, что

$$\operatorname{tg}\alpha'=\operatorname{tg}\alpha/\cos(\varphi/2).$$

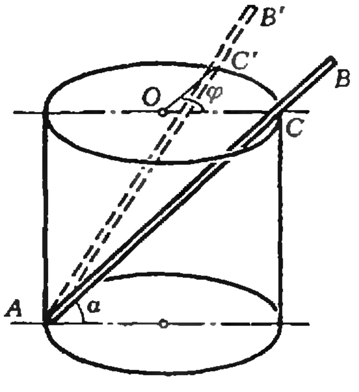


Рис. 1.

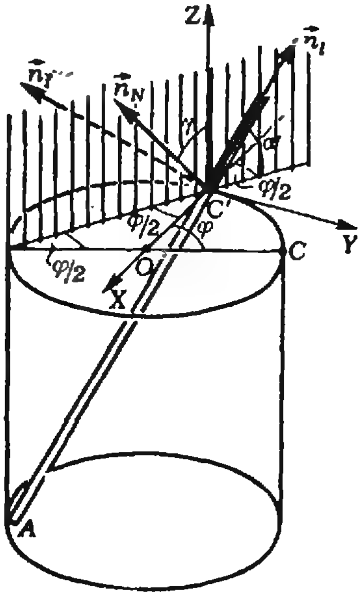


Рис. 2.

Выразим каждый из векторов $\vec{n}_l$, $\vec{n}_N$ и $\vec{n}_f$ через единичные векторы $\vec{n}_x$, $\vec{n}_y$ и $\vec{n}_z$. Начнем с $\vec{n}_l$:

$$\vec{n}_l=\vec{n}_x\left(-\cos\alpha'\cos\frac{\varphi}{2}\right)+\vec{n}_y\cos\alpha'\sin\frac{\varphi}{2}+\vec{n}_z\sin\alpha'.$$

Сила $\vec{N}$ перпендикулярна стержню и касательной к окружности в точке C' (кромке цилиндра), откуда следует, что вектор $\vec{n}_N$ перпендикулярен вектору $\vec{n}_y$, то есть

$$\vec{n}_N=\vec{n}_x\sin\gamma+\vec{n}_z\cos\gamma, \qquad (*)$$

а также вектору $\vec{n}_l$. Отсюда получим соотношение между углами γ и α' в виде

$$\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha'/\cos(\varphi/2).$$

Чтобы определить направление вектора $\vec{n}_f$, учтем, что он перпендикулярен и вектору $\vec{n}_N$, и вектору $\vec{n}_l$. После несложных выкладок получим

$$\vec{n}_f=\vec{n}_x\left(-\cos\gamma\cos\alpha'\sin\frac{\varphi}{2}\right)+$$
$$+\vec{n}_y\left(-\sin\gamma\sin\alpha'-\cos\gamma\cos\alpha'\cos\frac{\varphi}{2}\right)+$$
$$+\vec{n}_z\sin\gamma\cos\alpha'\sin\frac{\varphi}{2}. \qquad (**)$$

Из уравнений (*) и (**) следует, что

$$N_x=N\sin\gamma,\ N_y=0,$$

$$f_x=f\left(-\cos\gamma\cos\alpha'\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$f_y=f\left(-\sin\gamma\sin\alpha'-\cos\gamma\cos\alpha'\cos\frac{\varphi}{2}\right).$$

Как уже было отмечено, уравнение моментов сил сводится к тому, что, в частности, горизонтальная проекция суммы сил $\vec{N}$ и $\vec{f}$ должна лежать в плоскости стержня, то есть

$$f_x\sin\frac{\varphi}{2}+N_x\sin\frac{\varphi}{2}+f_y\cos\frac{\varphi}{2}=0.$$

Минимальное значение коэффициента трения $k_{\min}$ определяется соотношением $k_{\min}N=f$. Тогда окончательно получим

$$k_{\min}=\frac{\operatorname{tg}(\varphi/2)}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2(\varphi/2)}}.$$

С. С. Кротов

Ф1009. *Плоский диск радиуса R, расположенный в горизонтальной плоскости, начинают продвигать между двумя вертикальными нитями, расстояние между которыми R; длина каждой нити $2l$, жесткость k, концы нитей закреплены (рис. 1). Найти силу, дейст-*

◆

Рассмотрим систему через некоторое время после начала движения диска. Пусть за это время диск сместился на расстояние AA' ($|AA'|=|BB'|$, где A и B — точки крепления нитей на виде сверху (рис. 2)). Покажем, что в этот момент точки A_1 и B_1 касания нитей с диском лежат на радиусах, проходящих через точки A и B (см. рис. 2, *а*).

вующую на диск со стороны одной нити через время t, если в начальный момент нити были нерастянуты и касались диска; диск двигают с постоянной скоростью v. Толщиной диска пренебречь; трение не учитывать.

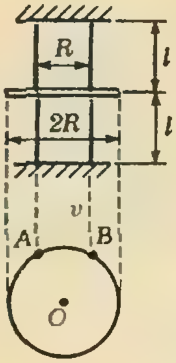


Рис. 1.

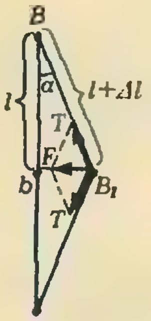


Рис. 3. b — точка на диске, лежащая под точкой B крепления нити; $|bB_1|=r$.

Ф1010. *Две диэлектрические заряженные нити бесконечной длины расположены в пространстве как две скрещивающиеся перпендикулярные прямые. Линейная плотность*

Предположим, что правая нить касается диска в точке B_2, лежащей ниже точки B_1 (рис. 2, *б*). Очевидно, что сила T упругости нити направлена вдоль отрезка BB_2. Эта сила имеет проекции на касательную к диску в точке B_2 и на радиус OB_2. Со стороны диска на нить действует сила реакции N, направленная по радиусу OB_2. Вдоль касательной никакие силы со стороны диска на нить не действуют (трение отсутствует). Следовательно, в результате действия силы T, направленной вдоль BB_2, точка B_2 нити будет скользить по краю диска к точке B_1. К аналогичному выводу мы пришли бы, предположив, что точка касания нити с диском лежит выше точки B_1. (Подобные рассуждения справедливы и для левой нити.)

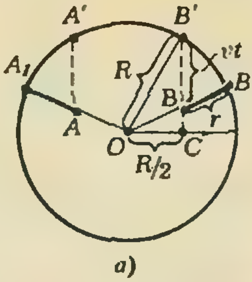
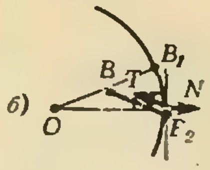


Рис. 2. а) В треугольнике $OB'C$

$\angle OB'C=30^\circ$, $\cos \widehat{OB'C}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



В треугольнике $OB'B$ $|OB'|=R$, $|BB'|=vt$,

$$|OB|=\sqrt{R^2+v^2t^2-Rvt\sqrt{3}}.$$

Так что

$$r=R-\sqrt{R^2+v^2t^2-Rvt\sqrt{3}}.$$

Следовательно, в любой момент нити касаются диска в точках, которые лежат на радиусах, проходящих через точки A и B. Найдем силу F, действующую на диск со стороны левой нити в момент, когда $|BB'|=vt$ (см. рис. 2, *а*).

Пусть удлинение нити к этому моменту равно Δl. Тогда со стороны каждой половины нити на диск в точке B_1 действует сила $T=k\cdot\Delta l$, и суммарная сила, с которой нить действует на диск, равна

$$F=2T\sin\alpha=2k\cdot\Delta l\cdot\sin\alpha,$$

где α — угол, который составляют половины нити с вертикалью (рис. 3). Как видно из рисунка 3,

$$\sin\alpha=\frac{|bB_1|}{|BB_1|}=\frac{r}{l+\Delta l},$$

$$l+\Delta l=\sqrt{l^2+r^2},\ \Delta l=\sqrt{l^2+r^2}-l,$$

так что

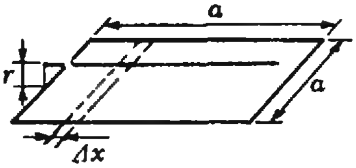
$$F=2kr\frac{\sqrt{l^2+r^2}-l}{\sqrt{l^2+r^2}}=2kr\left(1-\frac{l}{\sqrt{l^2+r^2}}\right),$$

где $r=R-\sqrt{R^2-Rvt\sqrt{3}+v^2t^2}$ (см. рис. 2, *а*).

А. С. Розенберг

◆

Для решения задачи рассмотрим такую модель. Над диэлектрической пластиной, имеющей форму квадрата со стороной a и заряженной с поверхностной плотностью заряда ρ, натянута диэлектрическая заряженная нить длины $l=a$ с линейной *зарядов на нитях σ. Найти силу взаимодействия нитей. Считать, что нити очень тонкие и перераспределение зарядов не происходит.*



Ф1011. *Воздушный шар, подъемная сила которого создается горячим воздухом, устроен так, что объем его обогреваемой камеры практически постоянен, и давление в ней равно внешнему давлению, так как камера в нижней своей части сообщается с атмосферой. Обогрев в камере производится постоянно для компенсации теплоотдачи в окружающую среду. Такой шар при постоянной мощности нагревателя плавает в атмосфере на определенной высоте. На сколько изменится высота плавания, если при увеличении мощности нагревателя средняя температура воздуха в камере увеличится на Δt=0,1 °C от начальной температуры t=57 °C? Температура окружающей среды t₀=17 °C.*

плотностью заряда σ. Нить параллельна стороне квадрата и находится на высоте r ($r \ll a$) от него (см. рисунок).

Разобьем плоскость на очень тонкие полоски шириной Δx такие, что

$$\Delta x \cdot \rho = \sigma \Rightarrow \Delta x = \sigma / \rho$$

(каждая полоска не что иное, как «нить» с линейной плотностью заряда σ). Так как $r \ll a$, можно считать, что сила f, с которой каждая полоска действует на нить, одна и та же. Эта сила и есть искомая в задаче величина. Найдем ее.

Сила F, с которой действует плоскость на нить, равна

$$F = 2\pi k \rho \cdot \sigma l$$

(поскольку $r \ll a$); с другой стороны,

$$F = \sum f = f \frac{a}{\Delta x} = f \frac{l}{\Delta x} = fl \frac{\rho}{\sigma}.$$

Из этих двух соотношений находим f:

$$f = 2\pi k \sigma^2 = 2\pi \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}.$$

И. В. Шутовский

◆

Условие плавания воздушного шара на некоторой высоте

$$mg + \rho V g = \rho_0 V g, \tag{1}$$

где m — масса оболочки воздушного шара и грузовой кабины, ρ — плотность горячего воздуха, ρ_0 — плотность атмосферного воздуха на высоте плавания шара, V — объем камеры, g — ускорение свободного падения.

Из (1) следует, что на новой высоте равновесие будет возможным, если величины ρ и ρ_0 изменятся так, что

$$\Delta\rho = \Delta\rho_0, \tag{2}$$

где $\Delta\rho_0$ — изменение плотности атмосферного воздуха, $\Delta\rho$ — изменение плотности горячего воздуха в камере.

При небольших изменениях высоты давление уменьшается с увеличением высоты (Δh) на

$$\Delta p = \rho_0 g \cdot \Delta h.$$

Поскольку температура атмосферы остается постоянной, для плотности атмосферного воздуха на разных высотах имеем:

$$\frac{\rho_0 - \Delta\rho_0}{\rho_0} = \frac{p_0 - \Delta p}{p_0},$$

откуда

$$\Delta\rho_0 = \rho_0 \frac{\Delta p}{p_0} = \rho_0^2 \frac{g}{p_0} \Delta h. \tag{3}$$

Плотность горячего воздуха в камере изменится за счет изменения температуры и давления:

$$\Delta\rho = \frac{p_0 \mu}{RT} - \frac{(p_0 - \Delta p)\mu}{R(T + \Delta T)} =$$

$$= \frac{\mu(p_0 \cdot \Delta T + \Delta p \cdot T)}{R(T + \Delta T)} = \frac{p_0 \mu \left(\frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta p}{p_0}\right)}{RT\left(1 + \frac{\Delta T}{T}\right)},$$

и так как $\frac{\Delta T}{T} \ll 1$,

$$\Delta\rho \approx \frac{p_0 \mu}{RT}\left(\frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta p}{p_0}\right). \qquad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (2), находим:

$$\Delta h = \frac{RT_0^2 \cdot \Delta T}{\mu g T(T - T_0)} \approx 18 \text{ м.}$$

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

◆

Ф1012. *Торец длинного стеклянного цилиндра радиуса R закрыт светонепроницаемой пластинкой, в которой имеется вертикальная щель; ширину d щели можно менять. На пластинку под углом α падает пучок параллельных световых лучей (рис. 1); освещенность пластинки E. У противоположного торца цилиндра находится фотоэлемент. Построить график зависимости светового потока, принимаемого фотоэлементом, от ширины щели d. Показатель преломления стекла n.*

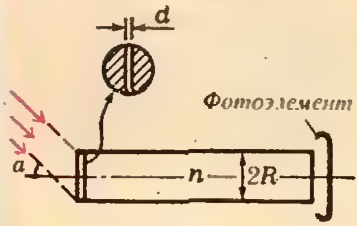


Рис. 1.

После преломления на торце цилиндра лучи будут распространяться в стекле под углом β к оси системы таким, что

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n.$$

Рассмотрим лучи, лежащие в одной вертикальной плоскости на расстоянии x от оси цилиндра (рис. 2, 3). Точки, в которых все эти лучи будут падать на границу стекло — воздух, лежат на одной прямой — на образующей AB,— и условия преломления и отражения этих лучей на границе будут одинаковыми. Вычислим угол γ, под которым лучи падают на границу AB, и сравним его с предельным углом полного внутреннего отражения.

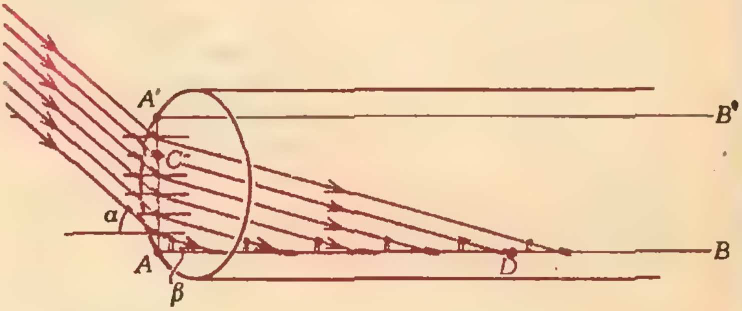


Рис. 2.

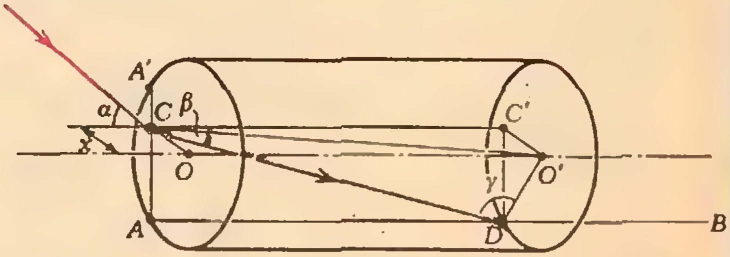


Рис. 3. В треугольнике CC′D $|CC'| = l$,

$$|C'D| = l \operatorname{tg} \beta, \; |CD| = \frac{l}{\cos \beta}.$$

В треугольнике CC′O′

$$|CO'| = \sqrt{l^2 + x^2}.$$

Рассмотрим ход луча CD, лежащего в плоскости $AA'B'B$. Проведем через точку C прямую, параллельную прямой AB (и оси цилиндра), и отложим на ней отрезок $|CC'| = |AD| = l$ (рис. 3). По теореме косинусов из треугольника $CO'D$ имеем:

$$|CO'|^2 = |CD|^2 + |DO'|^2 - 2|CD|\,|DO'| \cos \gamma,$$

или

$$l^2 + x^2 = \frac{l^2}{\cos^2 \beta} + R^2 - 2\frac{lR}{\cos \beta} \cos \gamma. \qquad (1)$$

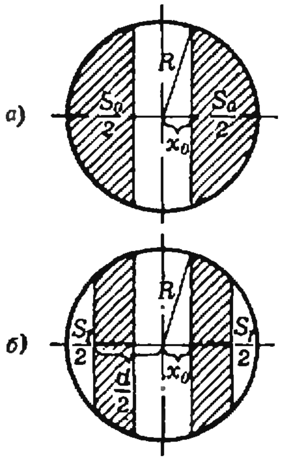


Рис. 4. а) Заштрихованная область определяет световой поток на фотоэлементе при $d=2R$. Площадь заштрихованных участков —

$$S_0=2R^2\arccos\frac{x_0}{R}-2x_0\sqrt{R^2-x_0^2}.$$

б) Площадь «рабочей» области —

$$S=S_0-S_1=$$
$$=2R^2\arccos\frac{x_0}{R}-$$
$$-2x_0\sqrt{R^2-x_0^2}-$$
$$-2R^2\arccos\frac{d}{2R}+$$
$$+d\sqrt{R^2-\frac{d^2}{4}}.$$

Из треугольника $C'O'D$ имеем:

$$|C'D|^2+|C'O'|^2=|O'D|^2,$$

или

$$l^2\operatorname{tg}^2\beta+x^2=R^2. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим:

$$\cos\gamma=\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{R}\sin\beta=\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{R}\,\frac{\sin\alpha}{n}. \qquad (3)$$

Физический смысл (3) достаточно ясен — с ростом x величина $\cos\gamma$ уменьшается, следовательно, $\sin\gamma$ растет, и при некотором x_0 угол γ достигает значения предельного угла полного внутреннего отражения $\gamma_0=\arcsin\frac{1}{n}$. Определим, с какого x_0 выполняется условие $\sin\gamma_0=\frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{n}=\sqrt{1-\cos^2\gamma_0}=\sqrt{1-\frac{(R^2-x_0^2)}{R^2}\frac{\sin^2\alpha}{n^2}},$$

откуда

$$x_0^2=R^2\left(\frac{1+\sin^2\alpha-n^2}{\sin^2\alpha}\right). \qquad (4)$$

Итак, для всех лучей, падающих на торец цилиндра на расстоянии $x\geqslant x_0=\frac{R}{\sin\alpha}\sqrt{1+\sin^2\alpha-n^2}$ от вертикального диаметра торца, при первом падении луча на боковую поверхность цилиндра выполняется условие полного внутреннего отражения. (Из (4), в частности, следует, что при $n^2=1+\sin^2\alpha$ это условие выполняется для всех лучей ($x_0=0$).)

Если при первом падении луча на границу стекло — воздух он испытывает полное внутреннее отражение, то при всех последующих падениях на границу он также будет испытывать полное внутреннее отражение; если же при первом падении на эту границу условие полного внутреннего отражения не выполняется, то и в дальнейшем оно не будет выполняться. (Покажите это самостоятельно.) Таким образом, в отсутствие светонепроницаемой пластины на фотоэлемент попадают лучи, которые падают на входной торец в области, заштрихованной на рисунке 4, *а*. При наличии пластинки со щелью лучи не попадают в фотоэлемент, если ширина щели $d<2x_0$. Если $2R\geqslant d>2x_0$, световой поток, принимаемый фотоэлементом, определяется лучами, которые падают на входной торец в области, заштрихованной на рисунке 4, *б*. Величина потока пропорциональна площади заштрихованной области.

Итак: при $d\leqslant 2x_0$ $\Phi=0$; при $2R\geqslant d\geqslant 2x_0$

$$\Phi=E\left(S_0-2R^2\arccos\frac{d}{2R}+d\sqrt{R^2-\frac{d^2}{4}}\right),$$

где

$$S_0=2R^2\arccos\frac{x_0}{R}-2x_0\sqrt{R^2-x_0^2}=\text{const}$$

при данных значениях R, α и n (см. (4)).

А. А. Лапидес

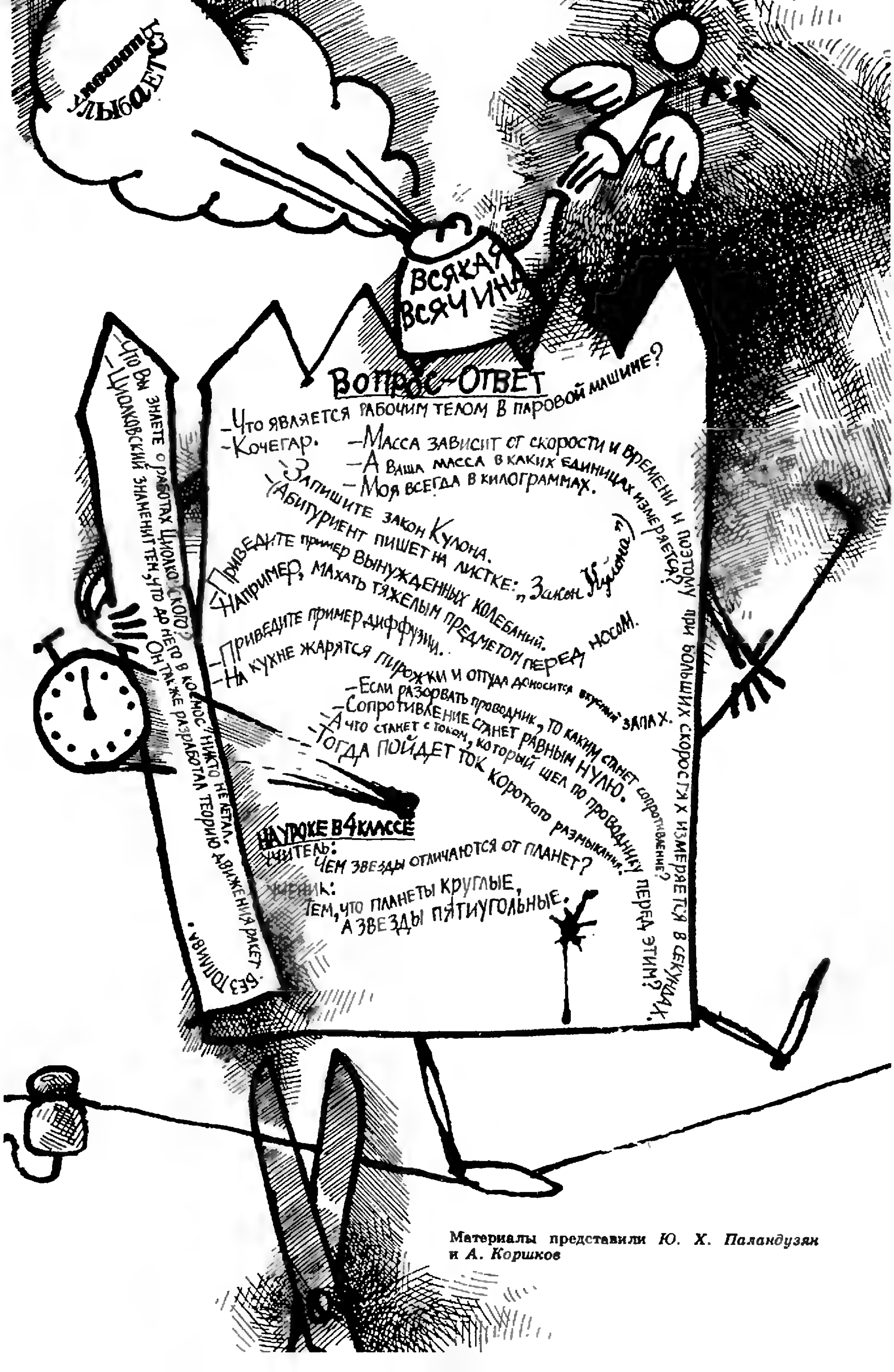
Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М971—М985, Ф983—Ф997, справились с задачами М971, М973, М974, М976, М977, М981, М984, Ф984, Ф987, Ф988, Ф992—Ф994, Ф996. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Н. Азамов (с. Балыкчи Андижанской обл.) 72, 78, 79, 83; *В. Акопян* (Ереван) 72; *А. Алексейчук* (Одесса) 72; *М. Альг* (Одесса) 72; *Ф. Арзыкулов* (с. Балыкчи Андижанской обл.) 82; *Д. Ароцкер* (Киев) 72, 78; *С. Аршава* (Северодонецк) 72, 82, 83; *Р. Асадуллаев* (Масаллы) 72; *Т. Ахмедов* (п. Борадыгях АзССР) 72; *В. Базуткин* (Кривой Рог) 82, 83; *И. Баль* (Алма-Ата) 72; *А. Барабанов* (Киев) 72, 78 — 80, 82, 85; *И. Белозеров* (Серпухов) 72, 75, 82; *Д. Берзин* (Калуга) 72, 78—80, 83, 85; *В. Беринде* (Байа Маре, СРР) 72; *М. Бона* (Секешфехервар, ВНР) 72; *Е. Бугаев* (Москва) 72; *И. Бугрий* (Киев) 72; *А. Бурштейн* (Киев) 72, 75; *В. Быков* (Киев) 72; *С. Вакарин* (Киев) 82; *Я. Варшавский* (Харьков) 72, 75, 78, 79, 82, 83, 85; *А. Вдовина* (Хмельницкий) 72; *В. Верзаков* (Рудный) 72, 83; *А. Винцюк* (Киев) 72; *С. Волков* (Нижний Тагил) 83, 85; *Ь. Вологодский* (Омск) 72, 75, 78, 79, 82, 83, 85; *П. Вольфбейн* (Киев) 72, 78; *Т. Гамидов* (п. Борадыгях АзССР) 72, 82; *Ш. Гасанов* (п. Ярдымлы АзССР) 72, 78; *О. Геворков* (Тбилиси) 72, 78, 83; *Р. Гендлер* (Ташкент) 72, 78, 79, 82, 83; *О. Геупель* (Дрезден, ГДР) 78; *А. Глазовский* (Ярославль) 83; *А. Глуцюк* (Харьков) 72, 78, 79, 82, 83, 85; *Ю. Гнатюк* (Каменец-Подольский) 72, 78; *М. Гольдшейд* (Челябинск) 72, 75, 78—80, 82, 85; *И. Гончаров* (Павлоград) 72, 75, 83; *А. Гороховский* (Киев) 72, 78—80, 82, 83; *В. Гравит* (Северодвинск) 72, 83, 85; *Р. Гринив* (Львов) 72, 75, 78, 79, 83; *Д. Грънчаров* (София, НРБ) 83; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 72, 82; *Р. Дадашов* (п. Борадыгях АзССР) 72; *Ш. Дадашов* (п. Борадыгях АзССР) 72; *А. Даниленко* (Волгоград) 72; *З. Джабиева* (с. Махмудавар АзССР) 72; *Д. Джавадов* (с. Махмудавар АзССР) 72; *О. Джавадов* (п. Ворадыгях АзССР) 72; *М. Долаберидзе* (Тбилиси) 72; *А. Донченко* (Киев) 75, 82; *Э. Досиев* (Баку) 72; *Ю. Дрозд* (Киев) 72, 83; *И. Дынников* (Жуковский) 78, 79, 82, 85; *Г. Дятлов* (Новосибирск) 72; *Е. Егоров* (Пенза) 83; *С. Железовская* (Саратов) 80; *Д. Зайцев* (Киев) 72, 75, 78—80, 82, 83, 85; *Н. Зарубин* (Харьков) 72; *Б. Зон* (Харьков) 72, 82; *Н. Исаева* (Павлодар) 72; *А. Калинин* (Саратов) 72, 82; *В. Кальницкий* (Калининград) 82; *Е. Камышная* (Павлодар) 72; *Ю. Карцев* (Ульяновск) 83; *Т. Касумов* (Баку) 72, 82, 83; *О. Кирнасовский* (Винница) 83; *А. Козинский* (Гайворон) 78, 82, 83; *В. Колега* (Червоноград) 82; *Г. Колесников* (Магнитогорск) 72; *Д. Коноваленко* (Севастополь) 72, 75, 78, 80; *А. Кононенко* (Киев) 72, 79, 83, 85; *Ю. Королев* (Казань) 72, 83, 85; *А. Коршков* (Мозырь) 72, 78, 82, 83; *А. Корытько* (Киев) 72; *Б. Кругликов* (Харьков) 72, 75, 78, 79, 82, 83; *О. Кузнецова* (Йошкар-Ола) 78, 83; *М. Кукс* (Львов) 72, 75, 80; *Д. Куцемако* (Саратов) 83; *И. Кучугурин* (Новый Уренгой) 82; *Н. Кушлевич* (Москва) 72; *С. Лакатош* (Москва) 80, 83, 85; *О. Лимешко* (Куйбышев) 78—80, 82, 83; *М. Литвинов* (Киев) 72, 75, 78—80, 82, 83, 85; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 78, 89; *В. Лысов-Чайников* (Донецк) 72; *В. Ляндин* (Белорецк) 72, 75, 78, 79, 82, 83; *М. Макичян* (Ереван) 78, 79; *А. Макогон* (Киев) 83; *И. Максин* (Ташкент) 72; *Р. Малендевич* (Волехов) 83; *А. Маркосян* (Ереван) 72; *И. Мартинес* (Киев) 72; *А. Мельник* (Гайворон) 82, 83; *А. Мельцер* (Ленинград) 72, 78, 82, 83; *А. Мигло* (Ленинград) 78, 82; *Г. Минасянц* (Ереван) 72; *В. Молчанов* (Астрахань) 72, 79; *Ю. Молчанов* (Мурманск) 82, 85; *З. Мустафаев* (Баку) 72; *Я. Мустафаев* (Баку) 72; *С. Мушинский* (Новосибирск) 72, 75, 79, 80, 82, 85; *А. Назарян* (Тбилиси) 72, 75, 79, 82; *И. Нарский* (Воронеж) 79, 82; *С. Несторов* (Пловдив, НРБ) 72; *Ю. Никоноров* (с. Михайловка КазССР) 78, 79, 82; *О. Ниц* (Одесса) 72, 78, 82, 85; *А. Нумитов* (Ташкент) 79; *В. Окунев* (Арзамас) 72, 78; *О. Острожанский* (Харьков) 72; *М. Панков* (Львов) 72, 78; *Ю. Пастухов* (Витебск) 82, 83; *Р. Пащенко* (Белгород) 72, 78, 79; *О. Пелевин* (Кострома) 72, 78; *Г. Пельц* (Одесса) 72; *А. Пиковский* (Киев) 78, 79, 82, 83; *А. Покровский* (Киев) 72, 75, 78—80, 82, 83, 85; *В. Полинов* (Магнитогорск) 72, 78, 82; *А. Полищук* (Москва) 79; *И. Портной* (Одесса) 72, 78, 79, 82, 83, 85; *В. Процак* (Киев) 72; *В. Пушня* (Харьков) 72, 75, 78, 79, 82, 83; *В. Рагулин* (Челябинск) 72, 75, 78, 83; *С. Резнов* (Киев) 72, 78, 83; *О. Ринк* (Вольск) 78, 79, 83; *А. Ройтерштейн* (Ленинград) 72, 78, 79, 82, 83; *Т. Руденко* (Киев) 78, 82, 83; *Д. Румынин* (Красноярск) 78, 79, 83; *Э. Сайдаматов* (п. Кук-Терек Ташкентская обл.) 72; *И. Самовол* (Гайворон) 78, 82, 83; *Г. Сакжийн* (Улан-Батор, МНР) 72; *В. Сафонов* (Челябинск) 82, 85; *Д. Семинихин* (Киев) 72, 78—80, 82, 83; *С. Сильвестров* (Киев) 72, 75, 78—80, 82, 83; *А. Синицкий* (Гатчина) 72; *М. Скворцов* (п. Черноголовка Московской обл.) 72; *В. Слитинский* (Киев) 75, 78, 79, 83; *С. Смирнов* (Ленинград) 72, 75, 78—80; *Соел-Эрдена* (Улан-Батор, МНР) 72; *М. Соколова* (Ленинград) 83; *В. Соловьев* (п. Купавна Московской обл.) 72, 75; *И. Соловьев* (п. Черноголовка Московской обл.) 72, 78, 79, 83, 85; *И. Солтан* (Павлодар) 72; *С. Стафеев* (Петрозаводск) 72; *М. Стоенеску* (Брашов, СРР) 82; *В. Столин* (Вильнюс) 83; *А. Струнин* (Ярославль) 75, 79, 82, 83; *А. Ступин* (Саратов) 83; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 72, 78, 79, 82, 83, 85; *Д. Тамаркин* (Горький) 78, 79, 82, 83; *Л. Тамаркин* (Горький) 75; *А. Тарасенко* (Днепропетровск) 72, 78, 79; *Б. Татиевский* (Киев) 72, 83; *Е. Творун* (Павлодар) 72; *А. Терехов* (Алма-Ата) 72, 83; *И. Терехов* (п. Протвино Московской обл.) 72, 83; *Г. Топровер* (Волгоград) 78; *Д. Туляков* (Жданов) 78, 82, 83; *В. Тумаркина* (Винница) 72; *И. Устиловский* (Москва) 72, 75, 79, 82, 83; *Ф. Фот* (Томск) 78, 79, 82, 83; *В. Фрасинич* (Гайворон) 78, 82, 83; *Д. Хаджиев* (Стара Загора, НРБ) 78; *М. Хованов* (Москва) 72, 78, 83; *Д. Хосид* (Алма-Ата) 79; *О. Христенко* (Караганда) 82, 83; *А. Христова* (Силистра, НРБ) 78; *С. Черенков* (Апрелевка) 72; *Е. Черная* (Днепродзержинск) 72, 75, 78—80, 82, 83, 85; *И. Чирашня* (Ташкент) 72; *Т. Чудиновских* (Целиноград) 72, 82; *Е. Чулан-Батор* (Улан-Батор, МНР) 72; *К. Чурашев* (Новосибирск) 72; *Е. Чурикова* (Целиноград) 72, 75, 82; *С. Шамаева* (Фрунзе) 82; *Ю. Шамрук* (д. Но-

(Продолжение см. на с. 42)



ВОПРОС-ОТВЕТ

— Что является рабочим телом в паровой машине?
— Кочегар.

— Масса зависит от скорости и времени и поэтому при больших скоростях измеряется в секундах.
— А ваша масса в каких единицах измеряется?
— Моя всегда в килограммах.

— Запишите закон Кулона.
(Абитуриент пишет на листке: „Закон Кулона“.)

— Приведите пример вынужденных колебаний.
— Например, махать тяжелым предметом перед носом.

— Приведите пример диффузии.
— На кухне жарятся пирожки и оттуда доносится вкусный запах.

— Если разорвать проводник, то каким станет сопротивление?
— Сопротивление станет равным нулю.
— А что станет с током, который шел по проводнику перед этим?
— Тогда пойдет ток короткого размыкания.

— Что Вы знаете о работах Циолковского?
— Циолковский знаменит тем, что до него в космос никто не летал. Он также разработал теорию движения ракет без топлива.

НА УРОКЕ В 4 КЛАССЕ

Учитель:
Чем звезды отличаются от планет?

Ученик:
Тем, что планеты круглые, а звезды пятиугольные.

Материалы представили *Ю. Х. Паландузян* и *А. Коршков*

Бинарный алгоритм

Кандидат физико-математических наук
Г. А. ГАЛЬПЕРИН,
кандидат физико-математических наук
А. В. КОРЛЮКОВ

Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух чисел изложен в седьмой книге его «Начал» (около 300 г. до н. э.). Многие ученые предполагают, что он является интерпретацией алгоритма, предложенного Евдоксом (около 375 г. до н. э.). Так или иначе алгоритм Евклида можно назвать «дедушкой» всех алгоритмов, поскольку это самый первый нетривиальный алгоритм, доживший до наших дней *). Эту честь могли бы, пожалуй, оспаривать вавилонские методы решения некоторых систем квадратных уравнений с двумя неизвестными, появившиеся за полтора тысячелетия до Евклида. Однако они не выдерживают сравнения с алгоритмом Евклида, поскольку в них не содержится итераций и поскольку они были вытеснены современными алгебраическими методами.

Как сказано в статье, цитированной в сноске, «большинство древних алгоритмов со временем вытеснялось из вычислительной практики более новыми алгоритмами. Алгоритм Евклида избежал этой участи прежде всего благодаря своей экономности». Тем более удивительно, что хотя почтенный алгоритм Евклида и применяется в течение столь многих столетий, он (как будет показано ниже) не всегда является наилучшим способом для нахождения НОД!

Примерно в 1962 г. Роланд Силвер и Джон Терзиан открыли совсем иной алгоритм для нахождения НОД, который прежде всего годится для двоичной арифметики. Этому новому «бинарному» алгоритму совершенно не нужны команды, требующие (как в алгоритме Евклида) выполнения действий деления, а тем более деления с остатком. Основанный на операциях вычитания, бинарный алгоритм еще проверяет, является число четным или нет, и сдвигает вправо двоичное представление четного числа (тем самым выполняя деление пополам).

Бинарный алгоритм очень просто реализуется на микрокалькуляторах и этим выгодно отличается от алгоритма Евклида. Отметим, что реализация алгоритма Евклида на микрокалькуляторах затруднительна: основная трудность состоит в отсутствии операции деления с остатком двух целых чисел. Например, среди 300 приведенных в справочнике В. П. Дьяконова*) программ отсутствует алгоритм Евклида. Отметим еще, что нет в школе общепринятого обозначения для остатка от деления; возможно, по этой причине в учебнике по информатике для 9-го класса при записи алгоритма Евклида предлагается деление с остатком заменять на последовательные вычитания.

Перейдем к описанию *бинарного алгоритма нахождения наибольшего общего делителя* двух целых чисел. Он основан на следующих трех очевидных свойствах НОД:

1. $\text{НОД}\,(2m,\ 2n)=2\cdot\text{НОД}\,(m,\ n)$.
2. $\text{НОД}\,(2m,\ 2n+1)=\text{НОД}\,(m,\ 2n+1)$.
3. $\text{НОД}\,(m,\ n)=\text{НОД}\,(m-n,\ n)$.

По определению НОД, $\text{НОД}\,(m,\ n)=\text{НОД}\,(n,\ m)$, $\text{НОД}\,(-m,\ n)=\text{НОД}\,(m,\ n)$, $\text{НОД}\,(0,\ 0)=0$, $\text{НОД}\,(m,\ 0)=|m|$. Из свойств 1 — 3 сразу получается алгоритм, который мы опишем словесно, поясняя его на примере нахождения НОД чисел 40 902 и 24 140.

Пусть надо найти $\text{НОД}\,(m_0,\ n_0)$; обозначим его d. По свойству 1 выделим сначала наибольшую степень двойки 2^k, на которую делятся как m_0 и n_0, так и число d (для чисел 40 902 и 24 140, $k=1$ и $2^k=2$). Уменьшим m_0 и n_0 в 2^k раз, а число 2^k запомним. Получим два числа (20 451 и 12 070), одно из которых (или оба) нечетно (у нас нечетно число 20 451), а НОД этих чисел равен $d_1=d/2^k$. Затем, если одно из этих чисел четно (12 070), то поделим его на максимально возможную степень двойки, оставив второе число без изменения, и в результате получим два нечетных числа m и n

---

*) Подробно об алгоритме Евклида см. статью С. А. Абрамова в «Кванте», 1985, № 11, с. 44.

*) Справочник по расчетам на микрокалькуляторах.— М.: Наука, 1985.

(20 451 и 6 035) с НОД $(m, n)=d_1$. После этих операций мы пришли к задаче нахождения НОД только для нечетных чисел. При ее решении воспользуемся свойством 3. Вычтем из большего числа меньшее (20451—6035=14 416), не изменив при этом НОД$=d_1$, а поскольку разность двух нечетных чисел всегда четна, применим свойство 2: сократим эту разность на максимальную степень двойки (в примере на 2^2), получив опять нечетное число (901). Затем снова воспользуемся свойством 3 (6035—901=5134) и один или несколько раз свойством 2 (5134:2=2567), потом опять свойствами 3 и 2, и так далее (2567—901=1666→833→901—833=68→17→833—17=816→51→51—17=34→17). После выполнения каждой операции НОД не меняется, а хотя бы одно число пары уменьшается. Поэтому в некоторый момент оба числа станут равными друг другу; очевидно, что оба они в этот момент будут равны d_1. Искомый НОД (m_0, n_0) вычисляется после этого как произведение чисел 2^k и d_1. (Для наших чисел НОД (40902, 24140)$=2\cdot 17=34$.)

В приведенном бинарном алгоритме используются лишь операции вычитания и деления на 2. Последняя особенно проста, если m и n записаны в двоичной системе счисления.

На учебном алгоритмическом языке этот алгоритм может быть записан следующим образом *):

```
алг бинар (цел $m, n, k, r, s, d$)
  арг $m, n$
  рез $d$
нач $r:=0$, $s:=0$
пока $m \neq n$
   нц пока $m$ четное
        нц $m:=m/2$
           $r:=r+1$
        кц
       пока $n$ четное
        нц $n:=n/2$
           $s:=s+1$
        кц
        $k:=\min\{r, s, k\}$
      пока $m>n$
        нц $m:=m-n$
        кц
      пока $n>m$
        нц $n:=n-m$
       кц
   кц
   $d:=2^k\cdot m$
кон
```

Эту программу нетрудно оттранслировать на языки *Робик* или *Бэйсик* или перевести в коды программируемого микрокалькулятора типа БЗ—34 (см. «Квант», 1986, № 2, 3).

Посмотрим, как следует организовать вычисления по бинарному алгоритму на обычном (не программируемом) калькуляторе. Пусть даны положительные целые числа m и n; вычисление $d=$НОД (m, n) тогда распадается на следующие шаги.

1. Засылаем число m на индикатор и делим его пополам k_1 раз ($k_1\geqslant 0$), пока не получаем нечетное число m_1.

2. Засылаем число n на индикатор (при этом m_1 сдвигается в ячейку памяти) и делим его пополам k_2 раз ($k_2\geqslant 0$), пока не получим нечетное число.

3. Если числа в памяти и на индикаторе равны, то k раз удваиваем число на индикаторе, где $k=\min\{k_1, k_2\}$; полученное число и есть d.

4. Если число на индикаторе меньше числа в памяти, то меняем их местами.

5. Выполняем вычитание.

6. Делим число на индикаторе пополам, пока не получится нечетное число и возвращаемся к шагу 3.

Удивительно, что уже при ручном нахождении НОД двух многозначных чисел (например, четырехзначных) проявляется преимущество бинарного алгоритма перед алгоритмом Евклида. Приходится меньше писать, да и ошибки вычислений практически отсутствуют: ведь необходимо только уметь вычитать и делить на 2 (стирать правый нуль в двоичной записи). Правда, число итераций несколько возрастает по сравнению с количеством итераций в алгоритме Евклида, но зато каждая итерация выполняется гораздо проще — совершенно отсутствуют шаги деления. Эта простота позволяет существенно экономить время при нахождении НОД, что видно на следующем примере.

Алгоритм Евклида

НОД (40902, 24140)$=$34

```
                          40902|24140
                          24140|1
                    24140|16762
                    16762 1
              16762  7378
              14756 2
         7378| 2006
         6018  3
    2006|1360
    1360 1
1360| 646
1292|  2
 646|. 68
 612   9
  68| 34
  68|  2
   0
```

---

*) Если k не определено, при нахождении $\min\{r, s, k\}$ мы считаем, что $\min\{r, s, k\}=\min(r, s)$. Эта маленькая хитрость позволяет раз навсегда определить k: при дальнейшем увеличении r и s k не меняется.

Бинарный алгоритм

$$\text{НОД}(40902, 24140)=2^1\cdot 17=34$$

$$\begin{array}{rcr}
\underline{40902} & 2^1 & \underline{24140} \\
20451 & & 12070 \\
\underline{-6035} & & 6035 \\
14416 & & \underline{-901} \\
7208 & & 5134 \\
901 & & 2567 \\
\underline{-833} & & \underline{-901} \\
68 & & 1666 \\
34 & & 833 \\
17 & & \underline{-17} \\
 & & 816 \\
 & & 408 \\
 & & 204 \\
 & & 102 \\
 & & 51 \\
 & & \underline{-17} \\
 & & 34 \\
 & & 17 \\
 & & \underline{-17} \\
 & & 0
\end{array}$$

Известный математик и программист Д. Кнут, автор многотомного сочинения «Искусство программирования для ЭВМ», сравнивая эти два алгоритма, пишет:

«Таким образом, бóльшая скорость выполнения итераций в программе, получаемая за счет простоты этих операций, компенсирует рост числа необходимых итераций. Мы обнаружили, что выполнение бинарного алгоритма нахождения НОД на машине MIX примерно на 15 % быстрее, чем выполнение на той же машине алгоритма Евклида; при работе на других машинах ситуация, конечно, может быть иной, но во всяком случае обе программы вполне эффективны. Тем не менее оказывается, что даже такая освященная веками процедура, как алгоритм Евклида, не может противостоять прогрессу...»

Упражнения

1. Найдите по алгоритму Евклида и бинарному алгоритму наибольший общий делитель следующих чисел: 1985 и 1986; 198519851985 и 198619861986; 689168916891 и 589158915891; 27182818284 и 31415926536.

2. Найдите НОД чисел $m=7\cdot 2^{18}+2^{16}+15\cdot 2^{11}+27\cdot 2^5$ и $n=7\cdot 2^{15}+2^{12}+7\cdot 2^8+2^6$.

3. В 1970 году В. К. Хэррис предложил интересный «гибрид» алгоритма Евклида и бинарного алгоритма. Если $m\geqslant n>0$ нечетны, то $m=qn+r$, где $0\leqslant|r|<n$ и r четно. Поэтому если $r\neq 0$, то r делим на максимальную степень 2, пока r не станет нечетным; затем пару (m, n) заменяем на пару $(n, |r|)$ и повторяем этот процесс. Запишите этот алгоритм на учебном алгоритмическом языке. Найдите по этому алгоритму НОД чисел из упражнения 1.

4*. Докажите, что в бинарном алгоритме число вычитаний не превосходит $N=1+[\log_2\max(m, n)]$.

5. Найдите такие значения m и n, при которых по бинарному алгоритму необходимо выполнить ровно N шагов вычитания, где число N взято из упражнения 4.

Список читателей, приславших правильные решения

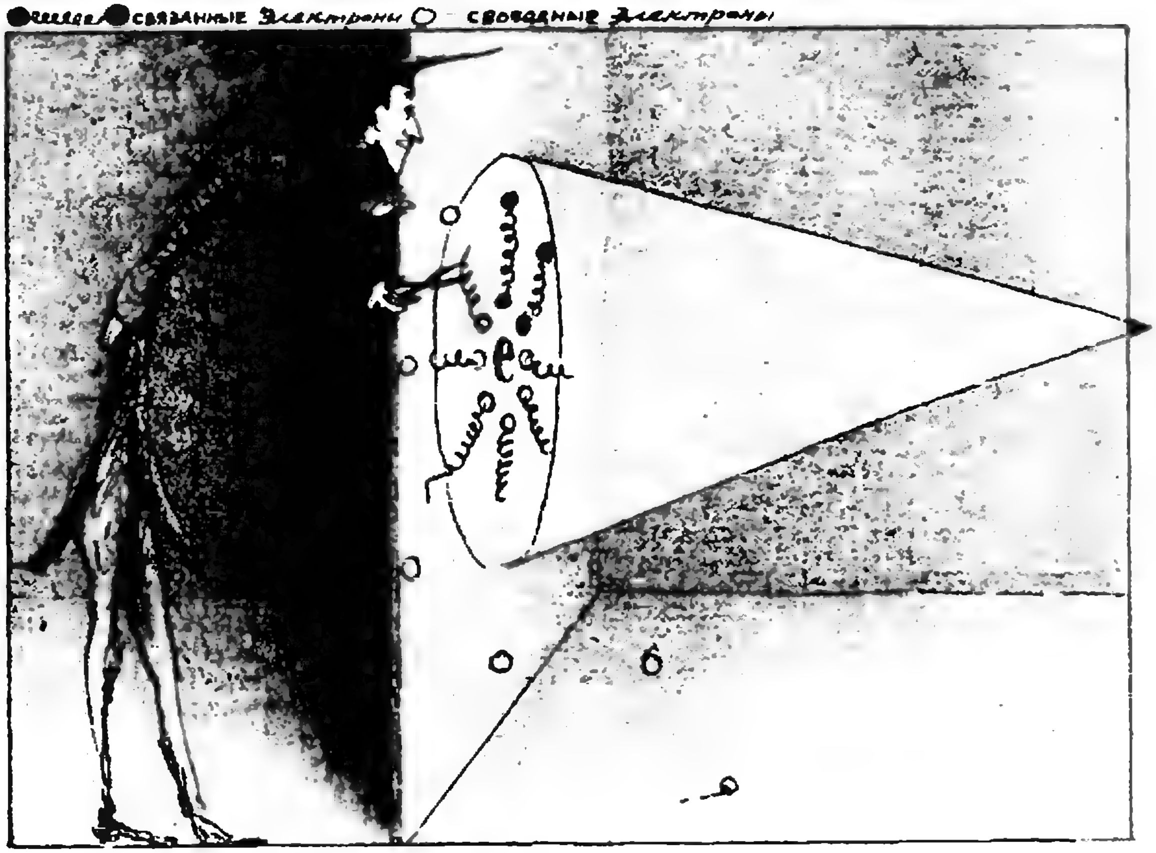
(Начало см. на с. 38)

вый Двор Гродненской обл.) 78, 83; *А. Шанин* (Москва) 82; *И. Шефтель* (Ленинград) 78—80, 82, 83, 85; *М. Шефтер* (Москва) 72; *И. Шехтман* (Киев) 72; *С. Шехтман* (Киев) 72; *Б. Шмуклерман* (Одесса) 72; *И. Шор* (Киев) 79; *Н. Шор* (Киев) 72, 75, 78, 79; *Б. Шраер* (Ленинград) 78, 79, 82, 83; *О. Щелоков* (Навои) 72; *Я. Эфендиев* (Баку) 72, 82; *Г. Юсин* (Киев) 72.

Физика

О. Азикова (Целиноград) 83, 85, 89, 91, 95; *Г. Айвазян* (Киев) 83; *А. Андрианов* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 97; *А. Антонов* (Москва) 83, 85, 89—91; *Ф. Асмандьярова* (Целиноград) 83, 85, 89, 91, 95; *Ю. Белобородов* (Челябинск) 85; *С. Беловолов* (Новосибирск) 89; *С. Белоусов* (Ленинград) 89, 91; *Д. Берзин* (Калуга) 83, 89—91, 95; *Д. Бисикало* (Винница) 83, 85, 91; *А. Болотников* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 97; *Э. Бочаров* (Жуковский) 89; *А. Брежестовский* (п. Черноголовка Московской обл.) 83, 85, 86, 89, 91; *Д. Будько* (Белгород) 89—91, 97; *А. Быцко* (Ленинград) 89, 91, 95, 97; *М. Ваганов* (п. Черноголовка Московской обл.) 83, 85, 86, 89, 91; *В. Верзаков* (Рудный) 83, 89; *Ю. Викторович* (Минск) 83, 89; *В. Вологодский* (Омск) 95; *П. Вольфбейн* (Киев) 85, 89—91; *А. Гаек* (Днепропетровск) 83, 86, 91; *Д. Галактионов* (Алма-Ата) 89; *А. Гамаюнов* (Полтава) 91; *С. Герасимов* (Харьков) 89, 91, 97; *А. Гольдин* (с. Водяное Львовской обл.) 85, 91; *Г. Горбатков* (Армавир) 97; *Г. Горбель* (Арзамас) 89; *Г. Гриднев* (Тбилиси) 91; *В. Гурарий* (п. Черноголовка Московской обл.) 83, 85, 86, 89, 91, 95; *А. Евстигнеев* (Донецк) 84; *Д. Евтушенко* (Донецк) 85, 89, 90; *Д. Ежиков* (Минск) 91; *А. Езерский* (Минск) 97; *Д. Жильцов* (Краматорск) 83, 91; *А. Завалковский* (Запорожье) 97; *П. Задорожный* (Киев) 83, 89—91, 97; *Д. Изотов* (Ногинск) 97; *А. Ильенков* (Киев) 83, 85, 89—91; *В. Ильин* (Саратов) 97; *М. Исабеков* (Анадырь) 89; *Д. Исильманова* (Целиноград) 83, 85, 89, 91; *Б. Казакбаев* (Саратов) 97; *А. Калашников* (Киев) 97; *В. Каменькович* (Харьков) 89, 91; *С. Канатов* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 91, 97; *А. Капустин* (Москва) 86, 91, 97; *С. Кардаш* (Лида) 85, 89, 91; *В. Карстен* (Новокузнецк) 89, 91; *В. Кирюхин* (п. Черноголовка Московской обл.) 83, 85, 86, 89, 91, 95; *М. Китаина* (Бобруйск) 91; *И. Климчук* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 91; *Ю. Коба* (Тернополь) 91; *И. Коваленко* (с. Термаховка Киевской обл.) 97; *С. Конарев* (Баку) 85; *Д. Концевой* (Могилев) 85, 91; *А. Коптилов* (Саратов) 89; *И. Корсунская* (Киев) 83; *М. Косолапов* (п. Черноголовка Московской обл.) 85; *В. Кравцов* (Ставрополь) 86, 90, 91; *Г. Кравченко* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 97; *Ю. Кравченко* (Москва) 91; *Б. Крутов* (Воронеж) 85, 91; *С. Курдюков* (Москва) 83, 86, 89, 91, 97; *Ю. Левин* (Харьков) 83, 89; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 83, 85, 86, 89—91; *И. Лугач* (Винница) 85, 89, 91; *И. Маресин* (Москва) 85; *М. Мирошниченко* (Куйбышев) 85, 89;

(Окончание см. на с. 47)



Атомная физика в задачах

Кандидат физико-математических наук
Ю. А. САМАРСКИЙ

Атомная физика — большой и важный раздел современной физики. Атом — по-гречести «неделимый» — оказался огромным миром, живущим по своим особым законам. Многие современные успехи в науке и ее приложениях были бы невозможны без выяснения сложного строения атома, без открытия новых законов движения микрочастиц — законов квантовой механики.

Из множества вопросов атомной физики в данной статье мы рассмотрим лишь три — фотоэлектрический эффект, дискретность спектров излучения и стабильность атомов. В каждом случае мы прежде напомним основные положения и закономерности, определяющие данное явление, а потом разберем несколько конкретных задач.

* * *

Количественная теория фотоэффекта — эффекта вырывания электронов из вещества под действием света — была создана в 1905 году А. Эйнштейном на основе квантовых представлений о свете. Согласно этим представлениям свет, как и вообще электромагнитное излучение, имеет прерывистую структуру и подобно частицам распространяется в пространстве в виде отдельных порций. Мельчайшую «частицу» электромагнитного излучения назвали квантом, а позднее — фотоном. Энергия фотона E пропорциональна частоте излучения ν:

$$E = h\nu$$

(где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка) или круговой частоте ω:

$$E = \hbar\omega$$

(где $\hbar = h/(2\pi)$ также называют постоянной Планка).

Уравнение Эйнштейна, или закон сохранения энергии для фотоэффекта, имеет вид

$$h\nu = A_{\text{вых}} + E_k,$$

где $A_{\text{вых}}$ — работа выхода электрона с поверхности освещаемого вещества, а E_k — кинетическая энергия вылетающего электрона. Минимальная частота облучения, при которой возникает фотоэффект, равна $\nu_{\min} = A_{\text{вых}}/h$, то есть определяется энергией связи электрона в данной системе.

Так как работа выхода для металлов составляет около двух электронвольт (1 эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж), то фотоэффект становится возможным при частотах облучения порядка

$$\nu = \frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж}}{6{,}6 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с}} \approx 0{,}5 \cdot 10^{15}\ \text{Гц}.$$

Этим частотам соответствуют фотоны в видимой — точнее, красной — области спектра с длиной волны $\lambda = c/\nu \approx 6 \cdot 10^{-7}$ м (отсюда и название — «красная граница фотоэффекта»).

Важно отметить, что фотоэффект на свободных электронах вообще невозможен. Действительно, предположим, что он все-таки происходит. Для простоты допустим, что свободный электрон до столкновения с фотоном покоился, и запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$\frac{h\nu}{c} = mv, \ h\nu = \frac{mv^2}{2},$$

где v — скорость движения электрона после столкновения с фотоном, c — скорость света. Поделив второе уравнение на первое, получим абсурдный результат: $v = 2c$! Это и означает, что фотоэффект возможен только на связанных электронах. Правда, понятия «связанные» или «свободные» электроны — относительные. Все определяется соотношением между работой выхода электрона (его энергией связи) и энергией падающего излучения. Так, электроны проводимости в металле, где энергия связи порядка нескольких электронвольт, являются связанными по отношению к фотонам видимого света, энергия которых составляет тоже несколько электронвольт. Но те же электроны проводимости по отношению к рентгеновским квантам с энергией несколько десятков килоэлектронвольт будут свободными, и фотоэффект для них будет невозможен.

Задача 1. *Для измерения постоянной Планка катод K вакуумного фотоэлемента освещается монохроматическим светом (рис. 1). При длине волны излучения $\lambda_1 = 6200$ Å (1 Å $= 10^{-10}$ м) ток фотоэлектронов прекращается, если между катодом и анодом включить задерживающее напряжение U, не меньшее определенной величины. При увеличении длины волны на 25 % задерживающее напряжение оказалось на $\Delta U = 0{,}4$ В меньше. Определите по этим данным величину постоянной Планка.*

В измерениях используется монохроматический свет двух длин волн: λ_1 и $\lambda_2 = \lambda_1 + 0{,}25\lambda_1 = 1{,}25\lambda_1$. Очевидно, что фототок станет равным нулю, когда задерживающее напряжение будет равно: в первом случае $U_1 = E_{k1}/e$, а во втором $U_2 = U_1 - \Delta U = E_{k2}/e$, где E_{k1} и E_{k2} — кинетические энергии электронов, выбитых падающими фотонами, e — заряд электрона. Уравнение Эйнштейна для фотоэффекта в этих случаях имеет вид

$$\frac{hc}{\lambda_1} = A_{\text{вых}} + E_{k1} = A_{\text{вых}} + eU_1,$$

$$\frac{hc}{\lambda_2} = A_{\text{вых}} + E_{k2} = A_{\text{вых}} + e(U_1 - \Delta U).$$

Решая эту систему уравнений, найдем:

$$h = \frac{\lambda_1 \lambda_2 e \Delta U}{(\lambda_2 - \lambda_1)c} = 5\,\frac{\lambda_1}{c}\,e\Delta U = 6{,}61 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с}.$$

Задача 2. *Найдите длину волны коротковолновой границы непрерывного спектра рентгеновского излучения, если при увеличении напряжения между анодом и катодом рентгеновской трубки в 2 раза длина волны границы изменилась на $\Delta\lambda = 0{,}5$ Å.*

Для возбуждения рентгеновского излучения обычно используют рентгеновские трубки, состоящие из откачанного баллона с двумя электродами: подогревным катодом и анодом. Между катодом и анодом прикладывается разность потенциалов, достигающая обычно нескольких десятков

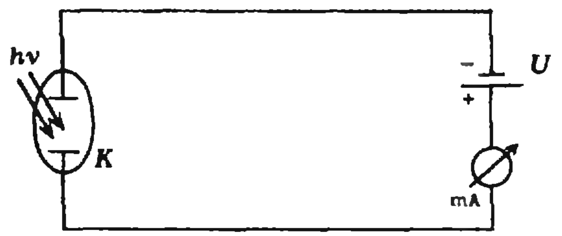


Рис. 1.

киловольт. Ускоренные электроны движутся к аноду и тормозятся у его поверхности. Это торможение и приводит к появлению рентгеновского излучения, называемого тормозным рентгеновским излучением и имеющего сплошной спектр. На рисунке 2 изображены спектры тормозного рентгеновского излучения для двух значений напряжения на трубке. Обрыв спектра в области коротких волн легко объясним: энергия рентгеновских квантов, возникающих при торможении электронов, не может превысить кинетическую энергию этих электронов.

Обозначая через U разность потенциалов на трубке, для длины волны $\lambda_к$ коротковолновой границы получим

$$\frac{hc}{\lambda_к}=eU, \text{ откуда } \lambda_к=\frac{hc}{eU},$$

или для двух значений напряжения:

$$\lambda_{к1}=\frac{hc}{eU_1} \text{ и } \lambda_{к2}=\frac{hc}{eU_2}.$$

Поскольку $U_2=2U_1$, изменение длины волны границы равно

$$\Delta\lambda=\lambda_{к2}-\lambda_{к1}=\frac{hc}{e}\,\frac{U_2-U_1}{U_1U_2}=\frac{1}{2}\,\frac{hc}{eU_1},$$

то есть составляет половину от $\lambda_{к1}$. Отсюда

$$\lambda_{к1}=2\Delta\lambda=1\ \text{Å}.$$

Заметим, что физическая сущность процессов тормозного излучения и фотоэлектрического поглощения одна и та же: в обоих случаях происходит изменение энергии электрона. При испускании фотонов тормозного рентгеновского излучения электрон переходит из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией, а при фотоэффекте поглощение фотона сопровождается увеличением энергии электрона.

* * *

Квантовые представления позволили объяснить многие явления, происходящие в атоме, и прежде всего — способность атомов поглощать и испускать фотоны лишь с определенной энергией.

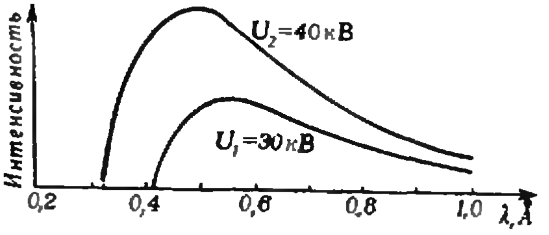


Рис. 2.

Рассматривая одиночный свободный атом водорода, Н. Бор в 1913 году пришел к выводу, что электрон в атоме может обладать только дискретными значениями энергии E_1, E_2, ..., E_n, или, как говорят, находиться на определенных энергетических уровнях. При этом энергия уровней равна

$$E_n=-\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}\,\frac{1}{n^2},$$

где $n=1, 2, ...$ — так называемое главное квантовое число, m — масса электрона, e — его заряд, ε_0 — электрическая постоянная. Каждому уровню энергии соответствует устойчивое (стационарное) состояние атома, в котором атом не излучает и не поглощает. Излучение фотона происходит при переходе атома с уровня с большей энергией на уровень с меньшей энергией. Самый низкий энергетический уровень атома ($n=1$) называется основным, а остальные — возбужденными. При поглощении фотона атом переходит в возбужденное состояние, занимая уровень с большей энергией. Энергия испускаемого (поглощаемого) фотона связана с энергией уровней, между которыми происходит переход, условием

$$E_k-E_n=h\nu_{kn}.$$

Частоты ν_{kn} соответствующих переходов обычно называют спектральными линиями. Подставляя значения E_k и E_n, все спектральные линии водорода можно выразить одной формулой:

$$\nu=\frac{me^4}{8h^3\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right),$$

или

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right),$$

где константа $R=(me^4)/(8h^3\varepsilon_0^2c)=$ $=10973731$ м$^{-1}$ называется постоянной Ридберга, n и k — целые числа. Спектральную формулу удобно несколько преобразовать для расчета энергии возбуждения атома. Умножим левую и правую части последнего равенства на hc и получим

$$\frac{hc}{\lambda}=Rhc\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right)=E_{ион}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right), \quad (*)$$

где $hc/\lambda=h\nu$ — энергия возбуждения атома, а $E_{\text{ион}} = Rhc$ — энергия ионизации атома, то есть энергия, соответствующая удалению электрона из атома (переходу с уровня $n=1$ на уровень $k\to\infty$).

Задача 3. *Первоначально невозбужденный водород начинает излучать фотоны, если через него пропустить пучок электронов, прошедших ускоряющую разность потенциалов, не меньшую $U_0=10{,}2$ В. Какую минимальную ускоряющую разность потенциалов должен пройти пучок протонов, чтобы при пропускании их через первоначально невозбужденный водород последний начал излучать фотоны? Чему равна (в электронвольтах) энергия ионизации атома водорода? Считать, что масса электрона много меньше массы протонов; атом водорода перед ударом покоился.*

Минимальная кинетическая энергия $E_{\min}$ частицы, налетающей на покоящийся атом и возбуждающей его, определяется из условия абсолютно неупругого взаимодействия частицы и атома, когда после взаимодействия скорость их относительно друг друга равна нулю (покажите его самостоятельно). В этом случае законы сохранения импульса и энергии имеют вид

$$mv_0=(m+M)v,$$

$$E_{\min}=\frac{mv_0^2}{2}=eU=\frac{(m+M)v^2}{2}+\Delta E_{\text{возб}},$$

где m — масса частицы, M — масса атома, v_0 — скорость налетающей частицы, v — скорость атома и частицы после столкновения, U — ускоряющая частицу разность потенциалов, $\Delta E_{\text{возб}}$ — энергия возбуждения атома. Решая эту систему уравнений, получим

$$E_{\min}=eU=\left(1+\frac{m}{M}\right)\Delta E_{\text{возб}}.$$

В случае бомбардировки атома водорода пучком электронов $m/M\ll 1$, и тогда

$$\Delta E_{\text{возб}}=eU_0.$$

Минимальная энергия возбуждения атома водорода связана с переходом его из основного состояния с квантовым числом $n=1$ в состояние с числом $k=2$. Согласно формуле (*) имеем

$$\Delta E_{\text{возб}}=E_{\text{ион}}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{3}{4}E_{\text{ион}}=eU_0.$$

Отсюда

$$E_{\text{ион}}=\frac{4}{3}\Delta E_{\text{возб}}=\frac{4}{3}eU_0=13{,}6\ \text{эВ}.$$

В случае бомбардировки атомов водорода протонами, когда $m\approx M$, минимальную ускоряющую разность потенциалов найдем из условия

$$eU_x=\left(1+\frac{m}{M}\right)\Delta E_{\text{возб}}=$$

$$=2\Delta E_{\text{возб}}=2eU_0=20{,}4\ \text{эВ},$$

или

$$U_x=20{,}4\ \text{эВ}.$$

Легко видеть, что возбуждать атомы водорода тяжелыми частицами энергетически невыгодно.

* * *

Свойство атомов некоторых веществ самопроизвольно испускать ионизирующее излучение называют радиоактивностью, а соответствующие вещества называются радиоактивными. Анализ многочисленных опытов привел к выводу, что радиоактивность есть результат процессов, происходящих внутри атомных ядер и связанных с их сложным строением. Э. Резерфорд первым установил основной закон радиоактивного распада: для каждого радиоактивного вещества существует определенный интервал времени, называемый периодом полураспада T, в течение которого количество радиоактивного вещества убывает в 2 раза. Закон имеет вид

$$N_t=N_0\cdot 2^{-t/T},$$

где N_t — число радиоактивных атомов в произвольный момент времени t, N_0 — их первоначальное количество (при $t=0$).

Задача 4. *В микрокалориметр с теплоемкостью $C=100$ Дж/К помещен образец радиоактивного кобальта с относительной атомной массой $A=61$. Масса образца $m=10$ мг. При распаде одного ядра кобальта выделяется энергия $w=2\cdot 10^{-19}$ Дж. Через время $\tau=50$ мин температура калориметра повысилась на $\Delta t=0{,}06$ °С. Каков период полураспада данного препарата кобальта? Число Авогадро $N_A=6\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.*

Повышение температуры калориметра определяется выделением энергии Q в образце при распаде ядер атомов кобальта:

$$C\Delta t=Q=\Delta N w.$$

Здесь ΔN — число распавшихся ядер за время τ. Это число равно

$$\Delta N = N_0 - N_0 \cdot 2^{-\tau/T} = N_0(1 - 2^{-\tau/T}),$$

где N_0 — первоначальное число радиоактивных атомов. По закону Авогадро $N_0 = N_A m/\text{M}$, где $\text{M} = A \times 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса кобальта. Теперь окончательно получаем

$$C\Delta t = N_A \frac{m}{A \cdot 10^{-3}} \left(1 - 2^{-\tau/T}\right) w,$$

откуда находим период полураспада T:

$$T = \frac{\tau}{\log_{1/2}(1 - (C\Delta t A \cdot 10^{-3})/(N_A w m))} \approx$$

$$\approx 5700 \text{ с} \approx 95 \text{ мин.}$$

Задача 5. *В некоторый момент времени счетчик радиоактивного излучения, расположенный вблизи препарата фтора-18 с малым периодом полураспада, зафиксировал $I_0 = 77$ отсчетов в секунду. Через время $\tau = 14$ мин показания уменьшились до $I_1 = 70$ отсчетов в секунду. Определите период полураспада фтора-18.*

Счетчик радиоактивного излучения регистрирует интенсивность радиоактивного распада, которая определяется скоростью изменения числа нераспавшихся радиоактивных атомов:

$$I_0 = \frac{\Delta N_0}{\Delta t}, \quad I_1 = \frac{\Delta N_\tau}{\Delta t}.$$

Отсюда, используя закон радиоактивного распада, получаем

$$I_1 = I_0 \cdot 2^{-\tau/T},$$

и период полураспада

$$T = \frac{\tau}{\log_2(I_0/I_1)} \approx 6108 \text{ с} \approx 102 \text{ мин.}$$

Упражнения

1. При освещении фотоэлемента светом с длиной волны $\lambda_1 = 600$ нм его ЭДС $\mathscr{E}_1 = 1{,}2$ В. Какой будет ЭДС $\mathscr{E}_2$ фотоэлемента при облучении светом с длиной волны $\lambda_2 = 400$ нм?

2. Рентгеновское тормозное излучение возникает при бомбардировке быстрыми электронами металлического антикатода рентгеновской трубки. Определите длину волны коротковолновой границы спектра тормозного излучения, если скорость электронов составляет 40 % от скорости света в вакууме.

3. На неподвижный невозбужденный атом водорода налетает другой атом водорода. Какова должна быть минимальная кинетическая энергия налетающего атома, чтобы в результате столкновения мог излучиться фотон? Энергия ионизации атома водорода $E_{\text{ион}} = 13{,}6$ эВ.

4. Ампула с радиоактивным препаратом $^{24}_{11}\text{Na}$ охлаждается потоком воздуха. В начале опыта воздух нагревался на $\Delta t_1 = 2$ °С, а через время $\tau = 142$ мин — на $\Delta t_2 = 1{,}8$ °С. Каков период полураспада данного препарата?

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 38)

Н. Михайловский (Красноярск) 89; *И. Мишенев* (Минск) 97; *Я. Насиковский* (Ровио) 85, 86, 89—91; *А. Недачин* (Киев) 83, 85, 89—91, 95, 97; *А. Никитин* (Тихвин) 83, 89; *Г. Николаишвили* (Тбилиси) 83, 86, 89; *М. Нитишинский* (Красногорск Московской обл.) 85; *А. Нургалеев* (Днепродзержинск) 85, 89; *Д. Орел* (Воркута) 91; *Л. Петько* (Минск) 91, 95; *Г. Побережский* (Омск) 97; *С. Полищук* (Канев) 97; *С. Резнов* (Киев) 83, 91; *А. Розенберг* (Уфа) 91; *А. Розенвайн* (Тарту) 95; *Е. Розношик* (Киев) 91, 97; *Т. Рокицкая* (Виннипа) 83; *В. Рубман* (Одесса) 83, 85; *Р. Сагайдак* (с. Матусов Черкасской обл.) 83, 86, 89, 91; *А. Севенюк* (Брест) 97; *С. Сильвестров* (Киев) 91; *А. Служаев* (Димитровград) 91; *Т. Соколовская* (Целиноград) 83, 85, 89, 91, 95; *Д. Соловьев* (Ивано-Франковск) 89; *А. Ставицкий* (Баку) 83, 89; *А. Степура* (Ивано-Франковск) 90, 91; *А. Струнин* (Ярославль) 85, 90, 91; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 83, 85, 86, 89, 91, 95; *В. Суклиян* (Одесса) 97; *С. Сулейменов* (п. Кульсары Гурьевской обл.) 89; *Б. Татиевский* (Ялта) 83, 91; *И. Терехов* (Протвино) 89, 91; *Д. Тильга* (Алма-Ата) 83, 89; *А. Ткаченко* (Киев) 83, 85; *В. Ткаченко* (с. Майма Алтайского кр.) 89, 91; *В. Тягнирядно* (Минск) 89—91; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) 91; *Г. Финкельштейн* (п. Черноголовка Московской обл.) 83, 85, 86, 89—91, 95; *Б. Фуркал* (Черновщы) 91; *А. Фурс* (п/о Дричин Минской обл.) 90, 91; *П. Хиль* (п. Овидиополь Одесской обл.) 85, 91; *И. Чайка* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 91; *О. Челиков* (Могилев) 86, 89, 91; *Ю. Шапиро* (Бобруйск) 91; *В. Шахмуров* (Баку) 89; *С. Шехтман* (Киев) 83; *Г. Шугай* (Запорожье) 91; *А. Шуляк* (с. Молодецкое Черкасской обл.) 85, 89; *А. Щеглов* (Холмск) 85, 86; *О. Юсухно* (Киев) 89, 91; *В. Ясюченя* (Минск) 86, 89, 91.

XXVII • MOM • 1986
WARSZAWA

XXVII
Международная математическая олимпиада

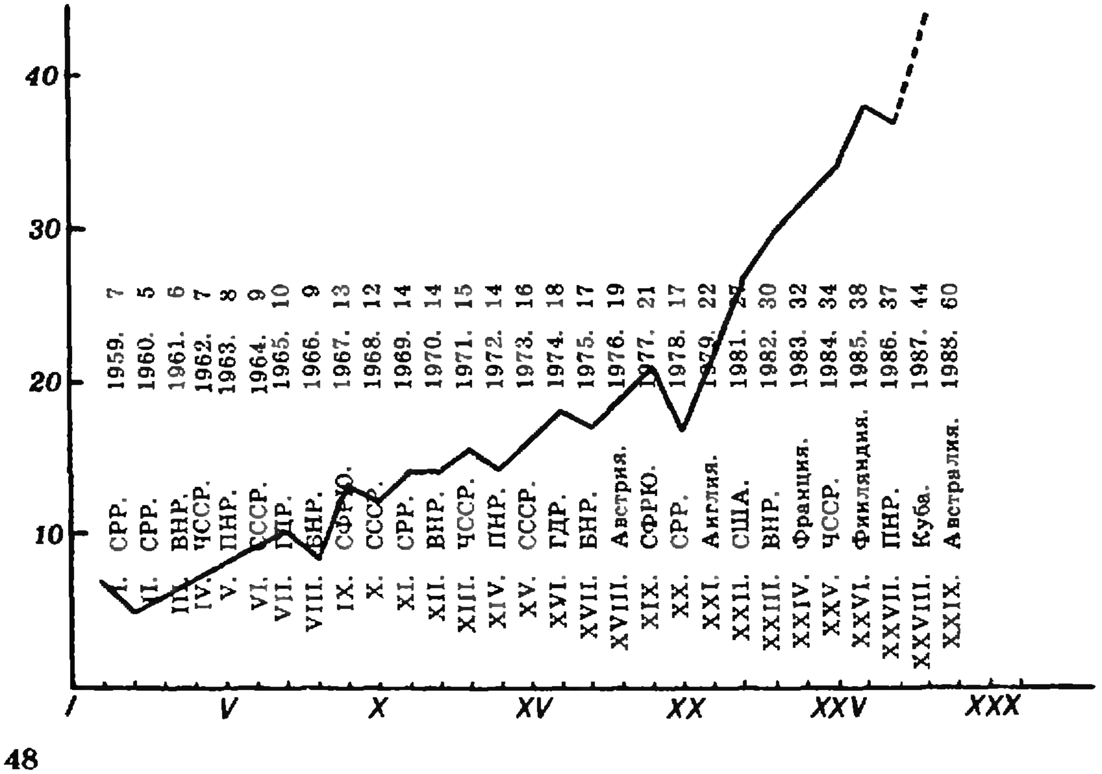
Кандидат физико-математических наук
А. П. САВИН,
Т. А. САРЫЧЕВА,
кандидат физико-математических наук
А. А. ФОМИН

Когда вспоминаешь десять дней, проведенных в Польше на XXVII Международной математической олимпиаде, в памяти возникают улицы и площади возрожденной Варшавы, небольшой домик в парке города Желязова Воля, в котором родился Фредерик Шопен, беседы с руководителями команд (а их в этот раз собралось 37), радости и огорчения во время проверки работ и многое другое.

Но самым ярким впечатлением, наверное, был тот момент во время официального закрытия олимпиады, когда на сцену были вызваны трое лучших участников олимпиады, набравших 42 очка из 42 возможных,— наши Володя Роганов и Слава Смирнов и венгр Куш Гиза. Этот момент вы могли видеть в телевизионной программе «Время».

Кроме них, еще 15 участников, набравших не менее 34 очков, также получили первые премии; 41 участник получил вторые премии (от 26 до 33 очков) и 48 — третьи (от 17 до 25 очков). Специальным призом жюри награжден американский школьник Джозеф Кин за оригинальное решение задачи № 3.

После закрытия олимпиады команды фотографировались на память. Всеобщее внимание привлекло совместное фотографирование двух команд СССР и США, и не только потому, что непринужденное общение этих команд символизировало атмосферу дружбы, царившую на этом празднике математики, но и потому, что они разделили I и II места в неофициальном командном первенстве, набрав по 203 очка.



Следующие места заняли команды ФРГ (196), КНР (177), ГДР (172), СРР (171), НРБ (161), ВНР (151), ЧССР (149), СРВ (146), Великобритании (141), Франции (131), Австрии (127), Исландии (119), Австралии (117), Канады (112), ПНР (93), Марокко (90), Туниса (85), СФРЮ (84), Алжира (80), Бельгии (79), Испании (78), Бразилии (69), Норвегии (68), Греции (63), Финляндии (60), Колумбии (58), Швеции (57), Турции (55), МНР (54), Кипра (53), Кубы (51), Италии (49), Кувейта (48), Израиля (37), Люксембурга (22). В каждой команде было по 6 участников, кроме команд Израиля (4), Испании (4), Италии (3) и Люксембурга (2).

Итак, Володя Роганов и Слава Смирнов, набрав по 42 очка, получили первые премии. Остальные четыре наших участника получили вторые премии, набрав соответственно: Гена Глущенко — 32 очка, Антон Лунин — 31 очко, Сигитас Кярас и Витя Порошин — по 28 очков.

Если попытаться проанализировать выступление нашей команды, то здесь следует отметить традиционно плохое решение самой простой задачи олимпиады (№ 1) и традиционно уверенное решение самых трудных задач (№ 3 и № 6). Вот тексты задач олимпиады.

Первый день

1. Пусть d — положительное целое число, отличное от 2, 5 и 13. Докажите, что во множестве $\{2, 5, 13, d\}$ можно найти два различных числа a и b так, что числа $ab-1$ не является квадратом целого числа.

2. На плоскости даны треугольник $A_1A_2A_3$ и точка P_0. Положим $A_s = A_{s-3}$ для любого целого $s \geqslant 4$. Строим последовательность точек $P_0, P_1, P_2, \ldots$ так, что точка P_{k+1} есть образ точки P_k при повороте вокруг точки A_{k+1} на угол 120° по часовой стрелке ($k=0, 1, \ldots$). Докажите, что если $P_{1986}=P_0$, то треугольник $A_1A_2A_3$ равносторонний.

3. Каждой вершине пятиугольника приписано некоторое целое число так, что сумма всех пяти чисел положительна. Если трем последовательным вершинам соответствуют числа x, y, z и $y<0$, то разрешается следующая операция: числа x, y, z заменяются соответственно на $x+y$, $-y$, $y+z$. Такие операции последовательно совершаются до тех пор, пока хотя бы одно из пяти чисел отрицательно. Определите, обязательно ли этот процесс завершится за конечное количество шагов.

Второй день

4. Пусть A и B — соседние вершины правильного n-угольника ($n \geqslant 5$) с центром O. Треугольник XYZ, конгруэнтный треугольнику OAB, вначале совпадает с ним, потом движется в плоскости n-угольника так, что точки Y и Z остаются на границе, а точка X — внутри данного n-угольника. Какую фигуру опишет точка X, когда точки Y и Z вместе совершат полный оборот по границе n-угольника?

5. Найдите все функции $f(x)$, определенные на множестве неотрицательных действительных чисел, принимающие значения в том же множестве и удовлетворяющие следующим условиям:

(1) $f(xf(y)) \cdot f(y)=f(x+y)$ для всех неотрицательных x и y,

(2) $f(2)=0$,

(3) $f(x) \neq 0$ для всех $0 \leqslant x < 2$.

6. Пусть M — произвольное конечное множество целочисленных точек на координатной плоскости. Всегда ли можно окрасить некоторые точки множества M в белый цвет, а остальные — в красный так, чтобы для каждой прямой L, параллельной любой из координатных осей, абсолютная величина разности между числом белых и красных точек на L не превосходила бы единицы? Ответ обоснуйте.

Во время проведения олимпиады состоялось заседание Международного подготовительного комитета по проведению Международных математических олимпиад под председательством его президента, профессора Московского физико-технического института Г. Н. Яковлева.

На заседании было решено, что в 1987 году олимпиада пройдет на Кубе, а в 1988 г.— в Австралии. На рисунке приведен график количества стран-участниц олимпиад с 1-й по 27-ю и прогноз на следующие два года. Этот прогноз учитывает более широкое представительство латиноамериканских стран на XXVIII олимпиаде и тихоокеанских стран на XXIX.

XXVII Международная математическая олимпиада прошла в атмосфере дружбы и стремления к миру. Недаром из задач, которыми обменивались участники олимпиады, наибольшей популярностью пользовался ребус Харьковского школьника Бори Кругликова:

USA+USSR=PEACE

Представляем команду СССР на XXVII ММО:

Геннадий Глущенко, выпускник школы № 91 г. Запорожье. На Всесоюзных олимпиадах награждался дипломами I степени в 1984, 1985 и 1986 гг. II премия на XXVII ММО.

Сигитас Кярас, выпускник школы № 2 г. Молетай ЛитССР. На Всесоюзных олимпиадах награждался в 1984 г. дипломом II степени, в 1985 г. — I степени, в 1986 г. — II степени. II премия на XXVII ММО.

Г. Глущенко.

С. Кярас.

А. Лунин.

В. Порошин.

В. Роганов.

С. Смирнов.

Антон Лунин, выпускник школы № 57 г. Москвы. На Всесоюзных олимпиадах награждался в 1984 г. дипломом I степени, в 1985 г. — II степени, в 1986 г. — I степени. II премия на XXVII ММО.

Виктор Порошин, выпускник школы № 239 г. Ленинграда. На Всесоюзных олимпиадах награждался в 1984 г. дипломом I степени, в 1985 г.— II степени, в 1986 г. — I степени. II премия на XXVII ММО.

Владимир Роганов, выпускник ФМШ при МГУ. На Всесоюзных олимпиадах награждался в 1985 г. дипломом II степени, в 1986 г. — I степени. I премия на XXVII ММО.

Станислав Смирнов, ученик школы № 239 г. Ленинграда. На Всесоюзных олимпиадах награждался в 1985 г. дипломом I степени, в 1986 г.— II степени. I премия на XXVII ММО.

Возвращаясь к напечатанному

Редакция получила несколько писем, указывающих на «ошибки в алгоритмах», которые читатели увидели в статье В. А. Каймина («Квант», № 10, с. 47). Это дает нам повод остановиться на важном вопросе: какие алгоритмы считать правильными?

Алгоритм назовем *правильным*, если он формирует результаты, строго в соответствии с требованиями (постановки задачи или описания сценария) при любых допустимых исходных данных. Соответственно — алгоритм содержит ошибки, если можно указать такие допустимые исходные данные, при которых будет получен результат, не отвечающий заданным требованиям; либо вовсе не будут получены результаты. При отсутствии четкой постановки задачи говорить о наличии ошибок в алгоритмах или программах не имеет смысла.

Пример неправильного алгоритма действительно можно найти в упомянутой статье: к сожалению, в алгоритме подсчета площади кольца (с. 48) после строки $S2:=\pi\cdot r2^2$ пропущена строка $S:=S1-S2$. В связи с этим редакция приносит читателям свои извинения.

Другое дело — алгоритм приближенного решения уравнения $f(x)=0$ (метод половинного деления, с. 50). В статье (из-за ограниченности объема) не приводится постановка задачи, поэтому формально ставить вопрос о правильности этого алгоритма неправомерно. Отметим, однако, что в авторской постановке было:

Треб: $x0$ — приближенное решение;

Связь: $x1\leqslant x0\leqslant x2$, $|x1-x2|<e$,

$f(x1)\cdot f(x2)\leqslant 0$.

Для этой постановки приведенный алгоритм — правильный. Можно, конечно, ставить задачу иначе, например требовать $|f(x0)|<e$, и тогда нужен другой алгоритм. Какая постановка лучше — это уже другой, чисто математический вопрос.

XVII
Международная физическая олимпиада

Доктор педагогических наук
О. Ф. КАБАРДИН,
кандидат педагогических наук
В. А. ОРЛОВ

XVII Международная олимпиада школьников по физике проходила в Великобритании с 13 по 20 июля на базе школы Хэрроу в Лондоне. Для участия в олимпиаде прибыли команды из 21 страны: Австрии, Великобритании, ВНР, ГДР, Исландии, Канады, КНР, Кубы, Нидерландов, Норвегии, НРБ, ПНР, СРР, СССР, США, СФРЮ, Турции, Финляндии, ФРГ, ЧССР и Швеции. Впервые в олимпиаде приняли участие команды КНР и США. Кроме того, на олимпиаде были представлены наблюдатели из Австралии, Кувейта и Сингапура.

В команду СССР вошли пять школьников:

Олег Волков — выпускник с. ш. № 23 г. Горького,

Андрей Гущин — выпускник ФМШ № 165 г. Новосибирска,

Андрей Матыцин — выпускник с. ш. № 91 г. Москвы,

Сергей Мягчилов — выпускник с. ш. № 16 г. Одессы,

Григорий Николаишвили — выпускник ФМШ им. Комарова г. Тбилиси.

Руководителями команды были авторы этой статьи — научные сотрудники Научно-исследовательского института содержания и методов обучения Академии педагогических наук СССР.

Организация и проведение олимпиады были поручены Министерству образования и науки, Физическому обществу и коллективу учителей физики школы Хэрроу. Председателем оргкомитета был назначен известный английский ученый сэр Алек Мэррисон, генеральным секретарем — профессор С. Айзенберг.

Оба тура олимпиады — теоретический и экспериментальный — были проведены на базе школы Хэрроу. На решение трех задач теоретического тура было отведено 4,5 часа, двух задач экспериментального тура — 5 часов.

Вот условия этих задач.

Теоретический тур

Задача 1

Плоская монохроматическая световая волна с длиной волны λ и частотой ν падает перпендикулярно на две тождественные узкие щели L и M, находящиеся на расстоянии d друг от друга (рис. 1). Световые волны, исходящие из каждой щели в направлении под углом Θ к нормали, на расстоянии x в момент времени t определяются уравнением

$$y = a\cos(2\pi(\nu t - x/\lambda)),$$

где a — амплитуда, одинаковая для обеих волн, $x \gg d$.

1) Докажите, что результирующую амплитуду A двух волн, выходящих под углом Θ к нормали, можно получить сложением двух векторов, модуль каждого из которых равен a, а направление определяется фазой световой волны. Проверьте геометрически, по векторной диаграмме, что

$$A = 2a\cos\beta, \text{ где } \beta = (\pi d \sin\Theta)/\lambda.$$

2) Двойная щель заменяется дифракционной решеткой, состоящей из N одинаковых щелей, расстояние между которыми одинаково и равно d. Используя векторный метод сложения амплитуд, покажите, что начало и конец каждого вектора лежат на окружности радиуса R, определяемого уравнением

$$R = a/(2\sin\beta),$$

где a — модуль каждого вектора. Покажите, что результирующая амплитуда равна

$$a(\sin N\beta/\sin\beta),$$

и получите разность фаз между результирующей волной и волной, падающей на решетку.

3) Начертите на одном и том же рисунке графики $\sin N\beta$ и $1/\sin\beta$ как функции β. На отдельном графике покажите, как зависит от β интенсивность результирующей волны.

4) Определите интенсивность главных максимумов.

5) Покажите, что число главных максимумов не может превышать $(2d/\lambda)+1$.

6) Покажите, что две волны длиной λ и $\lambda+\Delta\lambda$, где $\Delta\lambda \lll \lambda$, образуют главные максимумы на угловых расстояниях

$$\Delta\Theta = n\Delta\lambda/(d\cos\Theta), \text{ где } n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Вычислите это угловое расстояние для линий натрия, длины волн которых $\lambda = 589{,}0$ нм, $\lambda+\Delta\lambda = 589{,}6$ нм, $n=$ и $d = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ м.

Задача 2

В начале этого века была предложена модель Земли, в которой предполагалось, что Земля представляет собой шар радиусом R, состоящий из однородной изотропной твердой оболочки и жидкого ядра радиусом R_c (рис. 2). Скорости сейсмических продольных v_p и поперечных v_S волн, так называемых волн p и S, внутри оболочки постоянны. В ядре продольные волны имеют скорость v_{cp}, а поперечные волны не распространяются. Землетрясение в точке E на поверхности Земли образует

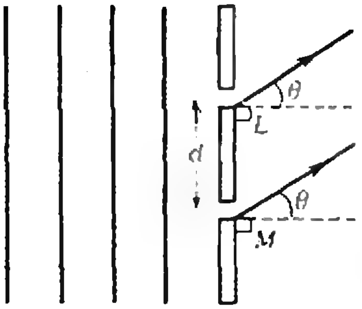


Рис. 1.

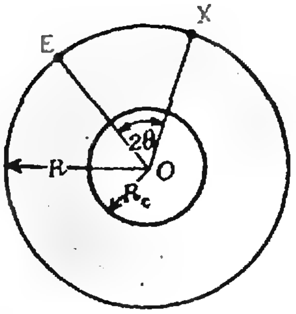


Рис. 2.

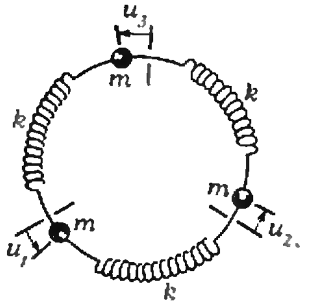


Рис. 3.

сейсмические волны, которые пробегают сквозь Землю и регистрируются на поверхности наблюдателем, который может установить свой сейсмограф в любой точке X земной поверхности. Угловое расстояние между точками E и X равно $EOX=2\Theta$, где O — центр Земли.

1) Покажите, что сейсмические волны, распространяющиеся только в оболочке по прямой, достигнут точки X за время t (время пробега волн после землетрясения), определяемое по формуле

$$t=(2R\sin\Theta)/v \text{ для } \Theta\leqslant\arccos(R_c/R),$$

где $v=v_p$ для волн p и $v=v_S$ для волн S.

2) Если положение точки X такое, что $\Theta>\arccos(R_c/R)$, то сейсмические волны p достигают наблюдателя после двух преломлений на границе между оболочкой и ядром. Начертите траекторию распространения такой сейсмической волны. Получите соотношение между углом Θ и углом падения i сейсмической волны p на границу между оболочкой и ядром.

3) Используя данные: $R=6370$ км, $R_c=3470$ км, $v_p=10{,}85$ км·с$^{-1}$, $v_S=6{,}31$ км×с$^{-1}$, $v_{cp}=9{,}02$ км·с$^{-1}$ и результат, полученный в п. 2), начертите качественный график зависимости Θ от i. Прокомментируйте физические последствия формы этой зависимости для наблюдателей, находящихся в различных точках земной поверхности. Нарисуйте графики зависимости времени пробега волн p и S от угла Θ для $0\leqslant\Theta\leqslant90°$.

4) После землетрясения наблюдатель измеряет задержку по времени между прибытием волны S вслед за волной p, равную 2 мин 11 с. Определите угловое расстояние, измеренное от центра Земли, между точкой землетрясения и наблюдателем, используя данные п. 3).

5) Наблюдатель, который сделал измерение в п. 4), замечает, что через некоторое время после прибытия волн p и S последовали еще два отсчета на сейсмографе, причем промежуток времени между ними равен 6 мин 37 с. Объясните этот результат и проверьте, что он действительно связан с угловым расстоянием, определенным в предыдущем пункте.

Задача 3

Три частицы массой m соединены упругими нерастянутыми пружинами каждая с жесткостью k и находятся в состоянии равновесия (рис. 3). Их движение ограничено по окружности.

1) Каждая частица смещается из равновесного положения небольшим сдвигом u_1, u_2 и u_3. Составьте уравнения движения для каждой частицы после сдвига. Массами пружин пренебречь.

2) Покажите, что система может совершать гармонические колебания по закону

$$u=a_n\cos\omega t\ (n=1,2 \text{ и } 3)$$

с ускорениями — ω^2u, где a_n — постоянные амплитуды, и что циклическая частота ω может иметь два возможных значения

$$\omega_0\sqrt{3} \text{ и } 0, \text{ где } \omega_0^2=k/m.$$

3) Система из пружин и частиц увеличивается до числа N, каждая частица соединена пружинами с двумя соседними. Сначала пружины не растянуты и находятся в равновесном состоянии. Составьте уравнение движения для n-й частицы ($n=1, 2, 3, \ldots, N$), выраженное через смещение самой частицы, а также соседних частиц после выведения их из положения равновесия. Покажите, что

$$u_n(t)=a_s\sin(2ns\,\pi/N+\varphi)\cos\omega_s t,$$

(где $s=1, 2, \ldots, N$, $n=1, 2, \ldots, N$, φ — произвольная фаза) является решением уравнения движения при условии, что циклическая частота задается выражением

$$\omega_s=2\omega_0\sin(s\pi/N),$$

где a_s ($s=1, \ldots, N$) — постоянные амплитуды, не зависящие от n. Укажите диапазон возможных частот для цепи, содержащей бесконечное число частиц.

4) Определите отношение u_n/u_{n+1} для большого значения N в двух случаях: а) низкочастотные решения; б) $\omega=\omega_{\max}$, где $\omega_{\max}$ — решение для максимальной частоты. Поясните графически расположение частиц в цепи в момент времени t для а) и б).

5) Одну из частиц заменили на частицу с массой $m'\ll m$. Сделайте оценку ожидаемых существенных изменений в распределении циклических частот. Опишите качественно форму частотного спектра для цепи с чередующимися массами m и m' на основе предыдущего результата.

Экспериментальный тур

Задача 1

Пронаблюдайте радуги первого, второго и пятого порядков для воды и радуги первого и второго порядков для жидкостей A и B и определите углы Θ для красных границ этих радуг (рис. 4).

Рассчитайте углы отклонения φ, на которые поворачивается падающий луч света в результате двух преломлений и k отражений от внутренней поверхности капли воды для $k=1, 2, 5$ (k — порядок радуги). Постройте график зависимости $\varphi(k)$. Определите φ для радуг второго порядка для жидкостей A и B. Постройте график величины $\cos(\varphi/6)$ в зависимости от $1/n$ для всех трех жидкостей. Вставьте дополнительную точку $n=1$. Соедините точки наиболее точной прямой, измерьте ее наклон, а также величину φ, для которой $n=2$. Показатели преломления жидкостей известны: $n_{воды}=1{,}333$; $n_A=1{,}467$; $n_B=1{,}534$.

Оборудование: спектроскоп, три шприца, сосуд с водой и две пробирки с жидкостями A и B, три чашки для сбора жидкостей, источник света, черный картон, пластилин, черная лента, два пластиковых квадрата с отверстиями, миллиметровая бумага.

Инструкция

Настройте коллиматор для получения параллельного пучка света. Выньте окуляр из зрительной трубы и с помощью резиновых колец закрепите пластиковые квадраты с отверстиями с обоих концов трубы. С помощью шприца «подвесьте» каплю жидкости над центром стола спектроскопа так, чтобы она полностью находилась в пучке света из коллиматора и была хорошо видна через зрительную трубу. Центральная горизонтальная область капли создает дисперсионные серии (радуги) как результат двух преломлений и k отражений света от внутренней поверхности капли.

Задача 2

Оборудование: микроЭВМ, 10 листов миллиметровой бумаги.

Информация

МикроЭВМ запрограммирована на решение ньютоновых уравнений движения для двумерной системы, состоящей из 25 взаимодействующих частиц в плоскости XY. Система ограничена «ящиком» и в начальный момент времени упорядочена в двумерную «решетку». Частицы, составляющие решетку, идентичны. При эволюции системы положения и скорости частиц изменяются. Если частица уходит за пределы «ящика», программа генерирует новую и впускает ее в «ящик» с противоположной стороны. Скорость новой частицы равна скорости ушедшей. Таким образом, число частиц в «ящике» неизменно. Взаимодействие двух частиц i и j, находящихся на расстоянии R_{ij}, определяется потенциалом U_{ij}.

Для удобства вычислений используются безразмерные величины, полученные делением обычных величин на характерные параметры системы: расстояние R^*, скорость v^*, время t^*, энергия E^*, масса частиц $m^*=48$, потенциал U^*_{ij}, кинетическая энергия $^1/_2 m^* v^{*2}$. ЭВМ позволяет изучать состояние системы в моменты времени $t^*=s\Delta t^*$, где $\Delta t^*=0{,}100000$, $s=0$, 1, 2, ... называют целочисленным временем. Программа позволяет выводить на экран величины:

$$\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}(v^*_{ix})^n,\ \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}(v^*_{iy})^n,\ \text{где } n=0,\ 1,\ 2;$$

$$\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}\sum_{j=1}^{25}U_{ij};\ \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}(x^*_i(s)-x^*_i(sR))^2,$$

$$\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}(y^*_i(s)-y^*_i(sR))^2$$

(для удобства ЭВМ давала зависимость не от s, а от $sZ=s-sR$, где sR — заданный параметр времени). Кроме того, можно было изучить распределение молекул по скоростям, получить таблицу зависимости числа молекул ΔN с компонентами скорости, попадающими в данный интервал, от скорости.

Вопросы на вычисления

1) Проверьте, что полный импульс системы сохраняется для последовательности времен $s=0$, 40, 80, 120, 160. Какова точность вычисления?

2) Постройте график зависимости кинетической энергии системы от времени для последовательности времен $s=0$, 2, 4, 6, 12, 18, 24, 30, 50, 70, 90, 130, 180.

3) То же, что в п. 2), для потенциальной энергии.

4) Рассчитайте полную энергию системы для последовательности времен из п. 2). Сохраняется ли энергия системы? Какова точность вычисления полной энергии системы?

5) В начальный момент $s=0$ система не находится в состоянии термодинамического равновесия. По истечении некоторого промежутка времени система достигает такого состояния, при этом полная безразмерная кинетическая энергия флюктуирует в окрестности среднего значения E^*_k. Определите значение E^*_k, а также время достижения системой состояния равновесия.

6) С использованием данных о накопленных частицах (при термодинамическом равновесии) постройте гистограмму зависимости ΔN от безразмерной скорости. Проверьте соотношение

$$\Delta N=A\exp(-24v^{*2}/\alpha),$$

где A и α — постоянные. Определите значение α.

7) Для системы в термодинамическом равновесии рассчитайте среднее значение R^2($\langle R^2\rangle$), где R — расстояние по прямой между положениями частицы в фиксированный начальный момент времени sR и в текущий момент времени s. Разница времен $sZ=s-sR$ принимает значения 0, 2, 4, ..., 24. Постройте график зависимости $\langle R^2\rangle$ от sZ в соответствующем интервале значений sR. Вычислите градиент функции в линейной области и укажите временной интервал, для которого этот градиент имеет смысл. Для улучшения точности графика повторите предыдущие вычисления для трех дополнительных значений sR и определите для четырех результирующих наборов среднее $\langle R^2\rangle$, а также линейный градиент и временной интервал. Определите и обоснуйте, в каком агрегатном состоянии (жидком или твердом) находится система при равновесии.

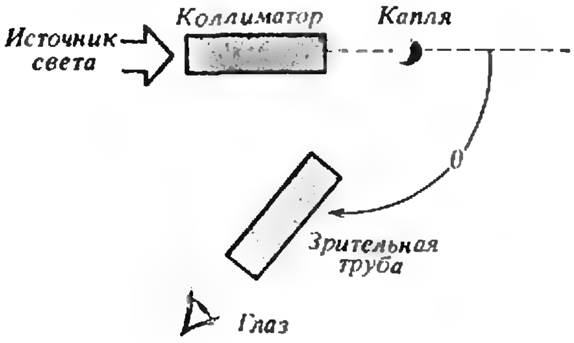
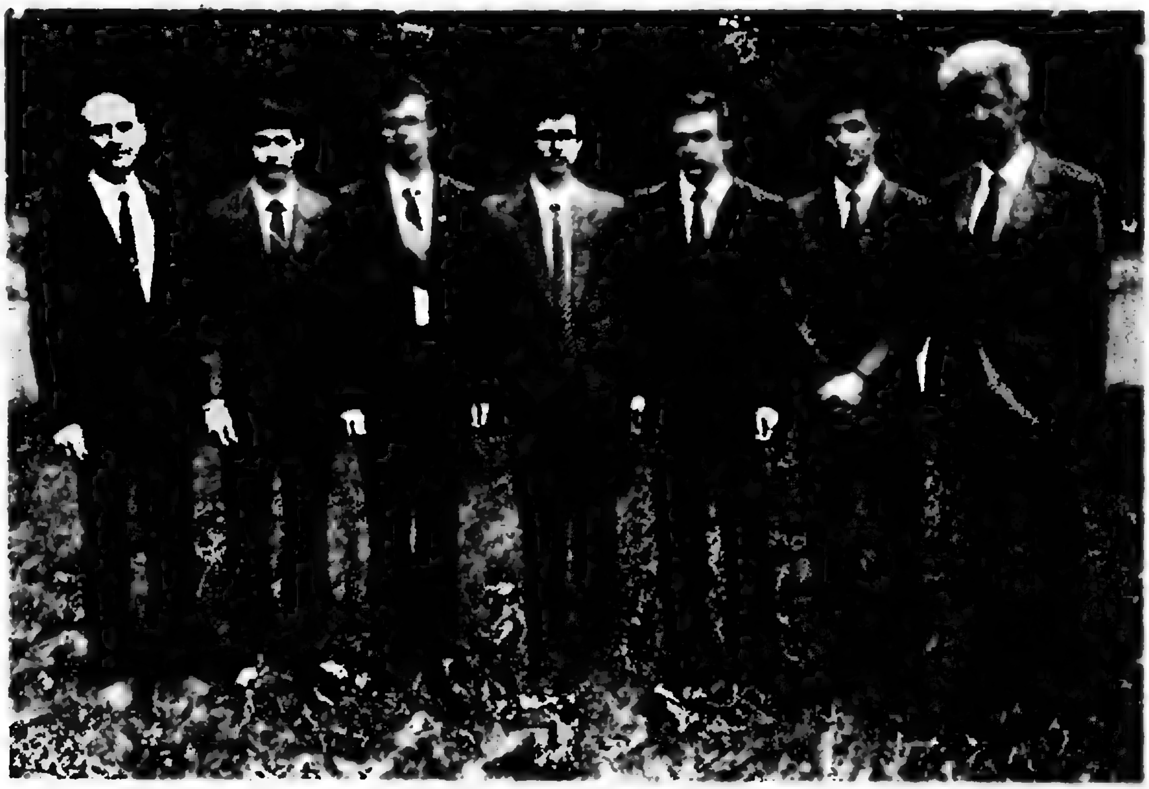


Рис. 4.

Каждая задача теоретического и экспериментального туров оценивалась в 10 баллов.

Наибольшее количество баллов за решение первой теоретической задачи получил румынский школьник К. Некула (9,25), за решение второй теоретической задачи — австрийский



Команда Советского Союза и ее руководители на XVII Международной физической олимпиаде. Слева направо: О. Ф. Кабардин, А. Гущин, О. Волков, А. Матыцин, С. Мягчилов, Г. Николаишвили, В. А. Орлов.

школьник С. Майкстейнер (9,62), третьей теоретической задачи — З. Гагю-Салфю из СРР (8,77). Абсолютно лучший результат за решение задач теоретического тура был у румынского школьника К. Некулы — 25,71 баллов. Второй и третий результаты у советских школьников О. Волкова и А. Матыцина — 24,83 и 24,52 балла соответственно. Лучший командный результат теоретического тура был у команды СССР — 106,82 баллов. У команд СРР и ФРГ, занявших 2 и 3 места, — 98,45 и 87,06 баллов соответственно.

Максимальное число баллов за первую экспериментальную задачу получил советский школьник С. Мягчилов (7,7), за вторую экспериментальную задачу — З. Кантор из ВНР (7,7). Лучший результат за выполнение всего экспериментального задания был у советского школьника С. Мягчилова — 13,9 баллов. Второй и третий результаты — у О. Волкова из СССР — 13,1 баллов и З. Кантора из ВНР — 12,3 баллов. Лучший командный результат за эксперимент у команды СССР — 56,6 баллов, второй и третий результаты у команд ГДР и Великобритании — 44,0 и 40,5 баллов соответственно.

После подведения общих итогов абсолютно лучший результат оказался у советского школьника О. Волкова — 37,93 баллов. Он награжден дипломом I степени.

Такие же дипломы получили С. Мягчилов (СССР) — 35,66, К. Некула (СРР) — 35,31 и А. Матыцин (СССР) — 34,62. Остальные участники советской команды также получили дипломы: А. Гущин — диплом II степени (30,41), Г. Николаишвили — диплом III степени (24,80). Общее число первых дипломов — 4, вторых — 5, третьих — 22.

В неофициальном командном зачете команда СССР завоевала первое место, набрав 163,42 балла. Остальные команды по сумме набранных баллов расположились следующим образом: СРР — 136,95, Великобритания — 125,31, ВНР — 123,92, ФРГ — 121,66, Нидерланды — 118,4, ПНР — 114,9, США — 109,57, ЧССР — 109,34, ГДР — 106,58, НРБ — 92,37, Швеция — 79,81, КНР — 78,93 (три участника), Турция — 78,0, Финляндия — 74,64, Австрия — 69,82, Канада —

67,2, СФРЮ — 62,25, Норвегия — 54,69, Куба — 50,71, Исландия — 31,72 (четыре участника).

О. Волков получил специальный приз за абсолютно лучший результат, С. Мягчилов — за лучшее выполнение экспериментального задания.

На закрытии олимпиады от участников олимпиады слово было предоставлено советскому школьнику Олегу Волкову.

Во время олимпиады ее участникам была предложена интересная культурная программа. Были проведены экскурсии в Королевский институт (в Лондоне), в котором находится музей М. Фарадея, в лабораторию физических и космических исследований им. Э. Резерфорда, на Гринвичскую обсерваторию, в Оксфордский университет. Участники олимпиады посетили парламент, встречались с членом парламента. Во время открытия и закрытия олимпиады силами английских школьников были даны концерты.

Олимпиада прошла в дружеской обстановке.

Редакционная коллегия и редакция журнала «Квант» поздравляют всех членов советской команды с большой победой на XVII Международной физической олимпиаде и желают им дальнейших творческих успехов.

Информация

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8, 9 и 10 классы на 1987/88 учебный год.

Цель школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях по углублению своих знаний по физике и математике. При приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где такая помощь особенно необходима.

Обучение в школе бесплатное.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки, которые могут быть организованы в любой общеобразовательной школе двумя преподавателями — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся (не менее 8—10 человек), успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии, имя, отчество руководителей кружка и поименный список членов кружка (с указанием класса в 1987/88 учебном году и итоговых оценок за вступительное задание по физике и математике). Все материалы по организации кружка и конверт для ответа о приеме кружка в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей кружка следует выслать в адрес ЗФТШ (141700, г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ, «кружок») *до 25 мая 1987 года*. (Тетради с работами членов кружка в ЗФТШ не высылаются.)

Учащиеся ЗФТШ и руководители физико-технических кружков будут получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы учащихся-заочников проверяют в ЗФТШ и ее филиалах, а членов кружка — его руководители.

С учащимися Москвы проводятся занятия по физике и математике два раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ). Набор в эти группы проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам очного собеседования по физике и математике (справки по телефону 408-51-45).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу надо сделать на русском языке и аккуратно переписать в *одну* школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте *простой* бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону тетради наклейте лист бумаги, заполненный по образцу (все фамилии, имена и отчества в этой анкете должны быть написаны четко печатными буквами в именительном падеже):

1. Область (край или АССР) *Белгородская область*
2. Фамилия, имя, отчество *Калинин Андрей Иванович*
3. Класс *восьмой*
4. Номер, адрес и телефон школы *Старооскольская средняя школа № 16, т. 5-25-40*
5. Фамилия, имя, отчество вашего преподавателя:
   по физике *Грищенко Тамара Ивановна*
   по математике *Иванова Галина Петровна*
6. Профессия родителей и занимаемая должность:
   отец *электрослесарь*
   мать *ткачиха*
7. Подробный домашний адрес *309530, Белгородская обл., г. Ст. Оскол, 12, м-н Жукова, д. 28, кв. 390.*

Внизу начертите таблицу для оценок за вступительное задание:

№ п/п										
Ф.										
М.										

Для получения ответа на вступительное задание вложите в тетрадь конверт с вашим домашним адресом.

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1987 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1987 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (обязательно и по физике, и по математике) присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской обл., Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининской, Калининградской, Кировской, Костромской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Пермской, Псковской и Ярославской областей, Карельской, Коми и Удмуртской АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Камчатской, Кемеровской, Магаданской, Новосибирской, Омской, Сахалинской, Томской, Тюменской и Читинской областей, Алтайского, Красноярского, Приморского и Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской и Якутской АССР высылают работы по адресу: 660062, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79, Госуниверситет, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике.

В задании по физике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 4—9 — для восьмых классов, задачи 8—14 — для девятых классов.

В задании по математике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, 3—9 — для восьмых классов, 6—12 — для девятых классов.

Вступительное задание

Физика

1. Движущаяся равномерно подводная лодка посылает по ходу движения ультразвуковые импульсы длительностью T. Импульсы отражаются от неподвижного препятствия и возвращаются к лодке, причем их длительность оказывается равной τ. Определите скорость лодки, если скорость звука в воде равна v.

2. Человек стоит на расстоянии 6 м от реки. В 34 м от реки горит костер. Расстояние между перпендикулярами, соединяющими прямолинейный берег реки с человеком и костром, равно 30 м. Человек бежит со скоростью 5 м/с к реке, зачерпывает ведром воду, затем бежит к костру и заливает его. Каково минимальное время, необходимое ему для этого, если на то, чтобы зачерпнуть воду, нужно 5 с?

3. Высота надводной части лодки-плоскодонки равнялась 20 см. К днищу лодки со стороны воды по всей его площади приклеили пластину пенопласта (плотность равна 0,4 г/см^3) толщиной 5 см. Определите высоту надводной части лодки после наклеивания пенопласта.

4. При изготовлении льда в домашнем холодильнике потребовалось 5 мин, чтобы охладить воду от +4 °С до 0 °С, и еще 1 ч 40 мин, чтобы превратить ее в лед. Определите удельную теплоту плавления льда, если удельная теплоемкость воды равна $4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · °С).

5. В термосе хранится жидкий азот при температуре −195 °С в количестве 2 л. За сутки испарилась половина азота. Определите удельную теплоту испарения азота, если известно, что 40 г льда в том же термосе тает за 22 ч 30 мин. Скорость подвода тепла в термос пропорциональна разности температур внутри и снаружи термоса. Температура окружающего воздуха 20 °С. Плотность жидкого азота равна 300 кг/м^3.

6. Легкая пружина с жесткостью k и длиной l стоит вертикально на столе. На нее падает

шарик массой m. На какой высоте от поверхности стола шарик будет иметь максимальную скорость?

7. Искусственный спутник, используемый в системе телесвязи, запущен в плоскости земного экватора, так, что все время находится в зените одной и той же точки земного шара. Во сколько раз радиус орбиты спутника больше радиуса Земли, равного 6400 км? Ускорение свободного падения у поверхности Земли равно 9,8 м/с^2.

8. Два одинаковых нагревателя включены последовательно в сеть с напряжением 220 В. В сеть с каким напряжением нужно включить эти два нагревателя, соединенные параллельно, чтобы на них выделялась та же мощность?

9. Ядро толкнули горизонтально, сообщив ему кинетическую энергию 45 Дж. При падении в песок скорость ядра была направлена под углом 30° к горизонту. Найдите количество теплоты, выделившееся при ударе в песок. Ядро в полете не вращалось.

10. Шайба скользит по льду хоккейной площадки от одних ворот к другим. Первую половину пути, где лед расчищен, она движется в области с коэффициентом трения μ_1, а вторую — с коэффициентом трения μ_2. Найдите отношение коэффициентов трения, если известно, что скорости шайбы у первых ворот, в середине площадки и у вторых ворот относятся как 4:3:1.

11. Баллон газовой плитки с объемом 0,5 л содержит 300 г пропана под давлением 16 атм. Что можно сказать об агрегатном состоянии пропана в баллоне: газ это или нет? Химическая формула пропана C_3H_8.

12. В тепловом процессе объем идеального газа изменяется линейно с давлением по закону $V=\beta p$, где β — постоянная. Во сколько раз изменяется давление газа при уменьшении температуры от 450 К до 200 К?

13. Внутри откачанной до глубокого вакуума установки расположен герметичный теплоизолированный сосуд, заполненный идеальным одноатомным газом. Сосуд закрыт сверху теплонепроницаемым поршнем. Газ занимает объем V. На поршень ставят гирю той же массы, что и масса поршня. Найдите объем газа в новом положении равновесия.

14. Взрывная камера заполняется смесью кислорода и водорода при температуре 300 К и общем давлении 1 атм. Парциальные давления кислорода и водорода одинаковы. После герметизации камеры производится взрыв. Найдите давление внутри камеры после охлаждения продуктов реакции до температуры 373 К.

Математика

1. Лодка спускается вниз по течению реки на 6 км, а затем возвращается обратно. Скорость течения реки равна 2 км/ч. В каких пределах может лежать собственная скорость лодки, если известно, что поездка заняла не менее 4 часов?

2. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведены высота, биссектриса и медиана. Докажите, что биссектриса делит угол между медианой и высотой на две равные части.

3. Найдите последнюю цифру числа

$$19^{87}-87^{19}.$$

4. В четырехугольнике $ABCD$

$$\angle ABD=\angle ACD=90^\circ,\ AB=BD=5,\ CD=1.$$

Найдите BC.

5. Докажите, что не существует таких целых чисел x и y, что

$$3x-y^2=1987.$$

6. Докажите, что если m и n — натуральные числа, то и

$$\frac{(1+m+\ldots+m^n)^2-m^n}{1+m+\ldots+m^{n-1}}$$

— натуральное число.

7. Корни уравнения

$$x^3-3x^2+ax+1=0$$

образуют арифметическую прогрессию. Найдите значение параметра a и решите уравнение.

8. Найдите многочлен четвертой степени с целыми коэффициентами, корнем которого является число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

9. Найдите все точки на земном шаре, обладающие следующим свойством: если пройти из такой точки 1 км на юг, затем 1 км на восток и 1 км на север, то вы снова окажетесь в исходной точке.

10. Дан параллелограмм $ABCD$ площади s. Точка P лежит на прямой BD, $\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{BD}$, точка Q — на прямой DC, $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{DC}$. Найдите площадь треугольника APQ.

11. Решите уравнение

$$4\sin^2 x-4\cos x\cdot\sin y-5=0.$$

12. На координатной плоскости рассматриваются правильные треугольники, у которых две вершины лежат на прямой $y=x+2$, а координаты третьей вершины удовлетворяют неравенству

$$x^2\leqslant y\leqslant x+2.$$

Найдите наибольшее возможное значение площади рассматриваемых треугольников.

К нашим читателям

Если вы не успели подписаться на журнал «Квант» на 1987 год, не огорчайтесь. Подписку можно оформить в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи, начиная с любого месяца (только это нужно сделать заблаговременно — не позднее чем за полтора месяца). Индекс нашего журнала в каталоге «Союзпечати» 70465, цена одного номера 40 копеек.

Избранные школьные задачи

1. По условию $1=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$, но $xy+xz+yz=0$.

2. Пусть K — середина AF и L — середина BF (сделайте рисунок). Четырехугольник $EFKL$ — параллелограмм. поскольку EK параллельна BF и EL параллельна AF (EK и EL — средние линии в треугольнике ABF). Пусть H — середина EF; тогда KL проходит через H, причем $KH=LH$. Точно так же доказывается, что отрезок MN, соединяющий середины отрезков DE и CE, проходит через точку H и делится этой точкой пополам. Поэтому четырехугольник $KLMN$ — параллелограмм.

3. В точке D. Указание. Постройте графики движения обоих пловцов и убедитесь в том, что пловцы будут через раз встречаться в точках C и D.

4. $\frac{\pm 3\pm\sqrt{17}}{2}$. Указание. Положите $u=\frac{x+2}{x+1}$, $v=\frac{x-2}{x-1}$. Тогда $u^2+v^2-\frac{5}{2}uv=0$, откуда либо $u=2v$, либо $v=2u$.

5. 30°. Решение (доступное восьмиклассникам, не знающим тригонометрии). Пусть C' — точка, симметричная точке C относительно прямой AB (сделайте рисунок). Опишем около треугольника CAC' окружность. Поскольку $\angle CAC'=150°$, дуга CAC' содержит $60°$, и поэтому хорда CC' равна радиусу окружности, а точка B является ее центром. Отсюда $\angle B=30°$.

6. $\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 3$. Указание. Положите $y=\sqrt{2x-5}$. Тогда $y\geqslant 0$, и $(y+3)+|y-1|=4$. Отсюда $0\leqslant y\leqslant 1$.

7. $2\sqrt{S_1S_2}$. Решение. Пусть площадь треугольника ABC равна S. Треугольник ABC подобен треугольникам AMK и CLM (сделайте рисунок), поэтому

$$\sqrt{\frac{S_1}{S}}=\frac{AL}{AC},\quad \sqrt{\frac{S_2}{S}}=\frac{LC}{AC},$$

откуда

$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{AL+LC}{AC}=1,$$

то есть $S=S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}$.

8. Имеем

$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)<1$,

$\operatorname{tg}\gamma\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}<1$

(по условию $(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta>0)$,

$\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}(\alpha+\beta)<1$, $\operatorname{tg}\gamma<\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$,

$\operatorname{tg}\gamma<\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)$, $\gamma<\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta$,

$$\alpha+\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}.$$

9. $x=y=z=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Указание. Ясно, что $x\geqslant 1$, $y\geqslant 1$, $z\geqslant 1$. Докажем, что $x=y=z$. Пусть не все эти числа равны. Выберем из них наибольшее. Предположим, что это — x, то есть $x\geqslant y$, $x\geqslant z$. Так как $y=(x-1)^2$, $z=(y-1)^2$ и $x=(z-1)^2$, из неравенства $x\geqslant y$ получаем неравенство $(z-1)^2\geqslant(x-1)^2$, из которого следует, что $z\geqslant x$. Поэтому $x=z$. Аналогично $x=y$.

10. Построим $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{CN}$; пусть P — середина отрезка MN, Q — середина отрезка $N'M$ (рис. 1). Имеем $\overrightarrow{N'N}=\overrightarrow{AC}$, следовательно, $\overrightarrow{QP}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Треугольник $AN'M$ равнобедренный, так что точка Q бежит по биссектрисе угла, равного углу B. Точка P получается из точки Q сдвигом на постоянный вектор. Таким образом, искомое геометрическое место — отрезок. Его концы легко находятся.

Ответ (мы считаем для определенности, что $AB>BC$): отрезок, соединяющий середину стороны AC с серединой отрезка BB'; где B' — такая точка стороны AB, что $AB'=BC$. (Кстати, этот отрезок параллелен биссектрисе угла B.)

11. $(1+\sqrt{3})\left(1\pm\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\right)$. Указание. $(1+x)^4=2+2x^4$, а $(1+x)^4-(1-x)^4=2+12x^2+2x^4$, откуда $(1-x)^4=12x^2$, то есть $(1-x)^2=\sqrt{12}|x|$. Случай $x\leqslant 0$ решений не имеет; в случае $x>0$ получаем квадратное уравнение $(1-x)^2=2\sqrt{3}x$, корни которого $x_{1,2}=1+\sqrt{3}\pm\sqrt{3+2\sqrt{3}}=(1+\sqrt{3})\left(1\pm\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}\right)$.

12. а) $b_c=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$. Указание. Если CL — биссектриса угла C, то $S_{CAL}+S_{CBL}=\frac{1}{2}b\cdot l_c\sin\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}al_c\sin\frac{\gamma}{2}=S_{ABC}=\frac{1}{2}\times ab\sin\gamma$.

б) Пусть $l_c=l_b$. Докажем, что углы C и B равны. Предположим, что это не так. Пусть $\angle C=\gamma$, $\angle B=\beta$ и для определенности $\gamma>\beta$. Тогда $c>b$. Сравнивая теперь выражения $l_c=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$ и $l_b=\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2}$, получаем, что $l_c<l_b$ (поскольку $\cos\frac{\gamma}{2}<\cos\frac{\beta}{2}$ и $\frac{b}{a+b}<\frac{c}{a+c}$). Противоречие. (Попутно мы доказали, что в треугольнике меньшему углу соответствует большая биссектриса.)

13. Из точек прямой $y=-\frac{1}{4}$. Решение. Уравнение касательной, проходящей через точку $(c;c^2)$ графика функции $y=x^2$, имеет вид $y=2c(x-c)+c^2=2cx-c^2$. Если через некоторую точку $(x_0;y_0)$ плоскости проведены две каса-

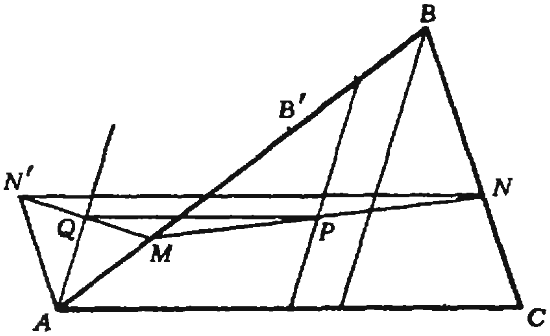


Рис. 1.

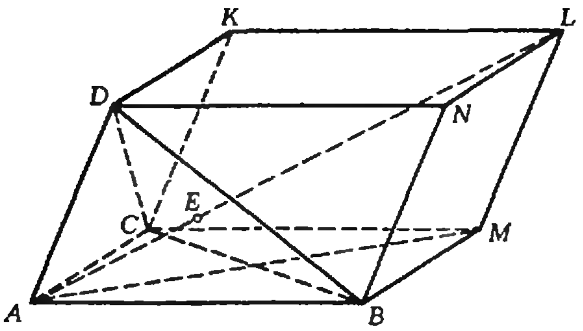


Рис. 2.

тельные с уравнениями $y=2cx-c^2$ и $y=2bx-b^2$, то $y_0=2cx_0-c^2$ и $y_0=2bx_0-b^2$. Если, кроме того, эти касательные перпендикулярны, то $2c\cdot 2b=-1$, откуда $bc=-\frac{1}{4}$.

Из выписанных уравнений получаем $2cx_0-c^2=2bx_0-b^2$, или $x_0=\frac{b+c}{2}$ $(b\neq c)$. Подставляя x_0 в первое уравнение, получим $y_0=bc=-\frac{1}{4}$. Итак, из перпендикулярности касательных к параболе $y=x^2$, проходящих через точку $(x_0;\ y_0)$, следует, что $y_0=-\frac{1}{4}$. Обратно, нетрудно доказать, что касательные, проведенные к графику функции $y=x^2$ из любой точки прямой $y=-\frac{1}{4}$, перпендикулярны.

14. 2. Указание. $3^{\lg 3+\lg_3 10}=10\cdot 3^{\lg 3}<10\sqrt{3}<27=3^3$ (мы воспользовались тем, что $\lg 3<\frac{1}{2}$).

15. а) Пусть M — любая точка пространства. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$. Если точка O — искомая, то $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{MO}$. Итак, $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})$. Тем самым доказано, что точка O существует. Пусть O и O_1 — две точки, удовлетворяющие условию задачи. Но тогда $\vec{0}=\overrightarrow{O_1A}+\overrightarrow{O_1B}+\overrightarrow{O_1C}+\overrightarrow{O_1D}=4\overrightarrow{OO_1}$, откуда $\overrightarrow{OO_1}=\vec{0}$. То, что точка O лежит внутри пирамиды, почти очевидно: если бы она оказалась вне нее, то векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ лежали бы по одну сторону от некоторой плоскости, проведенной через точку O, и поэтому их сумма не могла бы равняться $\vec{0}$.

б) Мы уже видели, что для любой точки M: $\overrightarrow{MO}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})$. Положив здесь $M=A$, получим $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$. Поэтому точка O лежит на диагонали параллелепипеда $ACMBDKLN$ (рис. 2), построенного на ребрах AB, AC, AD, и длина отрезка AO равна $\frac{1}{4}$ длины диагонали AL. Плоскость DBC пересекается с AL в точке E пересечения медиан треугольника DBC, причем $AE=\frac{1}{3}AL$. Отсюда уже без труда получаем утверждение задачи.

в) Аналогично а).

Атомная физика в задачах

1. $\mathscr{E}_2=\mathscr{E}_1+\frac{hc}{e}\,\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2}=2{,}24$ В.

Указание. ЭДС фотоэлемента определяется задерживающим напряжением: $\mathscr{E}=U_з=E_k/e=(h\nu-A_{вых})/e$.

2. Поскольку скорость электрона соизмерима со скоростью света, для определения кинетической энергии электрона надо использовать релятивистскую формулу:

$$E_k=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-m_0c^2\approx 7{,}4\cdot 10^{-15}\ \text{Дж}.$$

Тогда

$$\lambda_к=\frac{hc}{E_k}\approx 2{,}7\cdot 10^{-11}\ \text{м}.$$

3. $E_{k\,\min}=2\Delta E_{возб}=3/2E_{ион}=20{,}4$ эВ.

4. $T=\frac{\tau}{\log_2(\Delta t_1/\Delta t_2)}\approx 934$ мин $\approx 15{,}6$ ч.

XXVII Международная математическая олимпиада

1. Для решения задачи достаточно доказать, что для любого натурального числа d хотя бы одно из чисел $2d-1$, $5d-1$ или $13d-1$ не является квадратом целого числа. Кстати, числа $2\cdot 5-1=9$, $2\cdot 13-1=25$ и $5\cdot 13-1=64$ являются квадратами целых чисел.

Доказательство проведем методом «от противного» — предположим, что при некотором натуральном числе d имеют место равенства $2d-1=n^2$, $5d-1=m^2$, $13d-1=k^2$. Из записи числа n^2 следует, что оно нечетно, значит и n — нечетно, то есть $n=2p+1$; подставляя это значение вместо n, получаем $2d-1=4p^2+4p+1$ или $d=2p(p+1)+1$, но произведение двух последовательных целых чисел всегда четно, поэтому $p(p+1)=2r$, а $d=4r+1$. Заменяя d на полученное выражение в остальных двух соотношениях, получим $m^2=20r+4$, $k^2=52r+12$. Отсюда видно, что m и k — четные числа; обозначим $m=2a$, $k=2b$. Заменяя m и k на $2a$ и $2b$ в этих равенствах и сокращая на 4, получим $a^2=5r+1$, $b^2=13r+3$. Вычтем из второго равенства первое: $b^2-a^2=8r+2$. Следовательно, b^2-a^2 делится на 2, но не делится на 4; но $(b^2-a^2)=(b-a)(b+a)$ и, если a и b числа одинаковой четности, b^2-a^2 делится на 4, а если разной, то не делится на 2. Противоречие.

Можно было получить решение и проще, рассмотрев остатки от деления этих чисел на 16, заметив при этом, что квадрат целого числа при делении на 16 может давать в остатке лишь числа 0, 1, 4 и 9.

2. Решение задачи легко следует из следующего утверждения: *если совершено несколько поворотов с суммой углов, кратной 360°, то результирующее преобразование плоскости есть параллельный перенос.* Доказательство этого утверждения таково. Пусть при таком преобразовании точка M перешла в точку M_1, а точка N в точку N_1. Если мы докажем, что $\overrightarrow{MM_1}=\overrightarrow{NN_1}$, то утверждение будет доказано. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{MN}$; после каждого из поворотов его длина не меняется, а направление изменяется на угол поворота. После последнего поворота его направление совпадает с первоначальным, поэтому полученный вектор $\overrightarrow{M_1N_1}$ равен вектору $\overrightarrow{MN}$; следовательно, четы-

рехугольник MNM_1N_1 — параллелограмм, отсюда и следует наше утверждение.

Теперь покажем, как отсюда вытекает решение задачи. Если точка P_3 не совпадает с точкой P_0, то последовательность первых трех поворотов на 120°, рассматриваемых как повороты плоскости, есть параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{P_3P_0}$, а 1986 поворотов есть $1986:3=662$ таких параллельных переноса, то есть $\overrightarrow{P_0P_{1986}}=662\overrightarrow{P_3P_0}$.

Значит, точка P_{1986} совпадает с точкой P_0 лишь в случае, когда точка P_3 совпадает с точкой P_0, то есть параллельный перенос совершается на нулевой вектор.

Возьмем в качестве точки P_0 точку A_1, тогда точка P_1 тоже совпадет с точкой A_1. Отметим теперь точку P_2. Где должна лежать точка A_3, чтобы поворот вокруг нее по часовой стрелке перевел точку P_2 в точку P_1? Из равенства расстояний точки A_3 до точек A_1 и P_2 следует, что точка лежит на биссектрисе угла $A_1A_2P_2$, при этом угол $P_2A_3A_1$ равен 120°. Отсюда уже просто получить, что треугольник $A_1A_2A_3$ — равносторонний, поскольку $\widehat{A_1A_2A_3}=\widehat{A_2A_3A_1}=60°$.

3. См. решение задачи М1017.

4. См. решение задачи М1018.

5. Искомой функцией будет функция равная $2/(2-x)$ для $0\leqslant x<2$ и равная нулю для $x\geqslant 2$. Докажем это. Сначала покажем, что эта функция удовлетворяет всем трем условиям. Пусть $x\geqslant 2$, тогда условие (1) автоматически выполняется: слева и справа стоят нули, так как $f(x)$ и $f(x+y)$ равны нулю. Если $x<2$, то

$$f(y)=\frac{2}{2-y}f(xf(y))f\left(\frac{2x}{2-y}\right)=$$

$$=f\left(2+\frac{2(x+y-2)}{2-y}\right).$$

Теперь, если $x+y\geqslant 2$, то слева и справа снова стоят нули, если же $x+y<2$, то

$$\frac{2x}{2-y}<2 \text{ и } f(y)f\left(\frac{2x}{2-y}\right)=$$

$$=\frac{2}{2-y}\cdot\frac{2}{2-\frac{2x}{2-y}}=\frac{2}{2-(x+y)}=f(x+y).$$

Итак, предложенная функция удовлетворяет условиям задачи. Докажем ее единственность. Пусть $x\geqslant 2$, тогда положим $x=2+t$. Подставив в условие (1), получаем $f(x)=f(2+t)=f(2)f(f(2)t)$. Но $f(2)=0$, поэтому $f(x)=0$ при $x\geqslant 2$.

Пусть $x<2$, тогда положим $t=2-x$, то есть $x+t=2$. Из условий (1) и (2) получаем $0=f(2)=f(x+t)=f(x)f(f(x)t)$. Но из условия (3) следует, что $f(x)\neq 0$; поэтому $f(f(x)t)=0$, а это по условию (3) может быть лишь при $f(x)t\geqslant 2$; вспоминая, что $t=2-x$, получаем, что $f(x)\geqslant 2/(2-x)$. Покажем, что в неравенстве $f(x)t\geqslant 2$ знак $\geqslant$ нужно изменить на знак $=$. Действительно, если $f(x)t>2$, то можно уменьшить число T до числа t_1 так, чтобы неравенство все еще имело место, но тогда слева в условии (1) будет по-прежнему стоять 0, а справа будет стоять число $f(x+t_1)$, где $x+t_1<2$, и по условию (3) $x+t_1$ отлично от нуля. Таким образом, для $x<2$ имеем $f(x)=2/(2-x)$.

6. См. решение задачи М1019.

«Квант» для младших школьников

1. $(a^2+b^2)^2=a^4+2a^2b^2+b^4=a^4-2a^2b^2+b^4+4a^2b^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2$.

2. $15306+15306=30612$.

3. Сумерки — это полутьма между заходом Солнца и наступлением ночи. В этот период освещение вызывается рассеянием солнечного света атмосферой на большой высоте, куда еще проникают лучи Солнца. Высоко в горах слой атмосферы над Землей меньше, поэтому и время, когда этот слой рассеивает солнечный свет после захода Солнца, меньше. Кстати, на планетах, лишенных атмосферы, сумерек нет. Нет их и на Луне.

4. Быстрее — от станции Физическая, поскольку после прибытия туда путь до дома проходится вдвое скорее, чем оставшийся путь от станции Математическая.

5. См. рис. 3

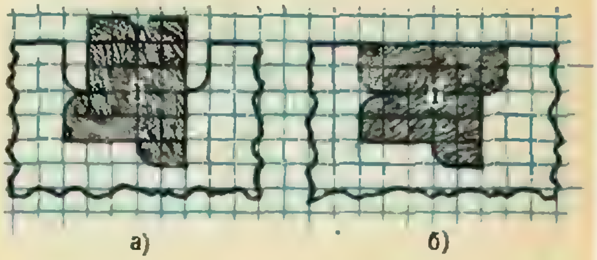

а) б)

Рис. 3.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 11)

1. См. рис. 4

2. Шпалы уменьшают давление рельсов на землю и тем самым препятствуют вдавливанию их в грунт.

3. $818+88=906$.

4. Если отношение плеч весов было $a:b$, то вес x, полученный при первом взвешивании, из соотношения $a\cdot x=1\cdot b$ равен b/a, а вес y, полученный при втором взвешивании, равен a/b. Но сумма $b/a+a/b$ всегда больше 2, если $a\neq b$, так как эта сумма равна $(a-b)^2/ab+2$. Правильно же взвесить 1 кг орехов можно так: уравновесить гирю орехами, а потом снять гирю и положить на ее место орехи до уравновешивания.

5. Проведем хорды AC и BD (рис. 5). Углы CDB и CAB равны, как опирающиеся на одну дугу. Из параллельности отрезков DB и KN, а также AC и MN теперь следует равенство рассматриваемых в задаче углов.

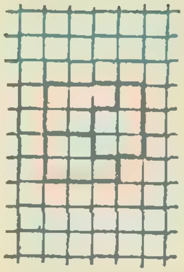


Рис. 4.

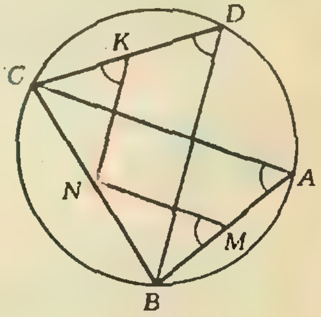


Рис. 5.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 9)

Обе задачи принадлежат известному американскому проблемисту прошлого века В. Мередиту.

BeatriceGloria_personal library

Задание 17 (В. Мередит, 1875 г.). Первый ход неожиданный, так как дается шах — **1. Cf3+ Kpf4**, а второй поражает своей парадоксальностью — **2. Фа5!!** Грозит 3. Фс7×. Ответ 2...Ф:а5 или 2...Кс4 не спасает из-за 3. Ке2×, конь g7 не может сдвинуться с места ввиду 3. Kh5×.

Задание 18 (В. Мередит, 1889 г.). **1. Cd7!** Слон становится в засаду. **1...d5** (1...Кр:е4 2. Фс2+ Kpd5 3. Фс6×; 2...d3 3. Фс4×) **2. Фс8!!** Ферзь пришел поддержать слона. **2...Кр:е4** (2...de 3. Cb5×) **3. Cf5×**.

Напечатано в 1986 году

Навстречу XXVII съезду КПСС	2	2
Реформа высшей школы	10	2
Советские ученые в борьбе за мир	8	2

* * *

К читателям «Кванта» обращается летчик-космонавт СССР Г. М. Гречко	4	2
День знаний — всенародный праздник	9	2
Интервью с академиком Ю. А. Осипьяном	1	3
Интервью с академиком О. М. Белоцерковским	11	2
Нашим новым читателям	1	2
Журнал ЦК Коммунистического союза молодежи им. Димитрова «Математика» и его развитие	7	2

Статьи по математике

Арнольд В. И. Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения	2	13
Балк М. Б. Секрет Старого Бондаря	8	14
Банков К. Г. Об одной теореме Кронекера	7	5
Башмакова И. Г., Лапин А. И. Пифагор	1	7
Бендукидзе А. Д. Как Декарт проводил касательные	8	5
Веселов А. П. О математике гармонических колебаний	5	9
Гиндикин С. Г. Жозеф Луи Лагранж	9	3
Долбилин Н. П. Пик Делоне	3	10
Дужин С. В., Рубцов В. Н. Четырехмерный куб	6	3
Колмогоров А. Н. Паркеты из правильных многоугольников	8	3
Недемейер Ф., Смородинский Я. А. Сопротивление ребер многомерного куба	6	21
Олейников В. А. Иррациональность и неприводимость	10	6
Олейников В. А. Неприводимость и иррациональность	11	12
О математическом творчестве школьников	8	25
Панов А. А. Малярный парадокс	8	13
Соловьев Ю. П. Вызов Ван Роумена	6	18
Соловьев Ю. П. Эварист Галуа	12	2
Яглом И. М. Генетика популяций и геометрия	4	5

Статьи по физике

Асламазов Л. Г. Следы на песке и... строение вещества	1	13
Асламазов Л. Г. Как волны передают информацию?	8	20
Богданов К. Ю. Как мы дышим?	5	2
Бреус Т. К. Снова на свидание с Марсом	4	3
Бронштэн В. А. Как движется Луна?	4	13
Бялко А. В. Полет к Солнцу	4	18
Варламов А. А. Тайны волшебной лампы	7	15
Воронов Ф. Ф. Как делают алмазы	10	12
Зайдель А. Н., Френкель В. Я. И. В. Курчатов: первые шаги в ЛФТИ	10	3
К 275-летию со дня рождения М. В. Ломоносова	11	5
Коваленко М. Д. Микропроцессор измеряет ...	9	21
Крутогин Д. Г. Города для электронов	2	6
Крылов И. П. Намагниченный атомарный водород	7	8
Лапидес А. А. Покатаемся на виндсерфере	9	11
Мигдал А. Б. Как устроена пустота?	3	2
Павленко Ю. Г. Парадокс спутника	5	14
Слободецкий И. Ш. Сухое трение	8	8
Тарасов Л. В. Зеленый луч	6	16
Тарасов Л. В., Тарасов Д. Л. А что будет, если ...?	12	9
Фабрикант В. А. Волк, барон и Ньютон	9	17
Филонович С. Р. Шарль Кулон и его открытия	6	8

Новости науки

На пути к рентгеновскому лазеру	9	20
Новый метр	2	28
«Тяжелые» электроны в металлах	12	8
Шестидесятиатомный углерод	8	19

Лаборатория «Кванта»

Боровой А. А. Капилляры и смачивание	4	22
Боровой А. А. Наблюдения над туманом	12	13
Гегузин Я. Е. Кардиограмма ртутного сердца	2	21
Коломейцев Е. Э. Ионы в растворах	7	22
Косоуров Г. И. Оранжевое небо	8	32
Лузин А. Н. Еще раз о ложке в струе воды	10	19

Математический кружок

Болтянский В. Г. Пифагоровы тетраэдры	8	29
Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л. Комбинаторика — многочлены — вероятность	1	19
Кушнир И. А. Урок одной задачи	9	23

Прасолов В. В. Используя площадь ... 5 16
Фаддеев Д. К., Соколовский И. Ф. О касательной к графику функции 3 17
Харалампиев С. Ц. Полюс и поляра относительно окружности 7 32

Наш календарь

Доминик Франсуа Араго 3 9
Д. Фаренгейт и его термометры 10 26
К 175-летию закона Авогадро 12 12
75-летие открытия сверхпроводимости 6 14

Школа в «Кванте»

Физика 8, 9, 10

Конус трения 1 24
Первый источник электрического тока 1 25
Дифракция волн 1 27
Вторая космическая скорость 3 21
Магнитный момент тока 3 22
О ядерном веществе 3 23
О судьбе некоторых понятий механики 5 20
Энергия электрического поля 5 21
Капельная модель ядра 5 23
Поговорим о средней скорости 9 25
О явлениях переноса 9 27
Что такое параметрический резонанс? 9 29
Кинематика вращательного движения 11 17
Тепловой насос 11 19
Номограммы в геометрической оптике 11 20

Математика 8, 9, 10

Задачи на сравнение чисел 2 24
Какой же ответ 2 26
Производная логарифма 4 25
Формулы для sin *nx* и cos *nx* 6 25
Об одном способе задания окружности 7 25
Формула Герона 10 20
Где ошибка 10 21
Геометрические преобразования в планиметрических задачах 12 16
Избранные школьные задачи 1, 3, 4, 6, 9, 10

«Квант» для младших школьников

Задачи 1—12
Александров А. С. Загадка этрусков 2 30
Буздин А. И. Немного о термометре и о термоскопе Фердинанда 5 26
Иванова Н. Н. Восстанови стертую фигуру! 1 30
Кючуков А. Н. Неудачи одной цивилизации 8 40
Олехник С. Н. Сколько велосипедов? 9 34
Савин А. П. Рисунок помогает рассуждать 4 28
Числа Мерсенна 10 24
Штейнберг А. С. Знакомьтесь: металлическое стекло 11 24

По мотивам Л. Кэрролла

Королевский крокет 3 26
Под-Котик и его повесть 6 28
Морская кадриль 7 28
Кто украл Крендели? 8 36
Алиса дает показания 12 22
Калейдоскоп «Кванта» 1, 2, 4, 5, 9—11

Задачник «Кванта»

Победители конкурса «Задачник «Кванта» 3 30
Задачи М961 — М1020; Ф973 — Ф1032 1—12
Решения задач М941 — М1000; Ф953 — Ф1012 1—12
Список читателей, приславших правильные решения 3, 6, 9, 12
Из писем читателей 1 42

Искусство программирования

Абрамов С. А. Поиск в упорядоченной совокупности и упорядочение 1 46
Гальперин Г. А., Корлюков А. В. Бинарный алгоритм 12 40
Каймин В. А. Решение задач и построение алгоритмов 10 47
Каймин В. А. Построение диалоговых алгоритмов 11 40
Котов Ю. В. Посмотрим на экран 4 43
Математика и программирование (Беседа с академиком А. П. Ершовым) 9 48
Рождественский В. В., Хлебутин С. Г. Программирование на микрокалькуляторе: ветвление и цикл 3 45
Систепский Л. Н. Программирование на микрокалькуляторе: игры 6 42
Штернберг Л. Ф. Программирование на микрокалькуляторе: простейшие программы 2 46
Штернберг Л. Ф. Зачем микрокалькулятору стек 5 39

Полупроводниковые элементы вычислительной техники

V. Элементарные логические операции 1 44
VI. Логические схемы на транзисторах 2 44
VII. Элемент памяти — триггер 3 48
VIII. Регистры 4 46
IX. Сумматор 5 44
X. Заключение. Полупроводниковые элементы будущих ЭВМ 6 44

Практикум абитуриента

Информация о предыдущих публикациях 8 52
Баканина Л. П. Оптические приборы 10 42
Беккер Б. М., Гольховой В. М., Ионин Ю. И. Уравнение касательной 3 51
Белонучкин В. Е. Законы Кеплера и школьная физика 2 49
Болибрух А. А., Уроев В. М., Шабунин М. И. Задачи на координатной плоскости 11 43
Буздин А. И., Кротов С. С. Тепловые процессы в газах 4 49
Габович И. Г. Основные углы в правильной пирамиде 1 49
Дорофеев Г. В. Как расположены корни трехчленов? 7 45
Зильберман А. Р. Цепи переменного тока 9 51
Казанджан Э. П. Школьник — абитуриент — студент — инженер 8 54
Козел С. М. Электромагнитная индукция 6 47
Либерзон М. Р. Вспомогательный куб 5 46
Самарский Ю. А. Атомная физика в задачах 12 43

Варианты вступительных экзаменов

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1985 году 6 54
Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко 5 52
Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена 4 57

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова 4 53
Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина 4 56
Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина) 4 57
Московский архитектурный институт 5 56
Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана 5 54
Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина 1 54
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова 2 52
Московский инженерно-физический институт 3 55
Московский институт радиотехники, электроники и автоматики 3 58
Московский институт стали и сплавов 3 56
Московский институт электронного машиностроения 1 53
Московский физико-технический институт 1 52
Московский энергетический институт 3 57
Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола 5 51

Олимпиады

Первая Всесоюзная олимпиада по математике учащихся средних профессионально-технических училищ 5 57
Задачи XLIX Московской городской математической олимпиады 9 57
Избранные задачи Ленинградской городской олимпиады по математике 9 57
Задачи Ленинградской городской олимпиады по физике 9 58
Избранные задачи зарубежных математических олимпиад: Олимпиады США 9 60
I Всесоюзная олимпиада по физике учащихся средних профессионально-технических училищ 10 52
XII Всероссийская олимпиада школьников 10 53
XX Всесоюзная олимпиада по математике 11 49
XX Всесоюзная олимпиада по физике 11 52
XXVII Международная математическая олимпиада 12 48
XVII Международная физическая олимпиада 12 51

Информация

Библиотечка «Квант» 10 11
Вечерняя физическая школа при МГУ 8 59
Встреча с читателями 10 51
Заочная физико-техническая школа при МИСиСе 1 58
Заочная физико-техническая школа при МФТИ 12 55
Заочная физическая школа при МГУ 4 58
Заочная школа при НГУ 7 58
Научно-техническая конференция школьников в МФТИ 11 58
Научная конференция школьников в ФМШ при МГУ 11 58
Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу (ВЗМШ) 1 56
Новый прием на заочное отделение Малого мехмата 1 57
Праздник юных математиков 8 59
VIII Турнир юных физиков 8 60
IX Турнир юных физиков 8 62

Игры и головоломки

Путешествия по графам 7 50

Уголок коллекционера

От съезда к съезду 2 4-я с. обл.
Подвигу — четверть века 5 —•—
Новости космической филателии 8 —•—
М. В. Ломоносов в отечественной филателии 11 —•—

«Квант» улыбается

Персональные компьютеры в картинках 3 50
Необыкновенная девочка 3 50
У нас в гостях стенгазета «Андромеда» ФАЛТа МФТИ 5 8
Микрокалькуляторы в картинках 6 41
По страницам газеты МФТИ «За науку» 11 59
Всякая всячина 12 39

Смесь

Вычисление биномиальных коэффициентов на калькуляторе БЗ-34 1 23
Заочная олимпиада по программированию 2 58
9 марта 1986 года «Вега 2» встречается с кометой Галлея 4 4
Нам пишут 5 58
Ньютон — ученик, Ньютон — ученый 7 64
Советуем прочесть 8 7
Спрашивайте — отвечаем 8 51
С выходом в пространство 9 56
Признак делимости на 8, 16, 32 9 56
Число делений 11 22
Как проверить ЭВМ? 11 56
Геометрический вывод формулы косинуса суммы 11 57
Возвращаясь к напечатанному 12 50
К нашим читателям 12 57

Шахматная страничка

Новое в кодексе 1 3-я с. обл.
ЭВМ и шахматный кодекс 2 —•—
Головоломки в шахматной партии 3 —•—
Неподвижные фигуры 4 —•—
Бесконечная доска 5 —•—
Шахматные рекорды 6 —•—
Загадочные маневры 7 —•—
Геометрия шахматной доски 8 —•—
Новые успехи компьютера 9 —•—
Компьютерный клуб 10 —•—
На цилиндрической доске 11 —•—
Симметрия и асимметрия 12 —•—

Наша обложка 2, 3, 6, 10

Наша анкета 12 64

Дорогие читатели! Для улучшения работы журнала нам хотелось бы знать ваше мнение о материалах, опубликованных в «Кванте» в 1986 году. Просим ответить на вопросы нашей анкеты.

Ответы посылайте на отдельном листе бумаги, сохранив нумерацию вопросов, до 20 февраля 1987 года.
Наш адрес: 103006 Москва К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант», «Анкета».

1. Место учебы (город, село, класс, курс) или работы (профессия, специальность) и возраст.

2. Наиболее и наименее интересные, по вашему мнению, статьи по математике этого года.

3. Наиболее и наименее интересные статьи по физике этого года.

4. Самая удачная и неудачная, на ваш взгляд, обложка журнала в этом году.

5. Какие рубрики журнала вам нравятся, какие новые рубрики следовало бы ввести?

6. Какие материалы этого года помогли в вашей учебе, что вы искали в «Кванте» в 1986 году, но не нашли?

7. О чем хотели бы вы прочитать на страницах нашего журнала в 1987 году?

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян
Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев
Редакционная коллегия: А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, А. А. Варламов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант
Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. В. Дубах, С. А. Жигалкин, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, П. И. Черкуский, В. Б. Юдин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Д. Храпко

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 22.10.86. Подписано к печати 24.11.86.
Т-28901. Бумага 70×108/16.
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8.
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,79.
Тираж 195 669 экз.
Цена 40 коп. Заказ 2846

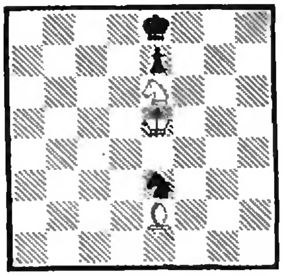
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

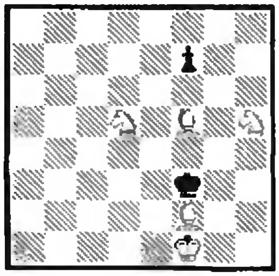
СИММЕТРИЯ И АСИММЕТРИЯ

В математике, физике, кристаллографии идеи симметрии позволяют решать многие задачи. В живописи, прикладном искусстве симметрия — нередкий атрибут произведения. Немало идей и мотивов симметрии содержится и в шахматах — как в практической игре, так и в композиции. Особый интерес вызывают задачи и этюды, в которых при симметричной начальной позиции решение принципиально асимметрично.



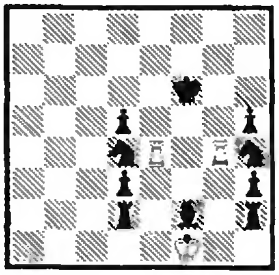
В. Дейк, 1967 г. Выигрыш.

Забавная ситуация: все фигуры сосредоточились на одной вертикали доски. Задача белых — поймать коня противника. Вот основной вариант решения. 1. Kd4! Kpf7 2. Kpe4 e5! 3. Kp:e5 Kg2 4. Ch5+ Kpg7 5. Kf5+ Kph7 6. Cf3 Ke1 7. Ce4 Kpg6 8. Kpf4 Kpf6 9. Kpg3 Kpe5 10. Cb1, и цель достигнута. Не проходит 1. Kf4? Kpd7 2. Kpe4 e5 3. Kp:e5 Kpc6 4. Kpe4 Kc2 5. Kd3 Ka3!, и «лишняя» вертикаль a выручает черного коня.



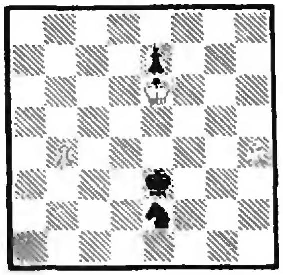
Д. Бройер, 1948 г. Мат в 4 хода.

Фигуры расположены симметрично. Какова же роль трех «лишних» пустых вертикалей a, b, c, нарушающих симметрию диаграммы? Поразительно, но именно на этих трех вертикалях разворачиваются решающие события 1. Ca7! (симметричного перемещения слона на королевский фланг не существует) 1...f6 2. Kb6! Старинная индийская тема — действие дальнобойной фигуры временно перекрывается, неприятельский король получает свободу, правда, мнимую. 2... Kpe3 3. Kc4+ Kpf3 4. Kd2×. Эффектная задача-миниатюра.



В. Хеньонен, 1967 г. Ничья.

У черных подавляющий материальный перевес, единственный шанс белых — превратить свои две ладьи в «бешеных». 1. Лg6+! K:g6 2. Лe6+ Kpg5 3. Л:g6+ Kpf4 4. Лg4+ Kpe5 5. Лe4+ Kpd6 6. Лe6+ Kpc5 7. Лc6+ Kpb4 8. Лc4+ Kpa5 9. Лa4+, и короля, двигающегося по маршруту Kpb6—c5—b4—a3—b2—c3—b4, «бешеная ладья» преследует по маршруту Лa6—c6—c4—a4—a2—c2—c4+. Ничья. Однако не спасает симметричное 1. Лe6+? K:e6 2. Лg6+ Kpe5 3. Л:e6+ Kpd4 4. Лe4+ Kpc5 5. Лc4+ Kpb5 6. Лb4+ Kpc6 7. Лc4+ Cc5, и белый король распатован.

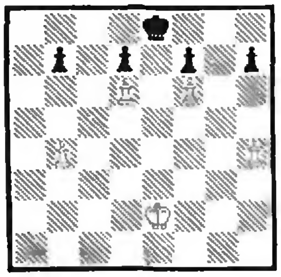


Э. Зеплер, 1946 г. Выигрыш.

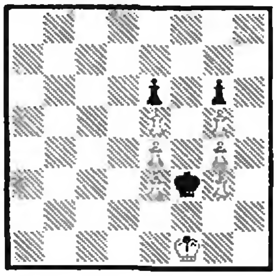
Какой пешке следует двинуться вперед: левой или правой? Никакой! После 1. Kpe5!! белые сохраняют симметрию и ждут, когда черные первыми нарушат ее. Упускает победу как 1. b5? Kd4+ 2. Kp:e7 Kpf4 3. b6 Kc6+, так и 1. h5 Kf4+ 2. Kp:e7 K:h5! 3. b5 Kf4 4. Kpd6 Kd3 5. b6 Kb4 и 6...Ka6. Обе попытки (симметричные!) с асимметричной игрой не удались. 1...Kf4 (1...Kpf3 2. h5!) 2. b5 Kpf3 3. b6 Kpg4 4. h5!, 2...Kg6+ 3. Kpe6 Kpe4 4. b6 Kf4+ 5. Kpf7! с выигрышем.

Здесь уместно упомянуть об одной симметричной диаграмме, помещенной в «Кванте» № 6 за 1986 год. Речь идет о позиции В. Попова, побившего старинный рекорд Г. Дьюдени — на доске одновременно находятся 8 ферзей, 8 ладей, 14 слонов, 21 конь и 9 королей — всего 60 фигур, причем одноименные фигуры не бьют друг друга. Многим читателям журнала удалось побить этот рекорд, расставив 61, 62 или даже 63 фигуры! В следующем году мы еще вернемся к этой теме, а пока что заметим, что ни в одной из присланных позиций не достигаются сразу три максимума. А ведь именно так ставилась задача Дьюдени — ферзей, ладей и слонов на доске должно быть максимально возможное количество.

Конкурсные задания

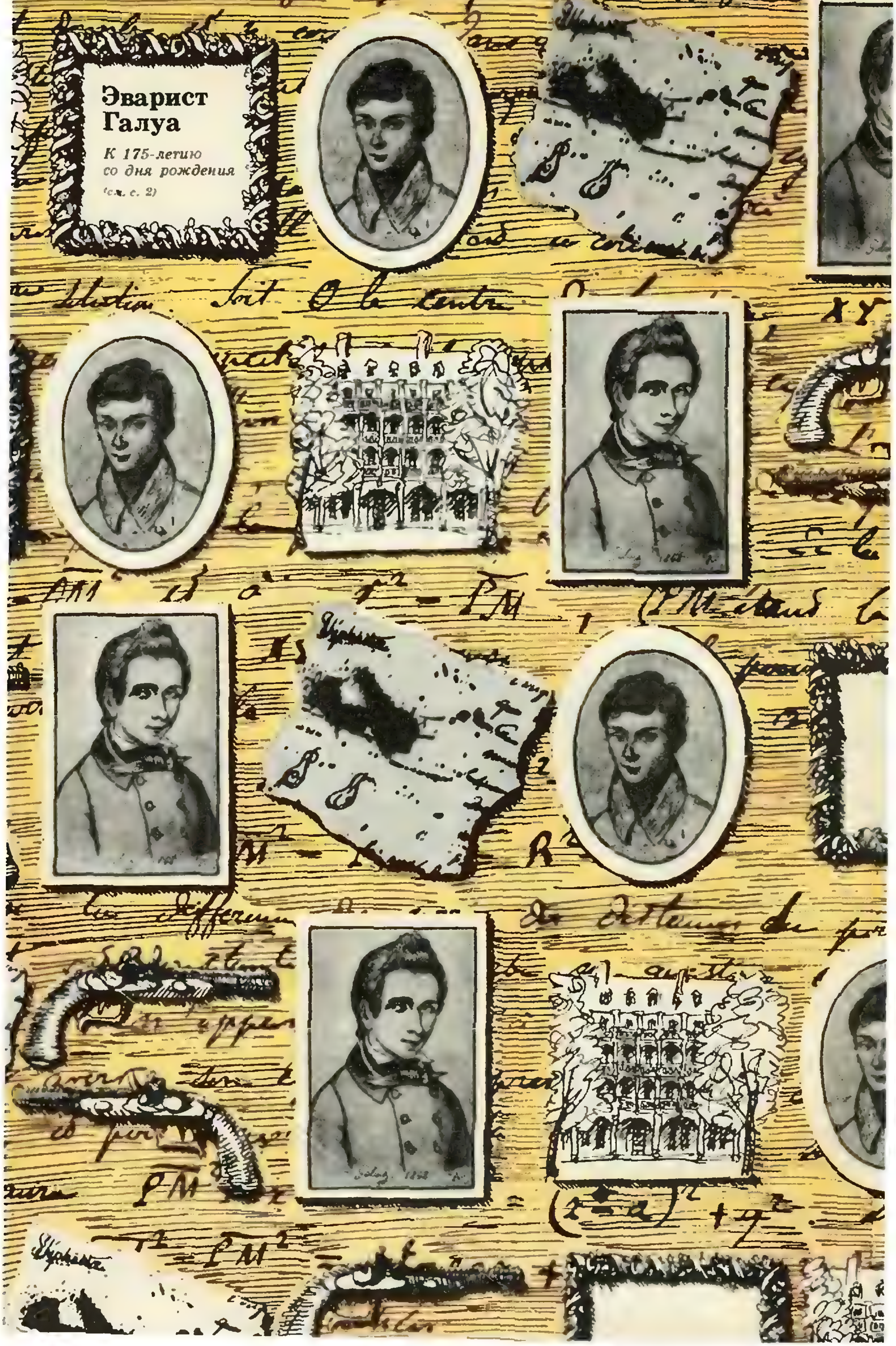


23. Белые начинают и выигрывают.



24. Белые начинают и делают ничью.

Срок отправки решений — 20 февраля 1987 г. с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 23, 24».


Soit O le centre
PM
différence

Эварист Галуа

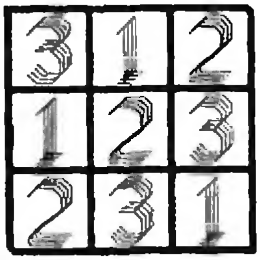
К 175-летию со дня рождения

(см. с. 2)

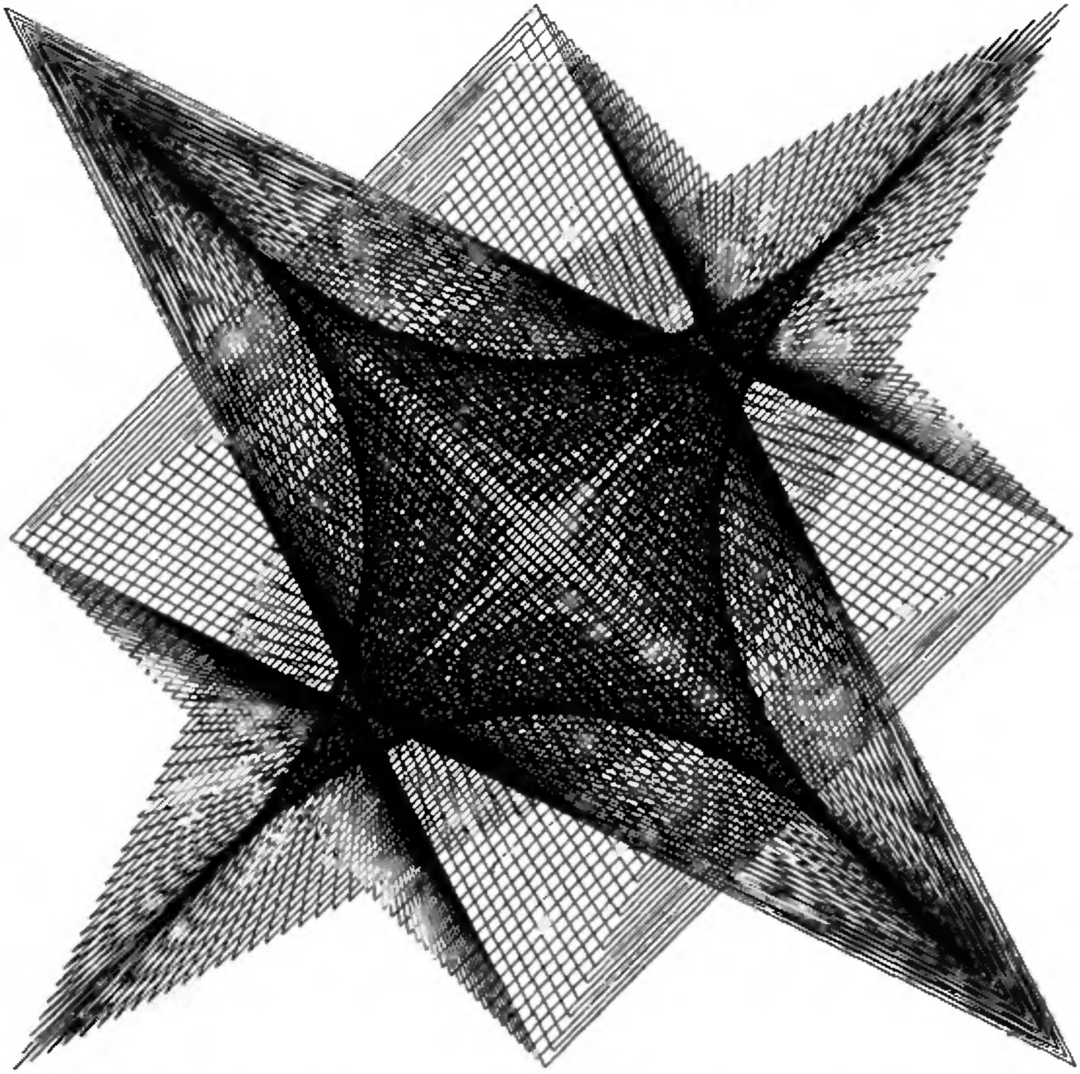
Индекс 70465

Цена 40 коп.

Рисунок, который вы видите перед собой, создан с помощью ЭВМ. Алгоритм построения, записанный на языке фортран, вводится в ЭВМ, а подключенное к ЭВМ графическое устройство выполняет построение. Алгоритм создает человек, рассчитывает и рисует — ЭВМ.

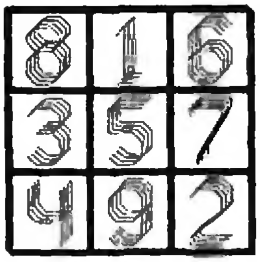


3	1	2
1	2	3
2	3	1



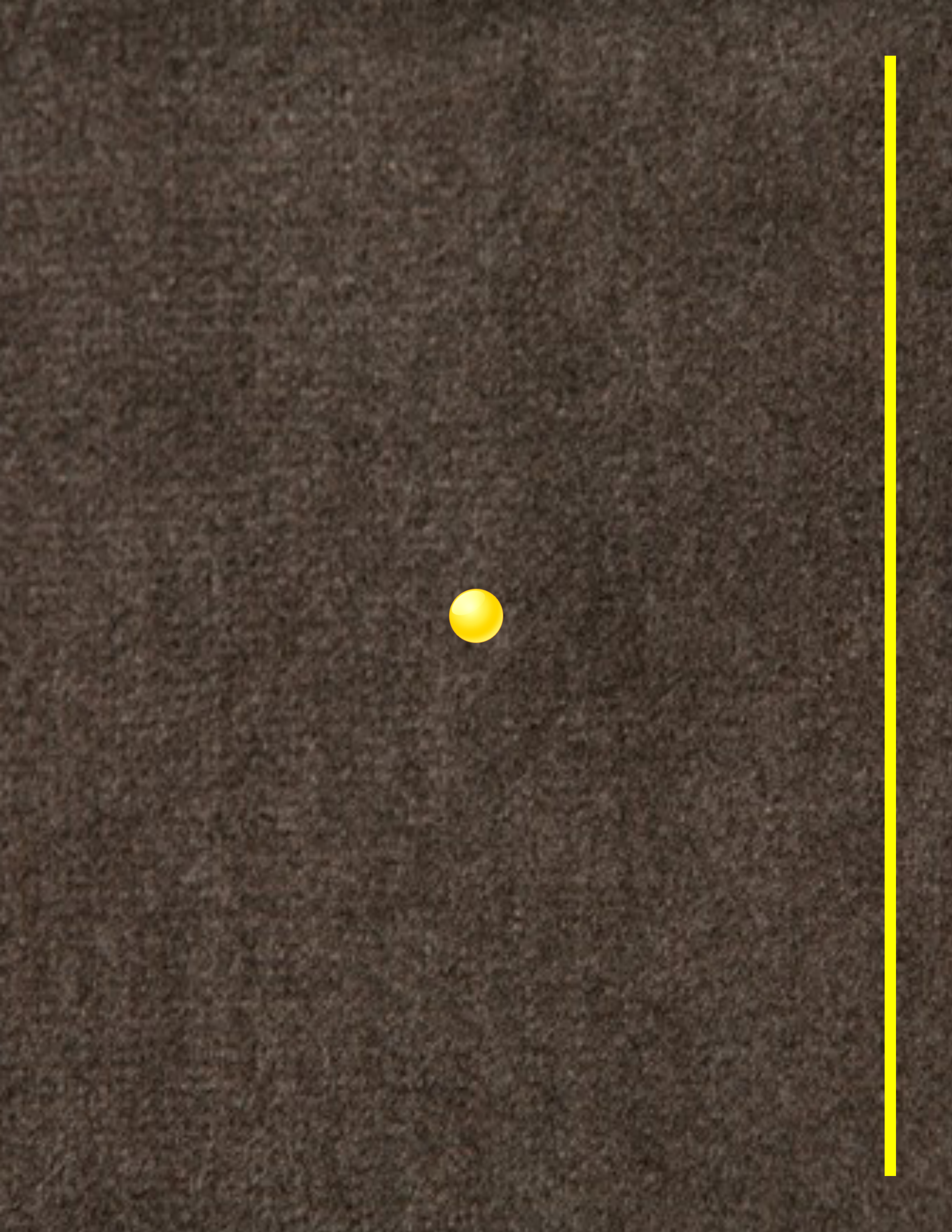
Алгоритм построения данного рисунка основан на двух (изображенных вверху и внизу) магических квадратах. Магический квадрат — это квадратная таблица чисел, суммы которых в каждой строке, каждом столбце и двух диагоналях равны. Для изображенного вверху квадрата сумма равна 6, для изображенного внизу — 15.

Заметим, что если мы разработали алгоритмы построения, то это еще не означает, что мы знаем, как будет выглядеть построенный по этому алгоритму рисунок, как линии будут взаимодействовать между собой. Например, формы и фигуры муара данного рисунка зависят не только от некоторых параметров алгоритма, но даже от толщины пера, которым они нарисованы.



8	1	6
3	5	7
4	9	2

Продемонстрировать нам окончательный вид рисунка (построить который вручную чаще всего невозможно) — задача ЭВМ.

С. А. Жигалкин